Matemática III

Conferencia $\int$

Sistemas Lineales de EDO

Profesor Instructor:
Lic. Juan Cruz Oduardo

September 14, 2024

Sumario: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales.
Objetivo: Resolver Sistemas E. D. Ordinarias.

Introducción

Que debo saber?

1. Derivar, Integral y Álgebra Elemental.
2. Álgebra Lineal (Operaciones con matrices y vectores, resolver SEL)
3. Resolver EDOs.

En esta conferencia aprenderemos a resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. A estos sistemas los llamaremos sistemas lineales. El tema abarca el estudio de los sistemas lineales de primer orden, así como de orden superior, con dos o más funciones desconocidas, en casos homogéneos y no homogéneos. Todos los sistemas lineales que se tratan en este tema son de coeficientes constantes.
El método de resolución se basa en la eliminación que se utiliza para la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas. En el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, el método de eliminación reduce el sistema a una sola ecuación diferencial de orden n con coeficientes constantes en términos de una de las variables.

Desarrollo

.:Definición 0.0.1 (Ecuación Diferencial Lineal):.
Una ecuación diferencial lineal es una ecuación en la que la función desconocida y sus derivadas tienen un grado de 1, y todas estas funciones se presentan de manera lineal. Matemáticamente, una ecuación diferencial lineal se expresa como:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=F(x)$$

Donde y es la función desconocida, $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_0(x)$ son funciones de x y $F(x)$ es una función de x (denominada término no homogéneo).
Ejemplos de ecuaciones diferenciales lineales son:
1. $\frac{dy}{dx}+y=\sin(x)$
2. $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=e^x$
3. $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{dy}{dx}+2y=\cos(x)$

Por otro lado, las ecuaciones diferenciales no lineales son aquellas en las que la función desconocida o sus derivadas tienen exponentes o grados distintos de 1, o en las que aparece multiplicación o división no lineal. Ejemplos de ecuaciones diferenciales no lineales son:
1. $\frac{dy}{dx}=y^2-x$
2. $y''=e^y+\sin(x)$
3. $\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{y}$

.:Definición 0.0.2 (Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales):.
Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es un conjunto de ecuaciones diferenciales donde las funciones desconocidas y sus derivadas son lineales. Matemáticamente, se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t)
\end{aligned}$$

Donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las funciones desconocidas dependientes de una variable independiente t. Los coeficientes $a_{ij}(t)$ y $b_i(t)$ son funciones conocidas que pueden depender de t. Estos sistemas se resuelven encontrando las funciones $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones del sistema.

.:Definición 0.0.3 (Ecuación Diferencial Lineal Homogénea):.
Una ecuación diferencial lineal homogénea es una ecuación en la que la función desconocida y y sus derivadas tienen coeficientes lineales y solo aparecen en términos homogéneos, es decir, no hay presencia de funciones no homogéneas (o términos independientes). Matemáticamente, se representa como:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

Donde y es la función desconocida, $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_0(x)$ son funciones de x que pueden depender de la variable independiente x pero no de términos independientes (constantes o funciones específicas de x).
Ejemplos de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas son:
1. $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0$
3. $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$
En contraste, una ecuación diferencial lineal no homogénea tiene términos no homogéneos (constantes o funciones específicas de x) que están presentes en la ecuación. Por ejemplo:
1. $\frac{dy}{dx} - 2y = e^x$
2. $y'' + 3y' + 2y = \sin(x)$
3. $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = \cos(x)$

.:*Ejemplo* *0.1*:.

Resuelve los siguientes Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Homogéneos:

a) $\begin{cases} x' + y = 0 \\ x' - y' = 0 \end{cases}$

Solución

Primeramente despejamos a x' en la segunda ecuación:

$x' = y'$

Sustituimos en la primera ecuación y nos queda:

$y' + y = 0$

Escrito de otra forma:

$\dfrac{dy}{dt} + y = 0$

Esta es una ecuación de variables separables, entonces:

$\dfrac{dy}{y} = -dt$

$\ln y = -t + C$

$y = e^{-t+C}$

$y(t) = Ce^{-t}$

Sustituimos este resultado en la primera ecuación:

