

Trabalho Prático 3

Grupo 22:

João Marques A84684

```
!pip install z3-solver  
from z3 import*
```

Requirement already satisfied: z3-solver in c:\users\johny\anaconda3\lib\site-packages (4.8.13.0)

Problema

O objetivo deste trabalho é o uso de SMT's para modelar e verificar propriedades lógicas de sistemas dinâmicos. O trabalho pode ser executado em Z3, como o seu “wrapper” específico, ou desejavelmente com o “wrapper” PySMT, usando Z3 e MatSAT e comparando os resultados.

No contexto do sistema de travagem ABS (“Anti-Lock Breaking System”), pretende-se construir um autómato híbrido que descreva o sistema e que possa ser usado para verificar as suas propriedades dinâmicas.

1. A componente discreta do autómato contém os modos: Start, Free, Stopping, Blocked, e Stopped. No modo Free não existe qualquer força de travagem; no modo Stopping aplica-se a força de travagem alta; no modo Blocked as rodas estão bloqueadas em relação ao corpo mas o veículo desloca-se; no modo Stopped o veículo está imobilizado.
2. A componente contínua do autómato usa variáveis contínuas V, v para descrever a velocidade do corpo do veículo em relação ao solo e a velocidade linear das rodas também em relação ao solo. Assume-se que o sistema de travagem exerce uma força de atrito nos travões proporcional à diferença das duas velocidades. A dinâmica contínua está descrita abaixo no bloco Equações de Fluxo.
3. Os “switchs” (“jumps”) são a componente de projeto deste trabalho; cabe ao aluno definir quais devem ser estas condições de modo a que o sistema tenha um comportamento desejável: imobilize-se depressa e não “derrape” muito.
4. Faça
 - a. Defina um autómato híbrido que descreva a dinâmica do sistema segundo as notas abaixo indicadas e com os “switchs” por si escolhidos.
 - b. Modele em lógica temporal linear LT propriedades que caracterizam o comportamento desejável do sistema. Nomeadamente
 - i. “o veículo imobiliza-se completamente em menos de t segundos”
 - ii. “a velocidade V diminui sempre com o tempo”.

- c. Codifique em SMT's o modelo que definiu em a.
- d. Codifique a verificação das propriedades temporais que definiu em b.

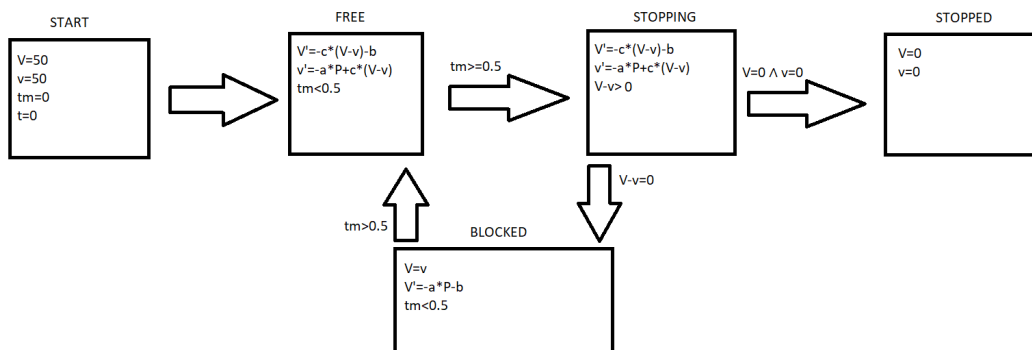
Equações de Fluxo

1. Durante a travagem não existe qualquer força no sistema excepto as forças de atrito. Quando uma superfície se desloca em relação à outra, a força de atrito é proporcional à força de compressão entre elas.
2. No contacto rodas/solo o atrito é constante porque a força de compressão é o peso; tem-se $f = a \cdot P$ sendo a a constante de atrito e P o peso. Ambos são fixos e independentes do modo.
3. No contacto corpo/rodas, a força de compressão é a força de travagem que aqui se assume como proporcional à diferença de velocidades $F = c \cdot (V - v)$. A constante de proporcionalidade c depende do modo: é elevada no modo Stopping e baixa nos outros.
4. Existe um atrito no contacto corpo/ar que é aproximado por uma constante positiva b .
5. As equações que traduzem a dinâmica do sistema são, em todos os modo excepto Blocked,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -c \cdot (V - v) - b \\ \dot{v} &= -a \cdot P + c \cdot (V - v)\end{aligned}$$

e, no modo Blocked, a dinâmica do sistema é regida por $(V = v) \wedge (\dot{V} = -a \cdot P - b)$

