

Matemática I

Encuentro 2: “Lógica matemática”

Sumario:

➤ Estructuras Deductivas.



INTRODUCCIÓN



Introducción:

Ejemplo 1.1

Tomemos como premisa la siguiente proposición

p: los animales sin bilis tienen larga vida y además

q: el hombre, el caballo y la mula no tienen bilis.

Entonces podemos deducir lo siguiente

r: el hombre, el caballo y la mula tienen larga vida.

Razonamiento Deductivo: siempre está orientado desde lo universal hacia lo particular.



DESARROLLO

Estructuras Deductivas:

✓ Los seres humanos razonan *deductivamente a partir de conocimiento que han adquirido para llegar a nuevo conocimiento.*

Conocimiento adquirido:

(1) **x** es abuelo de **y**, si **x** es padre de **z** y **z** es padre de **y**
(definición de abuelo)

(2) José es padre de Luis (un hecho)

(3) Luis es padre de Ana (un hecho)

Nuevo conocimiento:

(4) José es abuelo de Ana

Estructuras Deductivas:

Sean $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ y $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, dos conjuntos de proposiciones. Llamaremos estructura deductiva con premisas P y conclusiones Q a la relación que establece el cumplimiento de las proposiciones Q bajo la suposición del cumplimiento de las proposiciones P , lo cual denotaremos por:

$$p_1, p_2, \dots, p_n \vdash q_1, q_2, \dots, q_m$$

donde el signo \vdash es el signo de deducción o consecuencia lógica y se lee:

“A partir de p_1, p_2, \dots, p_n se deduce q_1, q_2, \dots, q_m ”.

Ejemplo de Estructura Deductiva:

Planteemos la estructura deductiva que establece que si cierto número $a \in \mathbb{Z}$ y es divisible por 2, entonces podemos deducir que a es par.

Conclusión:

q : “ a es par”.

Premisa:

p : “ a es divisible por 2”.

A partir de p solamente
no podemos deducir q



$p1: a \in \mathbb{Z}$ es par si a es divisible por 2

Estructura Deductiva: $p, p1 \vdash q$

Fácilmente verificamos que podemos expresar a $p1$ como $p \Rightarrow q$ luego nuestra estructura deductiva también puede ser escrita como: $p, p \Rightarrow q \vdash q$

Estructuras Deductivas:

Cómo saber si una estructura deductiva es correcta?

Una estructura deductiva es correcta **si y solo si** todo modelo común de las premisas es un modelo común de las conclusiones.

Es decir si toda interpretación que hace ciertas a todas las premisas también hace ciertas a todas las conclusiones.

Estructuras Deductivas:

Ejemplo:

Probemos que la estructura deductiva: $p, p \Rightarrow q \vdash q$,
es correcta .

Para ello construyamos una tabla de verdad donde
aparezcan tanto las premisas como las conclusiones.

Estructuras Deductivas:

<i>Variables</i>		<i>Premisas</i>		<i>Conclusiones</i>
p	q	p	$p \Rightarrow q$	q
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Los modelos comunes para las premisas son modelos para las conclusiones, por tanto podemos decir que esta estructura deductiva es *semánticamente correcta*.

Estructuras Deductivas:

Ejemplo:

Analicemos si es correcta o no la estructura deductiva:

$$\neg p, p \Rightarrow q \vdash \neg q$$

Estructuras Deductivas:

<i>Variables</i>		<i>Premisas</i>		<i>Conclusiones</i>
p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0

Existen dos modelos comunes para las premisas, el primero es también un modelo de la conclusión, pero esto no ocurre con el segundo, de modo que la estructura deductiva no es correcta.

Ejercicios.

1. Dado el siguiente razonamiento deductivo:

“Si es enero y nos azota un frente frío entonces no hay ciclones o no es enero. Conozco que nos azotan ciclones. Deduzco que no es enero y no nos azotan frentes fríos”

a) Exprese la estructura deductiva en lenguaje proposicional declarando variables proposicionales convenientemente.

b) Determine si la estructura deductiva es semánticamente correcta. Justifique su respuesta.

Ejercicios.

2. Dado el siguiente razonamiento deductivo:

“EL FC Barcelona es campeón si y sólo si clasifica y vence al Real Madrid. Como el Barcelona es campeón deduzco que el Barcelona vence al Real Madrid”

a) Exprese la estructura deductiva en lenguaje proposicional declarando variables proposicionales convenientemente.

b) Determine si la estructura deductiva es semánticamente correcta. Justifique su respuesta

Ejercicios.

3. Para cada una de las siguientes estructuras deductivas, determine si es correcta o no:

a) $p \Rightarrow q, \neg q \vdash p$

b) $p \Rightarrow r, p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow r, p \Rightarrow q$

c) $p \Rightarrow [q \Rightarrow r], q \Rightarrow [p \Rightarrow r] \vdash p \vee q \Rightarrow r$

d) $[p \Rightarrow q] \wedge [r \Rightarrow s], p \vee r \vdash q \vee s, r$