Matemática I

Encuentro 4: “Teoría de Conjuntos.”

MAT√∃MÁTICA

Sumario

- ¿Qué es un conjunto?

- Nociones sobre conjuntos: elementos de un conjunto, subconjunto propio, conjunto potencia.

- Operaciones entre conjuntos: unión, intersección, diferencia.

- Conjunto universo y complemento..

- Producto Cartesiano.

¿Qué es un conjunto?

Definición Intuitiva Conjunto

- Un ***conjunto*** es una colección arbitraria (no ordenada) de objetos que responden a un mismo sistema de restricciones. Cada miembro del conjunto es llamado elemento del conjunto.

Ejemplos de conjuntos

- Grupo de mesas del aula.
- Grupo de sillas del aula.
- Conjunto de vocales.
- Grupo de estudiantes.
- Etc, etc.

Símbolos utilizados en la Teoría de Conjuntos

Símbolo	Significado
$\in$	Pertenece
$\notin$	no pertenece
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
Δ	diferencia simétrica
$\subseteq$	Subconjunto
$\nsubseteq$	no subconjunto
$\subset$	subconjunto propio
$\neq$	Distinto
$=$	Igual
$/$	tal que
$\setminus$	diferencia

Denotación de los Conjuntos y Elementos

- ***forma extensional:***

  mediante un listado.

Ejemplo:

A={3,5,4,1,2}

- ***forma intencional:***

  mediante una fórmula matemática.

Ejemplo:

A={x que partenece a R: 0<x<6}

Subconjunto

- Sean ***A*** y ***B*** dos conjuntos, entenderemos que ***A*** es ***subconjunto*** de ***B***, lo cual representaremos por $A \subseteq B$, si para todo elemento $x \in A$ se tiene que $x \in B$.

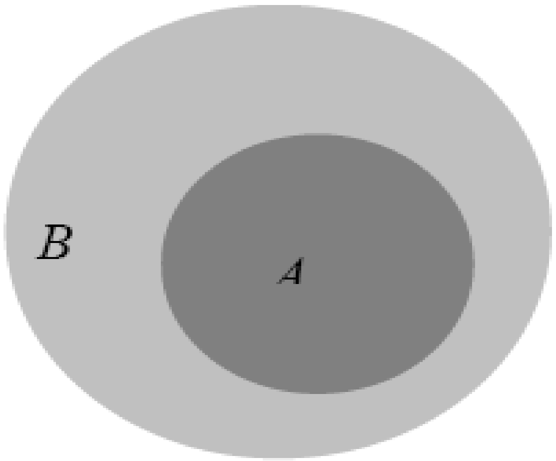

Figura 1: $A \subseteq B$

Ejemplo

Sean ***A*** *y* ***B*** conjuntos, tales que:

- A= {x: x es un estudiante de la UCI}
- B= {x: x es un estudiante de la FRCA de la UCI}

entonces: $B \subseteq A$

Ejercicio de comprobación:

Sean los conjuntos $A=\{1\}$, $B=\{1,3\}$, $C=\{1,2,3\}$, $D=\{3,4\}$ y $E=\{1,2,4\}$

Decir Verdadero ó Falso justificando su respuesta:

a) $D \not\subseteq E$

b) $B \subseteq C$

c) $A \not\subseteq C$

Subconjunto Propio

- Diremos que *A* es un ***subconjunto propio*** de *B*, lo cual se denota por $A \subset B$ si *A* es subconjunto de *B* y desigual de *B*, es decir, $A \subseteq B$ y $A \neq B$

Ejemplo:

Sea *B* = *{a, k, c, d, z}*. Son subconjuntos propios de B, los conjuntos:

A = *{k}* y *C* = *{z, d, c}*.

Tipos de Conjuntos

Conjunto vacío $(\emptyset)$: Un conjunto es vacío cuando ninguno de sus elementos cumple con una condición dada.

Ejemplo :

El conjunto de los números enteros entre 3 y 4.

Conjunto unitario: Un conjunto se llama unitario si tiene sólo un elemento.

Ejemplo:

El conjunto de los números enteros mayores que 12 y menores que 14.

Tipos de Conjuntos

Conjunto finito: Un conjunto es finito si consta de cierto número de elementos distintos, es decir si al contar los diferentes elementos el proceso puede acabar.

Ejemplo: El conjunto de las vocales.

