Matemática III

Conferencia $\int$

Series Numéricas

Profesor Instructor:
Lic. Juan Cruz Oduardo

July 6, 2024

Sumario: Sucesiones y series numéricas. Series convergentes y divergentes. Convergencia absoluta y condicional.
Objetivo: Aplicar los criterios de convergencia al estudio de la naturaleza de una serie numérica.

Introducción

Sucesiones

Una **sucesión** es una lista ordenada de números reales (o complejos) que se denota comúnmente como $a_1, a_2, a_3, \ldots$, o de manera más general, como (a_n), donde n es un número natural que representa la posición en la secuencia. Cada número en la sucesión se llama **término** de la sucesión.
Formalmente, una sucesión se define como una función f que asigna a cada número natural n un número real (a_n), es decir:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Donde $\mathbb{N}$ representa el conjunto de números naturales y $\mathbb{R}$ representa el conjunto de números reales. La sucesión se puede expresar como:

$$(a_n) = f(n)$$

Por ejemplo, la sucesión de números pares $2, 4, 6, 8, \ldots$ se puede definir como $(a_n) = 2n$, donde n es un número natural.
Las sucesiones son una parte fundamental del análisis matemático y se utilizan para estudiar el comportamiento de secuencias infinitas de números en diversas ramas de las matemáticas, como el cálculo y la teoría de números.

Monotonía de una sucesión

La monotonía de una sucesión se refiere a la tendencia de los términos de la sucesión a medida que n aumenta. Una sucesión puede ser monótona creciente, monótona decreciente o no monótona (también conocida como sucesión no monótona). Para determinar la monotonía de una sucesión, puedes seguir estos pasos:
1. **Identificar la sucesión:** Debes tener la secuencia de números dada, generalmente denotada como a_n.
2. **Calcular los términos de la sucesión:** Encuentra varios términos de la sucesión para tener una idea de cómo se comportan a medida que n aumenta. Calcula algunos términos a_n para diferentes valores de n.
3. **Comparar términos sucesivos:** Compara los términos consecutivos de la sucesión para determinar si la sucesión es monótona creciente, monótona decreciente o no monótona.
- Una sucesión es **monótona creciente** si para todo n, se cumple que $a_{n+1} \geq a_n$. Esto significa que cada término siguiente es mayor o igual al término anterior.
- Una sucesión es **monótona decreciente** si para todo n, se cumple que $a_{n+1} \leq a_n$. Esto significa que cada término siguiente es menor o igual al término anterior.
- Una sucesión es **no monótona** si ni todas las $a_{n+1} \geq a_n$ ni todas las $a_{n+1} \leq a_n$ para todos los n.
4. **Tomar en cuenta el límite (si es relevante):** En algunos casos, es importante determinar si la sucesión tiende a un límite a medida que n tiende a infinito. Esto puede ayudar a confirmar si la sucesión es monótona.

Es importante destacar que una sucesión puede ser monótona creciente o decreciente en un cierto rango y luego cambiar de dirección. Por lo tanto, es fundamental considerar varios términos y observar la tendencia en la totalidad de la secuencia para determinar su monotonía.

Aquí tenemos varios ejemplos de cómo calcular la monotonía de una sucesión:
Ejemplo 1: Sucesión monótona creciente
Consideremos la sucesión $a_n = \frac{n}{n+1}$ para $n \geq 1$.
Calculamos algunos términos de la sucesión:
$a_1 = \frac{1}{2}$
$a_2 = \frac{2}{3}$
$a_3 = \frac{3}{4}$
Observamos que $a_{n+1} \geq a_n$ para todos los n. Por lo tanto, la sucesión es monótona creciente.
Ejemplo 2: Sucesión monótona decreciente
Consideremos la sucesión $b_n = \frac{1}{n}$ para $n \geq 1$.
Calculamos algunos términos de la sucesión:
$b_1 = 1$
$b_2 = \frac{1}{2}$
$b_3 = \frac{1}{3}$
Observamos que $b_{n+1} \leq b_n$ para todos los n. Por lo tanto, la sucesión es monótona decreciente.
Ejemplo 3: Sucesión no monótona
Consideremos la sucesión $c_n = (-1)^n$ para $n \geq 1$.
Calculamos algunos términos de la sucesión:
$c_1 = -1$
$c_2 = 1$
$c_3 = -1$
En este caso, c_{n+1} no es siempre mayor o siempre menor que c_n. La sucesión alterna entre -1 y 1, por lo que no es monótona en ningún sentido. Es una sucesión no monótona.
Ejemplo 4: Sucesión constante
Consideremos la sucesión $d_n = 4$ para $n \geq 1$.
En este caso, todos los términos de la sucesión son iguales a 4, y no hay variación. Se considera una sucesión monótona (en este caso, monótona constante), ya que todos los d_{n+1} son iguales a d_n.
Estos ejemplos ilustran cómo determinar si una sucesión es monótona creciente, monótona decreciente, no monótona o constante al comparar los términos sucesivos de la secuencia.

