

README

Beschreibung

Formelsammlung für Elektrische Maschinen auf Grundlage der Vorlesung FS 16 von Prof. Dr.Jasmin Smajic
Bei Korrekturen oder Ergänzungen wendet euch an einen der Mitwirkenden.

Modulschlussprüfung

Prüfungsstoff ist der gesamte ElMasch-Vorlesungsinhalt des FS2016 einschliesslich aller UE + P Lerninhalte.
Als Hilfsmittel für die Modulschlussprüfung sind die Vorlesungen,
UE-Aufgaben und eigenen Praktikumsaufzeichnungen sowie der Taschenrechner erlaubt.

Plan und Lerninhalte

- Die elektrodynamischen Grundgesetze
- Allgemeine Merkmale elektrischer Maschinen
- Gleichstrommaschinen:
 - Aufbau und Wirkungsweise, Grundgleichungen, Betriebsverhalten, Klemmenbezeichnungen und Schaltungen
- Synchronmaschinen: Bauarten, Funktion, Betriebseigenschaften - und grössen, Sonderbauformen
- Drehstrom-Asynchronmaschinen:
 - Bauarten, Schaltungen, Wirkungsweise, Betriebseigenschaften, Kreisdiagramm
- Transversalflussmaschinen: Aufbau und Wirkungsweise, Betriebseigenschaften
- Linearantriebe
- Steuerung und Regelung elektrischer Maschinen

Contributors

Stefan Reinli stefan.reinli@hsr.ch

Luca Mazzoleni luca.mazzoleni@hsr.ch

Michel Gisler michel.gisler@hsr.ch

License

Creative Commons BY-NC-SA 3.0

Sie dürfen:

- Das Werk bzw. den Inhalt vervielfältigen, verbreiten und öffentlich zugänglich machen.
- Abwandlungen und Bearbeitungen des Werkes bzw. Inhaltes anfertigen.

Zu den folgenden Bedingungen:

- Namensnennung: Sie müssen den Namen des Autors/Rechteinhabers in der von ihm festgelegten Weise nennen.
- Keine kommerzielle Nutzung: Dieses Werk bzw. dieser Inhalt darf nicht für kommerzielle Zwecke verwendet werden.
- Weitergabe unter gleichen Bedingungen: Wenn Sie das lizenzierte Werk bzw. den lizenzierten Inhalt bearbeiten oder in anderer Weise erkennbar als Grundlage für eigenes Schaffen verwenden, dürfen Sie die daraufhin neu entstandenen Werke bzw. Inhalte nur unter Verwendung von Lizenzbedingungen weitergeben, die mit denen dieses Lizenzvertrages identisch oder vergleichbar sind.

Weitere Details: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/ch/>

Elektrische Maschinen - Formelsammlung

S. Reinli L. Mazzoleni M. Gisler

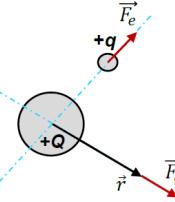
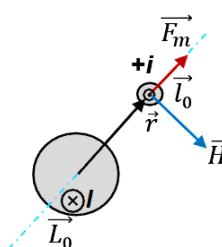
Inhaltsverzeichnis

2. August 2018

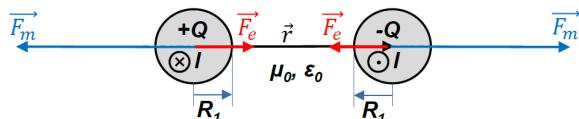
1 Grundlagen	2
1.1 Wichtige Formeln	2
2 GSM - Gleichstrommotoren	6
2.1 Grenzwerte und Arbeitsbereiche	6
2.2 Fremderregte GSM	7
2.3 Nebenschluss GSM	8
2.4 Reihenschluss GSM	9
2.5 Drehzahlregelung	9
3 Dreiphasenwechselstrom und Drehfelderzeugung	10
4 Wicklungsschema Übung 4	11
4.1 Beispiel	11
4.2 Wichtige Formeln	11
5 Synchronmaschine	12
5.1 Funktionsweise	12
5.2 Aufbau und Wirkungsprinzip	12
5.3 Grundgleichungen	13
5.4 Zeigerdiagramm im Motorbetrieb	14
5.5 Zeigerdiagramm im Generatorbetrieb	14
6 Asynchronmotor	15
6.1 Aufbau Ständer	15
6.2 Aufbau Läufer	15
6.3 Formeln Läufer	16
6.4 Modell der Asynchronmaschine	16
7 Schrittmotor	19
7.1 Merkmale	19
7.2 Reluktanz-SM	20
7.3 Permanentmagnet-SM	21
7.4 Herleitungen aus DGL	23
8 Vergleich der Elektrischen Maschinen	24
8.1 Auswahl Flowchart	25
9 Idiotenseite	27

1 Grundlagen

1.1 Wichtige Formeln

Elektrische Kraft  <p>Die Kraftwirkung des geladenen Körpers (Q) auf eine elektrische Probeladung (q)</p>	$\vec{F}_e(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{Q \cdot q}{r} \cdot \vec{r}_0$ $F_e(r) = \frac{\pi \cdot \epsilon \cdot U^2}{2 \cdot r \cdot \left(\ln \frac{r - R_1}{R_1} \right)^2}$	$[F_e] = \frac{N}{m}$ $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ $\hat{\equiv}$ dielektrische Permittivität $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \left[\frac{As}{Vm} \right]$ $\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{ \vec{r} } \hat{\equiv}$ Einheitsvektor $Q, q \hat{\equiv}$ Linienladungsdichte $\left[\frac{C}{m} \right]$
Magnetische Kraft  <p>Richtung des Magnetfelds technische Stromrichtung Kraftrichtung</p>	$\vec{F}_m(r) = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I \cdot i}{r} \cdot \vec{r}_0 = \mu \cdot i \cdot l_0 \times \vec{H}$ $F_m(r) = \frac{\mu \cdot I^2}{2 \cdot \pi \cdot r}$	$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ $\hat{\equiv}$ magnetische Permeabilität $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{N}{A^2} \right] = \left[\frac{Vs}{Am} \right]$ $\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{ \vec{r} } \hat{\equiv}$ Einheitsvektor $I, i \hat{\equiv}$ elektrische Ströme $[F_m] = \frac{N}{m}$

BSP:



Elektrische Kraft vs.

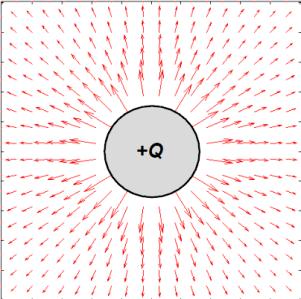
$$F_e(r) = \frac{\pi \cdot \epsilon \cdot U^2}{2 \cdot r \cdot \left(\ln \frac{r - R_1}{R_1} \right)^2} = 2.88 \cdot 10^{-11} \left[\frac{N}{m} \right]$$

Magnetische Kraft

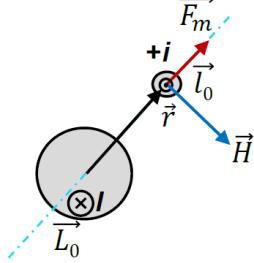
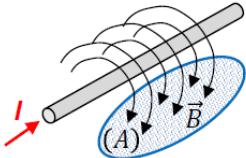
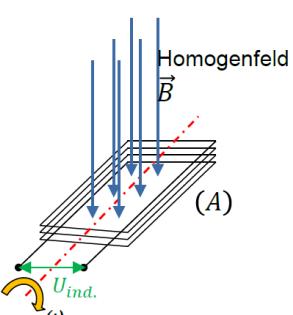
$$F_m = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{2 \cdot \pi \cdot r} = 2.00 \cdot 10^{-6} \left[\frac{N}{m} \right]$$

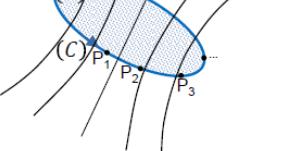
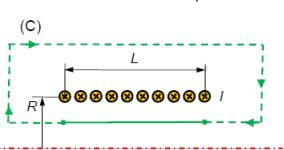
Die magnetische Kraft pro Länge & Strom ist $7 \cdot 10^4$ grösser als jene der elektrischen Kraft.
Daher basieren **alle** elektrischen Maschinen auf der magnetischen Kraft.

1.1.1 Elektrische Kraft

Elektrisches Feld	 $\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r} \cdot \vec{r}_0$ $\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r} \cdot \vec{r}_0$	$[E] = \frac{V}{m}$
Elektrisches Potential	$\varphi_A = \int_A^{Bezugspunkt} \vec{E} \cdot d\vec{l}$	$[\varphi_A] = V$
Elektrische Spannung	$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_A - \varphi_B$	$[U] = V$
Elektrischer Strom	$I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$	$[I] = A$

1.1.2 Magnetische Kraft

Magnetische Feldstärke 	$\vec{H} = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{\vec{L}_0 \times \vec{r}_0}{r}$ 	$[H] = \frac{A}{m}$ $\vec{L}_0, \vec{l}_0 \hat{=} \text{ Einheitsvektoren der Stromleiter}$ $\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{ \vec{r} } \hat{=} \text{ Einheitsvektor}$
Magnetische Flussdichte	$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$	$[B] = T = \frac{Vs}{m^2}$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{N}{A^2} \right] = \left[\frac{Vs}{Am} \right]$
Magnetische Fluss 	$\phi = \iint_{(A)} \vec{B} \cdot d\vec{A}$	$[\phi] = Vs = Wb$
Verkettete Fluss 	$\psi = N \cdot \phi$ $\psi = L \cdot I$ meistens $\psi(t) = N \cdot \iint_{(A)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = N \cdot B \cdot A \cdot \cos(\omega t)$	$[\psi] = Vs = Wb$
Induzierte Spannung	$U_{ind} = -\frac{d\psi}{dt} = -N \frac{d\phi}{dt}$ meistens $U_{ind} = -\frac{d\psi}{dt} = \omega \cdot N \cdot B \cdot A \cdot \sin(\omega t)$	

<h3>Magnetische Durchflutung</h3>	 $\Theta = \sum_{k=1}^n I_k = \oint_{(C)} \vec{H} \cdot d\vec{l}$ <p>Beispiel:</p> $\oint_{(C)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{P_2}^{P_3} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \dots + \int_{P_{m-1}}^{P_m} \vec{H} \cdot d\vec{l}$	$[\Theta] = A$
<h3>Magnetische Spannung</h3>		$[V_m] = A$
		\approx Nur wenn der Kern nicht in Sättigung
<h3>Magnetkreis</h3>	<p>Der Querschnitt der Spule:</p> 	falls $L \gg R$ und das Feld in der Spule homogen ist
	$\oint_{(C)} \vec{H} \cdot d\vec{l} \approx H \cdot L = N \cdot I$	Δ L ist hier die Länge!
	$\Rightarrow H = \frac{N \cdot I}{L}$	
	$\Rightarrow B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{L}$	
<h3>Reluktanzkraft</h3>		wobei A_{Fe} die magnetisch wirksame Fläche des Luftspalts ist.
	$F_R = -\frac{\partial W_m}{\partial \delta} = \frac{F_1}{2} = \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot I^2 \cdot A_{Fe}}{4 \cdot \delta^2}$	F_1 = Kraft bei 1nem Luftspalt
	$F_1 = \mu_0 \cdot \frac{H^2 \cdot A_{Fe}}{2} = \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot I^2 \cdot A_{Fe}}{\delta^2 \cdot 2}$	F_R = Kraft beider Luftspalte
		δ = Länge 1nes Luftspaltes
<h3>Magnetische Energie</h3>	$W_m = \frac{1}{2} \cdot H_\delta \cdot B_\delta \cdot 2 \cdot A_{Fe} \cdot \delta = \mu_0 \cdot \frac{I^2 \cdot N^2}{4 \cdot \delta} \cdot A_{Fe}$	wobei $A_{Fe} \cdot \delta$ dem Volumen des Luftspalts entspricht.
	$W_m = \frac{1}{2} \cdot \iiint_{(V)} \vec{B} \cdot \vec{H} \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \iiint_{(V)} \frac{1}{\mu} \cdot B^2 \cdot dV$	Gilt für 2 Luftspalte
<h3>Magnetischer Widerstand</h3>		$[R_m] = \frac{A}{Vs}$
	$R_m = \frac{V_m}{\phi}$	
	<p>wenn $\vec{A} \perp \vec{\phi}$:</p>	
	$R_m = \frac{H_0 \cdot l}{B_0 \cdot A} = \frac{l}{\mu_0 \cdot A}$	

