Matemática III

Conferencia $\int$

Integración Numérica

Profesor Instructor:
Lic. Juan Cruz Oduardo

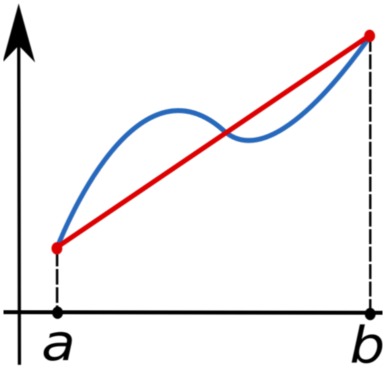
December 3, 2024

Sumario:
Objetivo:

Introducción

Integración por el métodos de los Trapecios

.:Definición 0.0.1 (Regla del trapecio):.
La regla del trapecio es un método de integración numérica, es decir, un método para calcular aproximadamente el valor de la integral definida.
La regla se basa en aproximar el valor de la integral de f(x) por el de la función lineal que pasa a través de los puntos(a, f(a)) y (b, f(b)). La integral de ésta es igual al área del trapecio bajo la gráfica de la función lineal.
Esta regla se puede utilizar para integrales que no se puede resolver por ningún otro método. Y solo es para integrales definidas.



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \tag{1}$$

La fórmula del error de la regla del trapecio para aproximar la integral de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ con n subintervalos está dada por:

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c)$$

Donde:
- E_t es el error de la aproximación de la regla del trapecio.
- n es el número de subintervalos.
- $f''(c)$ es la segunda derivada de la función $f(x)$ evaluada en un punto c dentro del intervalo $[a, b]$.
Esta fórmula proporciona una estimación del error cometido al utilizar la regla del trapecio para aproximar la integral de una función, basándose en la segunda derivada de la función y en el tamaño de los subintervalos utilizados en la aproximación.
donde:

$h = \dfrac{b-a}{n}$ y $x_0 = a$, $x_n = b$
los x_i se pueden hallar por la siguiente fórmula:

$$x_i = a + i * h$$

.:Ejemplo 0.1:.

Claro, aquí tienes dos ejemplos resueltos utilizando la regla del trapecio para aproximar integrales:
—
Ejemplo 1: $n = 4$
Cálculo de la integral utilizando la regla del trapecio con $n = 4$
Dada la función $f(x) = x^2 + 3x$, queremos aproximar la integral de $f(x)$ en el intervalo $[0, 2]$ utilizando la regla del trapecio con $n = 4$ subintervalos.
Paso 1: Calcular x_i y $f(x_i)$
Con 4 subintervalos, $h = \frac{2-0}{4} = 0.5$.

índice i	x_i	$f(x_i) = x_i^2 + 3x_i$
0	0	0
1	0.5	1.75
2	1	4
3	1.5	6.75
4	2	10

Paso 2: Aplicar la regla del trapecio
Sustituimos los valores de $f(x_i)$ en la fórmula de la regla del trapecio y realizamos los cálculos:

$$\begin{aligned}\text{Integral aproximada} &\approx 0.5\left[\frac{0+10}{2} + 2(1.75 + 4 + 6.75)\right]\\ &\approx 0.5 \times [5 + 2(12.5)]\\ &\approx 0.5 \times 30\\ &\approx 15\end{aligned}$$

Por lo tanto, la aproximación de la integral de $f(x)$ en el intervalo $[0, 2]$ utilizando la regla del trapecio con $n = 4$ subintervalos es aproximadamente 15.
—

.:Ejemplo 0.2:.

Ejemplo 2: $n = 6$
Cálculo de la integral utilizando la regla del trapecio con $n = 6$
Dada la función $g(x) = 2x + 1$, queremos aproximar la integral de $g(x)$ en el intervalo $[1, 3]$ utilizando la regla del trapecio con $n = 6$ subintervalos.
Paso 1: Calcular x_i y $g(x_i)$
Con 6 subintervalos, $h = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$.

