Matemática III

Conferencia $\int$

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Profesor Instructor:
Lic. Juan Cruz Oduardo

November 14, 2024

Sumario: Ecuación diferencial ordinaria. Solución particular. Solución General. Orden y Grado. Teorema de existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y primer grado. Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden.
Objetivo: Resolver E. D. Ordinarias de primer orden y primer grado.

Introducción

Se presentan una gran variedad de problemas, en los cuales se desea determinar un elemento variable a partir de su coeficiente de variación. Por ejemplo, se quiere determinar la posición de una partícula móvil conociendo su velocidad o aceleración; o bien, dada una sustancia radiactiva que se desintegra, con coeficiente de variación conocido, se trata de determinar la cantidad de sustancia después de un tiempo dado. En ejemplos como éstos, se trata de determinar una función desconocida mediante datos relacionados por una ecuación que contiene por lo menos una de las derivadas de la función desconocida. Estas ecuaciones se denominan ecuaciones diferenciales y su estudio constituye una de las ramas de la Matemática que tiene más aplicación.
En este tema nos dedicaremos al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, en particular en esta conferencia estudiaremos las ecuaciones de primer orden y primer grado.

Desarrollo

Definiciones preliminares

.:Definición 0.1 (Ecuación Diferencial):.
Una ecuación diferencial es una ecuación matemática que relaciona una función desconocida con sus derivadas. Estas ecuaciones se utilizan para modelar una variedad de fenómenos en física, ingeniería, biología y otras disciplinas, donde la relación entre la función y sus derivadas es fundamental. En términos generales, una ecuación diferencial tiene la forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Donde y es la función desconocida de x, y' representa su primera derivada, y'' la segunda derivada, y así sucesivamente hasta $y^{(n)}$ que es la n-ésima derivada. La función F relaciona estos términos y, en general, puede ser una expresión algebraica o incluso una función complicada.

A continuación, se presentan ejemplos de diferentes tipos de ecuaciones diferenciales:

1. **Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):**

   - **Definición:** Una ecuación que involucra una función desconocida y sus derivadas con respecto a una sola variable independiente, por ejemplo:

   $$y' + 2xy = 0$$

2. **Ecuación Diferencial Parcial (EDP):**

   - **Definición:** Una ecuación que involucra una función desconocida y sus derivadas parciales con respecto a dos o más variables independientes, por ejemplo:

   $$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

3. **Ecuación Diferencial Lineal:**

   - **Definición:** Una ecuación en la que la función desconocida y sus derivadas aparecen en términos lineales, por ejemplo:
   $$y'' + 3xy' - 2y = 0$$

4. **Ecuación Diferencial No Lineal:**

   - **Definición:** Una ecuación en la que la función desconocida y sus derivadas aparecen en términos no lineales, por ejemplo:
   $$yy' - (y')^2 = x$$

5. **Ecuación Diferencial Homogénea:**

   - **Definición:** Una ecuación en la que todos los términos no homogéneos (derecha de la igualdad) son iguales a cero, por ejemplo:
   $$y'' + 2y' + y = 0$$

6. **Ecuación Diferencial No Homogénea:**

   - **Definición:** Una ecuación en la que al menos un término no homogéneo (derecha de la igualdad) no es igual a cero, por ejemplo:
   $$y'' + 2y' + y = x$$

   Claro, aquí tienes ejemplos de ecuaciones diferenciales donde se expresan en términos de dx. Estos ejemplos son útiles para ilustrar cómo se pueden reorganizar las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) para expresarlas en forma diferencial:

7. **Ecuación Diferencial de Primer Orden:**

   $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2$

   En esta EDO de primer orden, dy y dx representan incrementos infinitesimales de y y x respectivamente. La EDO se expresa en términos de dx y dy, lo que indica cómo cambia y con respecto a x.

8. **Ecuación Diferencial de Segundo Orden:**

   $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$

   Esta es una EDO de segundo orden. Aquí, $\frac{d^2y}{dx^2}$ representa la segunda derivada de y con respecto a x, y $\frac{dy}{dx}$ la primera derivada.

9. **Ecuación Diferencial Homogénea:**

   $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$

   Esta es una EDO de primer orden que se puede reorganizar para expresarla en términos de dx y dy. Observa cómo dx y dy están presentes en la ecuación.

10. **Ecuación Diferencial de Variable Separable:**

    $\frac{dy}{y} = xdx$

Teniendo en cuenta el tipo de derivadas que están presente en una ecuación diferencial, estas se clasifican en *ordinarias* y *parciales*.

.:Definición 0.2 (Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)):.
Una EDO es una ecuación que relaciona una función desconocida $y(x)$ con sus derivadas con respecto a una sola variable independiente x. La forma general de una EDO es:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Donde:
- y es la función desconocida de x.
- x es la única variable independiente.
- y' es la primera derivada de y con respecto a x.
- y'' es la segunda derivada de y.
- $y^{(n)}$ es la n-ésima derivada de y.
- F es una función que relaciona estos términos.

.:Definición 0.3 (Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)):.
Una EDP es una ecuación que relaciona una función desconocida $u(x, y, z, t)$ con sus derivadas parciales con respecto a dos o más variables independientes. La forma general de una EDP es:

$$F(x, y, z, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots) = 0$$

Donde:
- u es la función desconocida de múltiples variables independientes x, y, z, t u otras.
- Las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, etc., representan las tasas de cambio parciales de u con respecto a cada variable independiente.
- F es una función que relaciona estos términos.

Comparación:

1. **Número de Variables Independientes:**

   - EDO: Involucra una sola variable independiente (por ejemplo, x).

   - EDP: Involucra dos o más variables independientes (por ejemplo, x, y, z, t).

2. **Número de Derivadas:**

   - EDO: Involucra derivadas de una sola variable (por ejemplo, y', y'').

   - EDP: Involucra derivadas parciales con respecto a múltiples variables (por ejemplo, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots$).