Propiedades de los limites

Las propiedades de los límites son reglas y propiedades matemáticas que se aplican a las operaciones con límites de funciones reales o sucesiones numéricas. Estas propiedades son útiles para calcular límites y comprender el comportamiento de las funciones o sucesiones en diferentes situaciones. Aquí tienes algunas de las propiedades más importantes de los límites:
1. **Límite de la Suma:** Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = L + M$.
2. **Límite del Producto:** Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces $\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$.
3. **Límite del Cociente:** Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$ (donde $M \neq 0$), entonces $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.
4. **Límite de una Constante:** Si c es una constante, entonces $\lim_{x \to a} c = c$. En otras palabras, el límite de una constante es simplemente la constante misma.

5. **Límite de una Función Identidad:** $\lim_{x \to a} x = a$. El límite de la función identidad x es igual al valor a hacia el cual se acerca x.
6. **Límite de una Función Constante:** $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ para cualquier función constante $f(x) = c$.
7. **Límite de una Función Compuesta:** Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{y \to L} g(y) = M$, entonces $\lim_{x \to a} g(f(x)) = M$. Esta propiedad se utiliza para calcular límites de funciones compuestas.
8. **Límite de una Sucesión:** Si $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ y $\lim_{n \to \infty} b_n = M$, entonces:
- $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = L + M$.
- $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot M$.
- $\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L}{M}$ (si $M \neq 0$).
9. **Límite de un Producto por una Constante:** Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} (c \cdot f(x)) = c \cdot L$, donde c es una constante.
10. **Límite de una Resta:** Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = L - M$.
11. **Límite de la Potencia:** Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} [f(x)^n] = L^n$ para cualquier entero n.

Estas propiedades de los límites son esenciales para simplificar el cálculo de límites y comprender el comportamiento de las funciones y sucesiones en diversos contextos matemáticos. Ten en cuenta que estas propiedades son válidas siempre que los límites involucrados existan y sean finitos.

Propiedades de los límites para cocientes de polinomios

Las propiedades de los límites para cocientes de polinomios son un conjunto de reglas útiles para calcular límites cuando tienes una fracción (cociente) de dos polinomios. Estas propiedades son especialmente útiles cuando se trata de límites de funciones racionales. Aquí tienes las propiedades clave:

1. **Límite del Cociente de Polinomios:** Si tienes el límite de una función racional $f(x)/g(x)$, donde tanto $f(x)$ como $g(x)$ son polinomios y el denominador $g(x)$ no se anula en el punto a, entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Esta propiedad es válida siempre que los límites en el numerador y el denominador existan y el denominador no se anule en el punto a.

2. **Límite de una Constante por un Polinomio:** Si tienes el límite de una constante multiplicada por un polinomio, puedes llevar la constante fuera del límite:

$$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

Donde c es una constante y $f(x)$ es un polinomio.

3. **Límite de una Fracción con Polinomios en el Numerador y Denominador:**
Cuando tienes el límite de una fracción con polinomios en el numerador y el denominador, puedes aplicar la propiedad del límite del cociente de polinomios mencionada en el punto 1.

Por ejemplo, si tienes $\lim_{x \to a} \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{2x^3 + x - 5}$, puedes calcular los límites de los polinomios en el numerador y el denominador por separado.

