Matemática I

Encuentro 5:

“Sistemas de Numeración”

Sumario:

Sistema decimal

Sistema binario

Sistema octal

Sistema hexadecimal

Sistema decimal

En el sistema decimal, un número entero se puede representar por una cadena de dígitos tomados del conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ que se ordenan de derecha a izquierda empezando por el cero, es decir el primer dígito (el más a la derecha) ocupa la posición 0, el segundo la posición 1, etc. El valor de cada dígito está dado por el producto del dígito por la potencia $\mathbf{10^n}$, donde n es la posición del dígito.

Sistema decimal

Ejemplo 1.1 Consideremos el número *6823* escrito en el sistema decimal. Como comentamos sobre los sistemas de numeración posicionales, el valor de un dígito depende también de la posición del mismo dentro del número:

Dígito	Posición	Valor		
3	0	$3 \cdot 10^0$	=	3
2	1	$2 \cdot 10^1$	=	20
8	2	$8 \cdot 10^2$	=	800
6	3	$6 \cdot 10^3$	=	60000

Sistema decimal

De modo que:

$$6823 = 6 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

En general si tenemos cierto número entero n escrito en el sistema decimal y este consta de k cifras, digamos que $n = a_{k-1} \ldots a_0$, con:

$$a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, i = 0, \ldots \ldots k - 1$$

Entonces:

$$n = a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_0 \cdot 10^0 = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot 10^i$$

Sistema decimal

Ejemplo 1.2 Tomemos nuevamente el número *6823* y dividamos por *19* a él y todos los cocientes que vayamos obteniendo.

No. División	Dividiendo /10=	Cociente	Resto
1	6823	682	3
2	682	68	2
3	68	6	8
4	6	0	6

Sistema decimal

Notemos que los restos obtenidos son, en ese mismo orden, las cifras del número inicial.

Este procedimiento será útil en la obtención de las cifras de un número en un sistema de numeración posicional.

Sistema binario

El sistema de numeración binaria como su nombre lo indica, sólo requiere de dos símbolos para representar todos los números, o lo que es equivalente, es un sistema posicional de base *2*.

Usaremos los dígitos *0* y el *1* como símbolos del sistema binario, el primero tendrá valor cero y el segundo tendrá valor uno. De modo que un número en este sistema no será más que una cadena (secuencia) de ceros y unos.

Sistema binario

Al igual que en el sistema decimal el valor de un *bit* depende no solo de si es *1* ó *0*, sino de la posición en el número , de modo que si un bit se encuentra en la posición k contando desde la derecha y comenzando por el cero, entonces su valor debe ser multiplicado por $\mathbf{2^{k}}$

Sistema binario

Ejemplo 2.1

Consideremos el número binario *101101110*

Posición	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Dígitos	1	0	1	1	0	1	1	1	0
Valor	$1\cdot 2^8$	$0\cdot 2^7$	$1\cdot 2^6$	$1\cdot 2^5$	$0\cdot 2^4$	$1\cdot 2^3$	$1\cdot 2^2$	$1\cdot 2^1$	$0\cdot 2^0$

De modo que el valor del número en cuestión queda expresado en el siguiente desarrollo de potencias de ***2***.

$$1\cdot 2^8 + 0\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0$$

Sistema binario

A partir del desarrollo en potencias de 2 de un número binario resulta muy sencillo determinar el número que representa en sistema decimal. Para ello basta con sustituir cada potencia de 2 por su representación decimal y completar la suma. Haciendo esto con el desarrollo del ejemplo 2.1 obtenemos:

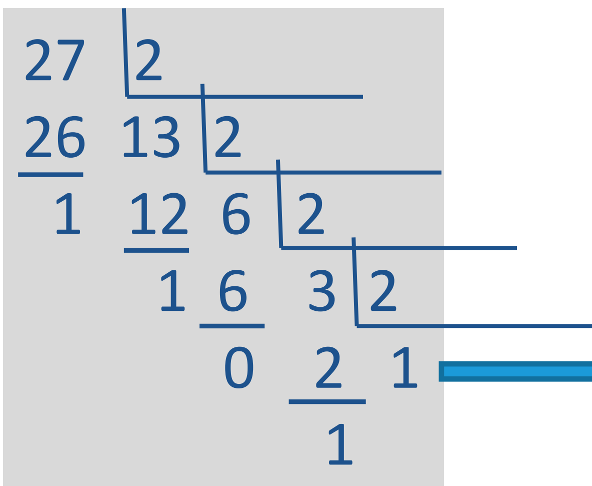
$$1 \cdot 256 + 0 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 366$$

$$101101110_2 = 366_{10}$$

Sistema binario

Ejemplo 2.2

Expresemos el número 27_{10} en el sistema binario.



$1 < 2$ (por tanto dejo de dividir)

Dividir el número decimal entre la base a la que queremos convertir y luego tomar el último cociente con todos los restos de derecha a izquierda.

