Matemática III

Conferencia $\int$

Ecuaciones Diferenciales de Orden n

Profesor Instructor:
Lic. Juan Cruz Oduardo

December 3, 2024

Sumario: Ecuación diferencial ordinaria. Solución particular. Solución General. Orden y Grado. Teorema de existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y primer grado. Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden.
Objetivo: Resolver E. D. Ordinarias de primer orden y primer grado.

Introducción

Dentro del desarrollo del tema hemos estudiado las ecuaciones de primer orden, dentro de las cuales vimos la ecuación lineal de primer orden:

$$y^{'} + p(x)y = q(x)$$

¿Cuál es su solución? En esta conferencia ampliaremos esta denominación al estudiar las ecuaciones lineales de orden superior, haciendo énfasis en las de segundo orden con coeficientes constante, las que tienen una gran variedad de aplicaciones.

Desarrollo

Lineales homogéneas de coeficientes constantes

.:Definición 0.0.1 (Lineales homogéneas de coeficientes constantes):.
Sea dada la ecuación:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y^{'} + a_ny = 0 \tag{1}$$

de coeficientes constantes reales $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Solución:

Consideremos la ecuación característica

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{2}$$

Supongamos que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son raíces de la ecuación (2) entre los cuales puede haber múltiples.
Se pueden presentar los casos siguientes:

1. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y existen algunas de ellas que son múltiples.

   Sea, por ejemplo $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \widetilde{\lambda}$, de modo que $\widetilde{\lambda}$ es una raíz k-múltiple de la ecuación (2), mientras que todas las demás $n-k \geq 0$ raíces son distintas. En este caso el sistema fundamental de soluciones tiene la forma:

   $$e^{\widetilde{\lambda}x},\ xe^{\widetilde{\lambda}x},\ x^2e^{\widetilde{\lambda}x},\ \ldots\ x^{k-1}e^{\widetilde{\lambda}x},\ e^{\lambda_{k+1}x},\ e^{\lambda_{k+2}x},\ \ldots,\ e^{\lambda_nx}$$

   y la solución general de la ecuación homogénea es:

   $$y_g = C_1e^{\widetilde{\lambda}x} + C_2xe^{\widetilde{\lambda}x} + C_3x^2e^{\widetilde{\lambda}x} + \ldots + C_kx^{k-1}e^{\widetilde{\lambda}x} + C_{k+1}e^{\lambda_{k+1}x} + C_{k+2}e^{\lambda_{k+2}x} + \ldots + C_ne^{\lambda_nx} \tag{3}$$

   o escrito de otra forma:

   $$y_g = \left(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_kx^{k-1}\right)e^{\widetilde{\lambda}x} + C_{k+1}e^{\lambda_{k+1}x} + C_{k+2}e^{\lambda_{k+2}x} + \ldots + C_ne^{\lambda_nx} \tag{4}$$

2. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, existen algunas de ellas que son múltiples y otras reales puras.

   Sea, por ejemplo $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, de modo que es una raíz k-múltiple de la ecuación (2) ($k \leq \frac{n}{2}$), entonces $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ también es una raíz k-múltiple, mientras que el resto de las raíces son distintas, unas complejas que tengan la forma $\lambda_3 = \gamma + i\delta$ y $\lambda_4 = \gamma - i\delta$ y otras reales puras. En este caso el sistema fundamental de soluciones tiene la forma:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ \ldots\ \ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$e^{\gamma x}\cos\delta x,\ \ e^{\gamma x}\sin\delta x,\ \ e^{\lambda_{2k+2}x},\ \ e^{\lambda_{2k+3}x},\ \ \ldots,\ \ e^{\lambda_n x}.$$

   por tanto, la solución general es:

$$\begin{aligned} y_g = {} & C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x + C_3xe^{\alpha x}\cos\beta x + C_4xe^{\alpha x}\sin\beta x + \ldots + C_{2k}x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x + \\ & C_{2k+1}x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x + C_{2k+2}e^{\gamma x}\cos\delta x + C_{2k+3}e^{\gamma x}\sin\delta x + C_{2k+4}e^{\lambda_{2k+2}x} + C_{2k+5}e^{\lambda_{2k+3}x} + \ldots + C_ne^{\lambda_n x}. \end{aligned}$$

o escrito de otra forma:

$$\begin{aligned} y_g = {} & \left[\left(C_1 + C_2x + \cdots + C_kx^{k-1}\right)\cos\beta + \left(C_{k+1} + C_{k+2}x + \cdots + C_{2k}x^{k-1}\right)\sin\beta\right]e^{\alpha x} + \\ & C_{2k+1}e^{\gamma x}\cos\delta x + C_{2k+2}e^{\gamma x}\sin\delta x + C_{2k+3}e^{\lambda_{2k+1}x} + C_{2k+4}e^{\lambda_{2k+2}x} + \ldots + C_ne^{\lambda_n x}. \end{aligned}$$