índice i	x_i	$g(x_i) = 2x_i + 1$
0	1	3
1	$\frac{4}{3}$	$\frac{11}{3}$
2	$\frac{5}{3}$	$\frac{13}{3}$
3	2	5
4	$\frac{7}{3}$	$\frac{15}{3}$
5	$\frac{8}{3}$	$\frac{17}{3}$
6	3	7

Paso 2: Aplicar la regla del trapecio

Sustituimos los valores de $g(x_i)$ en la fórmula de la regla del trapecio y realizamos los cálculos:

$$\begin{aligned}\text{Integral aproximada} &\approx \frac{1}{3}\left[\frac{3+7}{2}+2\left(\frac{11}{3}+\frac{13}{3}+5+\frac{15}{3}+\frac{17}{3}+7\right)\right]\\ &\approx \frac{1}{3}\times\left[5+2\times\frac{74}{3}\right]\\ &\approx \frac{1}{3}\times\frac{163}{3}\\ &\approx 18.1111\end{aligned}$$

Por lo tanto, la aproximación de la integral de $g(x)$ en el intervalo $[1,3]$ utilizando la regla del trapecio con $n=6$ subintervalos es aproximadamente 18.1111.

Integración mediante le regla de los Rectángulos

.:Definición 0.0.2 (Regla del Rectángulo):.
La regla del rectángulo o también conocida como regla del punto medio.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[f(\overline{x_1})+f(\overline{x_2})+f(\overline{x_3})+\cdots+f(\overline{x_{n-1}})+f(\overline{x_n})\right]+h\sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{x_i}) \tag{2}$$

donde:

$h=\dfrac{b-a}{n}$ y $x_0=a$, $x_n=b$

los x_i se pueden hallar por la siguiente fórmula:

$$x_i = a+i*h$$

y los $\overline{x_i}=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$

.:*Ejemplo 0.3*:.

Ejemplo 1:
Dada la función $f(x)=x^2+3x$, queremos aproximar la integral de $f(x)$ en el intervalo $[0,2]$ utilizando la regla del rectángulo con $n=4$ subintervalos.
Paso 1: Calcular x_i y $\overline{x_i}$
Con 4 subintervalos, $h=\frac{2-0}{4}=0.5$.

índice i	x_i	$\overline{x_i}$
0	0.25	0.125
1	0.75	0.5
2	1.25	1
3	1.75	1.5

Paso 2: Aplicar la regla del rectángulo
Sustituimos los valores de $\overline{x_i}$ en la fórmula de la regla del rectángulo y realizamos los cálculos:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2+3x\,dx &\approx 0.5\times(f(0.125)+f(0.5)+f(1)+f(1.5))\\ &=0.5\times(0.1875+2.0625+5.3125+9.1875)\\ &=0.5\times 16.75\\ &=8.375\end{aligned}$$

Por lo tanto, la aproximación de la integral de $f(x)$ en el intervalo $[0,2]$ utilizando la regla del rectángulo con $n=4$ subintervalos es aproximadamente 8.375.

—

Ejemplo 2:
Dada la función $g(x)=2x+1$, queremos aproximar la integral de $g(x)$ en el intervalo $[1,3]$ utilizando la regla del rectángulo con $n=6$ subintervalos.
Paso 1: Calcular x_i y $\overline{x_i}$
Con 6 subintervalos, $h=\frac{3-1}{6}=\frac{1}{3}$.