$x' + Ce^{-t} = 0$

Escrito de otra forma:

$\dfrac{dx}{dt} + Ce^{-t} = 0$

Esta es una ecuación de variables separables, entonces:

$dx = -Ce^{-t}dt$

$x(t) = C_1e^{-t} + C_2$

Finalmente:

$$S = \begin{cases} x(t) = C_1e^{-t} + C_2 \\ y(t) = Ce^{-t} \end{cases}$$

b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$

Solución

Escrito de otra forma:

$$\begin{cases} x' = y \quad (1) \\ y' = -x \quad (2) \end{cases}$$

Por (1) tenemos que:

$y = x'$

Derivamos con respecto a t:

$y' = x''$

Sustituimos en (2):

$x'' = -x$

$x'' + x = 0$

Ecuación Homgenea:

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = i \quad \lambda = -i$

Solución:

$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

Derivamos con respecto a t:

$x'(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$

Sustituyendo en (1):

$y(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$

Finalmente:

$$S = \begin{cases} x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ y(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{cases}$$

c) $\begin{cases} x' - 4x - 7y = 0 \\ y' - x + 2y = 0 \end{cases}$

Solución

Despejamos a x en la 2^{da} EDO:

$x = y' + 2y$

Derivamos con respecto a t:

$x' = y'' + 2y'$

Sustituimos ambas ecuaciones en la 1^{era} EDO:

$(y'' + 2y') - 4(y' + 2y) - 7y = 0$

Elimimando paréntesis y reduciendo términos semejantes:

$y'' + 2y' - 4y' - 8y - 7y = 0$

$y'' + 2y' - 4y' - 8y - 7y = 0$

$y'' - 2y' - 15y = 0$

Ecuación homogenea:

$\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$

$(\lambda - 5)(\lambda + 3) = 0$

$(\lambda - 5) = 0 \quad (\lambda + 3) = 0$

$\lambda = 5 \quad \lambda = -3$

Solución:

$y(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-3t}$

Derivamos con respecto a t:

$y'(t) = 5C_1 e^{5t} - 3C_2 e^{-3t}$

Sustituyendo en el despeje de x:

$x = (5C_1e^{-5t} - 3C_2e^{-3t}) + 2(C_1e^{5t} + C_2e^{-3t})$

Eliminando paréntesis y reduciendo términos semejantes:

$x = 5C_1e^{5t} - 3C_2e^{-3t} + 2C_1e^{5t} + 2C_2e^{-3t}$

$\boxed{x(t) = 7C_1e^{5t} - C_2e^{-3t}}$

Finalmente:

$$S = \begin{cases} x(t) = 7C_1e^{5t} - C_2e^{-3t} \\ y(t) = C_1e^{5t} + C_2e^{-3t} \end{cases}$$

d) $\begin{cases} x' - x - y = 0 \\ y' - 3x + y = 0 \end{cases}$

Solución

Despejamos a y en la 1^{era} EDO:

$y = x' - x$

Derivamos con respecto a t:

$y' = x'' - x'$

Sustituimos ambas ecuaciones en la 2^{da} EDO:

$(x'' - x') - 3x + (x' - x) = 0$

Elimimando paréntesis y reduciendo términos semejantes:

$x''\underline{-x'} - 3x\underline{+x'} - x = 0$

$x'' - 4x = 0$

Ecuación homogenea:

$\lambda^2 - 4 = 0$

$(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$

$(\lambda + 2) = 0 \quad (\lambda - 2) = 0$

$\lambda = -2 \quad \lambda = 2$

Solución:

$\boxed{x(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{2t}}$

Derivamos con respecto a t:

$x'(t) = -2C_1e^{-2t} + 2C_2e^{2t}$

Sustituyendo en el despeje de y:

$y = (-2C_1e^{-2t} + 2C_2e^{2t}) - (C_1e^{-2t} + C_2e^{2t})$

Eliminando paréntesis y reduciendo términos semejantes:

$y = -2C_1e^{-2t} + 2C_2e^{2t} - C_1e^{-2t} - C_2e^{2t}$

$\boxed{y(t) = -3C_1e^{-2t} + C_2e^{2t}}$

Finalmente:

$$S = \begin{cases} x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} \\ y(t) = -3C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} \end{cases}$$