3. **Aplicaciones:**

   - EDO: Comúnmente se utiliza para modelar fenómenos unidimensionales, como el movimiento de partículas en una dimensión. - EDP: Se aplica a problemas en múltiples dimensiones, como la difusión de calor en una placa bidimensional.

4. **Soluciones:**

   - EDO: Generalmente tiene una solución única si se proporcionan condiciones iniciales adecuadas.

   - EDP: Puede tener múltiples soluciones, y las condiciones iniciales o de contorno son esenciales para determinar una solución única.

.:Definición 0.4 (Orden de una Ecuación Diferencial):.
*El **orden de una ecuación diferencial** se refiere al orden de la derivada más alta presente en la ecuación. En otras palabras, es el número de veces que la función desconocida (usualmente denotada como $y(x)$) está diferenciada en la ecuación diferencial. El orden de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) se determina observando la derivada de orden más alto presente en la ecuación.*
La notación común para representar el orden de una EDO es n, donde n es un número natural (incluyendo cero). A continuación, te proporciono ejemplos de cómo determinar el orden de una EDO:

1. **Ejemplo de EDO de Primer Orden:**

$$y' - 2x = 3$$

En esta ecuación, la derivada más alta es y', que es de primer orden. Por lo tanto, esta es una EDO de primer orden.

2. **Ejemplo de EDO de Segundo Orden:**

$$y'' + y = e^x$$

En esta ecuación, la derivada más alta es y'', que es de segundo orden. Por lo tanto, esta es una EDO de segundo orden.

3. **Ejemplo de EDO de Tercer Orden:**

$$y''' - 2y'' + xy' = \sin(x)$$

En esta ecuación, la derivada más alta es y''', que es de tercer orden. Por lo tanto, esta es una EDO de tercer orden.

.:Definición 0.5 (Grado de una Ecuación Diferencial):.
es el grado al que está elevado la derivada de mayor orden en la ecuación diferencial.

1. Grado 1 y orden 1.
   $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$
2. Grado 3 y orden 2.
   $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3\frac{dy}{dx} - 5y = 0$
3. Grado 5 y orden 3.
   $\left(y'''\right)^5 - 4y'' + 6y' - 7y = 0$

.:Definición 0.6 (Solución de una Ecuación Diferencial):.
Dada una ecuación diferencial de la forma $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, donde y' representa la derivada de y con respecto a x y n es el orden más alto de la derivada presente, una solución de la ecuación diferencial es una función $y(x)$ que satisface la ecuación dada. Esto implica que al evaluar la ecuación $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ en la función $y(x)$, la ecuación se cumple para todos los valores de x en un cierto dominio.

Variables Separables

.:Definición 0.7 (Ecuaciones con Variables Separables):.
Las ecuaciones diferenciales con variables separables son un tipo de ecuación diferencial en la que es posible separar las variables independientes y dependientes de manera que todas las variables independientes queden en un lado de la ecuación y todas las variables dependientes queden en el otro lado. La forma general de una ecuación diferencial con variables separables es:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

Donde y es la variable dependiente, x es la variable independiente, y $g(x)$ y $h(y)$ son funciones de x y y respectivamente.
Las ecuaciones reducibles a variables separables son ecuaciones diferenciales que, mediante una serie de manipulaciones algebraicas, pueden transformarse en ecuaciones con variables separables. A menudo, estas ecuaciones implican derivadas de la variable dependiente y pueden resolverse al reescribir la ecuación en una forma que permita separar las variables. Luego, se pueden integrar para encontrar la solución.

A continuación, te proporcionaré un ejemplo resuelto de una ecuación diferencial con variables separables:

.:*Ejemplo 0.1*:.

Consideremos la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot e^{-2y}$$

Solución

Para resolver esta ecuación con variables separables, reorganizamos la ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{e^{-2y}} = x\,dx$$

Ahora, las variables están separadas, con todas las variables y en un lado y todas las variables x en el otro. Luego, integramos ambos lados:

$$\int e^{2y}\,dy = \int x\,dx$$

Esto nos lleva a:

$$\frac{e^{2y}}{2} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$e^{2y} = x^2 + C$$

Aplicando el ln en ambos miembros:

$$2y = \ln\left(x^2 + C\right)$$

Donde C es la constante de integración. Ahora, podemos resolver para y:

$$y(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + C\right)$$

.:*Ejemplo* 0.2:.

Ecuación Diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot y$$

Solución

Para resolver esta ecuación, separamos las variables x e y:

$$\frac{dy}{y} = x^2\,dx$$

Luego, integramos ambos lados:

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int x^2\,dx$$

Esto nos lleva a:

$$\ln|y| = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Donde C es la constante de integración. Para despejar y, tomamos el exponencial en ambos lados:

$$|y| = e^C \cdot e^{\frac{1}{3}x^3}$$

La solución general es:

$$y(x) = \pm e^C \cdot e^{\frac{1}{3}x^3}$$

.:*Ejemplo* 0.3:.

Ecuación Diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 \cdot \cos(x)$$

Solución

Separamos las variables x e y:

$$\frac{dy}{y^2} = 3\cos(x)\,dx$$

Luego, integramos ambos lados:

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 3\cos(x)\,dx$$

Esto nos lleva a:

$$-\frac{1}{y} = 3\sin(x) + C$$

Donde C es la constante de integración. Para despejar y, invertimos ambos lados:

$$y(x) = -\frac{1}{3\sin(x) + C}$$

.:*Ejemplo 0.4*:.

Ecuación Diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$$

Solución

Separamos las variables x e y:

$$y\,dy = 2x\,dx$$

Luego, integramos ambos lados:

$$\int y\,dy = \int 2x\,dx$$

Esto nos lleva a:

$$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + C$$

Donde C es la constante de integración. Para despejar y, multiplicamos ambos lados por 2 y tomamos la raíz cuadrada:

$$y(x) = \pm\sqrt{2x^2 + 2C}$$

.:*Ejemplo 0.5*:.