4. **Límite de un Polinomio de Grado Mayor en el Numerador:** Cuando el grado del polinomio en el denominador es mayor que el grado del polinomio en el numerador, el límite se aproxima a cero:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Donde $f(x)$ es un polinomio de grado menor que $g(x)$.
5. **Límite de un Polinomio de Grado Igual en el Numerador y Denominador:** Cuando el grado del polinomio en el numerador es igual al grado del polinomio en el denominador, el límite se calcula como el cociente de los coeficientes principales de los términos de mayor grado en el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to a}\frac{ax^n+\dots}{bx^n+\dots}=\frac{a}{b}$$

Donde a y b son los coeficientes principales de los términos de mayor grado en el numerador y el denominador, respectivamente.
Estas propiedades son útiles para calcular límites de funciones racionales y simplificar la evaluación de límites cuando se trabaja con polinomios en el numerador y el denominador. Ten en cuenta que es fundamental verificar que el denominador no se anule en el punto en el que se está evaluando el límite.
Las propiedades de los límites para potencias y raíces son reglas que se aplican al calcular límites de funciones que involucran exponentes y raíces. Aquí tienes algunas de las propiedades más importantes:

Propiedades de Límites para Potencias:
1. **Límite de una Potencia de una Función:** Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$ y n es un número real, entonces $\lim_{x\to a}[f(x)]^n=L^n$.
2. **Límite de una Raíz de una Función:** Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$ y n es un número real positivo, entonces $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$.
3. **Límite de una Función Elevada a una Potencia:** Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$ y $\lim_{x\to a} g(x)=M$, entonces $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=L^M$.

Propiedades de Límites para Raíces:
4. **Límite de una Raíz de una Función Elevada a una Potencia:** Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$ y n es un número real positivo, entonces $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)^n}=L$.
5. **Límite de una Potencia de una Raíz:** Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$ y n es un número real positivo, entonces $\lim_{x\to a}[(\sqrt[n]{f(x)})^n]=L$.

Propiedades Combinadas:
6. **Límite de una Potencia de una Función con Exponente Racional:** Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$ y m y n son números enteros, entonces $\lim_{x\to a}[f(x)]^{m/n}=\sqrt[n]{L^m}$.
7. **Límite de una Potencia de una Raíz con Exponente Racional:** Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$ y m y n son números enteros, entonces $\lim_{x\to a}[\sqrt[n]{f(x)}]^m=\sqrt[n]{L^m}$.
Estas propiedades son útiles para simplificar el cálculo de límites cuando se trabaja con funciones que involucran potencias y raíces. Es importante recordar que estas propiedades son aplicables siempre y cuando los límites involucrados existan y sean números reales finitos, y que las operaciones sean consistentes con los valores de los límites.

Propiedades del límites para el número e

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n=e^{\lambda}\ \ \forall\lambda\in\mathbb{R}} \tag{1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+\lambda}\right)^n = \frac{1}{e^\lambda}\ \forall\lambda\in\mathbb{R}} \tag{2}$$

$$\boxed{\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to 0}(1+\lambda n)^{\frac{1}{n}} = e^\lambda\ \forall\lambda\in\mathbb{R}} \tag{3}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e} \tag{4}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x} \tag{5}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}} \tag{6}$$

Serie

Dada una sucesión (a_n) de números reales, una **serie numérica** es una expresión matemática de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Esta expresión representa la suma de todos los términos de la sucesión (a_n) desde $n = 1$ hasta $n = \infty$, es decir, la suma infinita de los términos de la sucesión. Si la suma infinita tiene un valor finito, se dice que la serie es convergente, y su suma se denota como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

En caso de que la suma infinita no tenga un valor finito, la serie se considera divergente.
En resumen, una serie numérica es una representación de la suma infinita de los términos de una sucesión (a_n) y puede ser convergente o divergente dependiendo de si su suma infinita es finita o no.

Tipo de Series

1. **Serie Geométrica:**

   Una serie geométrica es una serie numérica de la forma:

   $$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

   Donde a es el primer término de la serie y r es la razón común entre los términos. Esta serie converge si $|r| < 1$ y su suma es $\frac{a}{1-r}$.

   Ejemplos de series Geométricas

   Aquí tenemos varios ejemplos de series geométricas las cuáles son todas convergentes:

(a) **Serie Geométrica Básica:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

En esta serie, la razón común es $r = \frac{1}{2}$.

(b) **Serie Geométrica Negativa:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$$

En esta serie, la razón común es $r = -\frac{1}{3}$.