.:*Ejemplo* 0.1:.

Halla la solución general de la ecuación:

$$2y''' - 3y'' + y' = 0 \tag{5}$$

Solución

Ecuación característica:

$$2\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\lambda(2\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = \frac{1}{2},\ \ \lambda_3 = 1.$$

Solución: $y_g = C_1 + C_2e^{\frac{x}{2}} + C_3e^x$

.:*Ejemplo* 0.2:.

Resuelve la ecuación:

$$y'' + 4y' - 5y = 0$$

Solución

Paso 1: Ecuación Característica

Primero, encontramos la ecuación característica asumiendo una solución de la forma $y(t) = e^{\lambda t}$. Esto nos lleva a la siguiente ecuación característica:

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

Paso 2: Resolución de la Ecuación Característica
Resolvemos la ecuación cuadrática para encontrar las raíces características:

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

Factorizando:

$$(\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0$$

Esto nos da dos raíces características:
$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = -5$
Paso 3: Solución General
La solución general de la ecuación diferencial $y'' + 4y' - 5y = 0$ sigue siendo:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Sustituyendo las raíces características:

$$\text{Solución:} \quad y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-5t}$$

.:*Ejemplo* 0.3:.

Resolver la ecuación

$$y^{''} - 4y^{'} + 4y = 0$$

Solución

Paso 1: Ecuación Característica
Primero, encontramos la ecuación característica asumiendo una solución de la forma $y(t) = e^{\lambda t}$. Esto nos lleva a la siguiente ecuación característica:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

Paso 2: Resolución de la Ecuación Característica
Para resolver la ecuación característica, podemos factorizarla:

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

Esto nos da una raíz característica repetida:
$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$
Paso 3: Solución General
La solución general de la ecuación diferencial se compone de términos exponenciales basados en las raíces características:

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{2t}$$

.:*Ejemplo* 0.4:.

Halla la solución general de la ecuación:

$$y''' + 2y'' + y' = 0 \tag{6}$$

Solución

Ecuación característica:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$$

La descomposición factorial nos da:

$$\lambda\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right) = 0$$

$$\lambda\left(\lambda + 1\right)^2 = 0$$

Hallamos sus raíces:

$$\lambda_1 = 0, \;\; \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

Las raíces son reales y una de ellas es de multiplicidad 2, por lo que:

$$\text{Solución:} \quad y_g = C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x}.$$

$$\text{o} \quad y_g = C_1 + \left(C_2 + C_3x\right)e^{-x}.$$

.:*Ejemplo* 0.5:.

Halla la solución general de la ecuación:

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0 \tag{7}$$

Solución

Ecuación característica:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$$

Tiene las siguientes raíces:

$$\lambda_1 = 0, \;\; \lambda_2 = -2 - 3i, \;\; \lambda_3 = -2 + 3i.$$

$$\text{Solución:} \quad y_g = C_1 + C_2e^{-2x}\cos 3x + C_3e^{-2x}\sin 3x$$

$$\text{o} \quad y_g = C_1 + \left(C_2\cos 3x + C_3\sin 3x\right)e^{-2x}.$$

.:*Ejemplo* 0.6:.

Halla la ecuación general de la ecuación:

$$y^{V} - 2y^{IV} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0 \tag{8}$$

Solución

Ecuación característica:

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

Al obtener sus raíces, las últimas dos son de segundo orden de multiplicidad.

$$\lambda_1 = 2, \ \ \lambda_{2,3} = \pm i.$$

$$\text{Solución:} \quad y_g = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x$$

.:*Ejemplo* 0.7:.