Aritmética binaria

La aritmética binaria se simplifica bastante con respecto a la aritmética decimal. La tabla de la suma se reduce a:

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1$

$1 + 1 = 10$

mientras que la tabla de multiplicar se simplifica a:

$0 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 1 = 0$

$1 \cdot 1 = 1$

Aritmética binaria

Ejemplo 2.3

Efectuando las suma 110101 + 11101 tenemos que:

$$
\begin{array}{r}
110101 \\
+\ \underline{\ \ 11101} \\
1010010
\end{array}
$$

Aritmética binaria

Ejemplo 2.4

Efectuando el producto 10111 ·1101 tenemos:

$$
\begin{array}{r}
\underline{10111 \cdot 1101} \\
10111 \\
10111 \\
+ \qquad\qquad 0 \\
\underline{10111} \\
100101011
\end{array}
$$

Sistema octal

El sistema octal consta de 8 símbolos para representar los números y se rige por las mismas reglas de los sistemas de numeración posicionales con el sistema decimal y el sistema binario, diferenciándose claro está en que la base del sistema octal es 8. Siguiendo la notación arábiga será {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} el conjunto de los dígitos de este sistema.

Sistema octal

Ejemplo 3.1

Consideremos el número 231_8 . Desarrollando la serie de potencias de 8 obtenemos

$$231_8 = 2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0$$

Sistema octal

Ejemplo 3.2

Expresemos el número $\mathbf{299_{10}}$ en el sistema octal realizando divisiones sucesivas:

$$
\begin{array}{l|l}
299 & 8 \\ \hline
\underline{24} & 37 \;|\; 8 \\
\;\;59 & \underline{32} \;\;\; 4 \\
\;\;\underline{56} & \;\;\;5 \\
\;\;\;\;3 &
\end{array}
$$

4 < 8 (por tanto dejo de dividir)

$$\mathbf{299_{10} = 453_{8}}$$

Sistema octal

Convertir de octal a binario:

$$\mathbf{453_8}$$

Primeramente convirtamos los dígitos en números binarios de **3** bits comenzando por la derecha:

$$011_2 = 3$$

$$101_2 = 5 \longrightarrow (100)(101)(011)$$

$$100_2 = 4$$

$$\therefore \mathbf{453_8 = 100101011_2}$$

Aritmética octal

Las tablas de sumas y productos en el caso del sistema octal sólo llegarán hasta el 7. Así, tendríamos por ejemplo 7 +1 =10 y 5 + 5 = 12.

Ejemplo: Sumemos $\mathbf{453_8 + 246_8}$

$$\begin{array}{r} 453 \\ + \ \underline{246} \\ 721 \end{array}$$

Sistema hexadecimal

El sistema hexadecimal es el sistema de numeración posicional de base 16. Su concepción es analógica a los sistemas de numeración posicionales de bases inferiores estudiados. Ocurre que los dígitos arábigos {0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, ya no son suficientes para los de 16 símbolos básicos del sistema hexadecimal, de modo que si las primeras letras del alfabeto latino A, B, C, D, E y F se incluyen en el sistema para tomar respectivamente los valores 10, 11, 12, 13, 14 y 15.

Sistema hexadecimal

Ejemplo 4.1 Si consideramos el número $5DA_{16}$, obtenemos el siguiente desarrollo de potencias

$$5 \cdot 16^2 + D \cdot 16^1 + A \cdot 16^0$$

sustituyendo cada cifra por su valor y las potencias por su valor decimal

$$5 \cdot 256 + 13 \cdot 14 + 10 \cdot 1$$

$$5DA_{16} = 1498_{10}$$

Sistema hexadecimal

Conversión de decimal a hexadecimal:
división sucesiva entre 16
Conversión de binario a hexadecimal:
igual que de octal a binario pero tomando grupos de 4 bits

Aritmética hexadecimal

Las operaciones aritméticas en el sistema hexadecimal son análogas a las de los sistemas posicionales. En las tablas de las sumas tenemos igualdades como 5 + 7 = C, 1 + F = 10 0 C + E = 1A.

Ejemplo:

Efectuamos la suma 4CA3 + BC4F

$$\begin{array}{r} 4CA3 \\ +\ \ BC4F \\ \hline 108F2 \end{array}$$

Ejercicios

1. Sistema binario

Exprese los siguientes números en sistema decimal o binario según corresponda.

1. 100001_2
2. 10101101_2
3. 467_{10}
4. 4096_{10}

Ejercicios

1. 1 Aritmética binaria

Efectuar

1. $11101_2 + 111_2$
2. $1010101_2 + 10101_2$
3. $1010_2 \cdot 101_2$
4. $10101_2 \cdot 111_2$

Ejercicios

2. Sistema octal

Exprese en el sistema de numeración octal

1. 123_{10}
2. 1000000110_2
3. $456_8 + 654_8$
4. $777_8 + 2_8$

Ejercicios

3. Sistema hexadecimal

1. Expresar el número 110101011101_2 en el sistema decimal, octal y hexadecimal.

2. Expresar el número $7D6_{16}$ en el sistema decimal, octal y binario.

3. Efectuar $1A2D_{16} + F23_{16}$