(c) **Serie Geométrica con Término Inicial:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots$$

Aquí, la serie comienza en $n = 1$, y la razón común es $r = \frac{1}{5}$.

(d) **Serie Geométrica Decreciente:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{3^n} = 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \dots$$

Esta serie tiene una razón común de $r = \frac{1}{3}$, y es decreciente a medida que avanzamos en la serie.

(e) **Serie Geométrica con Término Inicial Negativo:**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = -\frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{1}{256} + \dots$$

Aquí, la serie comienza en $n = 2$, y la razón común es $r = -\frac{1}{4}$.

(f) **Serie Geométrica con Exponente Fraccional:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \dots$$

En esta serie, la razón común es $r = \frac{1}{2}$, y el exponente es fraccional.

2. **Serie Harmónica:**

La serie harmónica es una serie numérica de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Esta serie es famosa por ser divergente, lo que significa que no tiene una suma finita.

3. **Serie Alternante:**

Una serie alternante es una serie numérica en la que los términos alternan de signo y tiene como fórmula:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

Donde a_n representa los términos de la serie.

Estas series pueden converger o divergir, y la convergencia se puede determinar mediante criterios como el Criterio de Leibniz.

Ejemplos de series Alternantes

(a) **Serie Alternante Básica:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Esta es la serie harmónica alternante, y es convergente. Su convergencia se demuestra utilizando el criterio de Leibniz.

(b) **Serie Alternante de Leibniz:**

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Esta es la serie alternante de Leibniz, y es convergente. Su convergencia se basa en el criterio de Leibniz, ya que la sucesión de términos es decreciente y tiende a cero.

(c) **Serie Alternante con Factorial:**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$$

Esta serie es convergente y su suma es igual a e^{-1}. Se demuestra utilizando el criterio de convergencia de las series alternantes.

(d) **Serie Alternante de Grandi:**

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

La serie de Grandi es un ejemplo especial de serie alternante que no tiene una suma finita. Es divergente y su suma oscila entre 1 y 0.

(e) **Serie Alternante de Riemann:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$$

Esta es la serie alternante de Riemann, y es convergente. Su convergencia se demuestra utilizando el criterio de Leibniz, ya que la sucesión de términos es decreciente y tiende a cero.

(f) **Serie Alternante con Potencias de x:**

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Esta es una serie alternante en función de x, y su convergencia depende del valor de x. Converge para $|x| < 1$ y diverge para $|x| \geq 1$.

4. **Serie de Taylor:**

Una serie de Taylor es una expansión en serie de una función en términos de sus derivadas en un punto particular. Su fórmula general es:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Donde

$f(x)$ es la función que se está aproximando,

a es el punto alrededor del cual se está realizando la aproximación,

$f^{(n)}(a)$ es la n-ésima derivada de la función evaluada en a,

y $n!$ es el factorial de n.

La serie de Taylor es una expansión en una serie infinita de términos que se utiliza para aproximar funciones suaves alrededor de un punto dado.

Aquí tenemos algunos ejemplos de diferentes series de Taylor:

(a) **Serie de Taylor para la función exponencial:**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(b) **Serie de Taylor para la función seno:**

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(c) **Serie de Taylor para la función coseno:**

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

(d) **Serie de Taylor para la función logaritmo natural:**

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

(e) **Serie de Taylor para la función arcotangente:**

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

5. **Serie de Fourier:**

   La serie de Fourier es una representación de una función periódica como una suma infinita de funciones trigonométricas (senos y cosenos). Por ejemplo, para una función periódica $f(x)$, su serie de Fourier es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\right)$$

   Donde T es el período de la función y a_n y b_n son coeficientes que dependen de $f(x)$.

   Estas son solo algunas de las series numéricas más conocidas y utilizadas en matemáticas y física. Cada una tiene sus propias características y propiedades, y su convergencia o divergencia a menudo se estudia utilizando diferentes criterios y técnicas de análisis matemático.