Conjunto infinito: Es cuando no podemos contar todos y cada uno de los elementos de un conjunto**.**

Ejemplo: El conjunto formado por las estrellas del Universo.

Tipos de Conjuntos

Conjunto Universo (U): Es el conjunto que contiene todos los elementos en estudio.

Conjunto Potencia de B: Es un conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos del conjunto B y se denota por P(B).

Ejemplo 3.5: Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$

entonces $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Operaciones entre conjuntos

- ***Unión de conjuntos:***

  Sean *A* y *B* conjuntos, llamamos conjunto ***unión*** de *A* y *B*, y lo denotamos por *AUB*, al conjunto formado por los elementos de *A* y *B*.

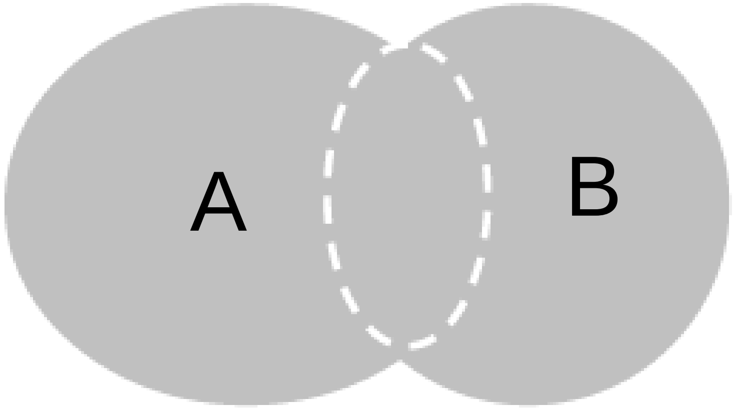

Figura 2: Unión de conjuntos $A \cup B$

Ejemplo

Sean: A={z,k,j} y B={d,a,b,j},

entonces:

A U B={z,k,j,d,a,b}

Ejercicio:

Expresar de forma extensional el siguiente conjunto:

[-1,2] U [0,3]

Operaciones entre conjuntos

- ***Intersección de conjuntos:***

  Sean A y B conjuntos, llamamos ***intersección*** de A y B y lo denotamos por $A \cap B$ al conjunto formado por los elementos comunes de A y B.

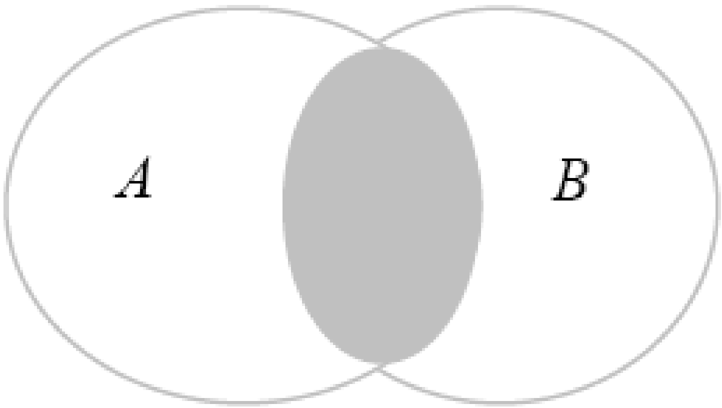

Figura 3: Intersección de conjuntos $A \cap B$

Ejemplo

Sean:

A={1, 2, 3, 4, 5, 6} y *B={3, 4, 5, 6, 7, 8}*

entonces:

$$A \cap B = \{3, 4, 5, 6\}$$

Ejercicio:

Hallar la intersección entre los conjuntos:

$$\boldsymbol{A} = \{x/x \in \mathbb{N}; \mathbf{3} \leq x \leq \mathbf{8}\}$$

$$\boldsymbol{B} = \{x/x \in \mathbb{N}; \mathbf{0} < x < 6\}$$

Operaciones entre Conjuntos

- ***Diferencia entre conjuntos:***

Sean *A* y *B* conjuntos, llamamos ***diferencia*** de *A* y *B* y lo denotamos por *A**B* ó *A*-*B*, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a *A*, pero no a *B*.