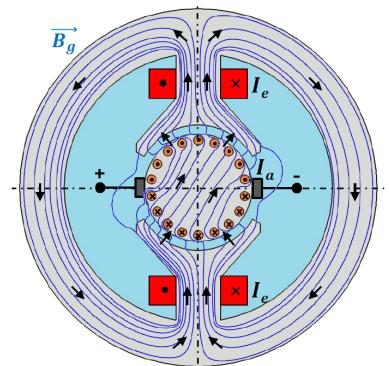
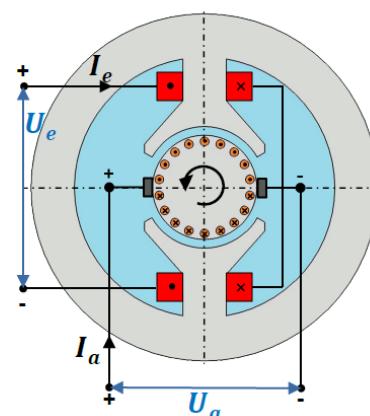
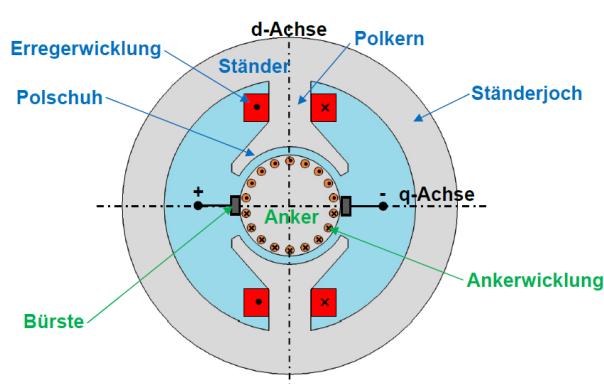
2 GSM - Gleichstrommotoren

Vorteil:

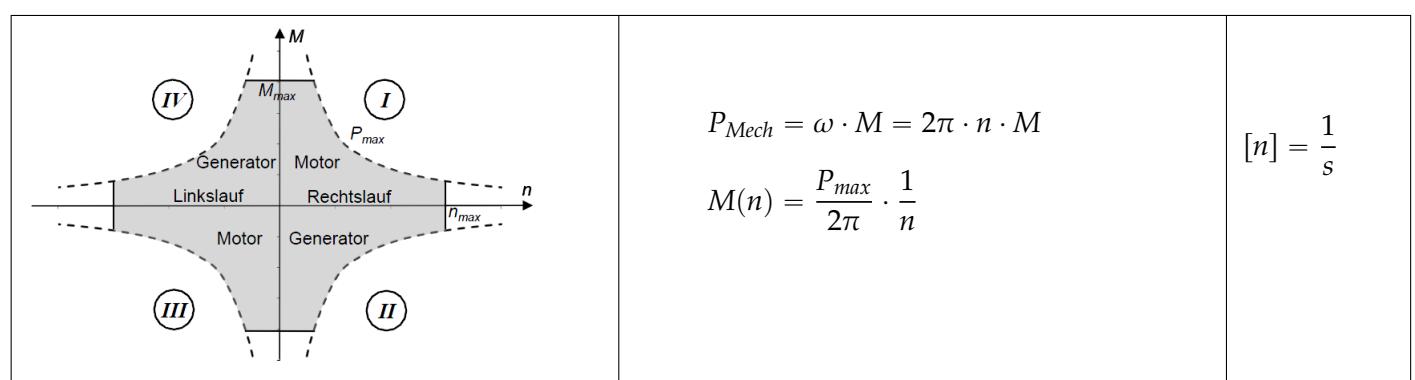
- lineares Übertragungsverhalten
- einfache Ansteuerung, Drehzahleinstellung
- hohe Überlastfähigkeit

Nachteil:

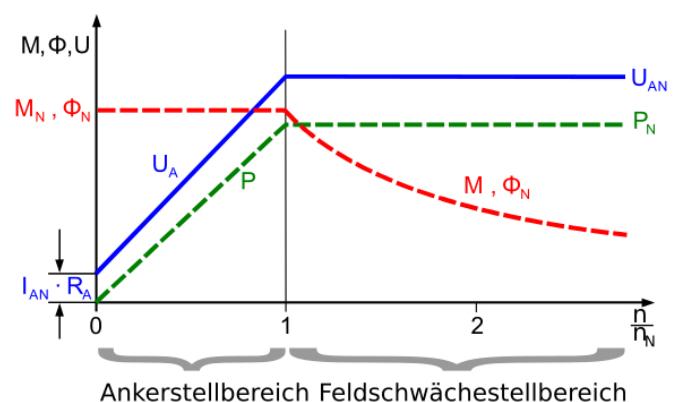
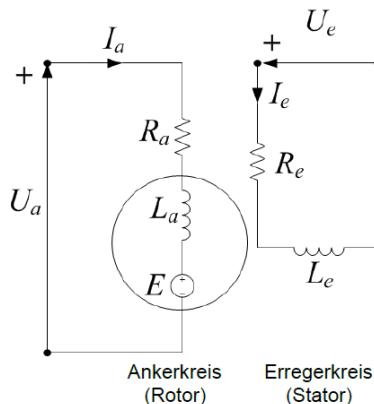
- verschleissbehaftet wegen dem mechanischen Kommutator
- thermische Verluste entstehen im Rotor und sind schwer abzuführen
- maximale Drehzahl durch mech. Kommutator begrenzt



2.1 Grenzwerte und Arbeitsbereiche



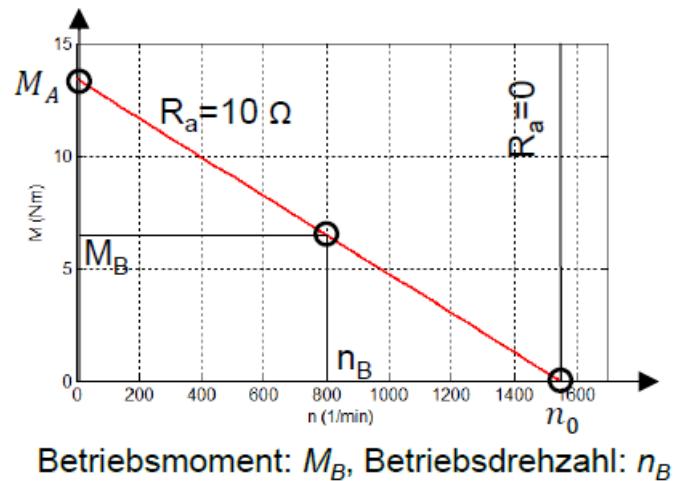
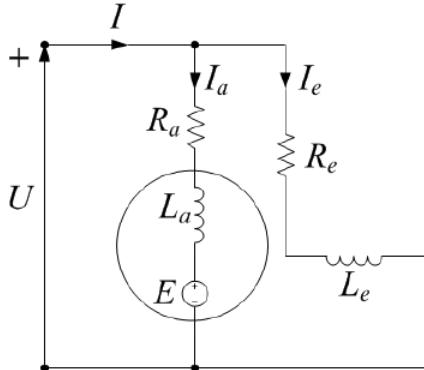
2.2 Fremderregte GSM



Erregerwicklung Stator	$U_e = R_e \cdot I_e + L_e \cdot \frac{dI_e}{dt}$	Spannungsgleichung des Statorkreises
Ankerwicklung Rotor	$U_a = R_a \cdot I_a + L_a \cdot \frac{dI_a}{dt} + E$ $E = \omega \cdot \psi$ $\psi = L_e \cdot I_e = \frac{U_e}{\omega_0}$	Spannungsgleichung des Rotorkreises $\psi \hat{=} \text{Erreger-/Hauptfluss}$ $\omega = 2\pi \cdot n$ $n \hat{=} \text{Drehzahl des Läufers} \left[\frac{1}{s} \right]$
Elektrische Leistung	Im stationären Betrieb: $\left(\frac{d}{dt} = 0 \right)$ $P_{el} = P_e + P_a = U_e \cdot I_e + U_a \cdot I_a$ $P_{el} = \underbrace{R_e \cdot I_e^2}_{\text{Ohmsche Erregerverluste}} + \underbrace{R_a \cdot I_a^2}_{\text{Ohmsche Ankerverluste}} + \underbrace{\omega \cdot \psi \cdot I_a}_{\text{Mechanische Leistung}}$	$[P] = W$
Mechanische Leistung	$P_{mech} = \omega \cdot M = \omega \cdot \psi \cdot I_a = \omega \cdot L_e \cdot I_e \cdot I_a$	
Drehmoment	$M = \psi \cdot I_a = L_e \cdot I_e \cdot I_a$ $M = \frac{U_a \cdot \psi - \omega \cdot \psi^2}{R_a}$ $\omega = \frac{U_a}{\psi} - \frac{M \cdot R_a}{\psi^2}$	$[M] = Nm$

2.3 Nebenschluss GSM

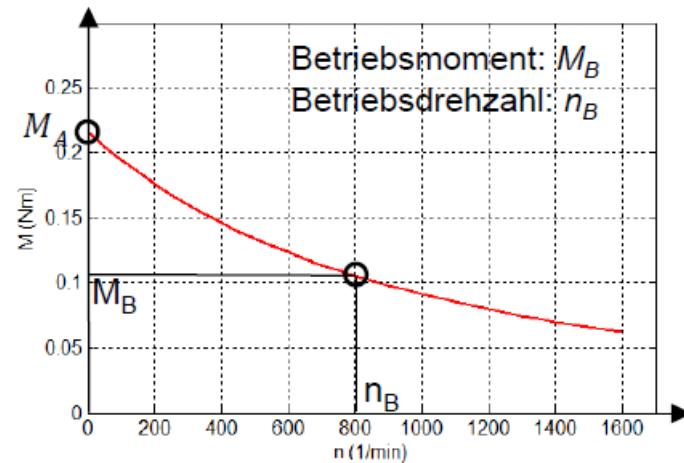
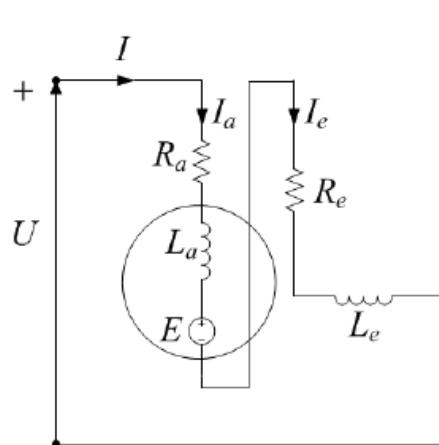
Die Erreger- und Ankerwicklung werden parallel an die gleiche Spannungsquelle geschaltet. Beim Nebenschluss sind die Anker- und Erregerspannung gleich und der Anker- und Erregerstrom unabhängig voneinander.



