Matemática I

Encuentro 1: “Presentación de la asignatura. Lógica matemática”

Profesor: Ing. Raly Martínez Porra

Estructura

- **Tema I** (Lógica Matemática)
  - Encuentro 1
  - Encuentro 2
  - Encuentro 3
- **Tema 2** (Teoría Conjuntos)
  - Encuentro 4
- **Tema 3** (Sistemas de Numeración)
  - Encuentro 5
- **Tema 4** (Algebra Lineal)
  - Encuentro 6
  - Encuentro 7

Sistema Evaluación

Preguntas Escritas: Todos los encuentros a partir del 2

Prueba Final: Final del semestre (solo tiene derecho el estudiante que tenga aprobado más del 60% de las preguntas escritas realizadas durante el semestre)

Los estudiantes con más del 30% de ausencias (12 hs) pierde la asignatura automáticamente

Sumario:

1. Las proposiciones. Proposiciones simples y compuestas.
2. Lenguaje de la Lógica proposicional.
3. Operaciones de la Lógica proposicional.
4. Tablas de verdad. Interpretación de fórmulas.
5. Tautologías, contradicciones y contingencias.

DESARROLLO

Desarrollo:

*Una **proposición** o **enunciado** es una oración enunciativa que puede tomar y toma uno y sólo un valor de un conjunto de significados atribuibles.*

*Llamaremos conjunto de significados atribuibles **S**, a un conjunto no vacío de la forma S = {1, 0} ó S = {V, F}.*

Donde el 1 es verdadero y el 0 es falso.
(en el curso utilizaremos los valores numéricos.)

Desarrollo:

- **Proposición:**
  - Afirmación que tiene que ser verdadera o falsa pero no ambas a la vez.

- Denotaremos las proposiciones con letras minúsculas del alfabeto latino seguidas de dos puntos y su enunciado.

Desarrollo:

Ejemplo de proposiciones

s: los estudiantes aprobarán la prueba

r: el sol es amarillo

p: la playa queda lejos

(no constituyen proposiciones las interrogaciones, los imperativos o expresiones modales)

Desarrollo:

¿Cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones?
De ser proposiciones, ¿qué valor de **S** *toman?*

l : El 7 es divisible por 2.

m : Existen pares (x, y) de números reales tales que y = x + 2.

n : Hola, ¿Cómo estás?

o : ¡Siéntese aquí!

Operadores lógicos:

Conjunción “y”

q: El Sol gira alrededor de la Tierra <u>*y*</u> es el centro del sistema solar.

- Podemos plantear la proposición ***q*** *componiendo las proposiciones* ***q_1*** *y* ***q_2*** *usando la partícula de* ***conjunción “y”.***

q_1: el sol gira al rededor del sol
q_2: el sol es el centro del sstema solar

Operadores lógicos:

Disyunción “o”

r: 13 es un número primo <u>*o*</u> par.

- La proposición ***r*** *se obtiene mediante la composición de* ***r_1*** *y* ***r_2*** *a través de la partícula de* **disyunción “o”**

***r_1*:** *13 es un número primo*
***r_2*:** *13 es un número par*

Operadores lógicos:

Implicación “si p entonces q”

s: *Si* AB es paralela a CD, *entonces* CD es paralela a AB.

- *s constituye el hecho de que se cumpla o no la proposición s_2 como una* ***implicación*** *de que sea verdadera o no la proposición s_1.*

s_1: *AB es paralela a CD*
s_2: *CD es paralela a AB*

Operadores lógicos:

Bicondicional "p si y solo si q"

t: 3 Є A *si y solo si* {3}UA=A.

- *t establece el hecho de que sean equivalentes las proposiciones t_1 y t_2.* ***(bicondicional)***

t_1: *3 Є A*
t_2: *{3}UA=A*

Operadores lógicos:

Negación “no”

p: Ayer no llovió

• La proposición *p constituye la* ***negación*** *de la proposición:*

p_1: *Ayer llovió.*

Propocisiones compuestas:

Las proposiciones compuestas son aquellas que resultan de la combinación de dos o más proposiciones simples.

Ejemplo de proposiciones compuestas:

q: *El Sol gira alrededor de la Tierra y es el centro del sistema solar.*

r: *13 es un número primo o par.*

s: *Si AB es paralela a CD, entonces CD es paralela a AB.*

t: $3 \in A$ *si y solo si* $\{3\} \cup A = A$.

Lenguaje Proposicional:

- **Constantes proposicionales**

- **Variables proposicionales**

- ***Operadores lógicos***

Lenguaje Proposicional:

- **Constantes proposicionales:** El 1 y 0, para denotar las proposiciones que son verdaderas y falsas respectivamente.