Halla la ecuación general de la ecuación:

$$y^{IV} + 4y^{'''} + 8y^{''} + 8y^{'} + 4y = 0 \tag{9}$$

Solución

Ecuación característica:

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0$$

Esta tienen las raíces imaginarias de segundo orden:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 - i, \ \ \lambda_3 = \lambda_4 = -1 + i.$$

$$\text{Solución:} \quad y_g = \left[(C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x\right] e^{-x}$$

.:*Ejemplo* 0.8:.

Resolver la ecuación

$$y^{''} + 4y^{'} + 13y = 0$$

Solución

Paso 1: Ecuación Característica
Primero, encontramos la ecuación característica asumiendo una solución de la forma $y(t) = e^{\lambda t}$. Esto nos lleva a la siguiente ecuación característica:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

Paso 2: Resolución de la Ecuación Característica
Para resolver la ecuación característica, podemos usar la fórmula cuadrática:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 1$, $b = 4$, y $c = 13$. Sustituyendo estos valores en la fórmula, obtenemos:

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(13)}}{2(1)}$$

Simplificando:

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2}$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

Dado que el discriminante es negativo, las raíces serán números complejos conjugados:

$$\lambda_1 = -2 + \frac{3}{2}i$$

$$\lambda_2 = -2 - \frac{3}{2}i$$

Paso 3: Solución General
La solución general de la ecuación diferencial se compone de términos exponenciales basados en las raíces características:

$$y(t) = e^{-2t}(C_1 \cos(\frac{3}{2}t) + C_2 \sin(\frac{3}{2}t))$$

Lineales no homogéneas (Completas)

.:Definición 0.0.2:.
Supongamos que las n funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, admiten derivadas hasta el orden $(n-1)$. El determinante:

$$W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x) & \ldots & y_n^{'}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{10}$$

se llama *determinante de Wronsky o wronskiano* de estas funciones. Observese que el Wronkiano es una función de x definida en cierto intervalo.

.:Definición 0.0.3:.
Sea dada la ecuación:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots a_{n-1}y^{'} + a_ny = f(x) \tag{11}$$

de coeficientes constantes reales $a_0, a_1, \ldots, a_n$ es llamada *ecuación lineal no homogénea.*

La solución general (y_g) de la ecuación (11), (llamada también completa) es igual a la suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente $(y_{_H})$ y de la ecuación particular de la ecuación no homogénea $(y_{_P})$, es decir,
$y_g = y_{_H} + y_{_P}$.

Los pasos para resolver una ecuación homogénea ya fue expuesto en la sección , por lo tanto el problema de integración de la ecuación (11) se reduce a la búsqueda de una solución particular de la ecuación no homogénea. En el caso general la integración de la ecuación (11) puede realizarse por *el método de variación de las constantes arbitrarias.* No obstante, cuando el segundo miembro tiene una forma especial la solución particular puede hallarse con mayor facilidad por *el método de selección* y luego por *el método de coeficientes indeterminados*, es decir, primero se selecciona la forma de la solución particular y luego se resuelve hallando los coeficientes indeterminados obtenidos.

Variación de las constantes arbitrarias

Este método también es conocido por *el método de variación de parámetros*. Si se conoce un sistema fundamental de soluciones $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, de la ecuación homogénea (1), la solución general de (11) se puede hallar por la fórmula:

$$y_g = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + C_3(x)y_3 + \cdots + C_n(x)y_n,$$

donde las funciones $C_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones $(n \times n)$:

$$\left.\begin{array}{l}
C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_3'(x)y_3 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0 \\
C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_3'(x)y_3' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0 \\
C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + C_3'(x)y_3'' + \cdots + C_n'(x)y_n'' = 0 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \ddots \\
C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + C_3'(x)y_3^{(n-2)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\
C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + C_3'(x)y_3^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x)
\end{array}\right\} \tag{12}$$

Es fácil resolver este sistema de ecuaciones usando la regla de Cramer, obtenemos:

$$D_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 & \ldots & y_n \\ 0 & y_2' & y_3' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & y_2^{(n-2)} & y_3^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ f(x) & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$D_2(x) = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 & \ldots & y_n \\ y_1' & 0 & y_3' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & 0 & y_3^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & f(x) & y_3^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

$$D_3(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & 0 & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & 0 & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & f(x) & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & 0 \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & y_3^{(n-2)} & \dots & 0 \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & f(x) \end{vmatrix}.$$

Los $D_1, D_2, \dots D_n$ son sencillos calcular usando las propiedades de los determinantes y el métodos de los menores[1].