Spannungsgleichung $U = U_a = U_e$ $I = I_a + I_e$	$U = \underbrace{R_a \cdot I_a + E}_{U_a} = \underbrace{I_e \cdot R_e + L_e \cdot \dot{I}_e}_{U_e}$ $I_a = \frac{U - E}{R_a} = \frac{U - \omega \cdot \psi}{R_a}$	$\psi = L_e \cdot I_e \hat{=} \text{Erregerfluss}$ $E = \omega \cdot \psi$
Drehmoment	$M = I_a \cdot \psi = I_a \cdot L_e \cdot I_e$ $M = \frac{U \cdot \psi - \omega \cdot \psi^2}{R_a}$	$\omega = 2\pi \cdot n \quad \left[\frac{1}{s} \right]$
Anlaufmoment $(n = 0)$	$M_A \xrightarrow{R_v=0} M_{Anlauf}$ $M_{Anlauf} = \frac{U \cdot \psi}{R_a + R_v}$ $I_{Anlauf} = \frac{U}{R_a + R_v}$	$[M] = Nm$ $R_a \hat{=} \text{Ankerwiderstand}$ $R_v \hat{=} \text{Im Ankerkreis in Serie geschalteter Regelungswiderstand} (= \text{oft } 0)$
Elektrische Leistung	Im stationären Betrieb: $\left(\frac{d}{dt} = 0 \right)$ $P_{el} = P_e + P_a = U_e \cdot I_e + U_a \cdot I_a$ $P_{el} = \underbrace{R_e \cdot I_e^2}_{\text{Ohmsche Erregerverluste}} + \underbrace{R_a \cdot I_a^2}_{\text{Ohmsche Ankerverluste}} + \underbrace{\omega \cdot \psi \cdot I_a}_{\text{Mechanische Leistung}}$	$P_{el} = U \cdot I \quad [W]$
Mechanische Leistung	$P_{mech} = \omega \cdot M = \omega \cdot \psi \cdot I_a$	
Leerlaufdrehzahl $(M = 0)$	$n_0 = \frac{U}{2\pi \cdot \psi}$ $\psi = \frac{U}{\omega_0}$	$n = \left[\frac{1}{s} \right]$

2.4 Reihenschluss GSM

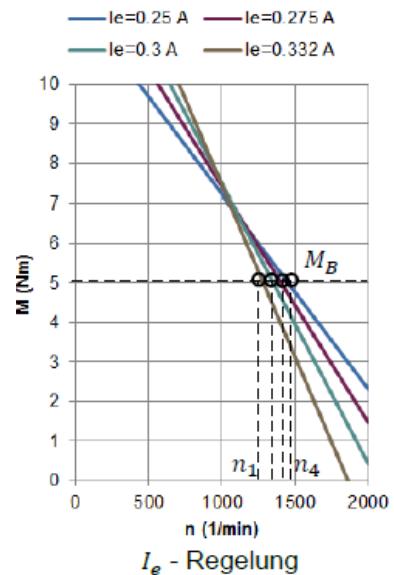
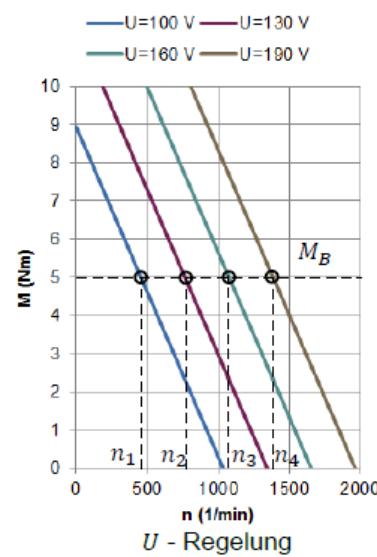
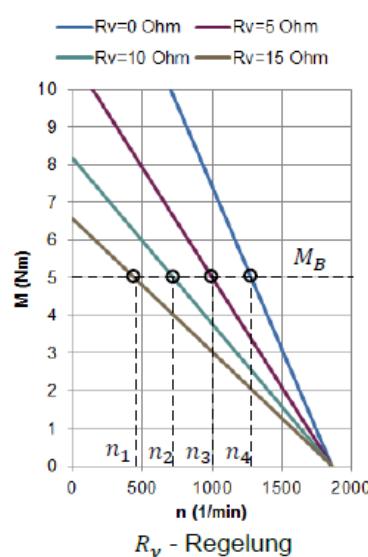
Die Erreger- und Ankerwicklung werden in Serie an die gemeinsame Spannungsquelle geschaltet. Beim Reihenschluss sind die Anker- und Erregerströme gleich und die Anker- und Erregerspannungen sind deshalb stark voneinander abhängig.



Achtung: $M \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$

Drehmoment	$U = (R_a + R_e) \cdot I + 2\pi n \cdot \psi$ $M = I \cdot \psi$ $M = I \cdot \psi = L_e \cdot \left(\frac{U}{R_a + R_e + 2\pi n \cdot L_e} \right)^2$ $\psi = L_e \cdot I$	Spannungsgleichung der Reihenschluss-Schaltung $I = I_a = I_e$
Anlaufmoment	$M_A = \frac{L_e \cdot U^2}{(R_a + R_e + R_v)^2} \quad (n = 0)$	$[M] = Nm$ R_v = Vorriederstand meistens 0!
Bezugsdrehzahl	$n_b = \frac{R_a + R_e}{2\pi \cdot L_e}$	$[n] = \frac{1}{s}$

2.5 Drehzahlregelung

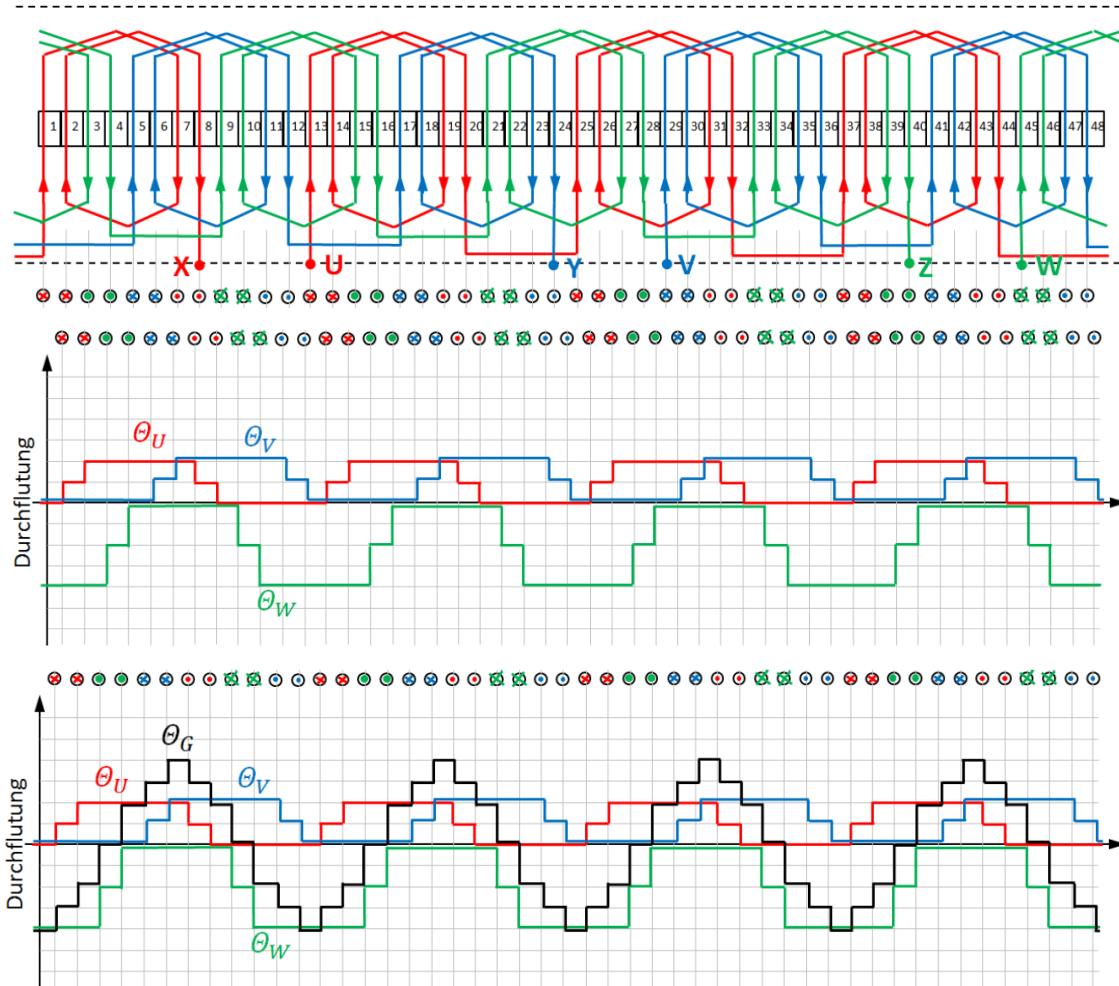


3 Dreiphasenwechselstrom und Drehfelderzeugung

Sternspannungen	$U_U(t) = U_m \cdot \sin(\omega t)$ $U_V(t) = U_m \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$ $U_W(t) = U_m \cdot \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$	$U_U, U_V, U_W \hat{=} \text{den Spannungen zwischen dem Neutralleiter und dem Aussenleiter}$ oft 230V
Stern-Dreieck Umwandlung	$U_Y = \frac{U_\Delta}{\sqrt{3}}$ $I_Y = \frac{I_\Delta}{\sqrt{3}}$ $I_Y = I_{12}$ $M_Y = \frac{M_\Delta}{3}$ $P_Y = \frac{P_\Delta}{3}$ $U_\Delta = U_{12}$	$U = \text{Strangspannung}[V]$ $I = \text{Strangstrom}[A]$ $M = \text{Motormoment}[Nm]$ $P = \text{Leistung}$
Verkettete Spannung	$U_{UV}(U_{12}), U_{VW}(U_{23}), U_{WU}(U_{31})$	oft 400V

Sternschaltung (Y-Schaltung)		Dreieckschaltung (Δ -Schaltung)
Leiterströme		
$I_{Str1} = I_1, I_{Str2} = I_2, I_{Str3} = I_3$		$I_1 = I_{Str1} - I_{Str3}, I_2 = I_{Str2} - I_{Str1}, I_3 = I_{Str3} - I_{Str2}$ $I_1 = \sqrt{3} \cdot I_{Str1}, I_2 = \sqrt{3} \cdot I_{Str2}, I_3 = \sqrt{3} \cdot I_{Str3}$
Strangspannungen		
$U_{Str1} = U_1, U_{Str2} = U_2, U_{Str3} = U_3$ $U_{Str1} = \frac{U_{12}}{\sqrt{3}}, U_{Str2} = \frac{U_{23}}{\sqrt{3}}, U_{Str3} = \frac{U_{31}}{\sqrt{3}}$		$U_{Str1} = U_{12}, U_{Str2} = U_{23}, U_{Str3} = U_{31}$
In Dreiphasensystemen wird die Spannung zwischen zwei beliebigen Außenleitern als verkettete Spannung z.B. U_{12} bezeichnet, die Spannung zwischen dem Neutralleiter und einem beliebigen Außenleiter als Sternspannung z.B. U_1 .		
Strangströme		
$I_{Str1} = \frac{U_{Str1}}{Z_1} = \frac{U_1}{Z_1}, I_{Str2} = \frac{U_{Str2}}{Z_2} = \frac{U_2}{Z_2}, I_{Str3} = \frac{U_{Str3}}{Z_3} = \frac{U_3}{Z_3}$		$I_{Str1} = \frac{U_{Str1}}{Z_1} = \frac{U_{12}}{Z_1}, I_{Str2} = \frac{U_{Str2}}{Z_2} = \frac{U_{23}}{Z_2}, I_{Str3} = \frac{U_{Str3}}{Z_3} = \frac{U_{31}}{Z_3}$
Neutralleiterstrom		
$I_N = I_{Str1} + I_{Str2} + I_{Str3} = I_1 + I_2 + I_3$		Kein Neutralleiter!
Strangscheinleistungen:		
$S_{Str1} = P_{Str1} + j \cdot Q_{Str1} = U_{Str1} \cdot I_{Str1}^* = U_1 \cdot I_1^*$		$S_{Str1} = P_{Str1} + j \cdot Q_{Str1} = U_{Str1} \cdot I_{Str1}^* = U_{12} \cdot I_{Str1}^*$
$S_{Str2} = P_{Str2} + j \cdot Q_{Str2} = U_{Str2} \cdot I_{Str2}^* = U_2 \cdot I_2^*$		$S_{Str2} = P_{Str2} + j \cdot Q_{Str2} = U_{Str2} \cdot I_{Str2}^* = U_{23} \cdot I_{Str2}^*$
$S_{Str3} = P_{Str3} + j \cdot Q_{Str3} = U_{Str3} \cdot I_{Str3}^* = U_3 \cdot I_3^*$		$S_{Str3} = P_{Str3} + j \cdot Q_{Str3} = U_{Str3} \cdot I_{Str3}^* = U_{31} \cdot I_{Str3}^*$
Gesamt Scheinleistung		
$S = S_{Str1} + S_{Str2} + S_{Str3}$		$S = S_{Str1} + S_{Str2} + S_{Str3}$
$S = P_{Str1} + P_{Str2} + P_{Str3} + j \cdot (Q_{Str1} + Q_{Str2} + Q_{Str3})$		$S = P_{Str1} + P_{Str2} + P_{Str3} + j \cdot (Q_{Str1} + Q_{Str2} + Q_{Str3})$
Symmetrie		
$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$		
Strang-und Leiterstrom		
$I_{YStr} = I_{YLeit} = \frac{U_1}{Z}$	$I_{\Delta Str} = \frac{I_{\Delta Leit}}{\sqrt{3}} = \frac{U_{12}}{Z} = \frac{\sqrt{3} \cdot U_1}{Z}$	
Scheinleistung S		
$S_{Gesamt} = \sqrt{3} \cdot U_{12} \cdot I_1^*$		$S_{Str} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot U_{12} \cdot I_1^*$
Wirkleistung P		
$P_Y = 3 \cdot P_{YStr} = 3 \cdot U_{YStr} \cdot I_{YStr} \cdot \cos \varphi = 3 \cdot \frac{U_1^2}{Z} \cdot \cos \varphi$		$P_{\Delta} = 3 \cdot P_{\Delta Str} = 3 \cdot U_{\Delta Str} \cdot I_{\Delta Str} \cdot \cos \varphi = 3 \cdot \frac{U_{12}^2}{Z} \cdot \cos \varphi = 3 \cdot P_Y$
Motormoment M (Nm): $M_y = M_{\Delta}/3$		