Resolver la ecuación diferencial separable:

$$y' = 2x \cdot y$$

Solución

1. Separar las variables x e y:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot y$$

2. Llevar todos los términos con y al lado izquierdo y los términos con x al lado derecho:

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

3. Integrar ambos lados de la ecuación por separado:

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 2x\,dx$$

4. Resolver las integrales:

$$\ln|y| = x^2 + C$$

5. Despejar y:

$$|y| = e^{x^2 + C}$$

Donde C es una constante de integración.

6. Considerar el valor absoluto:

$$y = \pm e^{x^2+C}$$

Ahora, C puede combinarse con $\pm$ en una nueva constante K:

$$y = Ke^{x^2}$$

Esta es la solución general de la ecuación diferencial.

.:*Ejemplo 0.6*:.

Resolver la ecuación diferencial separable:

$$y' = \frac{1}{y} \cdot \sin(x)$$

Solución

1. Separar las variables x e y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \sin(x)$$

2. Llevar todos los términos con y al lado izquierdo y los términos con x al lado derecho:

$$ydy = \sin(x)\,dx$$

3. Integrar ambos lados de la ecuación por separado:

$$\int y\,dy = \int \sin(x)\,dx$$

4. Resolver las integrales:

$$y(x) = -\cos(x) + C$$

Esta es la solución general de la ecuación diferencial.

.:*Ejemplo 0.7*:.

Resolver la ecuación diferencial separable:

$$y' = \frac{x^2}{y^3}$$

Solución

1. Separar las variables x e y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^3}$$

2. Llevar todos los términos con y al lado izquierdo y los términos con x al lado derecho:

$$y^3\,dy = x^2\,dx$$

3. Integrar ambos lados de la ecuación por separado:

$$\int y^3\,dy = \int x^2\,dx$$

4. Resolver las integrales:

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x^3}{3} + C$$

5. Despejar y:

$$y^4 = \frac{4}{3} \cdot \left(x^3 + C\right)$$

6. Tomar la cuarta raíz en ambos lados:

$$y = \sqrt[4]{\frac{4}{3} \cdot (x^3 + C)}$$

Lineales

.:Definición 0.8 (Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden):.
Una ecuación diferencial lineal de primer orden es una ecuación diferencial ordinaria (EDO) en la que la derivada de la función desconocida y aparece elevada a la primera potencia y está multiplicada por una función lineal de x y y. La forma general de una ecuación diferencial lineal de primer orden se puede expresar como sigue:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Donde:
- $\frac{dy}{dx}$ representa la derivada de y con respecto a x.
- $P(x)$ es una función de x que multiplica a y.
- $Q(x)$ es una función de x que puede ser independiente de y.
Estas ecuaciones son "lineales" en el sentido de que y y su derivada $\frac{dy}{dx}$ aparecen en la ecuación de manera lineal, es decir, elevados a la primera potencia y multiplicados por funciones de x, y su solución general es:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left\{\int \mu(x)Q(x)dx + c\right\} \quad \textit{donde} \quad \mu(x) = e^{\int P(x)dx}}$$

Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden son importantes en matemáticas y en diversas disciplinas científicas, ya que se pueden resolver utilizando técnicas analíticas. Las soluciones de estas ecuaciones a menudo se expresan en términos de una "constante de integración" que se determina a partir de una condición inicial o información adicional proporcionada en el problema. Estas ecuaciones tienen aplicaciones en la física, la ingeniería, la economía y muchas otras áreas.

.:*Ejemplo* *0.8*:.

Resuelve la siguiente ecuación

$$x^2y' + 2xy = 3x^2$$

Solución

La fórmula general de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden es:
$y' + P(x)y = Q(x)$
y su solución general es:

$$\boxed{y = \frac{1}{\mu}\left\{\int \mu Q dx + c\right\} \quad \text{donde} \quad \mu = e^{\int P(x)dx}}$$

Paso 1: llevando la ecuación a su forma general:
$x^2y' + 2xy = 3x^2 / \cdot \dfrac{1}{x^2}$ se multiplica toda la ecuación por $\dfrac{1}{x^2}$
$y' + \frac{2}{x}y = 3$
Paso 2: se identifica en la ecuación a $P(x)$ y a $Q(x)$:
$P(x) = \frac{2}{x}$
$Q(x) = 3$
Paso 4: calculamos a μ usando el valor de $P(x)$:
$\mu = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\int \frac{1}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$
Paso 5: sustituir en la ecuación de la solución $y = \frac{1}{\mu}\int \mu Q dx$:
$y = \frac{1}{x^2}\int 3x^2 dx$
$y = \frac{1}{x^2}\left(x^3 + C\right)$
Paso 6: Solución General:
$y = x + \frac{C}{x^2}$

.:*Ejemplo* 0.9:.

Resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$x^2y' + 4xy = 2x^3$$

Solución

Paso 1: Lleva la ecuación a su forma general
Dividimos toda la ecuación por x^2 para obtener:

$$y' + \frac{4}{x}y = 2x$$

Paso 2: Identifica $P(x)$ y $Q(x)$

Identificamos $P(x) = \frac{4}{x}$ y $Q(x) = 2x$.

Paso 3: Calcula el factor integrante $\mu(x)$.
Utilizamos la fórmula del factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Donde $P(x) = \frac{4}{x}$, por lo que:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{4}{x}dx} = e^{4\ln|x|} = e^{\ln x^4} = x^4$$

Paso 4: Sustituye μ en la ecuación de la solución $y = \frac{1}{\mu}\int Q\mu dx$.
Obtenemos:

$$y = \frac{1}{x^4}\int 2x \cdot x^4 dx$$

Paso 5: Resuelve la integral.

$$\int 2x \cdot x^4 dx = 2\int x^5 dx = 2 \cdot \frac{1}{6}x^6 + C = \frac{1}{3}x^6 + C$$

Sustituimos este resultado en la ecuación:

$$y = \frac{1}{x^4}\left(\frac{1}{3}x^6 + C\right)$$

Paso 6: Solución General.

$$\boxed{y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x^4}}$$

.:*Ejemplo* *0.10*:.

Resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$x^2y' + 2xy = 2x\cos(x)$$

Solución

Paso 1: Lleva la ecuación a su forma general.
Dividimos toda la ecuación por x^2 para obtener:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{2\cos(x)}{x}$$

Paso 2: Identifica $P(x)$ y $Q(x)$.

Identificamos $P(x) = \frac{2}{x}$ y $Q(x) = \frac{2\cos(x)}{x}$.

Paso 3: Calcula el factor integrante $\mu(x)$.
Utilizamos la fórmula del factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Donde $P(x) = \frac{2}{x}$, por lo que:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2$$

Paso 4: Sustituye μ en la ecuación de la solución $y = \frac{1}{\mu}\left(\int Q\mu dx\right)$.
Obtenemos:

$$y = \frac{1}{x^2}\left(\int \frac{2\cos(x)}{x} \cdot x^2 dx\right)$$

Paso 5: Resuelve la integral.

$$\int 2\cos(x) \cdot x dx$$

Para resolver esta integral, utilizamos la integración por partes. Supongamos que $u = x$ y $dv = 2\cos(x)dx$. Entonces, $du = xdx$ y $v = 2\sin(x)$. Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int 2\cos(x) \cdot x^2 dx = x \cdot 2\sin(x) - \int (2\sin(x) \cdot dx) + C$$

$$= 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C_1$$

Paso 6: Sustituimos en la ecuación de la solución.

$$y = \frac{2x\sin(x) + 2\cos(x) + C_1}{x^2}$$

Paso 7: Solución General.
$y = \frac{2\sin(x)}{x} + \frac{2\cos(x)}{x^2} + \frac{C_1}{x^2}$

.:*Ejemplo* 0.11:.

Resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$3xy' - 4y = x^2$$

Paso 1: Escribe la ecuación en la forma estándar.
La ecuación ya está en la forma estándar:

$$3xy' - 4y - x^2 = 0$$

Paso 2: Identifica $P(x)$ y $Q(x)$.
Identificamos $P(x) = -\frac{4}{3x}$ y $Q(x) = x^2$.
Paso 3: Encuentra un factor integrante.
El factor integrante se calcula como:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \left(-\frac{4}{3x}\right)dx} = e^{-\frac{4}{3}\ln|x|} = |x|^{-\frac{4}{3}}$$

Multiplicamos toda la ecuación por el factor integrante:

$$|x|^{-\frac{4}{3}}(3xy' - 4y - x^2) = 0$$

Paso 4: Integra la ecuación.

$$\int |x|^{-\frac{4}{3}}(3xy' - 4y - x^2)dx = 0$$

$$3\int y'|x|^{-\frac{4}{3}}dx - 4\int |x|^{-\frac{4}{3}}ydx - \int x^2|x|^{-\frac{4}{3}}dx = C$$

Paso 5: Encuentra la constante de integración.
La solución general incluirá una constante de integración C, que se determina utilizando una condición inicial. Supongamos que $y(1) = 2$.
Aplicamos la condición inicial:

$$3\int y'|x|^{-\frac{4}{3}}dx - 4\int |x|^{-\frac{4}{3}}ydx - \int x^2|x|^{-\frac{4}{3}}dx = C$$

$$(3y - 4\int |x|^{-\frac{4}{3}} y dx - \int x^2 |x|^{-\frac{4}{3}} dx = C$$

Sustituimos $x = 1$ y $y = 2$:

$$3(2) - 4\int |1|^{-\frac{4}{3}}(2) dx - \int 1^2 |1|^{-\frac{4}{3}} dx = C$$

$$6 - 8\int 2dx - \int dx = C$$

$$6 - 16 - 1 = C$$

$$C = -11$$

Paso 6: Aplica las condiciones iniciales.
Hemos aplicado la condición inicial y encontrado que $C = -11$.
Paso 7: Verifica la solución.
La solución general es:

$$3y - 4\int |x|^{-\frac{4}{3}} y dx - \int x^2 |x|^{-\frac{4}{3}} dx = -11$$

Ahora, procedamos a resolver las integrales restantes:
Para $\int |x|^{-\frac{4}{3}} y dx$, debemos considerar dos casos según el signo de x:
Caso 1 (para $x > 0$):

$$\int x^{-\frac{4}{3}} y dx$$

Caso 2 (para $x < 0$):

$$\int (-x)^{-\frac{4}{3}} y dx$$

Después de resolver las integrales en ambos casos, obtenemos:

$$3y - \frac{12}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{x} + C_1 - C_2 = -11$$

Donde C_1 y C_2 son constantes de integración en cada caso.
Simplificando:

$$3y - \frac{12}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{x} + C_1 - C_2 = -11$$

Bernoulli

.:Definición 0.9 (Ecuación de Bernoulli):.
Una ecuación diferencial de Bernoulli es una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden en la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones dadas de x, y n es una constante.

Para resolver una ecuación de Bernoulli, primero se puede hacer una sustitución $v = y^{1-n}$ para transformarla en una ecuación lineal. Luego, después de resolver la ecuación lineal resultante para v, se puede recuperar y mediante la relación $y = v^{1/(1-n)}$.

.:*Ejemplo* 0.12:.

Resolver la ecuación diferencial $y' - 2xy = 3y^2$.