Luego:

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= \frac{D_1(x)}{W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]} \\ C_2'(x) &= \frac{D_2(x)}{W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_n'(x) &= \frac{D_n(x)}{W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]} \end{aligned} \tag{13}$$

Y finalmente lo $C_i(x)$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ se calculan con la fórmulas:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int \frac{D_1(x)}{W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]}\, dx \\ C_2(x) &= \int \frac{D_2(x)}{W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]}\, dx \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_n(x) &= \int \frac{D_n(x)}{W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]}\, dx \end{aligned} \tag{14}$$

Cuando la ecuación diferencial es de segundo orden, se cumple que:

$$C_1(x) = -\int \frac{f(x) y_2(x)}{W(y_1, y_2)} dx \quad \text{y} \quad C_2(x) = \int \frac{f(x) y_1(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

Cuando la ecuación diferencial es de tercer orden, se cumple que:

$$C_1(x) = \int \frac{f(x)\left[y_2(x) y_3'(x) - y_2'(x) y_3(x)\right]}{W(y_1, y_2, y_3)} dx,$$

$$C_2(x) = -\int \frac{f(x)\left[y_1(x) y_3'(x) - y_1'(x) y_3(x)\right]}{W(y_1, y_2, y_3)} dx,$$

[1] Sea una matriz A de nxn, entonces:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, |A_{ij}|$$

donde a_{ij} es el elemento o menor en fila i y columna j, la matriz A_{ij} es la resultante de eliminar de la matriz A fila i y columna j.

$$C_2(x) = \int \frac{f(x)\left[y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\right]}{W(y_1, y_2, y_3)} dx.$$

.:*Ejemplo* 0.9:.

Integra la siguiente ecuación:

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x} \tag{15}$$

Solución:

Ecuación característica

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$
$$(\lambda - 2)^2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = 2 \text{ Multiplicidad doble}$$

Ecuación homogénea

$$y_H = (C_1x + C_2)e^{2x}$$

Solución Particular

$$y_P = C_1(x)xe^{2x} + C_2(x)e^{2x} \tag{16}$$

Sistema de Solución

$$\left.\begin{array}{rl} C_1'(x)xe^{2x} + C_2'(x)e^{2x} = & 0 \\ C_1'(x)\left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right) + C_2'(x)\left(2e^{2x}\right) = & xe^{2x} \end{array}\right\}$$

$$C_1(x) = -\int \frac{f(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2)} dx \quad \text{y} \quad C_2(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

Tenemos que:

$$y_1 = xe^{2x}, \quad y_2 = e^{2x} \quad \text{y} \quad f(x) = xe^{2x}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} xe^{2x} & e^{2x} \\ (1+2x)\,e^{2x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = -e^{4x}$$

Luego:

$$C_1(x) = -\int \frac{\left(xe^{2x}\right)e^{2x}}{-e^{4x}} dx = \int \frac{xe^{4x}}{e^{4x}} = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1 \tag{17}$$

$$C_2(x) = \int \frac{\left(xe^{2x}\right)xe^{2x}}{-e^{4x}} dx = -\int \frac{x^2e^{4x}}{e^{4x}} = -\int x^2 dx = -\frac{x^3}{3} + C_2 \tag{18}$$

Sustituyendo (17) y (18) en (16), obtenemos la solución buscada:

$$y_g = \left(\tfrac{x^2}{2} + C_1\right)xe^{2x} + \left(-\tfrac{x^3}{3} + C_2\right)e^{2x}$$
$$y_g = (C_1x + C_2)\,e^{2x} + \left(\tfrac{x^3}{2} - \tfrac{x^3}{3}\right)e^{2x}$$
$$y_g = (C_1x + C_2)\,e^{2x} + \tfrac{x^3}{6}e^{2x}$$