6. Tanto no modo Blocked como no modo Free existe um “timer” que impede que se permaneça nesses modo mais do que τ segundos. Os *jumps* (V, v, t, V', v', t') com origem nesses modos devem forçar esta condição.
7. No instante inicial assume-se $V = v = V_0$, em que a velocidade V_0 é o “input” do problema.



Verificação do HA com FOTS

O estado inicial do FOTS é derivado facilmente:

$$m = START \wedge V = V_0 \wedge v = v_0 \wedge t = 0 \wedge tm = 0$$

Transições Untimed

$$m = START \wedge m' = FREE \wedge V = V' \wedge v = v' \wedge t' = t \wedge tm' = 0$$

\vee

$$m = FREE \wedge m' = STOPPING \wedge V = V' \wedge v = v' \wedge t = t' \wedge tm \geq 0.5$$

\vee

$$m = STOPPING \wedge m' = BLOCKED \wedge V = V' \wedge v = v' \wedge V - v = 0 \wedge t = t' \wedge tm' = 0$$

\vee

$$m = STOPPING \wedge m' = STOPPED \wedge V = V' \wedge v = v' \wedge V = 0 \wedge v = 0 \wedge t = t' \wedge tm = tm'$$

\vee

$$m = BLOCKED \wedge m' = FREE \wedge V' = V \wedge v' = v \wedge t = t' \wedge tm \geq 0.5 \wedge tm' = 0$$

\vee

$$m = STOPPED \wedge m' = STOPPED \wedge V = V' \wedge v = v' \wedge t = t' \wedge tm = tm'$$

Transições Timed

$$m = FREE \wedge m' = FREE \wedge t' = t + 0.05 \wedge tm < 0.5 \wedge tm' = tm + 0.05 \wedge V' = V + (-c * (V - v) - b) * 0.05 \wedge v' = v$$

$$m = BLOCKED \wedge m' = BLOCKED \wedge tm < 0.5 \wedge tm' = tm + 0.05 \wedge t' = t + 0.05 \wedge V' = V + (-a * P - b) * 0.05$$

$$m = STOPPING \wedge m' = STOPPING \wedge V \geq 0 \wedge v \geq 0 \wedge V - v \geq 0 \wedge tm' = tm \wedge t' = t + 0.05 \wedge V' = V + (-c * (V - v) - b) * 0.05$$

Variáveis

Constantes:

- a -> constante do atrito
- P -> peso
- V -> velocidade do corpo
- v -> velocidade linear das rodas
- b -> atrito no contacto corpo/ar
- c -> constante de proporcionalidade

Contínuas

- T -> tempo em segundos
- tm -> timer usado nos modos FREE e BLOCKED

Discretas

- $m \rightarrow \text{modo}$

Lógica temporal linear (LTL)

1. "o veículo imobiliza-se completamente em menos de t segundos"

$\$T \setminus \text{ge } t \setminus \text{implies } m = \text{STOPPED } \$$

2. "a velocidade V diminui sempre com o tempo"

$T' > T \implies V' < V$

Código

Declaração de modos

```
Mode, (Start, Free, Stopping, Blocked, Stopped) = EnumSort('Mode',  
( 'Start', 'Free', 'Stopping', 'Blocked', 'Stopped' ))
```

valores constantes

```
a = 0.01  
P = 1000  
v_init = 50  
b = 0.5  
c = 0.5  
sc = 7  
tau=0.5  
vt=0.05
```

Declarar variáveis

```
def var(i):  
    v = {}  
    v['m'] = Const('m'+str(i), Mode)  
    v['V'] = Real('V'+str(i))  
    v['v'] = Real('v'+str(i))  
    v['t'] = Real('t'+str(i))  
    v['tm'] = Real('tm'+str(i))  
    return v
```