Solución

1. Identificamos $P(x) = -2x$, $Q(x) = 3$, y $n = 2$.
2. Realizamos la sustitución $v = y^{1-n} = y^{-1}$, entonces $y = v^{-1}$.
3. Derivamos y con respecto a x para obtener $y' = -v^{-2}v'$.
4. Sustituimos y y y' en la ecuación original, lo que nos da $-v^{-2}v' - 2xv^{-1} = 3v^{-2}$.
5. Multiplicamos ambos lados de la ecuación por $-v^2$ para obtener $v' + 2xv = -3$.
6. Resolvemos esta ecuación lineal para v.
7. Una vez que tengamos v, podemos encontrar y usando $y = v^{-1}$.

.:*Ejemplo* 0.13:.

Resolver la ecuación diferencial $y' + 2xy = 4y^3$.

Solución

1. Identificamos $P(x) = 2x$, $Q(x) = 4$, y $n = 3$.
2. Realizamos la sustitución $v = y^{1-n} = y^{-2}$, entonces $y = v^{-1/2}$.
3. Derivamos y con respecto a x para obtener $y' = -\frac{1}{2}v^{-3/2}v'$.
4. Sustituimos y y y' en la ecuación original, lo que nos da $-\frac{1}{2}v^{-3/2}v' + 2xv^{-1/2} = 4v^{-3}$.
5. Multiplicamos ambos lados de la ecuación por $-2v^{3/2}$ para obtener $v' - 4xv = -8$.
6. Resolvemos esta ecuación lineal para v.
7. Una vez que tengamos v, podemos encontrar y usando $y = v^{-1/2}$.

.:*Ejemplo* 0.14:.

Resolver la ecuación diferencial $y' - 2xy = y^3$.

Solución

1. Identificamos $P(x) = -2x$, $Q(x) = 1$, y $n = 3$.
2. Realizamos la sustitución $v = y^{1-n} = y^{-2}$, entonces $y = v^{-1/2}$.
3. Derivamos y con respecto a x para obtener $y' = -\frac{1}{2}v^{-3/2}v'$.
4. Sustituimos y y y' en la ecuación original, lo que nos da $-\frac{1}{2}v^{-3/2}v' - 2xv^{-1/2} = v^{-3}$.
5. Multiplicamos ambos lados de la ecuación por $-2v^{3/2}$ para obtener $v' + 4xv = -2v^{1/2}$.
6. Resolvemos esta ecuación lineal para v.
7. Una vez que tengamos v, podemos encontrar y usando $y = v^{-1/2}$.

.:*Ejemplo* 0.15:.

Resolver la ecuación diferencial $y' + 3xy = 2y^2$.

Solución

1. Identificamos $P(x) = 3x$, $Q(x) = 2$, y $n = 2$.
2. Realizamos la sustitución $v = y^{1-n} = y^{-1}$, entonces $y = v^{-1}$.
3. Derivamos y con respecto a x para obtener $y' = -v^{-2}v'$.

4. Sustituimos y y y' en la ecuación original, lo que nos da $-v^{-2}v' + 3xv^{-1} = 2v^{-2}$.
5. Multiplicamos ambos lados de la ecuación por $-v^2$ para obtener $v' - 3xv = -2$.
6. Resolvemos esta ecuación lineal para v.
7. Una vez que tengamos v, podemos encontrar y usando $y = v^{-1}$.

.:*Ejemplo* 0.16:.

Resolver la ecuación diferencial $y' - 4xy = y^4$.

Solución

1. Identificamos $P(x) = -4x$, $Q(x) = 1$, y $n = 4$.
2. Realizamos la sustitución $v = y^{1-n} = y^{-3}$, entonces $y = v^{-1/3}$.
3. Derivamos y con respecto a x para obtener $y' = -\frac{1}{3}v^{-4/3}v'$.
4. Sustituimos y y y' en la ecuación original, lo que nos da $-\frac{1}{3}v^{-4/3}v' - 4xv^{-1/3} = v^{-4}$.
5. Multiplicamos ambos lados de la ecuación por $-3v^{4/3}$ para obtener $v' + 12xv = -3v^{1/3}$.
6. Resolvemos esta ecuación lineal para v.
7. Una vez que tengamos v, podemos encontrar y usando $y = v^{-1/3}$.

Ecuaciones Exactas

.:Definición 0.10 (Ecuaciones diferenciales exactas (o en diferenciales totales)):.
Si para la ecuación diferencial:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

Se cumple la igualdad:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2}$$

la ecuación (1) se puede escribir como $df(x,y) = 0$ y se llama ecuación diferencial exacta *(o en difertenciales totales) y su solución es la función $f(x,y)$. (más adelante daremos los pasos exactos para resolver este tipo de ecuación diferencial).*

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + TNR\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + C \tag{3}$$

.:Definición 0.11 (Reducibles a exactas):.
Una ecuación diferencial es reducible a exacta *si en general aparece de la forma (1) y se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy*[1]*, pero no cumple la igualdad (2), $\exists\ p(x,y)$ llamado* factor integrante *tal que:*

$$p(Mdx + Ndy) = df \tag{4}$$

de donde obtenemos que la función $p(x,y)$ satisface la ecuación:

$$\frac{\partial(pM)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(pN)}{\partial x} \tag{5}$$

[1] **Teorema de exitencia y unicidad.**
Condiciones:
a) $f(x,y)$ es una función continua de las dos variables en el recinto en el que está definida.
b)$f(x,y)$ admite derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$, continua con respecto a x e y.

El factor integrante se puede hallar fácilmente en los siguientes casos:

Factor integrante dependiente de x:

$$1)\quad \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)\quad \Longrightarrow p(x)=e^{\int f(x)dx}. \tag{6}$$

Factor integrante dependiente de y:

$$2)\quad \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=g(y)\quad \Longrightarrow p(y)=e^{\int g(y)dy}. \tag{7}$$

Factor integrante dependiente de (x,y) que tiene la forma $x^m y^n$:

$$3)\quad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=m\frac{N}{x}-n\frac{\partial M}{y}\quad \Longrightarrow p(x,y)=x^n y^m. \tag{8}$$

Factor integrante dependiente de (x,y):

$$4)\quad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N(x,y)P(x)-M(x,y)Q(y)\quad \Longrightarrow p(x,y)=e^{\int P(x)dx}e^{\int Q(y)dy}. \tag{9}$$

$\star$ Note que este último es un caso general de los tres anteriores, sólo tomando a $P(x)=0$, $Q(y)=0$ y $P(x)=\frac{m}{x}$, $Q(y)=\frac{n}{y}$ respectivamente.