índice i	x_i	$\overline{x_i}$
0	1.1667	1.0833
1	1.3333	1.25
2	1.5	1.4167
3	1.6667	1.5833
4	1.8333	1.75
5	2	1.9167

Paso 2: Aplicar la regla del rectángulo
Sustituimos los valores de $\overline{x_i}$ en la fórmula de la regla del rectángulo y realizamos los cálculos:

$$\begin{aligned}\int_1^3 2x+1\,dx &\approx \frac{1}{3}\times(g(1.0833)+g(1.25)+g(1.4167)+g(1.5833)+g(1.75)+g(1.9167)+g(2))\\ &=\frac{1}{3}\times(2.3056+2.5+2.6944+2.8889+3.0833+3.2778+5)\\ &=\frac{1}{3}\times 19.75\\ &=5.4444\end{aligned}$$

Por lo tanto, la aproximación de la integral de $g(x)$ en el intervalo $[1,3]$ utilizando la regla del rectángulo con $n=6$ subintervalos es aproximadamente 5.4444.

.:*Ejemplo* 0.4:.

Ejemplo 1: $n=4$
Dada la función $f(x)=x^2+3x$, queremos aproximar la integral de $f(x)$ en el intervalo $[0,2]$ utilizando la regla del rectángulo con $n=4$ subintervalos.
Paso 1: Calcular x_i y $f(x_i)$
Con 4 subintervalos, $h=\frac{2-0}{4}=0.5$.

índice i	x_i	$f(x_i)=x_i^2+3x_i$
0	0.25	0.1875
1	0.75	2.0625
2	1.25	5.3125
3	1.75	9.1875

Paso 2: Aplicar la regla del rectángulo
Sustituimos los valores de $f(x_i)$ en la fórmula de la regla del rectángulo y realizamos los cálculos:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 + 3x\,dx &\approx 0.5 \times (0.1875 + 2.0625 + 5.3125 + 9.1875)\\ &= 0.5 \times 16.75\\ &= 8.375\end{aligned}$$

Por lo tanto, la aproximación de la integral de $f(x)$ en el intervalo $[0,2]$ utilizando la regla del rectángulo con $n = 4$ subintervalos es aproximadamente 8.375.
—

.:*Ejemplo* *0.5*:.

Ejemplo 2: $n = 6$
Dada la función $g(x) = 2x + 1$, queremos aproximar la integral de $g(x)$ en el intervalo $[1,3]$ utilizando la regla del rectángulo con $n = 6$ subintervalos.
Paso 1: Calcular x_i y $g(x_i)$
Con 6 subintervalos, $h = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$.

índice i	x_i	$g(x_i) = 2x_i + 1$
0	$1 + \frac{1}{6}$	$2 + \frac{1}{3}$
1	$1 + \frac{1}{2}$	3
2	$1 + \frac{1}{3}$	$2 + \frac{2}{3}$
3	$1 + \frac{1}{2}$	3
4	$1 + \frac{2}{3}$	$3 + \frac{1}{3}$
5	$1 + \frac{5}{6}$	4
6	2	5

Paso 2: Aplicar la regla del rectángulo
Sustituimos los valores de $g(x_i)$ en la fórmula de la regla del rectángulo y realizamos los cálculos:

$$\begin{aligned}\int_1^3 2x + 1\,dx &\approx \frac{1}{3} \times (2 + \frac{1}{3} + 3 + 2 + \frac{2}{3} + 4 + 5)\\ &= \frac{1}{3} \times \frac{49}{3}\\ &= 5.4444\end{aligned}$$

Por lo tanto, la aproximación de la integral de $g(x)$ en el intervalo $[1,3]$ utilizando la regla del rectángulo con $n = 6$ subintervalos es aproximadamente 5.4444.

Integración mediante el método de Simpson

.:Definición 0.0.3 (Regla de Simpson):.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum f(x_{2n}) + 4\sum f(x_{2n+1})\right] + E(f) \tag{3}$$

$$E(f) \leq \frac{h^5}{90} \max_{a \leq \xi \leq b} \left|f^{(4)}(\xi)\right|$$

donde:

a : límite inferior de integración.
b : límite superior de integración.
n : cantidad de subdiviciones, que en este caso siempre tiene que ser par.
$h = \dfrac{b-a}{n}$ y $x_0 = a$, $x_n = b$.
$x_i = a + i * h$
ξ es un número que pertene a los límites de integración.