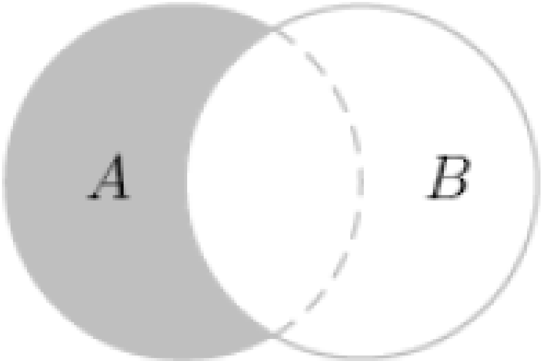

Figura 4: Diferencia de conjuntos $A \setminus B$

Ejemplo

Sean los conjuntos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$,

entonces:

$A \backslash B = \{1, 2, 3\}$ y $B \backslash A = \{7, 8\}$.

Ejercicio:

Sean:

$$\boldsymbol{A} = \{x/x \in \mathbb{N}; 3 \leq x \leq 8\}$$

$$\boldsymbol{B} = \{x/x \in \mathbb{N}; 0 < x < 6\}$$

represente A\B.

Para investigar:

Investigar para la próxima clase:

- Cuál es la Diferencia Simétrica entre dos conjuntos?

- Cuáles son las Leyes de la Teoría de conjuntos?

Conjuntos Disjuntos

Cuál será la intersección de dos conjuntos que no tienen elementos en común?

Conjuntos Disjuntos

Definición: Dos conjuntos A y B son disjuntos si no tienen ningún elemento en común, es decir su intersección es igual al conjunto vacio.

Ejercicio:
Sean los conjuntos: A={x/x es una letra}, B={x/x es un número} y C={a,b,c}.
Diga cuáles de los conjuntos planteados son disjuntos.

Partición de un Conjunto

Definición:

La partición de un conjunto A no vacío es una colección de subconjuntos no vacíos de A que cumplen:

1. Todos sean disjuntos.
2. La unión de todos de cómo resultado el propio conjunto A.

Partición de un Conjunto

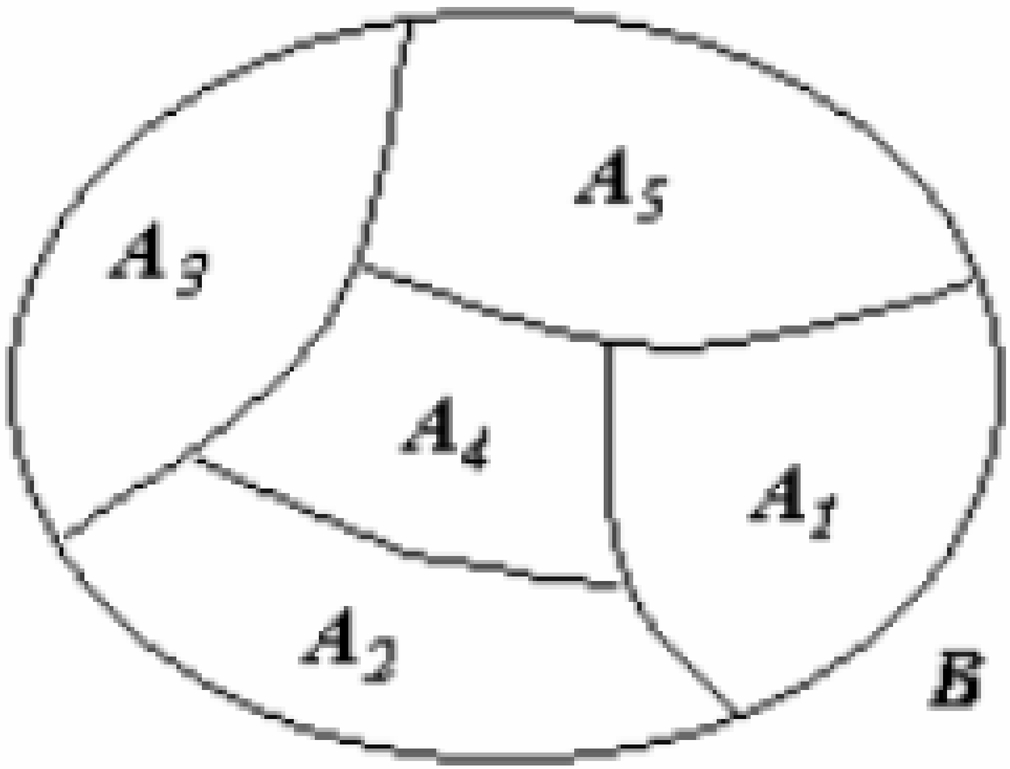

Figura 1: Particiones de un conjunto A.