Procederemos a resolver un ejemplo de una ecuación diferencial reducible a exacta pues es la más general para tratar los dos conceptos tratados:

.:*Ejemplo* 0.17:.

Resuelve la siguiente ecuación:

$$\left(2y\sin x-\cos^3 x\right)dx+\cos x dy=0 \tag{10}$$

Solución

Primero veamos si es exacta, para esto debe cumplir la igualdad (2):

$$M(x,y)=2y\sin x-\cos^3 x \quad \text{y} \quad N(x,y)=\cos x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=2\sin x \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-\sin x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

No es exacta pero como las funciones involucradas son continuas y derivables, entonces procedemos a encontrar el *factor integrante*, usaremos a (6), que al sustituir M y N resulta en la expresión siguiente:

$$F(x)=3\frac{\sin x}{\cos x}$$

Luego, sustituyendo:

$$p(x)=e^{\int 3\frac{\sin x}{\cos x}dx}$$

$$\int 3\frac{\sin x}{\cos x}dx = 3\ln\left(\frac{1}{cosx}\right) = \ln\left(\frac{1}{\cos^3 x}\right)$$

$$p(x) = e^{\ln\left(\frac{1}{\cos^3 x}\right)}$$

Finalmente el factor integrante:

$$p(x) = \frac{1}{\cos^3 x}.$$

Al multiplicar el factor integrante por (10), obtenemos una *ecuación diferencial exacta* (le dejamos al lector que compruebe si cumple con la igualdad (5)).

$$\left(\frac{2y\sin x}{\cos^3 x} - 1\right)dx + \frac{1}{\cos^2 x}dy = 0 \tag{11}$$

De aquí se sabe que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y\sin x}{\cos^3 x} - 1 \tag{12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{13}$$

Integrando (12) (en este caso siempre se considera las funciones dependientes de y como constantes):

$$f(x,y) = \int \frac{2y\sin x}{\cos^3 x}dx - \int 1dx$$

$$f(x,y) = \frac{y}{\cos^2 x} - x + h(y)$$

Derivando parcialmente con respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\partial h(y)}{\partial y} \tag{14}$$

Sustituyendo (13) en la anterior:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\partial h(y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h(y)}{\partial y} = 0$$

$$h(y) = C.$$

Finalmente sutituimos $h(y)$, en la solución:

$$f(x,y) = \frac{y}{\cos^2 x} - x + C.$$

Paso para resolver una Ecuación Diferencial Exacta

Si se prestó atención al ejemplo resuelto se pudo deducir fácilmente que los ***paso para resolver una ecuación diferencial exacta*** son:

1. Se comprueba si la ecuación es exacta mediante la relación $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$.
2. Si no es exacta se reduce a exacta mediante un **factor integrante**.
3. Se comprueba si la nueva ecuación es exacta.
4. Se integra parcialmente a $M(x,y)$ con respecto a x por lo que se considera a las variables y como constantes, es decir, se calcula $\int M(x,y)dx$.
5. Se integra parcialmente a $N(x,y)$ con respecto a y por lo que se considera a las variables x como constantes, es decir, se calcula $\int N(x,y)dy$.
6. Finalmente se sustituye los resultados en (3), que no es más que sustituir en ambos sumandos de la ecuación dada, tomando, en el caso de la integración de $N(x,y)$, los términos que no se repiten (TNR), para obtener la función buscada $f(x,y)$.

.:*Ejemplo* **0.18**:.

Resuelve la siguiente ecuación:

$$(2x + 3y^2)dx + (4y + 6xy)dy = 0$$

Solución

Para verificar si es exacta, calculamos las derivadas parciales de:

$$M(x, y) = 2x + 3y^2$$
$$N(x, y) = 4y + 6xy$$

Las derivadas parciales son:

$$M_y = 6y$$
$$N_x = 6y$$

Como $M_y = N_x$, la ecuación es exacta. Ahora, para encontrar la solución, integramos con respecto a x y y:

Paso 1: Integramos M con respecto a x:

$$\int (2x + 3y^2)dx = x^2 + 3xy^2$$

Paso 2: Integramos N con respecto a y:

$$\int (4y + 6xy)dy = 2y^2 + 3xy^2$$

Paso 3: Sustituimos los resultados en la fórmula general de solución:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \int M(x,y)dx + TNR \int N(x_0,y)dy + C \\
f(x,y) &= x^2 + 3xy^2 + 2y^2 + 3\cancel{x}y^2 + C \\
f(x,y) &= x^2 + 3xy^2 + 2y^2 + C
\end{aligned}
$$

.:*Ejemplo* *0.19*:.

Resuelve la siguiente ecuación:

$$(3y^2 - 2x)dx + (6xy)dy = 0$$

Solución

Para verificar si es exacta, calculamos las derivadas parciales de:

$$M(x,y) = 3y^2 - 2x$$

$$N(x,y) = 6xy$$

Las derivadas parciales son:

$$M_y = 6y$$

$$N_x = 6y$$

Como $M_y = N_x$, la ecuación es exacta.

Paso 1: Integramos a $M(x,y)$ con respecto a x:

$$\int (3y^2 - 2x)dx = 3xy^2 - x^2$$

Paso 2: Integramos $N(x,y)$ con respecto a y:

$$\int (6xy)dy = 3xy^2$$

Paso 3: Sustituimos los resultados en la fórmula general de solución:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \int M(x,y)dx + TNR \int N(x,y)dy + C \\
f(x,y) &= 3xy^2 - x^2 + 3\cancel{x}y^2 + C \\
f(x,y) &= 3xy^2 - x^2 + C
\end{aligned}
$$

Esta es la solución general de la ecuación.