.:*Ejemplo* 0.6:.

Para resolver el ejercicio de integración numérica utilizando la regla compuesta de Simpson con la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$ y $n = 4$ subintervalos, primero necesitamos calcular los puntos x_i y sus correspondientes valores de $f(x_i)$. Luego aplicaremos la fórmula de la regla compuesta de Simpson para obtener la aproximación de la integral.
Claro, aquí está el ejercicio anterior con la tabla representada en formato LaTeX:
Cálculo de x_i y $f(x_i)$
Utilizaremos 4 subintervalos, por lo que $n = 4$ y el ancho de cada subintervalo $h = \frac{2}{4} = 0.5$.

índice i	x_i	$f(x_i) = x_i^2$
0	0	0
1	0.5	0.25
2	1	1
3	1.5	2.25
4	2	4

Aplicación de la regla compuesta de Simpson
Aplicamos la fórmula de la regla compuesta de Simpson:

$$\int_0^2 x^2\,dx \approx \frac{0.5}{3}\left[f(0) + f(2) + 2(f(0.5) + f(1.5)) + 4(f(1)\right]$$

Sustituimos los valores de $f(x_i)$ en la fórmula y realizamos los cálculos:

$$\int_0^2 x^2\,dx \approx \frac{0.5}{3}\left[0 + 4 + 2(0.25 + 2.25) + 4(1)\right]$$
$$\int_0^2 x^2\,dx \approx \frac{0.5}{3}\left[4 + 2(2.5) + 4\right]$$
$$\int_0^2 x^2\,dx \approx \frac{0.5}{3}\left[4 + 5 + 4\right]$$
$$\int_0^2 x^2\,dx \approx \frac{0.5}{3} \times 13$$
$$\int_0^2 x^2\,dx \approx \frac{13}{6}$$
$$\int_0^2 x^2\,dx \approx 2.1667$$

Por lo tanto, la aproximación de la integral de x^2 en el intervalo $[0, 2]$ utilizando la regla compuesta de Simpson con $n = 4$ subintervalos es aproximadamente 2.1667.

.:*Ejemplo* 0.7:.

Ejemplo 1: $n = 4$
Cálculo de la integral utilizando la regla compuesta de Simpson con $n = 4$
Dada la función $f(x) = x^3$, queremos aproximar la integral de $f(x)$ en el intervalo $[1, 2]$ utilizando la regla compuesta de Simpson con $n = 4$ subintervalos. Paso 1: Calcular x_i y $f(x_i)$
Utilizando 4 subintervalos, obtenemos $h = \frac{2-1}{4} = 0.25$.

índice i	x_i	$f(x_i) = x_i^3$
0	1	1
1	1.25	1.9531
2	1.5	3.375
3	1.75	5.0625
4	2	8

Paso 2: Aplicar la regla compuesta de Simpson
Sustituimos los valores de $f(x_i)$ en la fórmula de la regla compuesta de Simpson:

$$\int_1^2 x^3\, dx \approx \frac{0.25}{3}\left[f(1) + f(2) + 2(f(1.25) + f(1.75)) + 4(f(1.5)\right]$$

Realizamos los cálculos y obtenemos la aproximación de la integral.
—

.:*Ejemplo* 0.8:.

Ejemplo 2: $n = 6$
Cálculo de la integral utilizando la regla compuesta de Simpson con $n = 6$
Dada la función $g(x) = \sin(x)$, queremos aproximar la integral de $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$ utilizando la regla compuesta de Simpson con $n = 6$ subintervalos.
Paso 1: Calcular x_i y $g(x_i)$
Con 6 subintervalos, $h = \frac{\pi-0}{6} = \frac{\pi}{6}$.