START

```
def start(s):  
    return And(s['m'] == Start, s['V'] == v_init, s['v'] == v_init,  
s['t'] == 0, s['tm'] == 0)
```

Transições

```
def trans(s, p):  
    #untimed  
    startToFree = And(s['m'] == Start, p['m'] == Free, s['V'] == p['V'],  
s['v'] == p['v'], s['t'] == p['t'], s['tm'] == p['tm'])  
  
    freeToStopping = And(s['m'] == Free, p['m'] == Stopping,  
s['V'] == p['V'], s['v'] == p['v'], s['t'] == p['t'], s['tm'] >= 0.5)
```

```

    stoppingToBlocked = And(s['m']==Stopping, p['m']==Blocked,
s['V']==p['V'], s['v']==p['v'], s['t']==p['t'], p['tm']==0, s['V']-
s['v']==0)

    blockedtoFree = And(s['m']==Blocked, p['m']==Free, s['V']==p['V'],
s['v']==p['v'], s['t']==p['t'], s['tm']>=0.5, p['tm']==0)

    stoppingToStopped = And(s['m']==Stopping, p['m']==Stopped,
s['V']==p['V'], s['v']==p['v'], s['V']==0, s['v']==0, s['t']==p['t'],
s['tm']==s['tm'])

    stoppedToStopped = And(s['m']==Stopped, p['m']==Stopped,
s['V']==p['V'], s['v']==p['v'], s['t']==p['t'], s['tm']==p['tm'])

    #timed
    freeToFree = And(s['m']==Free, p['m']==Free, p['t']==s['t']+vt,
s['tm']<0.5, p['tm']==s['tm']+vt, p['V'] == s['V']+(-c*(s['V']-
s['v'])-b)*vt, p['v'] == s['v'] + (-a*P+c*(s['V']-s['v']))*vt)

    blockedToBlocked = And(s['m']==Blocked, p['m']==Blocked,
s['tm']<0.5, p['tm']==s['tm']+vt, p['t']==s['t']+vt, p['V']==s['V']+(-
a*P-b)*vt, p['v']==p['V'])

    stoppingToStopping = And(s['m']==Stopping,
p['m']==Stopping,s['V']>0,s['v']>0, s['V']-s['v']>0, s['tm']==p['tm'],
p['t']==s['t']+vt, p['V']==s['V']+(-sc*(s['V']-s['v'])-b)*vt,
p['v']==s['v'] + (-a*P+sc*(s['V']-s['v']))*vt)

    return Or(startToFree, freeToStopping, stoppingToBlocked,
blockedtoFree, stoppingToStopped, stoppedToStopped, freeToFree,
    blockedToBlocked, stoppingToStopping)

```

Traço de Execução

Através do Z3-solver, vamos agora gerar uma função que vai simular um sistema com K estados

```

def traco(var, start, trans , k):
    s = Solver()
    tr = [var(i) for i in range(k)]

    s.add(start(tr[0]))

    for i in range(k-1):
        s.add(trans(tr[i],tr[i+1]))

    status = s.check()

```

```

    if status==sat:
        m = s.model()
        for i in range(k):
            print("Estado: ", i)
            for v in tr[i]:
                n = m[tr[i][v]]
                if n.sort() != RealSort():
                    print(v, '=', n)
                else:
                    print(v, '=',
float(n.numerator_as_long())/float(n.denominator_as_long()))

    elif status == unsat:
        print("Impossible")
    else:
        print("Unkown")

traco(var,start,trans,10)

```

```

Estado:  0
m = Start
V = 50.0
v = 50.0
t = 0.0
tm = 0.0
Estado:  1
m = Free
V = 50.0
v = 50.0
t = 0.0
tm = 0.0
Estado:  2
m = Free
V = 49.975
v = 49.5
t = 0.05
tm = 0.05
Estado:  3
m = Free
V = 49.938125
v = 49.011875
t = 0.1
tm = 0.1
Estado:  4
m = Free
V = 49.88996875
v = 48.53503125
t = 0.15
tm = 0.15
Estado:  5
m = Free