Partición de un Conjunto

Sean: $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$A_1=\{1,2,3,4\}$ $A_2=\{5,6,7\}$

$A_3=\{4,5,7,9\}$ $A_4=\{8,9,10\}$

y $A_5=\{1,2,3,6,8,10\}$

Los conjuntos $P_1=\{A_1, A_2, A4\}$ y $P_2=\{A_3, A_5\}$ son particiones del conjunto A.

El conjunto $P_3=\{A_1, A_3, A_4\}$ no es partición de A, puesto que *4* pertenece a A_1 y A_3.

Cardinalidad

Cardinalidad de un conjunto finito:

La cardinalidad ó número cardinal de un conjunto finito es la cantidad de elementos que tiene el conjunto.

se denota: n(A) y se lee “n de A”, representa el número de cardinalidad del conjunto A.

Ejemplo

Sean los conjuntos:

$A=\{a,b,c,f,g\}$, $B=\{3,5,6,2\}$

Entonces sus cardinalidades son:

$n(A)=5$ y $n(B)=4$

Conjuntos Equivalentes

Dos conjuntos son ***equivalentes*** si tienen la misma cardinalidad, los elementos no tienen que ser iguales.

Ejemplo:

Sean los conjuntos A={1,3,6} y B={9,2,5} la cardinalidad de ambos es 3 por tanto son conjuntos equivalentes.

Producto Cartesiano

Definición:

Sean A y B conjuntos, no necesariamente distintos, llamaremos ***conjunto producto*** ó ***producto cartesiano*** de A por B y se denota mediante $A \times B$, al conjunto que tiene como elementos los pares ordenados de la forma (***a***, ***b***) tales que ***a*** *pertenece a* A y ***b*** pertenece a B.

Ejemplo

Sean los conjuntos

$A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$, entonces:

- $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

- $B \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

- $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

Resumen

1. ¿Qué es un conjunto?

2. ¿Cuándo un conjunto es vacío?

3. ¿Cuándo un conjunto A es subconjunto de un conjunto B?

4. ¿Cuándo un conjunto A es subconjunto propio de un conjunto B?

5. ¿Cuándo se dice que dos conjuntos son disjuntos?

Resumen

6. ¿Cuál es la cantidad de elementos del conjunto potencia de un conjunto A que tiene n elementos?

7. ¿A qué llamamos conjunto unión de A y B?

8. ¿A qué llamamos conjunto intercepción de A y B?

9. ¿A qué llamamos conjunto deferencia de A y B?

10. ¿A que llamamos producto cartesiano de dos conjuntos?

Resumen

12. ¿Cómo se obtiene el conjunto complemento de un conjunto A?

13. ¿A qué llamamos cardinalidad de un conjunto?

14. ¿Cómo se denota la cardinalidad de un conjunto?

15. ¿Cuándo dos conjuntos son iguales?

16. ¿Qué se entiende por partición de un conjunto?

Ejercicios:

a) $\phi \subseteq \{\phi\}$

b) $\phi \in \{\phi\}$

c) $A \in P(A)$

d) $\phi \subseteq P(A)$

e) 2 Є P({2,3,5})

f) n(P({2,3,5}))=8

Ejercicios:

2. Sean los conjuntos F={1,3,6,7}, G={3,9,0,8,6}, H={4,2,0,7} y $U = \{x \mid 0 \leq x \leq 10\}$, Determine:

$a)$ $[F \cup G]^c$

$b)$ $G \cap H$

$c)$ $H \setminus G$

$d)$ $P(F)$

$e)$ $F \times H$

Ejercicios:

A = {a, b}

A = {1} , B = {1, 3}, C = {1, 2, 3}, D = {3, 4}
E = {1, 2, 3}.

a) $A \subset C$

b) $B \subseteq D$

c) $D \not\subseteq E$

d) $\phi \subseteq C$

e) $B \neq D$

f) $1 \in D$

g) Los conjuntos C y D son disjuntos.

Ejercicios:

5. Sean los conjuntos

A = {x | x es un número natural menor que 4}
B ={3, 2, 0, 6, 7, 9}
C = {x | x es un entero menor que 4}

a) Determine una partición del conjunto A que tenga 3 subconjuntos.
b) Diga si los conjuntos A y C son iguales. Justifique su respuesta.

Fin