índice i	x_i	$g(x_i) = \sin(x_i)$
0	0	0
1	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
3	$\frac{\pi}{2}$	1
4	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
5	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
6	π	0

Paso 2: Aplicar la regla compuesta de Simpson
Sustituimos los valores de $g(x_i)$ en la fórmula de la regla compuesta de Simpson y realizamos los cálculos para obtener la aproximación de la integral.
Sustituyendo los valores de $g(x_i)$ en la fórmula de la regla compuesta de Simpson, tenemos:

$$\int_0^\pi \sin(x)\, dx \approx \frac{\pi}{18}\left[\sin(0) + \sin(\pi) + 2(\sin(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{5\pi}{6})) + 4(\sin(\frac{\pi}{3}) + \sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{2\pi}{3}))\right]$$

Realizando los cálculos, obtenemos la aproximación de la integral:

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx \approx 2$$

Por lo tanto, la aproximación de la integral de $\sin(x)$ en el intervalo $[0,\pi]$ utilizando la regla compuesta de Simpson con $n = 6$ subintervalos es aproximadamente 2.

.:Ejemplo 0.9:.

Ejemplo 3: $n = 4$
Cálculo de la integral utilizando la regla compuesta de Simpson con $n = 4$
Dada la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$, queremos aproximar la integral de $f(x)$ en el intervalo $[0,2]$ utilizando la regla compuesta de Simpson con $n = 4$ subintervalos.
Paso 1: Calcular x_i y $f(x_i)$
Con 4 subintervalos, $h = \frac{2-0}{4} = 0.5$.

índice i	x_i	$f(x_i) = x_i^3 + 2x_i^2 - x_i + 1$
0	0	1
1	0.5	2.875
2	1	3
3	1.5	3.875
4	2	9

Paso 2: Aplicar la regla compuesta de Simpson
Sustituimos los valores de $f(x_i)$ en la fórmula de la regla compuesta de Simpson y realizamos los cálculos:

$$\begin{aligned}\text{Integral aproximada} &\approx \frac{0.5}{3}[1 + 4(2.875) + 2(3) + 4(3.875) + 9]\\ &\approx \frac{0.5}{3}[1 + 11.5 + 6 + 15.5 + 9]\\ &\approx \frac{0.5}{3} \times 43\\ &\approx 3.5833\end{aligned}$$

Por lo tanto, la aproximación de la integral de $f(x)$ en el intervalo $[0,2]$ utilizando la regla compuesta de Simpson con $n = 4$ subintervalos es aproximadamente 3.5833.
—

.:Ejemplo 0.10:.

Ejemplo 4: $n = 6$
Cálculo de la integral utilizando la regla compuesta de Simpson con $n = 6$
Dada la función $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, queremos aproximar la integral de $g(x)$ en el intervalo $[0,1]$ utilizando la regla compuesta de Simpson con $n = 6$ subintervalos.
Paso 1: Calcular x_i y $g(x_i)$
Con 6 subintervalos, $h = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$.

índice i	x_i	$g(x_i)=\frac{1}{1+x_i^2}$
0	0	1
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{36}{37}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{10}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{25}{29}$
5	$\frac{5}{6}$	$\frac{36}{61}$
6	1	$\frac{1}{2}$

Paso 2: Aplicar la regla compuesta de Simpson
Sustituimos los valores de $g(x_i)$ en la fórmula de la regla compuesta de Simpson y realizamos los cálculos:

$$\begin{aligned}\text{Integral aproximada} &\approx \frac{1/6}{3}\left[1+4\left(\frac{36}{37}\right)+2\left(\frac{9}{10}\right)+4\left(\frac{4}{5}\right)+2\left(\frac{25}{29}\right)+\frac{36}{61}+\frac{1}{2}\right]\\ &\approx \frac{1/6}{3}\left[1+\frac{144}{37}+\frac{18}{10}+\frac{16}{5}+\frac{50}{29}+\frac{36}{61}+\frac{1}{2}\right]\\ &\approx \frac{1/6}{3}\times\frac{14715}{4257}\\ &\approx 1.7323\end{aligned}$$

Por lo tanto, la aproximación de la integral de $g(x)$ en el intervalo $[0,1]$ utilizando la regla compuesta de Simpson con $n=6$ subintervalos es aproximadamente 1.7323.