4 Wicklungsschema Übung 4



4.1 Beispiel

"8-polig" → Polpaarzahl $p = 4$ → Polzahl $2p = 8$

Statornuten $N = 48$

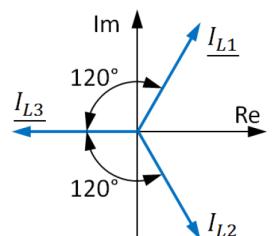
Strangzahl $m = 3$ (Anz Phase)

Statornutzahl pro Phasenband $q = \frac{N}{2p \cdot m} = \frac{48}{8 \cdot 3} = 2$

$$i_{L1} = \text{Real}\{\underline{I}_{L1}\} = 0.5 \cdot I_0$$

$$i_{L2} = \text{Real}\{\underline{I}_{L2}\} = 0.5 \cdot I_0$$

$$i_{L3} = \text{Real}\{\underline{I}_{L3}\} = -1.0 \cdot I_0$$



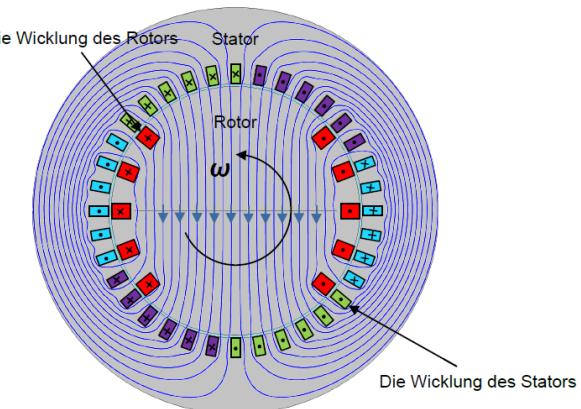
4.2 Wichtige Formeln

Drehzahl n	$n = 60 \cdot \frac{f}{p}$	n - Drehzahl [n] = $\frac{1}{min}$ f - Frequenz p - Polpaarzahl
Polpaarzahl p	$p = 60 \cdot \frac{f}{n}$	$p = \text{floor}(p)$ bei ASM
Nutzahl N	$N = 2p \cdot q \cdot m$	$2p$ - Polzahl q - Nutzahl pro Phasenband m - Strangzahl pro Phase

5 Synchronmaschine

Vorteil:

- sehr robust, elektrodynamisch, mechanisch und thermisch stabil
- Hoher Wirkungsgrad (80-90%)
- Drehmoment einfach bestimmbar
- Einfache Konstruktion
- Man kann Blindleistung mit diesem Motor kompensieren



Nachteil:

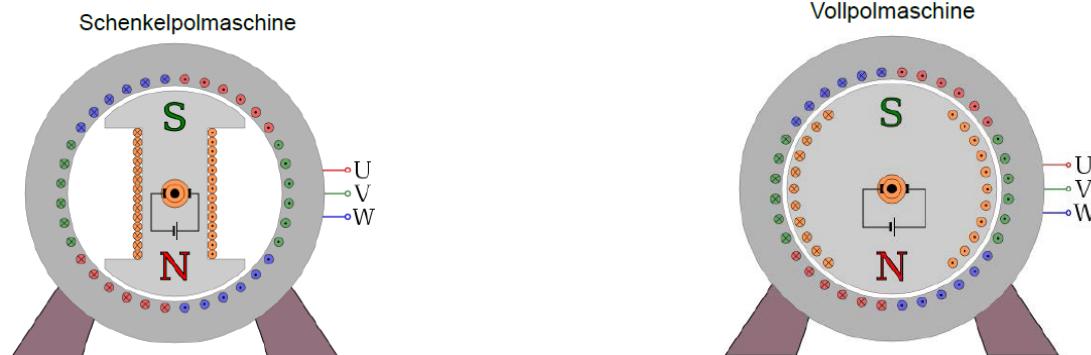
- hoher Anlaufstrom

5.1 Funktionsweise

Das Drehfeld und der Rotor einer Synchronmaschine rotieren mit derselben Geschwindigkeit d.h. sind sie im Synchronlauf.

Anwendung: zur Umwandlung von mechanischer Energie in elektrische Energie.

5.2 Aufbau und Wirkungsprinzip

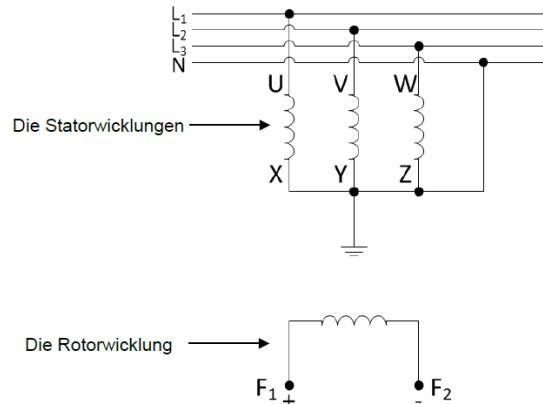
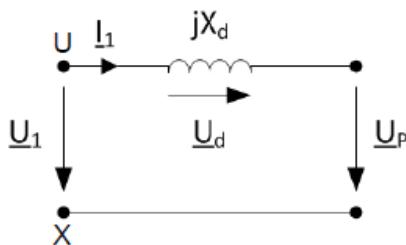


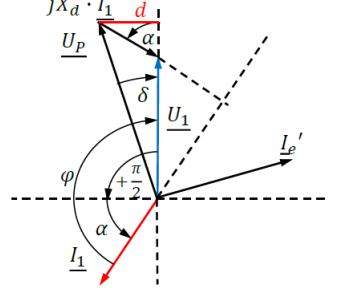
Folgende Eigenschaften gelten für grosse Generatoren >1GW darunter können die Bauarten beliebig sein.

Schenkelpolmaschine	Vollpolmaschine
<ul style="list-style-type: none"> • Wasserkraftwerk • Grössere Polpaarzahl • Kleinere Drehzahl 	<ul style="list-style-type: none"> • Wärmekraftwerke • Polpaarzahl = 1 • Grössere Drehzahl

5.3 Grundgleichungen

Strang Ersatzschaltung:

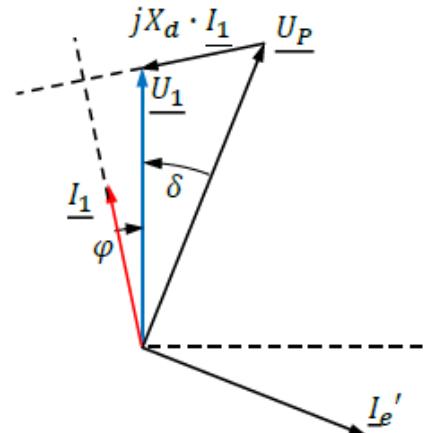
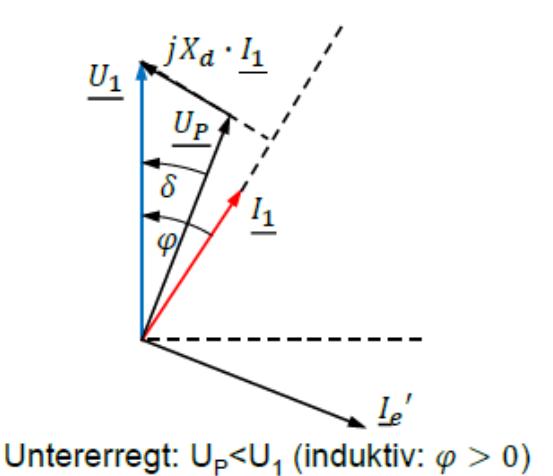


Strangspannung	$U_1 = U_d + U_p$	$U_p \hat{=} \text{der Polradspannung}$
Spulenspannung	$U_d = jX_d \cdot I_1$	
Polradspannung (fiktive Hilfsgrösse)	$U_p = U_p(I_e)$ $U_p = jX_h \cdot I_e'$	$I_e \hat{=} \text{dem Erregerstrom}$ $I_e' \hat{=} \text{dem Erregerstrom umgerechnet auf die Statorseite}$
Synchronreaktanz	$X_d = X_{\sigma 1} + X_h$ $X_d = 2\pi f L_d$ $X_d = \frac{U_{1Str}}{I_K}$	$X_d \hat{=} \text{Synchronreaktanz}$ $X_{\sigma 1} \hat{=} \text{Streureaktanz des Stators}$ $X_h \hat{=} \text{der Hauptreaktanz}$
Leistung 	$\cos(\varphi) = -\sin(\alpha)$ $(X_d \cdot I_{1Str})^2 = U_{1Str}^2 + U_{pStr}^2 - 2 \cdot U_{1Str} \cdot U_{pStr} \cdot \cos(\delta)$ $P_{Str} = U_{Str} \cdot I_{Str} \cdot \cos(\varphi)$ $\text{d} = -U_p \cdot \sin(\delta)$ $= X_d \cdot I_1 \cdot \sin(\alpha) = -X_d \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi)$ $P(\delta) = 3 \cdot P_{Str}(\delta) = 3 \cdot \frac{U_{pStr} \cdot U_{1Str}}{X_d} \cdot \sin(\delta)$ Generatorbetrieb: $\delta < 0$ $P(\delta) = P_{mech} - P_V = \omega \cdot M - P_V$ Motorbetrieb: $\delta > 0$ $P(\delta) = P_{mech} + P_V = \omega \cdot M + P_V$	$\varphi = -\alpha - 90^\circ \quad [\text{grad}]$ Polradwinkel $\delta = \angle(U_p, U_1)$ U_p ist die Polradspannung, sie entspricht einer fiktiven Grösse! Sie kann wiederum durch ein Zeigerdiagramm bestimmt werden. Achte auf Y-Δ-Umrechnug Seite: 10
Erreger-Regulierkennlinien	$\frac{I_e}{I_{e0}} = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \left(x \cdot \frac{I_1}{I_N} - \sin(\varphi)\right)^2}$	$I_e = f(I_1)$ $\cos(\varphi)$ gegeben I_1 - gewünschter Netzstrom Bezugswert $x = \frac{X_d}{X_N}$ X_N = Normiert
mechanisches Moment	$P = \Omega \cdot M = \frac{\omega}{p} \cdot M$	Gilt falls $P_V = 0$ Ω = Mech. Winkelges.