```

V = 49.8310953125
v = 48.0689046875
t = 0.2
tm = 0.2
Estado: 6
m = Free
V = 49.762040546875
v = 47.612959453125
t = 0.25
tm = 0.25
Estado: 7
m = Free
V = 49.68331351953125
v = 47.16668648046875
t = 0.3
tm = 0.3
Estado: 8
m = Free
V = 49.595397843554686
v = 46.72960215644531
t = 0.35
tm = 0.35
Estado: 9
m = Free
V = 49.49875295137695
v = 46.30124704862305
t = 0.4
tm = 0.4

traco(var,start,trans,25)

Estado: 0
m = Start
V = 50.0
v = 50.0
t = 0.0
tm = 0.0
Estado: 1
m = Free
V = 50.0
v = 50.0
t = 0.0
tm = 0.0
Estado: 2
m = Free
V = 49.975
v = 49.5
t = 0.05
tm = 0.05
Estado: 3
m = Free

V = 49.938125
v = 49.011875
t = 0.1
tm = 0.1
Estado: 4
m = Free
V = 49.88996875
v = 48.53503125
t = 0.15
tm = 0.15
Estado: 5
m = Free
V = 49.8310953125
v = 48.0689046875
t = 0.2
tm = 0.2
Estado: 6
m = Free
V = 49.762040546875
v = 47.612959453125
t = 0.25
tm = 0.25
Estado: 7
m = Free
V = 49.68331351953125
v = 47.16668648046875
t = 0.3
tm = 0.3
Estado: 8
m = Free
V = 49.595397843554686
v = 46.72960215644531
t = 0.35
tm = 0.35
Estado: 9
m = Free
V = 49.49875295137695
v = 46.30124704862305
t = 0.4
tm = 0.4
Estado: 10
m = Free
V = 49.393815303808104
v = 45.881184696191895
t = 0.45
tm = 0.45
Estado: 11
m = Free
V = 49.2809995386177
v = 45.4690004613823

t = 0.5
tm = 0.5
Estado: 12
m = Stopping
V = 49.2809995386177
v = 45.4690004613823
t = 0.5
tm = 2.0
Estado: 13
m = Stopping
V = 47.92179986158531
v = 46.30320013841469
t = 0.55
tm = 2.0
Estado: 14
m = Stopping
V = 47.330289958475596
v = 46.36971004152441
t = 0.6
tm = 2.0
Estado: 15
m = Stopping
V = 46.969086987542674
v = 46.20591301245732
t = 0.65
tm = 2.0
Estado: 16
m = Stopping
V = 46.6769760962628
v = 45.9730239037372
t = 0.7
tm = 2.0
Estado: 17
m = Stopping
V = 46.40559282887884
v = 45.71940717112116
t = 0.75
tm = 2.0
Estado: 18
m = Stopping
V = 46.140427848663656
v = 45.459572151336346
t = 0.8
tm = 2.0
Estado: 19
m = Stopping
V = 45.877128354599094
v = 45.1978716454009
t = 0.85
tm = 2.0

```
Estado: 20
m = Stopping
V = 45.61438850637973
v = 44.93561149362027
t = 0.9
tm = 2.0
Estado: 21
m = Stopping
V = 45.35181655191392
v = 44.67318344808608
t = 0.95
tm = 2.0
Estado: 22
m = Stopping
V = 45.089294965574176
v = 44.410705034425824
t = 1.0
tm = 2.0
Estado: 23
m = Stopping
V = 44.82678848967225
v = 44.14821151032775
t = 1.05
tm = 2.0
Estado: 24
m = Stopping
V = 44.56428654690168
v = 43.885713453098326
t = 1.1
tm = 2.0

traco(var,start,trans,34)
```

```
Estado: 0
m = Start
V = 50.0
v = 50.0
t = 0.0
tm = 0.0
Estado: 1
m = Free
V = 50.0
v = 50.0
t = 0.0
tm = 0.0
Estado: 2
m = Free
V = 49.975
v = 49.5
t = 0.05
tm = 0.05
```