Coeficientes indeterminados

No.	2^{do} miembro de la ED $f(x)$	Raíces de la ecuación característica $y_C(\lambda)$	Forma de la Solución Particular (y_P)
I	$P_n(x)$	El número 0 no es raíz de y_C	$\widetilde{P}_n(x)$
		El número 0 es raíz de y_C	$x^s\widetilde{P}_n(x)$
II	$P_n(x)e^{\alpha x}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$	α no es raíz de y_C	$\widetilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$
		α es raíz de y_C	$x^s\widetilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$
III	$P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x$	$\pm\beta i$ no es raíz de y_C	$\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x+\widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x$
		$\pm\beta i$ es raíz de y_C	$x^s\left[\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x+\widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right]$
IV	$e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right]$	$\alpha\pm\beta i$ no es raíz de y_C	$e^{\alpha x}\left[\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x+\widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right]$
		$\alpha\pm\beta i$ es raíz de y_C	$x^se^{\alpha x}\left[\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x+\widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right]$
Símbolos: $\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ polinomio característico de $P_n(x)$, $\mathbf{s}\to$ orden de multiplicidad de las raíces en y_C y $\mathbf{k}=\max(m,n)$			

Table 3: Relación entre $f(x)$ y la solución particular

.:Ejemplo ***0.10*:.**

Resuelve la siguiente ecuación:

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$$

Solución

Ecuación característica

$$\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=0$$

$$\lambda_1=1 \quad \lambda_{2,3}=\pm i$$

La solución de la ecuación homogénea es:

$$y_H=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\sin x$$

Usando la tabla , se obtiene que:

Ecuación Particular

$$y_p(x)=Ax^2+Bx+C$$

Donde A, B, y C son coeficientes que debemos determinar. Ahora, procederemos a calcular las derivadas de $y_p(x)$ necesarias para sustituirlas en la ecuación original:

$$y_p'(x)=2Ax+B$$
$$y_p''(x)=2A$$

$$y_p'''(x) = 0$$

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación diferencial:

$$0 - 2A + 2Ax + B - (Ax^2 + Bx + C) = x^2 + x$$

Ahora, agrupamos términos semejantes:

$$-Ax^2 + 2Ax - Bx - 2A + B - C = x^2 + x$$

$$-Ax^2 + (2A - B)x - 2A + B - C = x^2 + x$$

Igualamos los términos del lado izquierdo a los términos del lado derecho:

$$-A = 1 \quad (\text{coeficiente de } x^2)$$
$$2A - B = 1 \quad (\text{coeficiente de } x)$$
$$-2A + B - C = 0 \quad (\text{término constante})$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones para encontrar los valores de A, B, y C. Primero, de la primera ecuación obtenemos $A = -1$. Luego, sustituimos este valor en la segunda ecuación:

$$2(-1) + B = 1$$
$$-2 - B = 1$$
$$B = -3$$

Finalmente, sustituimos $A = -1$ y $B = -3$ en la tercera ecuación:

$$-2(-1) - 3 - C = 0$$
$$2 - 3 - C = 0$$
$$-1 - C = 0$$
$$C = -1$$

Hemos encontrado los valores de A, B, y C. Ahora podemos escribir la solución particular $y_p(x)$ completa:

$$y_p(x) = -x^2 - 3x - 1$$

La solución general de la ecuación diferencial será la suma de la solución particular $y_p(x)$ y la solución homogénea $y_h(x)$. La solución homogénea depende de las raíces de la ecuación característica, que no se proporcionan en la ecuación dada. Por lo tanto, la solución general será:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

la solución general de la ecuación es

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \left(x^2 + 3x + 1\right)$$

.:*Ejemplo* 0.11:.

Resuelve la siguiente ecuación:

$$y''' - y'' = 12x^2 + 6x$$

Solución

Ecuación característica

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0 \;\; \lambda_3 = 1$$

La solución de la ecuación homogénea es:

$$y_H = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$$

Usando la tabla , se obtiene que:

Ecuación Particular

Como el número 0 es raíz múltiple de segundo orden de la ecuación característica. Se debe buscar la solución particular y_P de la ecuación no homogénea en la forma:

$$y_P = \left(Ax^2 + Bx + C\right) x^2 = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$

Donde A, B, y C son coeficientes que debemos determinar. Ahora, procederemos a calcular las derivadas de $y_p(x)$ necesarias para sustituirlas en la ecuación original:

$$y_p'(x) = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx$$
$$y_p''(x) = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$$
$$y_p'''(x) = 24Ax + 6B$$