$\cos(\varphi) = x_{ind} \rightarrow \varphi^\circ > 0$ Strom eilt der Spannung nach
 $\cos(\varphi) = x_{kap} \rightarrow \varphi^\circ < 0$ Strom eilt der Spannung voraus

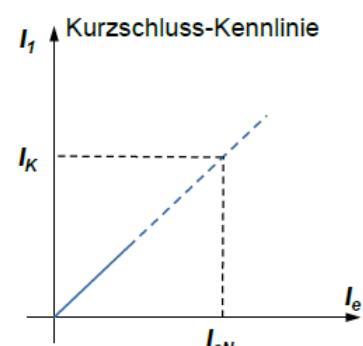
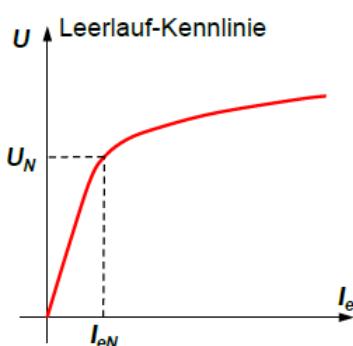
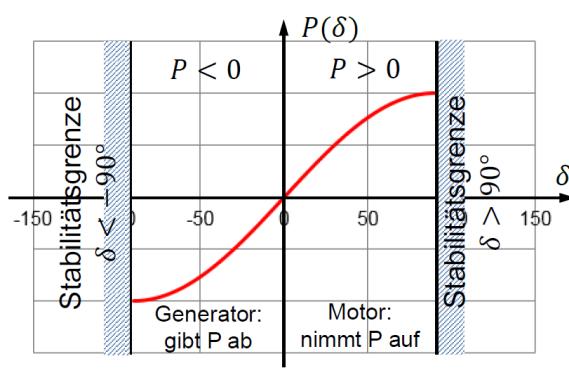
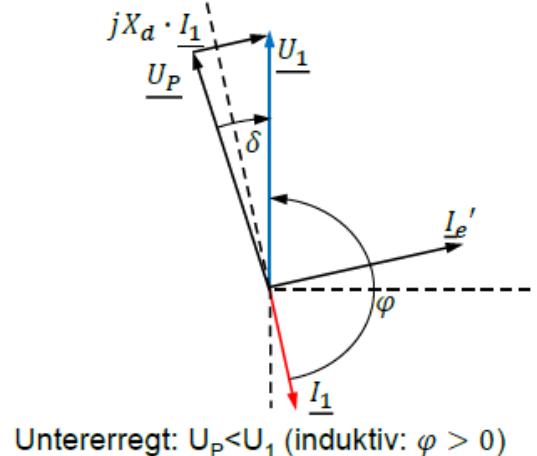
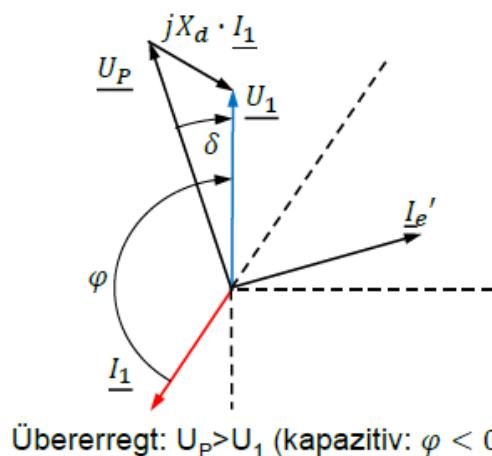
5.4 Zeigerdiagramm im Motorbetrieb

$P > 0$ und $\delta > 0$



5.5 Zeigerdiagramm im Generatorbetrieb

$P < 0$, $\delta < 0$

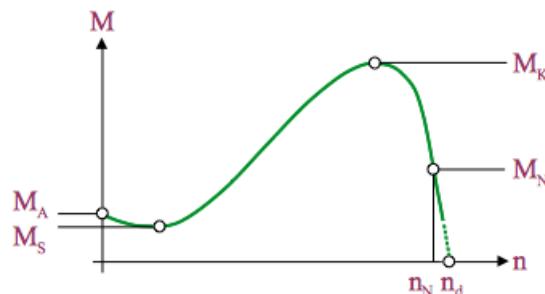


6 Asynchronmotor

Kennlinie Asynchronmotor

Eigenschaften:

- meist verwendeter Elektromotor
- Drehfeld wird durch den Ständer erzeugt
- Drehmoment entsteht durch den im Läufer induzierten Strom



M_A Anzugsmoment
 M_S Sattelmoment
 M_K Kippmoment
 M_N Nennmoment
 n_N Nenndrehzahl

Bild 18-12: Kennlinie eines Kurzschlussläufermotors

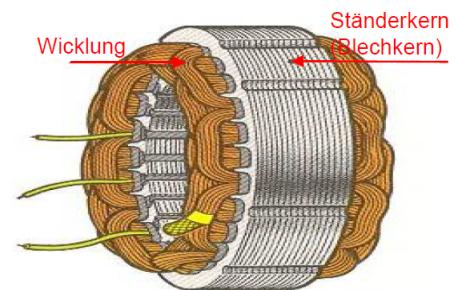
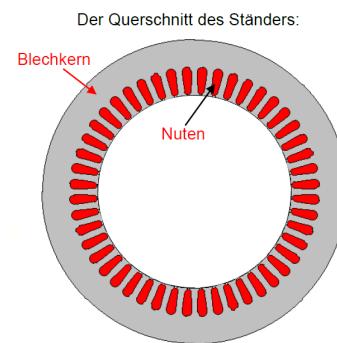
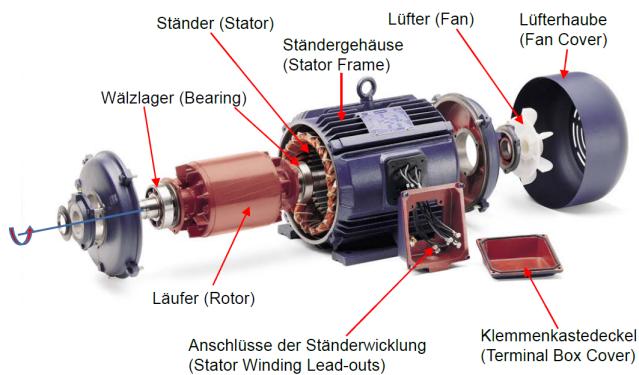
Vorteil:

- sehr einfacher Aufbau
- sehr robust und widerstandsfähig

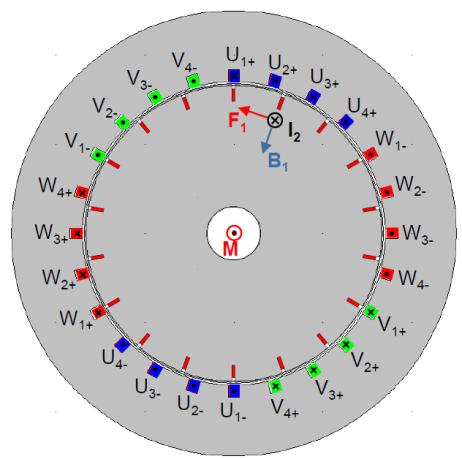
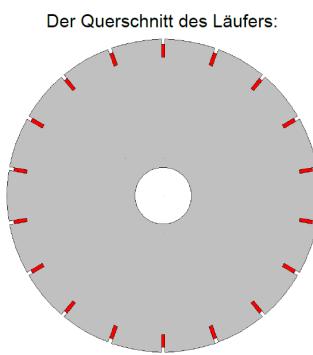
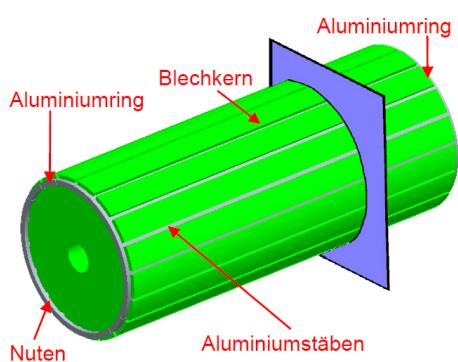
Nachteil:

- Extrem hoher Anlaufstrom
⇒ dies wird verminderst mit der Stern-Dreieck-Umschalt-Methode
(3 Mal mehr Leistung im Dreieckbetrieb)

6.1 Aufbau Ständer



6.2 Aufbau Läufer



Wirbelströme im Eisen entstehen durch die Induktion des Rotors in den Stator

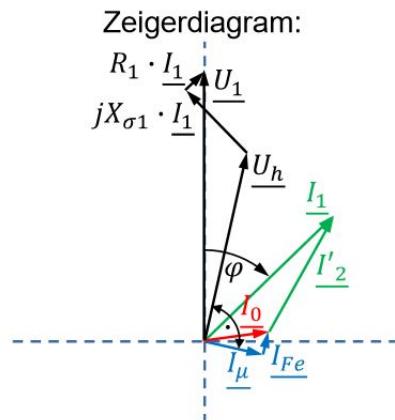
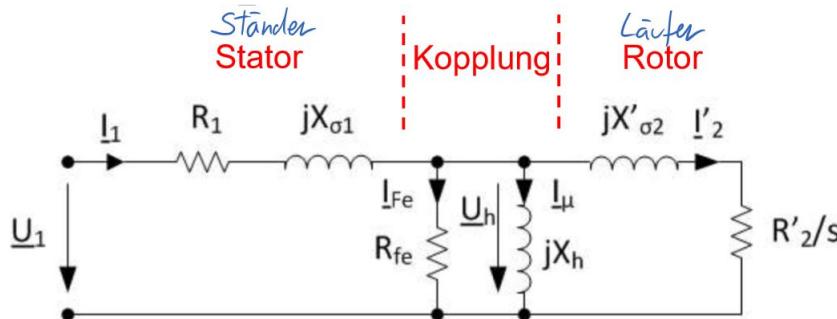
⇒ Stator erwärmt sich.

Durch den Rillenaufbau des Stators können diese Wirbelströme bzw. die Temperaturansteigung minimiert werden.