.:*Ejemplo* 0.11:.

Claro, aquí te presento un ejemplo resuelto utilizando la regla de Simpson compuesta para aproximar la integral de la función $f(x)=e^x$ en el intervalo $[0,1]$ con 4 subintervalos.
•Regla de Simpson Compuesta
La regla de Simpson compuesta divide el intervalo de integración en subintervalos más pequeños y aplica la regla de Simpson en cada uno de ellos para obtener una mejor aproximación de la integral.
En este caso, con 4 subintervalos, el ancho de cada subintervalo es $h=\frac{1-0}{4}=0.25$.
•Aproximación de la Integral
Para la regla de Simpson compuesta, la fórmula de aproximación de la integral es:

$$\int_0^1 e^x\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4\sum_{i=1}^{n/2}f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{n/2-1}f(x_{2i})+f(x_n)\right]$$

Donde: - n es el número total de subintervalos, - $x_i=a+ih$ para $i=0,1,2,...,n$ son los puntos de evaluación en cada subintervalo.
En nuestro caso, con 4 subintervalos, los puntos de evaluación serían: $x_0=0, x_1=0.25, x_2=0.5, x_3=0.75, x_4=1$.
•Cálculos
1. Calculamos los valores de la función $f(x)=e^x$ en los puntos de evaluación. 2. Sustituimos los valores en la fórmula de aproximación de la integral y realizamos los cálculos.
A continuación, completaré los cálculos para aproximar la integral de la función $f(x)=e^x$ en el intervalo $[0,1]$ utilizando la regla de Simpson compuesta con 4 subintervalos.
•Paso 1: Calcular los valores de la función en los puntos de evaluación

Dado que los puntos de evaluación son $x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1$, calcularemos los valores de la función $f(x) = e^x$ en estos puntos:
- $f(0) = e^0 = 1$
- $f(0.25) = e^{0.25} \approx 1.2840$
- $f(0.5) = e^{0.5} \approx 1.6487$
- $f(0.75) = e^{0.75} \approx 2.1170$
- $f(1) = e^1 = e \approx 2.7183$

•Paso 2: Aplicar la fórmula de aproximación de la integral
Sustituimos los valores calculados en la fórmula de aproximación de la integral:

$$\int_0^1 e^x \, dx \approx \frac{0.25}{3} [1 + 4(1.2840) + 2(1.6487 + 2.1170) + 2.7183]$$

Realizamos los cálculos:

$$\int_0^1 e^x \, dx \approx \frac{0.25}{3} [1 + 5.1360 + 6.7657 + 2.7183]$$

$$\int_0^1 e^x \, dx \approx \frac{0.25}{3} \times 15.6200$$

$$\int_0^1 e^x \, dx \approx \frac{15.6200}{3}$$

$$\int_0^1 e^x \, dx \approx 5.2067$$

Por lo tanto, la aproximación de la integral de e^x en el intervalo $[0, 1]$ utilizando la regla de Simpson compuesta con 4 subintervalos es aproximadamente 5.2067.

Desarrollo

Conclusiones

Cual es la mejor opción de los métodos de integración numérica

En general, la regla de Simpson tiende a ser el método de integración numérica más preciso de los tres mencionados, especialmente para funciones suaves y bien comportadas. Sin embargo, en situaciones donde la función a integrar es complicada o costosa de evaluar, la regla de los trapecios puede ser una buena opción intermedia en términos de precisión y eficiencia computacional.
La elección del mejor método dependerá de las características específicas del problema que estés abordando. En la práctica, a menudo se utilizan métodos más avanzados de integración numérica, como la regla de Simpson compuesta, que combina múltiples segmentos de Simpson para mejorar la precisión y eficiencia.