- **Variables proposicionales:** Para denotar las proposiciones usaremos las letras del alfabeto latino: *p*, *q*, *r*, *s*, *etc.*

Lenguaje Proposicional:

❑**Operadores lógicos:** Constituirán los símbolos para denotar las operaciones proposicionales:

- Negación, será denotada por el símbolo $\neg$

•Conjunción, será denotada por el símbolo $\wedge$

•Disyunción, será denotada por el símbolo $\vee$

•Implicación, será denotada por el símbolo $\Rightarrow$

•Bicondicional, será denotada por el símbolo $\Leftrightarrow$

Reglas de formación de fórmulas:

1. *Toda constante o variable proposicional es una fórmula.*

2. *Si A es una fórmula, entonces: ¬[A] es también una fórmula.*

3. *Si A y B son fórmulas, entonces :*
$[A \vee B]$, $[A \wedge B]$, $[A \Rightarrow B]$ y $[A \Leftrightarrow B]$ *también son fórmulas.*

4. *No hay fórmulas en el lenguaje proposicional que no se rijan por las reglas 1, 2 y* 3.

Ejemplos:

EJEMPLO 1:

Analicemos la expresión: $\neg[p \wedge q] \vee \neg q$

La expresión del ejemplo 1 constituye una fórmula ?

EJEMPLO 2:

La expresión $[p \Rightarrow] \vee q$

La expresión del ejemplo 2 constituye una fórmula ?

Álgebra proposicional:

Qué valores (1 ó 0) le daríamos a una proposición compuesta?

Tablas de la verdad:

Negación:

p	$\neg p$
0	1
1	0

La negación de una proposición p es la proposición ¬p, cuyo valor es 1 si p tiene valor 0, y 0 si p tiene valor 1.

Tablas de la verdad:

Conjunción:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La operación de conjunción, denotada por $\wedge$, entre dos proposiciones **p** y **q**, es la proposición **p** $\wedge$ **q**, cuyo valor es **1** si ambas proposiciones **p** y **q** tienen valor **1**, en los demás casos el valor es **0**.

Tablas de la verdad:

Disyunción:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

*la proposición compuesta $p \vee q$ toma valor **0** (falso) si y sólo si ambas proposiciones **p**, **q** tienen valor **0** (son falsas), en todos los demás casos $p \vee q$ toma valor **1** (verdadero).*

Tablas de la verdad:

Implicación:

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

La operación implicación, denotada por $\Rightarrow$ *, entre dos proposiciones* ***p*** *y* ***q****, es la proposición* $p \Rightarrow q$ *, cuyo valor es* ***0*** *si* ***p*** *tiene valor* ***1*** *y* ***q*** *tiene valor* ***0****, en los demás casos su valor es* ***1****.*

Tablas de la verdad:

Bicondicional:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La operación bicondicional entre dos proposiciones **p** *y* **q**, *es la proposición* $p \Leftrightarrow q$ *cuyo valor es* **1** *si* **p** *y* **q** *tienen el mismo valor, en los demás casos su valor es* **0**.

Interpretación de fórmulas.

Se define una interpretación de una fórmula como una asignación de valores veritativos a las variables proposicionales que ésta contiene.

Interpretación de fórmulas.

A la hora de interpretar una fórmula se seguirá el siguiente orden para evaluar las subexpresiones:

1. *Negación de variables o constantes.*
2. *Fórmulas entre agrupadores.*
3. *Negación a fórmulas.*
4. *Conjunciones.*
5. *Disyunciones.*
6. *Implicaciones.*
7. *Bicondicionales.*

Ejemplo:

Calculemos el valor de la fórmula: $\neg p \vee q \Rightarrow \neg[r \Leftrightarrow [s \wedge t]]$

para la interpretación *p:* 1, *q:* 1, *r:* 0, *s:* 1 *y* *t:* 1.

$\neg p$	$\vee$	q	$\Rightarrow$	$\neg$	$[r$	$\Leftrightarrow$	$[s$	$\wedge$	$t]]$
0									
								1	
						0			
				1					
	1								
			1						

La fórmula es verdadera para la interpretación propuesta.