Schlupf $\hat{=}$ Abweichung zu der synchronen Drehzahl

6.3 Formeln Läufer

6.4 Modell der Asynchronmaschine



Grundgleichungen:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{Fe} + \underline{I}_\mu + \underline{I}'_2 \approx \underline{I}'_2$$

$$\underline{U}_1 = R_1 \cdot \underline{I}_1 + jX_{\sigma 1} \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_h \approx \underline{U}_h$$

N = Windungszahl

k_w = Wicklungsfaktor

$R_1, X_{\sigma 1}$ = Widerstand und Streureaktanz des Stators

$R_2, X_{\sigma 2}$ = Widerstand und Streureaktanz des Rotors

R_{Fe} = Eisen-Verlustwiderstand

X_h = Hauptreaktanz

U_h = innere Spannung

I_μ = Magnetisierungsstrom

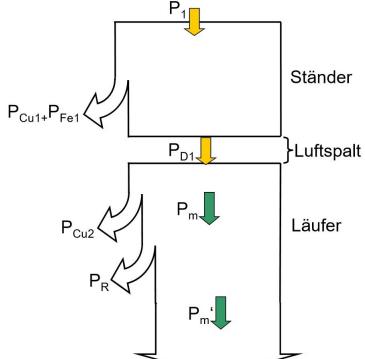
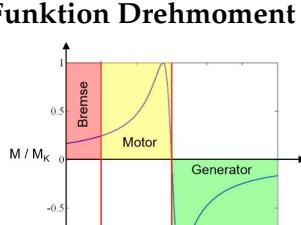
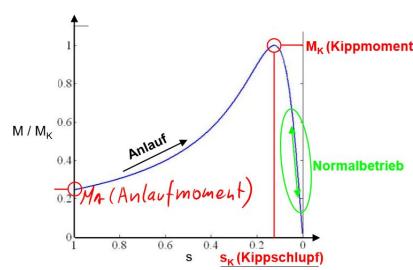
Übersetzungsverhältnis:

$$u = \frac{N_1 \cdot k_{w1}}{N_2 \cdot k_{w2}}$$

$$\underline{I}'_2 = \underline{I}_2 \cdot u$$

$$R'_2 = R_2 \cdot u^2$$

Induzierte Spannung	$U_i = 4.44 \cdot f \cdot w \cdot \xi \cdot \phi$	$f \hat{=} \text{Frequenz}$ $w \hat{=} \text{Windungszahl}$ $\xi = \text{Wicklungsfaktor}$ $\phi = \text{Magnetischer Fluss}$
Elektromagnetische Kraft	$\vec{F}_2 = l_2 \cdot \vec{I}_2 \times \vec{B}_1$	B_1 = Flussdichte I_2 = Strom Rotor l_2 = längte Rotor
Mech. Drehmoment	$\vec{M}_2 = r_2 \times \vec{F}_2$	r_2 = radius Rotor
Drehzahl	$n_1 = \frac{f_1}{p}$ $n_2 = n_1 - n$	n = Drehzahl des Läufers n_1 = Synchrodrehzahl n_2 = Relativdrehzahl
Schlupf	$s = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{f_2}{f_1}$	f_1 = Frequenz Drehfeld f_2 = Frequenz Anker Synchrone Lauf: $s = 0$ Stillstand: $s = 1$

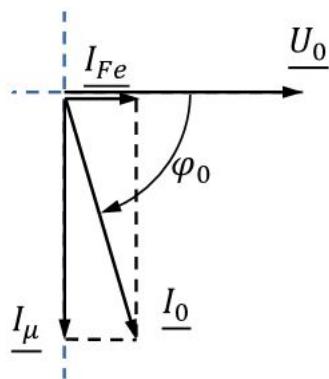
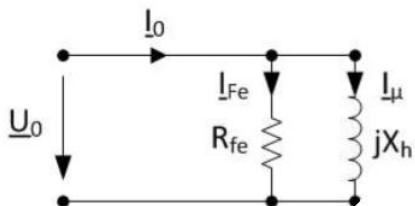
Induzierter Strom	$I_1 = \frac{U_1}{\sqrt{\left(\frac{R'_2}{s}\right)^2 + X'_{2\sigma}^2}}$ $I_2 = \frac{U_{i20}}{\sqrt{\left(\frac{R_2}{s}\right)^2 + X_{2\sigma}^2}}$	$R'_2 = X'_{2\sigma} \cdot s_k$
Verluste Drehmoment	 $P_{D1} = P_m + P_{C22}$ $P_{D1} = 2 \cdot \pi \cdot n_1 \cdot M$ $P_N = P_m = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot M$ $M = \frac{1}{2\pi n_1} \frac{P_{Cu2}}{s}$	P_1 - primäre Netzeistung P_{Cu} - Ohmsche Verluste P_{Fe} - Blechkernverluste P_{D1} - Drehfeldleistung P_m - mechanische Leistung P_N - Nennleistung P_R - Reibungsverluste und Lüftung P'_m - mech. Nutzleistung M - Drehmoment
Funktion Drehmoment	 $M = \frac{1}{2\pi n_1} \frac{P_{Cu2}}{s}$ $= \frac{q_2}{2\pi n_1} \cdot \frac{I_2^2}{s} \cdot \frac{R_2}{s}$ $= \frac{q_2}{2\pi n_1} \frac{U_{i20}^2}{(R_2/s)^2 + X_{2\sigma}^2} \frac{R_2}{s}$	M-Kennlinie Motorbetrieb Generator-Betrieb q_2 = Anz. Phasen der Rotorwicklung
Anlauf	 $M = \frac{q_1}{2\pi n_1} \cdot \frac{U_1^2}{(R'_2/s)^2 + X'_{2\sigma}^2} \cdot \frac{R'_2}{s}$ $s_K = \frac{R'_2}{X'_{2\sigma}}$ $M_K = \frac{q_1}{4\pi n_1} \cdot \frac{U_1^2}{X'_{2\sigma}}$	q_1 = Anz. Phasen der Statorwicklung
Klosssche Gleichung Anlauf $\rightarrow s = 1$	$\frac{M}{M_k} = \frac{2}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}}$ $\frac{1}{s} s_k^2 - \frac{2M_k}{M} s_k + s = 0$	s_k = Kippschlupf $s_k > s$ M_k = Kippmoment $M_k > M$

6.4.1 Leerlauf

Im Leerlauf wird die Asynchronmaschine an der Welle nicht belastet.

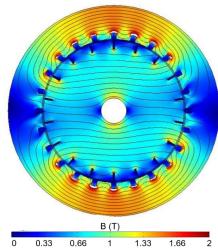
$$R_1 \ll R_{Fe} \quad X_{\sigma 1} \ll X_h$$

Ersatzschaltbild



Synchronlauf s=0

$$\begin{aligned}s &= 0 \\ f_2 &= 0 \\ I_2 &= I_{2max} = 0\end{aligned}$$



Grundgleichungen

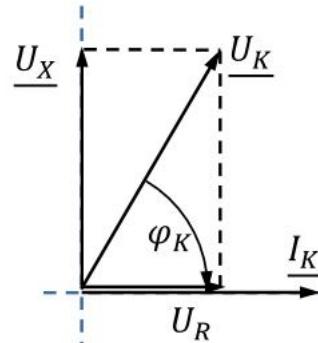
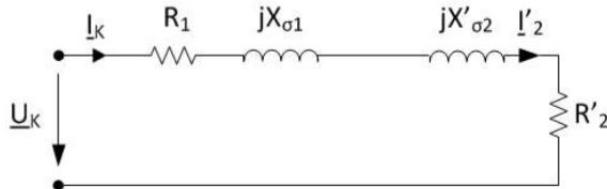
$$\begin{aligned}I_0 &= I_{Fe} + I_\mu \\ \cos(\varphi_0) &= \frac{P_0}{U_0 \cdot I_0} \\ R_{Fe} &= \frac{U_0}{I_{Fe}} = \frac{U_0}{I_0 \cdot \cos(\varphi_0)} \\ X_h &= \frac{U_0}{I_\mu} = \frac{U_0}{I_0 \cdot \sin(\varphi_0)}\end{aligned}$$

6.4.2 Kurzschluss

Im Kurzschluss wird der Rotor der Asynchronmaschine blockiert. ($s=1$)

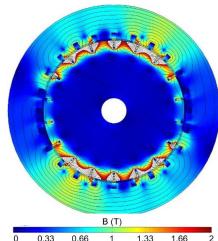
$$R_1 \ll R_{Fe} \quad X_{\sigma 1} \ll X_h$$

Ersatzschaltbild



Stillstand s=1

$$\begin{aligned}s &= 1 \\ f_2 &= f_1 \\ I_2 &= I_{2max} = \frac{U_{i20}}{\sqrt{R_2^2 + X_{2\sigma}^2}}\end{aligned}$$



Grundgleichungen

$$\begin{aligned}\cos(\varphi_K) &= \frac{P_K}{U_K \cdot I_K} \\ R_1 + R'_2 &= \frac{U_R}{I_K} = \frac{U_K \cdot \cos(\varphi_K)}{I_K} \\ X_{\sigma 1} + X'_{\sigma 2} &= \frac{U_X}{I_K} = \frac{U_K \cdot \sin(\varphi_K)}{I_K}\end{aligned}$$

7 Schrittmotor

7.1 Merkmale

- Der Schrittwinkel hängt vom Aufbau der Maschine ab und kann zwischen 0.6° und 15° sein.
- Drehmoment bis zu 5 Nm
- Werden im unteren Leistungsbereich eingesetzt
 - Reluktanz-SM
 - Hybrid-SM
 - Permanentmagnet-SM (werden am häufigsten verwendet, da hoher Wirkungsgrad und gute statischen und dynamischen Eigenschaften)

Vorteil:

- kostengünstig
- praktisch nicht überlastbar

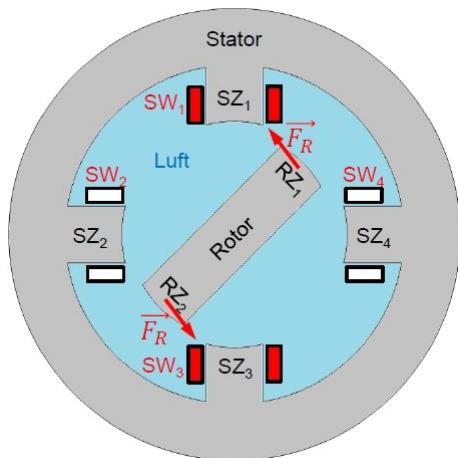
Name	FS
Windungszahl Statorstrang/spule	N
Zahnfläche	A_z
Höhe des Luftspalts	$\delta_d = \delta_q$
Zahnweite (breite) Stator	w_S
Zahnweite (breite) Rotor	w_R
Breite der Zahnüberlappung	w_{zu}
Stator-Zahnzahl	Z_s
Rotor-Zahnzahl	Z_R
Trägheitsmoment Rotor	J_R
Länge des Motors	L
Durchmesser Luftspalt	D

Grösse	Gleichnung	FZ
Stator-Winkel	$\alpha_S = \frac{2\pi}{Z_s}$	[rad]
Stator-Zahnzahl	$Z_S = Z_R \left(\frac{m}{m-1} \right)$	
Rotor-Winkel	$\alpha_R = \frac{2\pi}{Z_R}$	[rad]
Rotor-Zahnzahl	$Z_R = Z_S \left(\frac{m-1}{m} \right)$	
Vollschrifft-Winkel *	$\alpha_0 = \alpha_R - \alpha_S$	[rad]
Strangzahl	$m = \frac{Z_s}{Z_S - Z_R}$	
Schrittzahl	$N_p = \frac{2\pi}{\alpha_0}$	
Steuer/Schaltfrequenz	$f_s = N_p \cdot n$	$n = \left[\frac{1}{s} \right]$

*Der Vollschrifftwinkel bezeichnet die Bewegung des Rotors pro Einzel-Steuerimpuls.

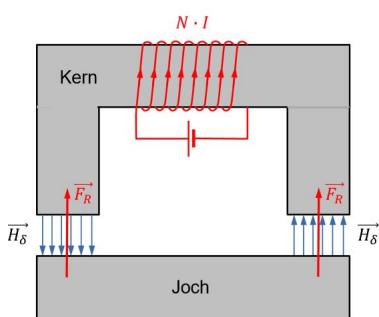
7.2 Reluktanz-SM

Aufbau

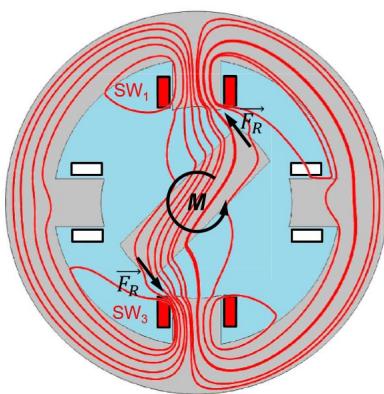


Stator-Zähne: SZ_1, SZ_2, SZ_3, SZ_4
 Stator-Wicklungen: SW_1, SW_2, SW_3, SW_4
 Rotor-Zähne: RZ_1, RZ_2

Wirkungsprinzip



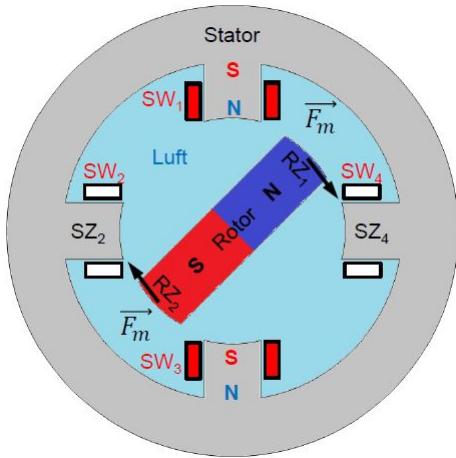
Die magnetische Reluktanzkraft ist immer anziehend
 \Rightarrow versucht den Luftspalt zu verkleinern.