Ejercicios Propuestos

Aquí te dejo una lista de 20 ejercicios que puedes resolver utilizando los métodos numéricos de la regla de los rectángulos, la regla del trapecio y la regla de Simpson compuesta. Estos ejercicios te ayudarán a practicar y mejorar tus habilidades en cálculo numérico:

•Regla de los Rectángulos:
1. Aproxima la integral de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$ utilizando la regla de los rectángulos con 4 subintervalos.
2. Aproxima la integral de $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$ utilizando la regla de los rectángulos con 6 subintervalos.
3. Aproxima la integral de $f(x) = e^{-x^2}$ en el intervalo $[-1, 1]$ utilizando la regla de los rectángulos con 8 subintervalos.
4. Aproxima la integral de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en el intervalo $[0, 1]$ utilizando la regla de los rectángulos con 5 subintervalos.
5. Aproxima la integral de $f(x) = \ln(x + 1)$ en el intervalo $[1, 2]$ utilizando la regla de los rectángulos con 7 subintervalos.
•Regla del Trapecio: 6. Aproxima la integral de $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 3]$ utilizando la regla del trapecio con 6 subintervalos. 7. Aproxima la integral de $f(x) = \cos(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ utilizando la regla del trapecio con 8 subintervalos. 8. Aproxima la integral de $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ en el intervalo $[0, 1]$ utilizando la regla del trapecio con 4 subintervalos. 9. Aproxima la integral de $f(x) = x\sin(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$ utilizando la regla del trapecio con 5 subintervalos. 10. Aproxima la integral de $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ en el intervalo $[0, 2]$ utilizando la regla del trapecio con 10 subintervalos.
•Regla de Simpson Compuesta: 11. Aproxima la integral de $f(x) = x^4$ en el intervalo $[0, 1]$ utilizando la regla de Simpson compuesta con 4 subintervalos. 12. Aproxima la integral de $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$ utilizando la regla de Simpson compuesta con 6 subintervalos. 13. Aproxima la integral de $f(x) = e^{-x^2}$ en el intervalo $[-1, 1]$ utilizando la regla de Simpson compuesta con 8 subintervalos. 14. Aproxima la integral de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en el intervalo $[0, 1]$ utilizando la regla de Simpson compuesta con 5 subintervalos. 15. Aproxima la integral de $f(x) = \ln(x + 1)$ en el intervalo $[1, 2]$ utilizando la regla de Simpson compuesta con 7 subintervalos.
•Regla de los Rectángulos: 16. Aproxima la integral de $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0, 1]$ utilizando la regla de los rectángulos con 3 subintervalos. 17. Aproxima la integral de $f(x) = \frac{1}{1+x}$ en el intervalo $[1, 3]$ utilizando la regla de los rectángulos con 5 subintervalos.
•Regla del Trapecio: 18. Aproxima la integral de $f(x) = \cos(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$ utilizando la regla del trapecio con 10 subintervalos. 19. Aproxima la integral de $f(x) = \ln(x)$ en el intervalo $[1, 2]$ utilizando la regla del trapecio con 7 subintervalos.
•Regla de Simpson Compuesta: 20. Aproxima la integral de $f(x) = x^3$ en el intervalo $[0, 2]$ utilizando la regla de Simpson compuesta con 6 subintervalos.

Bibliografía

1. Curso de Matemáticas Superiores para ingenieros, Tomo II. M. Krasnov y otros
2. Calculus Volumen 1. Tom M. Apostol
3. Matemáticas Superiores en Ejercicios y Problemas. Parte 2, P. E. Dankó y Otros.
4. Problemas de Análisis Matemático. B. Demidovich.
5. Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de A. Kiselev, M. Krasnov y G. Makarenko.
6. Cálculo con Geometría Analítica, Tomo II. Earl W. Swokowski