Interpretación de fórmulas:

Construir una tabla de la verdad para la fórmula:

$$[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [[\neg p \vee r] \wedge 1]$$

el número de interpretaciones es 2^n
con n= # variables

Interpretación de fórmulas:

p	q	r	$[p \Longrightarrow q]$	$\Longleftrightarrow$	$[[\neg p$	$\vee\ r]$	$\wedge\ \mathbf{1}]$
0	0	0	1	**1**	1	1	1
0	0	1	1	**1**	1	1	1
0	1	0	1	**1**	1	1	1
0	1	1	1	**1**	1	1	1
1	0	0	0	**1**	0	0	0
1	0	1	0	**0**	0	1	1
1	1	0	1	**0**	0	0	0
1	1	1	1	**1**	0	1	1

Interpretación de fórmulas:

Modelos y Contramodelos:

Las interpretaciones con valor ***1*** *reciben el nombre de* ***modelos****. Las interpretaciones con valor* ***0*** *reciben el nombre* ***contramodelos****.*

p	q	$p \Rightarrow q$	
0	0	1	*Modelo*
0	1	1	
1	0	0	*Contramodelo*
1	1	1	

Interpretación de fórmulas:

Tautología:

Llamaremos ***tautologías*** *a aquellas proposiciones que cumplen que todas sus interpretaciones constituyen modelos.*

Ejemplo de Tautología:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

Interpretación de fórmulas:

Contradición:

Llamaremos ***contradicciones*** *a las proposiciones complejas que cumplen que todas sus interpretaciones constituyen contramodelos.*

Ejemplo de Contradicción:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
0	1	0
1	0	0

Interpretación de fórmulas:

Contingencia:

*Llamaremos **contingencias** a aquellas proposiciones compuestas que cumplen que entre sus interpretaciones encontramos tanto modelos como contramodelos.*

Ejemplo de Contingencia:

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Resumen

1. ¿Qué es una proposición?

2. ¿Cómo se clasifica una proposición de acuerdo a su estructura?

3. ¿Cuáles son los elementos que componen el alfabeto proposicional?

4. Mencione las reglas para la formación de fórmulas proposicionales.

Resumen

5. ¿Cuándo son verdaderos y cuándo falsos los operadores lógicos?

6. ¿A qué llamamos interpretación de una fórmula?

7. ¿Cuántas interpretaciones tiene una fórmula?

8. ¿Cuál es el orden de evaluación de las sub-expresiones durante el proceso de interpretación de una fórmula?

Resumen

9. ¿Qué es un modelo? ¿y un contramodelo?

10. ¿Qué es una tautología?

11. ¿Qué es una contradicción?

12. ¿Qué es una contingencia?

Ejercicios

1. ¿Cuáles de las siguientes sentencias son proposiciones?

a) ¿Es 2 un número positivo?

b) El documento trata de Ciencias Informáticas.

c) Estudio Lógica pero no Biología.

d) $A \subseteq B$ si y solo si $A \cap B = A$.

e) Si duermo mucho en el día, estaré despierto en la noche.

Ejercicios.

2. Sean *p, q, r las siguientes proposiciones,*

p: *Estudiaré matemática discreta,* ***q:*** *Iré a un cine y*

r: *Estoy de buen humor.*

Escribir las siguientes proposiciones en lenguaje proposicional o natural según corresponda.

a) Si no estoy de buen humor, entonces iré a un cine.

b) No iré a un cine y estudiaré matemática discreta.

c) Iré a un cine sólo si no estudio matemática discreta.

d) Si no estudio matemática discreta, entonces no estoy de buen humor.

e) $[\neg p \wedge q] \Rightarrow r$ f) $\neg r \Rightarrow [\neg q \vee p]$ g) $[q \wedge \neg p] \Rightarrow r$

Ejercicios.

3. Definir de forma conveniente las proposiciones necesarias para expresar en lenguaje proposicional los siguientes enunciados.

a) Sueño con mi hogar solamente si estoy despierto.

b) Trabajar duramente me basta para estar despierto.

c) Me es necesario estar despierto para no soñar con mi hogar.

Ejercicios.

4. Verifique cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas. En los casos que no lo sean conviértalas a ellas.

a) $[p \Rightarrow q] \vee 1 \wedge [\neg p \vee \neg q]$

b) $[r \neg s] \Leftrightarrow [s \Rightarrow p]$

c) $t \vee r \Rightarrow [p \wedge r \vee t]$

d) $[p \Leftrightarrow r] \Rightarrow t[\neg[t]]$

e) $[0 \wedge p] \Rightarrow [t[1]]$

Ejercicios.

5. Halle los valores de verdad de las siguientes fórmulas para cada una de sus interpretaciones y clasifíquelas en Tautologías, Contradicciones o Contingencias.

a) $[p \vee \neg q] \vee [\neg p \wedge q]$

b) $[p \wedge q] \Rightarrow [\neg[\neg p \vee \neg q]]$

c) $[p \Rightarrow q] \Leftrightarrow [\neg[p \wedge \neg q]]$

d) $[p \vee q] \Rightarrow [\neg[\neg p \wedge \neg q]]$