Estado: 3
m = Free
V = 49.938125
v = 49.011875
t = 0.1
tm = 0.1
Estado: 4
m = Free
V = 49.88996875
v = 48.53503125
t = 0.15
tm = 0.15
Estado: 5
m = Free
V = 49.8310953125
v = 48.0689046875
t = 0.2
tm = 0.2
Estado: 6
m = Free
V = 49.762040546875
v = 47.612959453125
t = 0.25
tm = 0.25
Estado: 7
m = Free
V = 49.68331351953125
v = 47.16668648046875
t = 0.3
tm = 0.3
Estado: 8
m = Free
V = 49.595397843554686
v = 46.72960215644531
t = 0.35
tm = 0.35
Estado: 9
m = Free
V = 49.49875295137695
v = 46.30124704862305
t = 0.4
tm = 0.4
Estado: 10
m = Free
V = 49.393815303808104
v = 45.881184696191895
t = 0.45
tm = 0.45
Estado: 11
m = Free

V = 49.2809995386177
v = 45.4690004613823
t = 0.5
tm = 0.5
Estado: 12
m = Stopping
V = 49.2809995386177
v = 45.4690004613823
t = 0.5
tm = 0.13124970858441348
Estado: 13
m = Stopping
V = 47.92179986158531
v = 46.30320013841469
t = 0.55
tm = 0.13124970858441348
Estado: 14
m = Stopping
V = 47.330289958475596
v = 46.36971004152441
t = 0.6
tm = 0.13124970858441348
Estado: 15
m = Stopping
V = 46.969086987542674
v = 46.20591301245732
t = 0.65
tm = 0.13124970858441348
Estado: 16
m = Stopping
V = 46.6769760962628
v = 45.9730239037372
t = 0.7
tm = 0.13124970858441348
Estado: 17
m = Stopping
V = 46.40559282887884
v = 45.71940717112116
t = 0.75
tm = 0.13124970858441348
Estado: 18
m = Stopping
V = 46.140427848663656
v = 45.459572151336346
t = 0.8
tm = 0.13124970858441348
Estado: 19
m = Stopping
V = 45.877128354599094
v = 45.1978716454009

t = 0.85
tm = 0.13124970858441348
Estado: 20
m = Stopping
V = 45.61438850637973
v = 44.93561149362027
t = 0.9
tm = 0.13124970858441348
Estado: 21
m = Stopping
V = 45.35181655191392
v = 44.67318344808608
t = 0.95
tm = 0.13124970858441348
Estado: 22
m = Stopping
V = 45.089294965574176
v = 44.410705034425824
t = 1.0
tm = 0.13124970858441348
Estado: 23
m = Stopping
V = 44.82678848967225
v = 44.14821151032775
t = 1.05
tm = 0.13124970858441348
Estado: 24
m = Stopping
V = 44.56428654690168
v = 43.885713453098326
t = 1.1
tm = 0.13124970858441348
Estado: 25
m = Stopping
V = 44.301785964070504
v = 43.6232140359295
t = 1.15
tm = 0.13124970858441348
Estado: 26
m = Stopping
V = 44.03928578922115
v = 43.36071421077885
t = 1.2
tm = 0.13124970858441348
Estado: 27
m = Stopping
V = 43.77678573676634
v = 43.09821426323365
t = 1.25
tm = 0.13124970858441348

Estado: 28
m = Stopping
V = 43.5142857210299
v = 42.835714278970094
t = 1.3
tm = 0.13124970858441348
Estado: 29
m = Stopping
V = 43.25178571630897
v = 42.57321428369103
t = 1.35
tm = 0.13124970858441348
Estado: 30
m = Stopping
V = 42.98928571489269
v = 42.31071428510731
t = 1.4
tm = 0.13124970858441348
Estado: 31
m = Stopping
V = 42.726785714467816
v = 42.0482142855322
t = 1.45
tm = 0.13124970858441348
Estado: 32
m = Stopping
V = 42.46428571434034
v = 41.78571428565966
t = 1.5
tm = 0.13124970858441348
Estado: 33
m = Stopping
V = 42.201785714302105
v = 41.523214285697904
t = 1.55
tm = 0.13124970858441348