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación diferencial:

$$24Ax + 6B - \left(12Ax^2 + 6Bx + 2C\right) = 12x^2 + 6x$$

$$-12Ax^2 + (24A - 6B)x + (6B - 2C) = 12x^2 + 6x$$

Igualamos los términos del lado izquierdo a los términos del lado derecho:

$$-12A = 12 \quad (\text{coeficiente de } x^2)$$
$$24A - 6B = 6 \quad (\text{coeficiente de } x)$$
$$6B - 2C = 0 \quad (\text{término constante})$$

La solución del sistema hallamos:
$A = -1$, $B = -5$ y $C = -15$

Por tanto:

$$y_P = -x^4 - 5x^3 - 15x^2$$

La solución general de la ecuación dada es:

$$y_G(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

$$y_G(x) = C_1 + C_2x + C_3e^x - \left(x^4 + 5x^3 + 15x^2\right)$$

.:*Ejemplo* 0.12:.

Encuentre la solución a la siguiente ecuación :

$$y'' - 4y = 2e^{3x} \tag{19}$$

Solución

Para resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 4y = 2e^{3x}$$

usando el método de coeficientes indeterminados, seguiremos los siguientes pasos: primero, encontramos la solución de la ecuación homogénea asociada, y luego buscamos una solución particular para la ecuación completa.
1. Solución de la ecuación homogénea
La ecuación homogénea asociada es:

$$y'' - 4y = 0.$$

La ecuación característica asociada es:

$$\lambda^2 - 4 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación, tenemos:

$$\lambda^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -2.$$

Por lo tanto, la solución general de la homogénea es:

$$y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x},$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.
2. Solución Particular
Ahora buscaremos una solución particular y_p para la ecuación no homogénea $y'' - 4y = 2e^{3x}$. Dado que el lado derecho es $2e^{3x}$, probaremos con una solución particular de la forma:

$$y_p = Ae^{3x},$$

donde A es una constante indeterminada que debemos determinar.
Calculamos las derivadas de y_p:

$$y_p' = 3Ae^{3x},$$
$$y_p'' = 9Ae^{3x}.$$

Sustituyendo y_p y sus derivadas en la ecuación:

$$9Ae^{3x} - 4(Ae^{3x}) = 2e^{3x}.$$

Esto simplifica a:

$$(9A - 4A)e^{3x} = 2e^{3x},$$

lo que nos da:

$$(5A)e^{3x} = 2e^{3x}.$$

Para que esto se cumpla, igualamos los coeficientes:

$$5A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2}{5}.$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y_p = \frac{2}{5}e^{3x}.$$

3. Solución general
La solución general de la ecuación diferencial es la suma de la solución homogénea y la particular:

$$y = y_h + y_p = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + \frac{2}{5}e^{3x},$$

donde C_1 y C_2 son constantes que se determinan con condiciones iniciales si se proporcionan.

.:*Ejemplo* 0.13:.

Encuentre la solución a la siguiente ecuación :

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x} \tag{20}$$

Solución:

<u>Ecuación característica</u>

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$
$$(\lambda - 2)^2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = 2 \text{ Multiplicidad doble}$$

La solución de la ecuación homogénea es:

$$y_H = (C_1x + C_2)e^{2x}$$

Usando la tabla , se obtiene que:

<u>Ecuación Particular</u>

$$y_P = x^2[Ax+B]e^{2x} \tag{21}$$
$$y_P = (Ax^3+Bx^2)e^{2x}$$

$$y_P^{'} = (3Ax^2+2Bx)e^{2x} + 2(Ax^3+Bx^2)e^{2x}$$
$$y_P^{''} = (6Ax+2B)e^{2x} + 2(3Ax^2+2Bx)e^{2x} + 2(3Ax^2+2Bx)e^{2x} + 4(Ax^3+Bx^2)e^{2x}$$
$$y_P^{''} = (6Ax+2B)e^{2x} + 4(3Ax^2+2Bx)e^{2x} + 4(Ax^3+Bx^2)e^{2x}$$

Sustituyendo y_P, $y_P^{'}$ y $y_P^{''}$ en (20), se obtiene:
MI:

$$\left[(6Ax+2B)e^{2x} + 4(3Ax^2+2Bx)e^{2x} + 4(Ax^3+Bx^2)e^{2x}\right] - 4\left[(3Ax^2+2Bx)e^{2x} + 2(Ax^3+Bx^2)e^{2x}\right]$$
$$+4\left[(Ax^3+Bx^2)e^{2x}\right]$$