.:*Ejemplo 0.2*:.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales por el método de eliminación:

$$\begin{cases} x' - x + 2y = 0 \\ 3x + y' = 0 \end{cases}$$

Solución

Paso 1: Despejar una variable en función de la otra
Despejamos y en la primera ecuación:

$$y = \frac{1}{2}(x - x')$$

Paso 2: Derivar la expresión obtenida
Derivamos con respecto a t:

$$y' = \frac{1}{2}(x' - x'')$$

Paso 3: Sustituir en la segunda ecuación
Sustituimos y y y' en la segunda ecuación:

$$3x + \frac{1}{2}(x' - x'') = 0$$

Paso 4: Simplificar la ecuación
Multiplicamos por 2 para eliminar el denominador:

$$6x + x' - x'' = 0$$

Paso 5: Reordenar y reducir términos semejantes

$$x'' - x' - 6x = 0$$

Paso 6: Resolver la ecuación diferencial homogénea asociada
La ecuación característica será:

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

Resolviendo la ecuación característica:

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

Entonces, las raíces son $\lambda = 3$ y $\lambda = -2$.
Paso 7: Escribir la solución general de la ecuación homogénea
La solución general de la ecuación homogénea será:

$$x_h(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}$$

Paso 8: Encontrar y

Utilizamos la relación que encontramos antes:

$$y = \frac{1}{2}(x - x')$$

$$y = \frac{1}{2}(C_1e^{3t} + C_2e^{-2t}) - \frac{1}{2}(3C_1e^{3t} - 2C_2e^{-2t})$$

Paso 9: Solución general del sistema de ecuaciones
La solución general del sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1e^{3t} + C_2e^{-2t} \\ y(t) &= \frac{1}{2}(C_1e^{3t} + C_2e^{-2t}) - \frac{1}{2}(3C_1e^{3t} - 2C_2e^{-2t}) \end{aligned}$$

Ahora puedes ajustar las constantes C_1 y C_2 utilizando las condiciones iniciales o cualquier otra información proporcionada en el problema.

Conclusiones

En esta conferencia aprendendimos a resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales mediante el método de eliminación y sustitución.

Ejercicios Propuestos

Lineales homogéneas

Nivel Básico:

1. $\begin{cases} x' - y = 0 \\ 2x + y' = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' + y = 2 \\ -2x + y' = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' - 2y = 0 \\ 3x + 2y' = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' + 3y = 0 \\ 4x - y' = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' - 2y = 4 \\ 2x + y' = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' + y = 1 \\ -x + y' = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' - y = 3 \\ 2x + 3y' = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' + 4y = 0 \\ 3x - 2y' = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' + y = 5 \\ 2x - y' = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' - 2y = 0 \\ 3x + 2y' = 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' + y = 0 \\ -2x + y' = 4 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' - 3y = 2 \\ 2x + 3y' = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' + 2y = 3 \\ -x - y' = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' - 2y = 1 \\ 3x - y' = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' + 3y = 0 \\ -2x + y' = 4 \end{cases}$

Nivel Medio:

1. $\begin{cases} x' - y = \sin(t) \\ 2x + y' = \cos(t) \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' + y = t^2 \\ -2x + y' = \sqrt{t} \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' - 2y = e^t \\ 3x + 2y' = \ln(t) \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' + 3y = \frac{1}{t} \\ 4x - y' = t^3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' - 2y = t^2 + e^t \\ 2x + y' = \sin(t) - \cos(t) \end{cases}$

Bibliografía

1. Curso de Matemáticas Superiores para ingenieros, Tomo II. M. Krasnov y otros
2. Calculus Volumen 1. Tom M. Apostol
3. Matemáticas Superiores en Ejercicios y Problemas. Parte 2, P. E. Dankó y Otros.
4. Problemas de Análisis Matemático. B. Demidovich.
5. Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de A. Kiselev, M. Krasnov y G. Makarenko.
6. Cálculo con Geometría Analítica, Tomo II. Earl W. Swokowski
7. Ecuaciones Diferenciales, Daniel