1. Die Spule SW_1, SW_3 sind an die Quelle angeschlossen.
2. Das magnetische Feld der ersten zwei Spulen wird erzeugt.
3. Die Reluktanzkraft wirkt auf den Rotor um die Luftspalte zu verringern.
4. Das mechanische Moment wird erzeugt.

7.3 Permanentmagnet-SM

Aufbau



Stator-Zähne: SZ_1, SZ_2, SZ_3, SZ_4
 Stator-Wicklungen: SW_1, SW_2, SW_3, SW_4
 Rotor-Zähne: RZ_1, RZ_2

Anziehende magnetische Kraft:

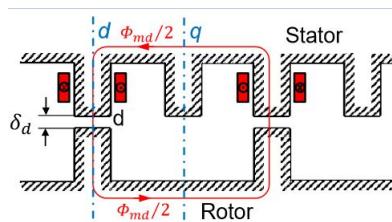


Abstossende magnetische Kraft:



Statorinduktivität

d-Achse Parallel



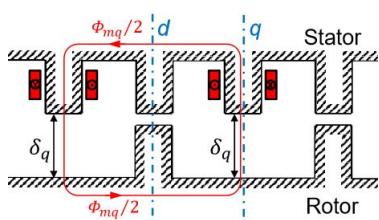
$$L_d = \frac{\Psi_{md}}{I_1} = 2N \frac{\Phi_{md}}{I_1} = 2N \frac{B_{\delta d} A_z}{I_1} = \mu_0 2N \frac{2NI_1 A_z}{2\delta_d I_1}$$

$$= \mu_0 2N^2 \frac{A_z}{\delta_d} = \mu_0 2N^2 \frac{\mathbf{L} \cdot w_s}{\delta_d}$$

$w_{zu} > 0$ Zahnüberlappung

$w_{zu} \leq 0$ Keine Zahnüberlappung

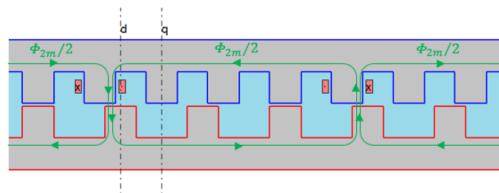
q-Achse Parallel (Keine Zahnüberlappung)



$$L_q = \frac{\Psi_{mq}}{I_1} = 2N \frac{\Phi_{mq}}{I_1} = 2N \frac{B_{\delta q} A_z}{I_1} = \mu_0 2N \frac{2NI_1 A_z}{2\delta_q I_1}$$

$$= \mu_0 2N^2 \frac{A_z}{\delta_q}$$

q-Achse Parallel (mit Zahnüberlappung)



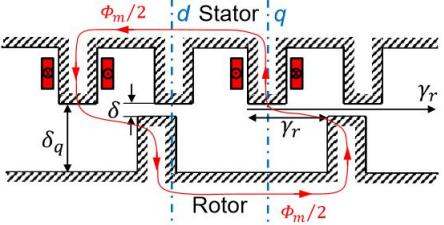
$$w_{zu} = w_s - \alpha_0 \cdot \frac{D}{2} \quad [\alpha_0] = rad$$

$$L_q = \frac{\Psi_{mq}}{I_1} = 2N \frac{\Phi_{mq}}{I_1} = 2N \frac{B_{\delta q} A_z}{I_1} = \mu_0 2N \frac{2NI_1 A_z}{2\delta_q I_1}$$

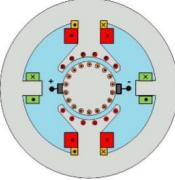
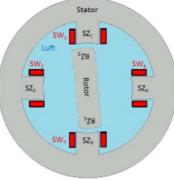
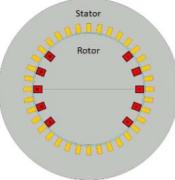
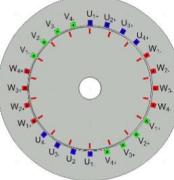
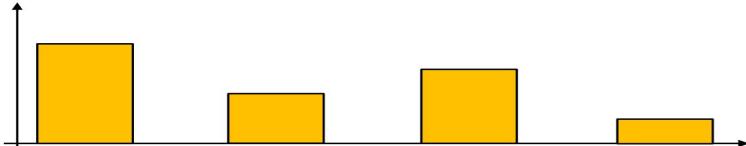
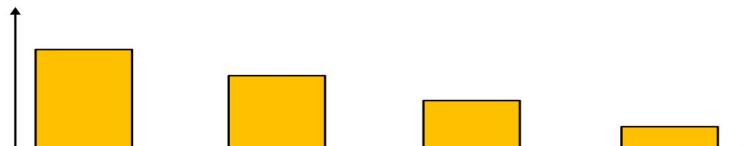
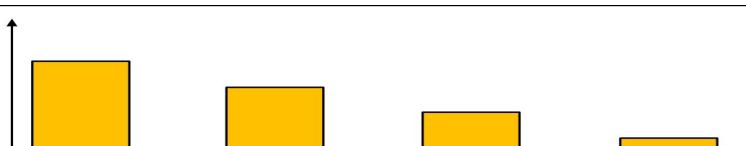
$$= \mu_0 2N^2 \frac{A_z}{\delta_q} = \mu_0 2N^2 \frac{\mathbf{L} \cdot w_{zu}}{\delta_d}$$

Rotorleistung	$p_\delta(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{dL}{d\gamma_r}(\gamma_r) \cdot \omega_r \cdot i^2(t)$
Motormoment	$M_M(t) = \frac{p_\delta}{\omega_r}(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{dL}{d\gamma_r}(\gamma_r) \cdot i^2(t)$
Motormoment (lineare Annäherung)	$M_M = \frac{1}{2} \frac{L_d - L_q}{\alpha_0} I_1^2 \quad [\alpha_0] = rad$
Betriebsverhalten	$J_R = J_g = \text{Motorbezogenes Trägheitsmoment}$ $M_M = \text{Motorbezogenes Drehmoment}$ $M_L = \text{Lastmoment}$ $\omega_s = \text{Kreisgeschwindigkeit Statorfeld}$ $\omega_1 = \text{Kreisgeschwindigkeit des Rotors}$ $\Rightarrow \omega_1 = 0 \Rightarrow \text{Motor im Stillstand}$
Lastmoment	$f_s = \frac{1}{T_s} = \text{Schaltfrequenz}$ $\omega_1 = \text{Anfangsgeschwindigkeit}$ $f_{AG} : M_M \& \omega_1 = 0$
Anlaufkennlinie	$f_{AG} = \text{Anlaufgrenzfrequenz}$ $f_{BG} = \text{Betriebsgrenzfrequenz}$