Luego:

$$(6Ax+2B)e^{2x} + \underline{4(3Ax^2+2Bx)e^{2x}} + \overbrace{4(Ax^3+Bx^2)e^{2x}} - \underline{4(3Ax^2+2Bx)e^{2x}} - \underbrace{8(Ax^3+Bx^2)e^{2x}} + \overbrace{4(Ax^3+Bx^2)e^{2x}}$$

Entonces:

$$(6Ax+2B)e^{2x} = xe^{2x}$$
$$6Ax+2B = x$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$A = \tfrac{1}{6} \qquad B = 0$$

La solución de la ecuación particular es:

$$y_P = \frac{x^3}{6}e^{2x}$$

Como:

$$y = y_H + y_P$$

La solución general es:

$$y_g = (C_1x+C_2)e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x} \tag{22}$$

.:*Ejemplo* 0.14:.

Resuelve la siguiente ecuación:

$$y^{''} + y = 2\cos(3x)$$

que satisface las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 1$

Solución

Para resolver la ecuación diferencial

$$y'' + y = 2\cos(3x)$$

usaremos el método de coeficientes indeterminados. Este proceso se descompone en dos partes: primero, encontramos la solución de la ecuación homogénea asociada, y luego buscamos una solución particular para la ecuación completa.
1. Solución de la ecuación homogénea
La ecuación homogénea asociada es

$$y'' + y = 0.$$

La ecuación característica asociada es:

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

cuya solución es:

$$\lambda_1 = i \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -i.$$

Por lo tanto, la solución general de la homogénea es:

$$y_h = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x),$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.
2. Solución particular
Buscamos una solución particular y_p para la ecuación no homogénea $y'' + y = 2\cos(3x)$. Dado que el lado derecho es $2\cos(3x)$, probamos con una solución particular de la forma (ver la tabla):

$$y_p = A\cos(3x) + B\sin(3x),$$

donde A y B son constantes indeterminadas que debemos determinar.
Calculamos las derivadas de y_p:

$$y_p' = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x),$$
$$y_p'' = -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x).$$

Sustituyendo y_p y sus derivadas en la ecuación $y'' + y = 2\cos(3x)$:

$$(-9A\cos(3x) - 9B\sin(3x)) + (A\cos(3x) + B\sin(3x)) = 2\cos(3x).$$

Esto simplifica a:

$$(-9A + A)\cos(3x) + (-9B + B)\sin(3x) = 2\cos(3x).$$

Simplificando aún más, obtenemos:

$$(-8A)\cos(3x) + (-8B)\sin(3x) = 2\cos(3x).$$

Para que esta igualdad se cumpla, debemos igualar los coeficientes:

$$-8A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{4},$$

$$-8B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0.$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$y_p = -\frac{1}{4}\cos(3x).$$

3. Solución general
La solución general de la ecuación diferencial es la suma de la solución homogénea y la particular:

$$y = y_h + y_p = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) - \frac{1}{4}\cos(3x).$$

Resumen
La solución completa de la ecuación diferencial $y'' + y = 2\cos(3x)$ es:

$$y = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) - \frac{1}{4}\cos(3x),$$

donde C_1 y C_2 son constantes que se determinan con condiciones iniciales si se proporcionan.

4. Hallar constantes usando las condiciones iniciales
Ahora aplicaremos las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$.
Condición inicial $y(0) = 1$:

$$y(0) = C_1\cos(0) + C_2\sin(0) - \frac{1}{4}\cos(0).$$

Esto se reduce a:

$$y(0) = C_1 - \frac{1}{4} = 1.$$

Por lo tanto:

$$C_1 - \frac{1}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}. \tag{1}$$

Condición inicial $y'(0) = 1$:
Primero, derivamos y:

$$y' = -C_1\sin(x) + C_2\cos(x) + \frac{3}{4}\sin(3x).$$

Sustituyendo $x = 0$:

$$y'(0) = -C_1\sin(0) + C_2\cos(0) + \frac{3}{4}\sin(3\cdot 0).$$

Esto se reduce a:

$$y'(0) = C_2 = 1.$$

Resultados finales
Sustituyendo los valores encontrados, tenemos:

$$C_1 = \frac{5}{4}, \quad C_2 = 1.$$

Solución completa

Por lo tanto, la solución final de la ecuación diferencial que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 1$ es:

$$y_G = \frac{5}{4}\cos(x) + \sin(x) - \frac{1}{4}\cos(3x).$$

.:*Ejemplo* 0.15:.