.:*Ejemplo* **0.20**:.

Resolver el problema de valor inicial

$$(e^x y + xe^x y)dx + (xe^x + 2)dy = 0, \qquad\qquad y(0) = -1$$

Solución

Para verificar si es exacta, calculamos las derivadas parciales de:

$$M(x, y) = e^x y + xe^x y$$

$$N(x, y) = xe^x + 2$$

Las derivadas parciales son:

$$M_y = e^x + xe^x$$

$$N_x = e^x + xe^x$$

Como $M_y = N_x$, la ecuación es exacta.

Paso 1: Integramos a $M(x, y)$ con respecto a x:

$$\int (e^x y + xe^x y)dx = xe^x y$$

Paso 2: Integramos $N(x, y)$ con respecto a y:

$$\int (xe^x + 2)dy = xe^x y + 2y$$

Paso 3: Sustituimos los resultados en la fórmula general de solución:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \int M(x, y)dx + TNR \int N(x, y)dy + C \\
f(x, y) &= xe^x y + x\cancel{e}^x y + 2y + C \\
f(x, y) &= xe^x y + 2y + C
\end{aligned}$$

Pasemos a usar la condición inicial dada $y(0) = -1$, por lo que cuando $x = 0$ entonces $y = -1$, sustituyendo esos resultados en la solución, podemos determinar el valor de la constante C.
Primeramente en lugar de $f(x, y)$ escribimos la solución igualada a la constante C buscada.

$$C = xe^x y + 2y$$

Sustituyendo la condición inicial:

$$\begin{aligned}
C &= 0 * e^0 * (-1) + 2 * (-1) \\
C &= -2
\end{aligned}$$

Sustituyendo C en la solución General:

$$\boxed{f(x,y) = xe^x y + 2y - 2}$$

.:Ejemplo ***0.21*** *:.*

Resolver el problema de valor inicial

$$(y\sin(xy) + x^2)dx + (x\sin(xy) + y^2)dy = 0, \qquad y(0) = -1$$

Solución

Para verificar si es exacta, calculamos las derivadas parciales de:

$$M(x,y) = y\sin(xy) + x^2$$

$$N(x,y) = x\sin(xy) + y^2$$

Las derivadas parciales son:

$$M_y = \sin(xy) + xy\cos(xy) = N_x$$

Como $M_y = N_x$, la ecuación es exacta.

Paso 1: Integramos a $M(x,y)$ con respecto a x:

$$\int (y\sin(xy) + x^2)dx = -\cos(xy) + \frac{x^3}{3}$$

Paso 2: Integramos $N(x,y)$ con respecto a y:

$$\int (x\sin(xy) + y^2)dy = -\cos(xy) + \frac{y^3}{3}$$

Paso 3: Sustituimos los resultados en la fórmula general de solución:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + TNR\int N(x,y)dy + C$$

$$f(x,y) = -\cos(xy) + \frac{x^3}{3} - \cancel{\cos}(xy) + \frac{y^3}{3} + C$$

$$f(x,y) = -\cos(xy) + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + C$$

Pasemos a usar la condición inicial dada $y(0) = -1$, por lo que cuando $x = 0$ entonces $y = -1$, sustituyendo esos resultados en la solución, podemos determinar el valor de la constante C.
Primeramente en lugar de $f(x,y)$ escribimos la solución igualada a la constante C buscada.

$$C = -\cos(xy) + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3}$$

Sustituyendo la condición inicial:

$$C = -\cos(0) + \frac{0^3}{3} + \frac{(-1)^3}{3}$$
$$C = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

Sustituyendo C en la solución General:

$$\boxed{f(x,y) = -\cos(xy) + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - \frac{4}{3}}$$

Factor integrante

.:Ejemplo 0.22:.

Resuelve la siguiente ecuación:

$$(x^2 + 2y)dx + (2x + x^2)dy = 0$$

Solución

Para resolver la ecuación diferencial $(x^2 + 2y)dx + (2x + x^2)dy = 0$, primero verifiquemos si es exacta. La ecuación es exacta si se cumple que $M_x = N_y$, donde M es el coeficiente de dx y N es el coeficiente de dy.

Paso 1: Identificar M y N.
$M(x,y) = x^2 + 2y$
$N(x,y) = 2x + x^2$

Paso 2: Calcular las derivadas parciales.
$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2$
$\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2 + 2x$

Paso 3: Verificar la exactitud.
Para que la ecuación sea exacta, necesitamos que $M_x = N_y$.
En este caso, 2 no es igual a $2 + 2x$, por lo que la ecuación no es exacta en su forma actual.

Paso 4: Encontrar un factor integrante.
Para hacer que la ecuación sea exacta, necesitamos encontrar un factor integrante $p(x)$. El factor integrante se puede calcular de la siguiente manera:
$p(x) = e^{\int f(x)dx}$

Primero hallamos a $f(x)$:

$f(x) = \dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{2 - (2 + 2x)}{2x + x^2}$

$f(x) = \dfrac{-2x}{2x + x^2} = -\dfrac{2x}{x(2+x)} = -\dfrac{2}{x+2}$

Luego hayamos su integral:
$\int f(x)dx = \int -\dfrac{2}{x+2}dx = -2\int \dfrac{1}{x+2}dx = -2\ln|x+2| = \ln|x+2|^{-2}$

Finalmente hayamos el factor integrante que depende de x:

$p(x) = e^{\ln|x+2|^{-2}} = (x+2)^{-2}$

Paso 5: Multiplicar la ecuación por el factor integrante.
Multiplicamos la ecuación original por el factor integrante:

$$\frac{1}{(x+2)^2}\left[(x^2+2y)dx + (2x+x^2)dy\right] = 0$$

Simplificamos:

$$\left[\frac{x^2}{(x+2)^2} + \frac{2y}{(x+2)^2}\right]dx + \left[\frac{2x+x^2}{(x+2)^2}\right]dy = 0$$
$$\left[\frac{x^2}{(x+2)^2} + \frac{2y}{(x+2)^2}\right]dx + \left[\frac{x}{x+2}\right]dy = 0$$

Paso 6: Verificar la exactitud.
Ahora, verificamos si la ecuación es exacta. Calculamos las derivadas parciales de los nuevos términos:
$M_y = \dfrac{2}{(x+2)^2}$
$N_x = \dfrac{2}{(x+2)^2}$
Las derivadas parciales son iguales, lo que significa que la ecuación es exacta.

Paso 7: Encontrar la solución.
Para encontrar la solución, integramos la ecuación exacta. Primero, integramos con respecto a x:
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$
$f(x,y) = \int \left[\dfrac{x^2}{(x+2)^2} + \dfrac{2y}{(x+2)^2}\right]dx$
$f(x,y) = \int \dfrac{x^2}{(x+2)^2}dx + \int \dfrac{2y}{(x+2)^2}dx$
$f(x,y) = x + 2 - \ln(x+2) - \dfrac{4}{x+2} - \dfrac{2y}{x+2} + h(y)$
Derivamos con respecto a y:
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2}{x+2} + \dfrac{\partial h(y)}{\partial y}$
Sabemos que:
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$
$-\dfrac{2}{x+2} + \dfrac{\partial h(y)}{\partial y} = \dfrac{x}{x+2}$

$$\frac{\partial h(y)}{\partial y} = \frac{x}{x+2} + \frac{2}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} = 1$$

Integramos con respecto a y:
$h(y) = \int 1dy$
$h(y) = y$
Sustituimos $h(y)$ en la ecuación particular:

$$f(x, y) = x + 2 - \ln(x+2) - \frac{4}{x+2} - \frac{2y}{x+2} + y$$

Simplificamos y escribimos la solución general:

$$f(x, y) = x + 2 - \ln(x+2) + y - 2\frac{(y+2)}{x+2}$$

Esta es la solución general de la ecuación diferencial dada.

Conclusiones

En esta conferencia se ha definido el concepto de ecuación diferencial, clasificándolas en ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parcial, así como los conceptos de orden, grado y solución de una E. D. y nos detuvimos en el estudio de las E. D. Ordinarias de primer orden y primer grado.

Ejercicios Propuestos

Separables

1. $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2y$
2. $\dfrac{dy}{dx} = 3e^x \cos(y)$
3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y}$
4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{xy}$
5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2}\sqrt{y}$
6. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y^2}$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{y^2}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x^2}{y^3}$
9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\ln(y)}$
10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-1}{x}$

Lineales

1. $x^2y' + 2xy = 4x^3$
2. $xy' + y = x^2$
3. $2xy' + y = \cos(x)$
4. $2xy' + y = 2x\sin(x)$
5. $x^3y' + x^2y = 5x^2$
6. $y' + \frac{1}{x}y = x^2 - 2\cos(x)$
7. $x^2y' + 4xy = 6x\sin(x)$
8. $xy' + 2y = x^3 - \sin(x)$
9. $3xy' + 6y = 9x\cos(x)$
10. $x^2y' + 2xy = 7x^2 - 3\sin(x)$
11. $xy' + y = e^x$
12. $2xy' + 3y = x^2e^x$
13. $x^2y' - 4xy = x^3e^{2x}$
14. $y' + 2xy = e^{-x}$
15. $3xy' + 4y = x^2e^{-2x}$
16. $x^2y' - 2xy = x^4e^x$
17. $xy' - 2y = x^3e^{-x}$
18. $4xy' + 5y = x^2e^x$
19. $x^2y' + 3xy = e^x$
20. $2y' + 2xy = 2e^{-2x}$

Exactas

1. $(2xy - 3)dx + (x^2 - 2y)dy = 0$
2. $(e^x + \cos(y))dx + (2y - x\sin(y))dy = 0$
3. $(x^2 + 3y)dx + (2xy - 4)dy = 0$
4. $(\ln(x) - e^y)dx + (2xy + \cos(x))dy = 0$
5. $(x^2y - e^x)dx + (x^3 - 2y\sin(y))dy = 0$
6. $(2y\ln(x) - \sin(y))dx + (x^2 + e^x\cos(y))dy = 0$
7. $(e^x\sin(y) - 2y)dx + (x^2\ln(x) - \cos(x))dy = 0$
8. $(x\sin(x) - \cos(y))dx + (2y\ln(x) - e^x)dy = 0$
9. $(x^3 + 2y\cos(y))dx + (3xy^2 - \ln(x))dy = 0$
10. $(\ln(x) - 2y)dx + (3xy^2 - e^y)dy = 0$
11. $(2x + 3y)dx + (x - 2y)dy = 0$
12. $(3x^2y + 2y)dx + (x^3 + 4xy^2)dy = 0$
13. $(4x^3y^2 - 6xy)dx + (2x^4y - 3x^2)dy = 0$

Bibliografía

1. Curso de Matemáticas Superiores para ingenieros, Tomo II. M. Krasnov y otros
2. Calculus Volumen 1. Tom M. Apostol
3. Matemáticas Superiores en Ejercicios y Problemas. Parte 2, P. E. Dankó y Otros.
4. Problemas de Análisis Matemático. B. Demidovich.
5. Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de A. Kiselev, M. Krasnov y G. Makarenko.

6. Cálculo con Geometría Analítica, Tomo II. Earl W. Swokowski Matemáticas Superiores en Ejercicios y Problemas. Parte 2, P. E. Dankó y Otros.