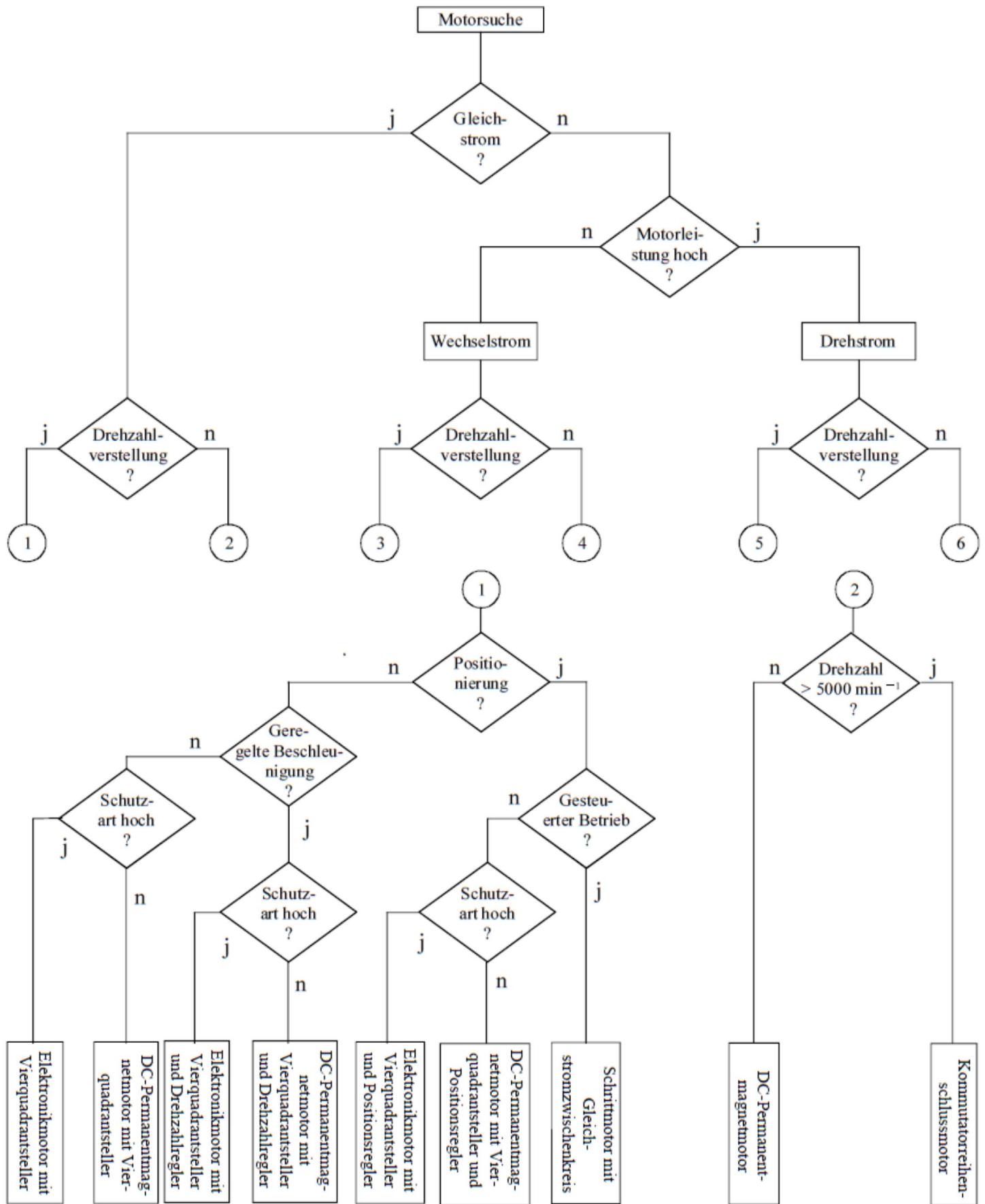
7.4 Herleitungen aus DGL

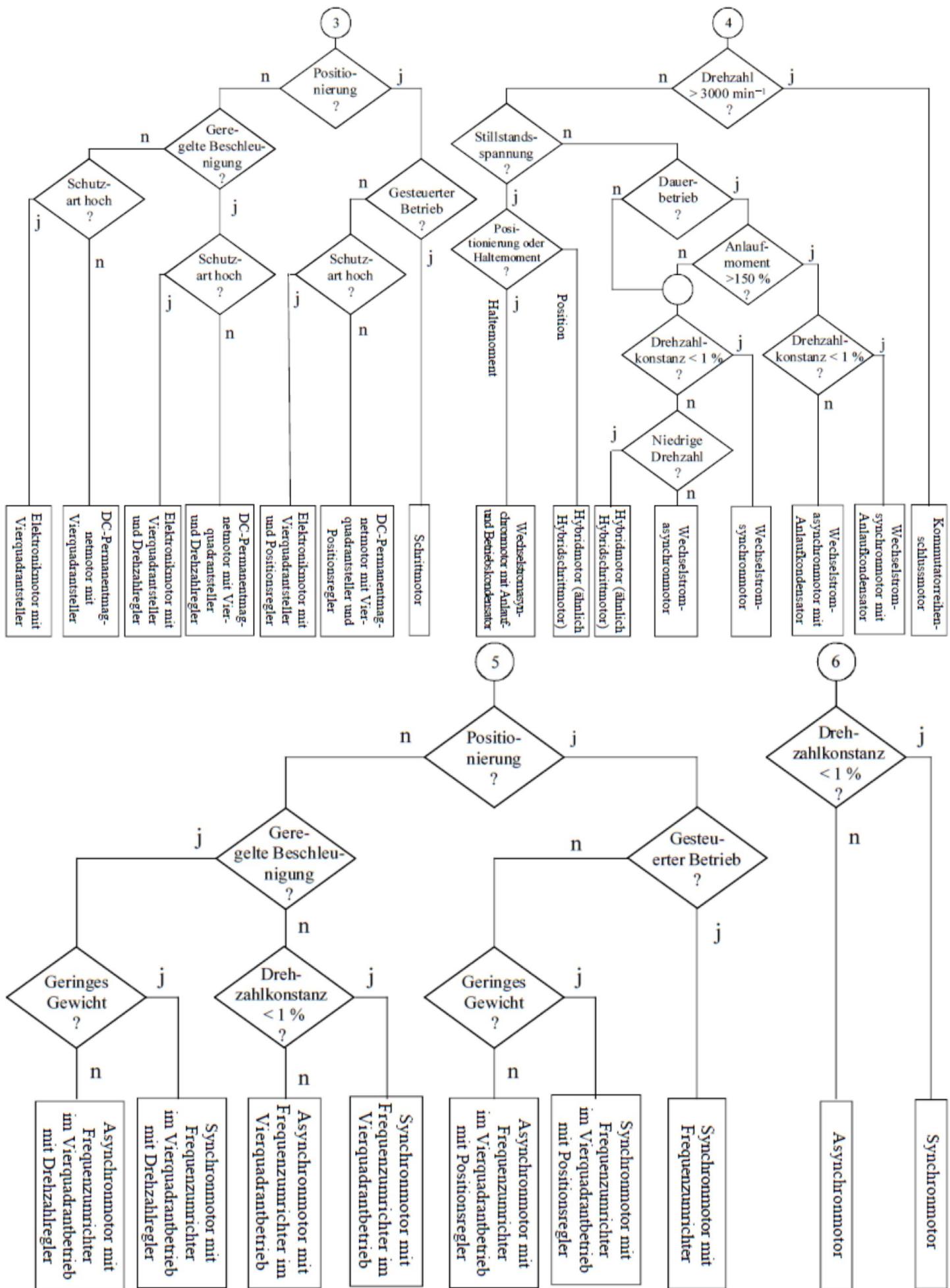
Drehmoment Herleitung 	$\Phi_m(\gamma_r, i) = L(\gamma_r(t)) \cdot i(t)$ $u_{Statorkreis}(t) = R \cdot i(t) + \frac{d\Phi_m}{dt}(t) = R \cdot i(t) + \frac{d}{dt} [L(\gamma_r(t)) \cdot i(t)]$ $= R \cdot i(t) + \frac{dL}{d\gamma_r}(\gamma_r) \cdot \frac{d\gamma_r}{dt} i(t) + L(\gamma_r) \cdot \frac{di}{dt}(t)$ $p_{Statorkreis}(t) = u(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) + \frac{dL}{d\gamma_r}(\gamma_r) \cdot \omega_r \cdot i^2(t) + L \cdot i(t) \cdot \frac{di}{dt}(t)$
Elektrische Leistung des Stators	$p(t) = R \cdot i^2(t) + \frac{dL}{d\gamma_r} \cdot \omega_r \cdot i^2(t) + L \cdot i(t) \cdot \frac{di}{dt}(t)$ $= p_{Cu}(t) + \frac{dw_m}{dt}(t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{dL}{d\gamma_r}(\gamma_r) \cdot \omega_r \cdot i^2(t)$
Zeitableitung magnetischer Energie	$w_m(t) = \frac{1}{2} \cdot L(\gamma_r) \cdot i^2(t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot L(\gamma_r) \cdot i^2(t) \right)$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{dL}{d\gamma_r}(\gamma_r) \cdot \omega_r \cdot i^2(t) + L \cdot i(t) \cdot \frac{di}{dt}(t)$

8 Vergleich der Elektrischen Maschinen

Aufbau				
Komplexität des Aufbaus				
Kosten				
Wirkungsgrad				
Anpassungsfähigkeit				
Anlaufstrom	$I_a = \frac{U}{R_a}$ Begrenzung: Vorwiderstand	$I_a = \frac{U}{R_a}$ Begrenzung: Speisung	$I_a = (5 + 7) \cdot I_n$ Begrenzung: Spannung	$I_a = (5 + 7) \cdot I_n$ Begrenzung: Spannung
Anlaufmoment	$\sim I$ Begrenzt durch: R_a, I_{max}	$\sim U$	$\sim (U/f)^2$ Begrenzt durch: X_σ	$\sim (U/f)^2$ Begrenzt durch: X_σ
Drehzahlregelung	Spannung Erregerstrom	Frequenz	Polpaarzahl Frequenz	Polpaarzahl Frequenz
Anwendungsbereich	Regelbare Antriebe mit grossem Stellbereich und guter Dynamik	Verstellantriebe kleiner Leistung ohne Regelung	Antriebe mit konstanter Drehzahl und gutem Leistungsfaktor	Einfache Antriebe und regelbare Antriebe (mit Umrüchter) mit beschränkter Dynamik

8.1 Auswahl Flowchart





9 Idiotenseite

9.1 SI-Vorsätze

Symbol	Name	Wert	Binär	Symbol	Name	Wert
da	Deka	10^1		d	Dezi	10^{-1}
h	Hekto	10^2		c	Centi	10^{-2}
k	Kilo	10^3	$2^{10} = 1024$	m	Mili	10^{-3}
M	Mega	10^6	2^{20}	y, μ	Mikro	10^{-6}
G	Giga	10^9	2^{30}	n	Nano	10^{-9}
T	Tera	10^{12}	2^{40}	p	Piko	10^{-12}
P	Peta	10^{15}	2^{50}	f	Femto	10^{-15}

9.2 Dreiecksformeln

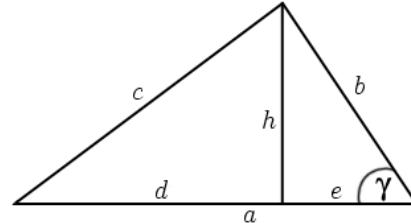
Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

Sinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

Pythagoras beim Sinus



$$\sin^2(b) + \cos^2(b) = 1 \quad \tan(b) = \frac{\sin(b)}{\cos(b)}$$

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \cos \beta &= \frac{c}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \frac{c}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \\ \cot \beta &= \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}\end{aligned}$$

9.3 Funktionswerte für Winkelargumente

deg	rad	sin	cos	tan	deg	rad	sin	cos	deg	rad	sin	cos
0	0	0	1	0	90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	180	π	0	-1
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	210	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	135	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	225	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	240	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

9.4 Periodizität

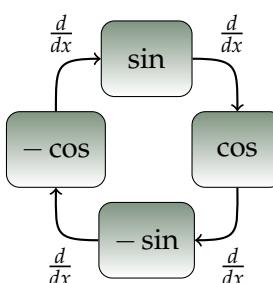
$$\cos(a + k \cdot 2\pi) = \cos(a) \quad \sin(a + k \cdot 2\pi) = \sin(a) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

9.5 Quadrantenbeziehungen

$$\begin{aligned}\sin(-a) &= -\sin(a) \\ \sin(\pi - a) &= \sin(a) \\ \sin(\pi + a) &= -\sin(a) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(-a) &= \cos(a) \\ \cos(\pi - a) &= -\cos(a) \\ \cos(\pi + a) &= -\cos(a) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)\end{aligned}$$

9.6 Ableitungen



9.7 Additionstheoreme

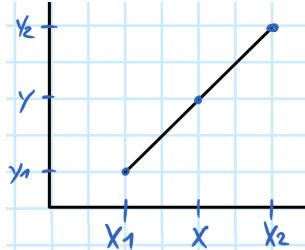
$$\begin{aligned}\sin(a \pm b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b) \\ \cos(a \pm b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b) \\ \tan(a \pm b) &= \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}\end{aligned}$$

9.8 Doppel- und Halbwinkel

$$\begin{aligned}\sin(2a) &= 2 \sin(a) \cos(a) \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a) \\ \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{1 + \cos(a)}{2} \quad \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos(a)}{2}\end{aligned}$$

9.9 Geradengleichung Interpolieren

$$y(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$



9.10 Grad <-> Rad

$$\alpha_{rad} = \alpha_{grad} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\alpha_{grad} = \alpha_{rad} \cdot \frac{180}{\pi}$$

9.11 Grundelemente

Ohmscher Widerstand R

u und i können sprunghaft ändern

$$\begin{array}{c} R \\ \text{---} \end{array} \quad u(t) = R \cdot i(t)$$

$$\underline{Z}_R = R$$

$$\text{nicht linear: } R = (u) = \frac{U}{I(u)}, r_D = \frac{dU}{dI}|_{U_0}$$

$$P = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

Kapazität C

u kann nicht sprunghaft ändern

$$\begin{array}{c} C \\ || \\ \text{---} \end{array} \quad u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + u(0)$$

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad B_C = \omega C$$

$$Q_C = -U^2 \cdot \omega C = -\frac{I^2}{\omega C}$$

$$W_C = \frac{1}{2} C U_C^2$$

Induktivität L

i kann nicht sprunghaft ändern

$$\begin{array}{c} L \\ \sim\!\!\sim\!\!\sim\!\!\sim \end{array} \quad u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau + i(0)$$

$$\underline{Z}_L = j\omega L$$

$$X_L = \omega L \quad B_L = -\frac{1}{\omega L}$$

$$Q_L = I^2 \cdot \omega L = \frac{U^2}{\omega L}$$

$$W_L = \frac{1}{2} L I_L^2$$

9.12 Begriffe der Impedanz und Admittanz

Scheinwiderstand

$$Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \text{Ohm}$$

Komplexer Widerstand Impedanz

$$\underline{Z} = R + jX = Z \cdot e^{j\varphi} = \frac{U}{I} = \frac{U \cdot U^*}{S^*} = \frac{U^2}{S^*} = \frac{S}{I^2} \quad \text{Ohm}$$

Komplexer Leitwert

$$\underline{Y} = G + jB = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} = \frac{I}{U} = \frac{I}{U} \quad \text{Siemens}$$

Wirkwiderstand

$$R = \operatorname{Re}(\underline{Z}) = Z \cdot \cos(\varphi) \quad \text{Ohm}$$

Wirkleitwert

$$G = \operatorname{Re}(\underline{Y}) = \frac{1}{R} \quad \neq \frac{1}{R} \quad \text{Siemens}$$

Blindwiderstand

$$X = \operatorname{Im}(\underline{Z}) = Z \cdot \sin(\varphi) \quad \text{Ohm}$$

Blindleitwert

$$B = \operatorname{Im}(\underline{Y}) = \frac{1}{X} \quad \neq \frac{1}{X} \quad \text{Siemens}$$

Phasenverschiebung

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\underline{Z})}{\operatorname{Re}(\underline{Z})}\right) \quad \text{Radian}$$

$$\text{Komplexe Leistung } \underline{S} = P + jQ = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{U^2}{\underline{Z}^*} = I^2 \cdot \underline{Z} \quad \text{W}$$

$$\text{Scheinleistung } S = U \cdot I = \frac{U^2}{Z} = I^2 \cdot Z = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{VA}$$

$$\text{Wirkleistung } P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = S \cdot \cos(\varphi) = I^2 \cdot \operatorname{Re}(\underline{Z}) \quad \text{W}$$

$$\text{Blindleistung } Q = \operatorname{Im}(\underline{S}) = S \cdot \sin(\varphi) = P \cdot \tan(\varphi) \quad \text{Var}$$

$$\text{Leistungsfaktor } \lambda = \frac{P}{S} = \frac{P}{U \cdot I} = \cos(\varphi) \quad (\text{letzteres nur bei sinusförmigen Schwingungen})$$