Resuelve la siguiente ecuación:

$$y^{''} - 6y^{'} + 9y = 25e^x \sin x$$

Solución

Ecuación característica

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3 \text{ Multiplicidad doble}$$

La solución de la ecuación homogénea es:

$$y_H = (C_1 x + C_2)e^{3x}$$

Usando la tabla , se obtiene que:

Ecuación Particular

$$y_P = (A\cos x + B\sin x)\, e^x$$

Donde A y B son coeficientes que debemos determinar. Ahora, procederemos a calcular las derivadas de $y_p(x)$ necesarias para sustituirlas en la ecuación original:

$$y_p'(x) = (A\cos x + B\sin x)\, e^x + (-A\sin x + B\cos x)\, e^x$$

$$y_p'(x) = (A + B)\cos x e^x + (-A + B)\sin x e^x$$

$$y_p''(x) = (A + B)\cos x e^x - (A + B)\sin x e^x + (-A + B)\sin x e^x + (-A + B)\cos x e^x$$

$$y_p''(x) = -2A\sin x e^x + 2B\cos x e^x$$

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación diferencial:

$$-2A\sin x e^x + 2B\cos x e^x - 6\left[(A + B)\cos x e^x + (-A + B)\sin x e^x\right] + 9\,(A\cos x + B\sin x)\, e^x = 25e^x \sin x$$

$$\left[(3A-4B)\cos x+(4A+3B)\sin x\right]e^{x}=25e^{x}\sin x$$

De aquí, simplificando el término e^x en ambos miembros y comparando resulta:

$$3A-4B=0$$
$$4A+3B=25$$

La solución del sistema es:
$A=4$ y $B=3$
Por tanto:

$$y_{P}=(4\cos x+3\sin x)\,e^{x}$$

La solución general de la ecuación dada es:

$$y_{G}(x)=y_{H}(x)+y_{P}(x)$$

$$y_{G}(x)=(C_1x+C_2)e^{3x}+(4\cos x+3\sin x)\,e^{x}$$

Conclusiones

En esta conferencia se ha definido el concepto de ecuación diferencial, clasificándolas en ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parcial, así como los conceptos de orden, grado y solución de una E. D. y nos detuvimos en el estudio de las E. D. Ordinarias de primer orden y primer grado.

Ejercicios Propuestos

Lineales homogéneas

1. $2y''-5y'+3y=0$
2. $y''+4y'+4y=0$
3. $3y''-6y'+3y=0$
4. $y''-9y'+20y=0$
5. $4y''-8y'+4y=0$
6. $y''-2y'+y=0$
7. $y''+7y'+12y=0$
8. $2y''+8y'+8y=0$
9. $5y''-15y'+10y=0$
10. $y''-6y'+9y=0$

Lineales no homogéneas

1. $y''-3y'+2y=4e^{x}$
2. $2y''-5y'+2y=3\sin(x)$
3. $y''-4y'+4y=6x$
4. $3y''-6y'+2y=12\cos(x)$

5. $y'' + 2y' + y = 5x^2$
6. $4y'' - 8y' + 4y = 16e^{2x}$
7. $2y'' - 6y' + 5y = 10\sin(2x)$
8. $y'' - y' + 2y = 8x^3$
9. $y'' + 3y' + 2y = 12x^2 + 6x$
10. $y'' - y' + y = 3\sin(2x)$

Bibliografía

1. Curso de Matemáticas Superiores para ingenieros, Tomo II. M. Krasnov y otros
2. Calculus Volumen 1. Tom M. Apostol
3. Matemáticas Superiores en Ejercicios y Problemas. Parte 2, P. E. Dankó y Otros.
4. Problemas de Análisis Matemático. B. Demidovich.
5. Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de A. Kiselev, M. Krasnov y G. Makarenko.
6. Cálculo con Geometría Analítica, Tomo II. Earl W. Swokowski