Propiedades del límite

Propiedades de Límites para Potencias en Series Numéricas:
1. **Límite de una Potencia de una Serie:**
Ejemplo 1:

$$\lim_{n\to\infty} (2^n)^{-1} = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$$

Usamos la propiedad de límites de potencias para calcular el límite de la serie $(2^n)^{-1}$ a medida que n tiende a infinito.
2. **Límite de una Serie Elevada a una Potencia:**
Ejemplo 2:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{3/2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

Utilizamos la propiedad de límites de potencias para calcular el límite de la serie $\left(\frac{1}{n^2}\right)^{3/2}$ a medida que n tiende a infinito.
3. **Límite de una Potencia de una Serie con Exponente Racional:**
Ejemplo 3:

$$\lim_{n\to\infty} (n^{-1/2})^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Utilizamos la propiedad de límites de potencias para calcular el límite de la serie $(n^{-1/2})^2$ a medida que n tiende a infinito.

Propiedades de Límites para Raíces en Series Numéricas:
4. **Límite de una Raíz de una Serie Elevada a una Potencia:**
Ejemplo 4:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{(2n)^3} = \lim_{n\to\infty} 2n = \infty$$

Utilizamos la propiedad de límites de raíces para calcular el límite de la serie $\sqrt[3]{(2n)^3}$ a medida que n tiende a infinito.
5. **Límite de una Potencia de una Raíz:**
Ejemplo 5:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n})^2 = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Usamos la propiedad de límites de potencias para calcular el límite de la serie $(\sqrt{n})^2$ a medida que n tiende a infinito.

6. **Límite de una Potencia de una Raíz con Exponente Racional:**
Ejemplo 6:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[4]{n})^{1/2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[8]{n} = \infty$$

Utilizamos la propiedad de límites de potencias y raíces para calcular el límite de la serie $(\sqrt[4]{n})^{1/2}$ a medida que n tiende a infinito.
Estos ejemplos muestran cómo aplicar las propiedades de los límites de potencias y raíces a series numéricas con términos n-ésimos. Recuerda que es importante que los límites involucrados existan y sean números reales o infinito para que estas propiedades sean aplicables.

Criterio de Convergencia para series

Series de términos positivos

1. Criterio de Gauss o de Comparación

   - Este criterio se basa en comparar la serie dada con una serie cuyo comportamiento de convergencia es conocido. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series con términos no negativos, y si $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n, entonces:

   - Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (criterio de convergencia).

   - Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge (criterio de divergencia).

   Ejemplo 1: Consideremos la serie infinita

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$$

   Queremos determinar si esta serie converge o diverge. Para hacerlo, podemos utilizar el Criterio de Gauss y compararla con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que sabemos que diverge.

   Usamos el Criterio de Comparación:

   $$\frac{1}{n^2+3n} < \frac{1}{n}$$

   Ahora, podemos comparar término a término con la serie armónica:

   $$\frac{1}{n^2+3n} < \frac{1}{n} \implies 0 < \frac{1}{n^2+3n} < \frac{1}{n}$$

   Dado que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, y sabemos que todos los términos de nuestra serie son menores que los términos de la serie armónica, podemos concluir que la serie original también diverge.

Ejemplo 2: Consideremos la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+2n^2+1}$$

Queremos determinar si esta serie converge o diverge. Usaremos el Criterio de Gauss y compararemos con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Primero, observamos que

$$\frac{n^2+1}{n^4+2n^2+1} = \frac{n^2(1+\frac{1}{n^2})}{n^2(n^2+2+\frac{1}{n^2})} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{n^2+2+\frac{1}{n^2}}$$

Ahora, comparamos con la serie armónica:

$$\frac{1+\frac{1}{n^2}}{n^2+2+\frac{1}{n^2}} < \frac{1}{n}$$

Dado que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, y todos los términos de nuestra serie son menores que los términos de la serie armónica, podemos concluir que la serie original también diverge.

Otros ejemplos

Ejemplo 1: Determinar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+4^n}$$

En este caso, podemos comparar la serie dada con una serie geométrica. Si comparamos término a término, tenemos

$$\frac{2^n}{3^n+4^n} < \frac{2^n}{3^n}$$

Dado que la serie geométrica con razón $2/3$ converge, y la serie dada es menor que la serie geométrica con razón $2/3$, podemos concluir que la serie dada también converge.

Ejemplo 2: Determinar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

En este caso, podemos comparar la serie dada con una serie geométrica. Si comparamos término a término, tenemos

$$\frac{n^3}{2^n} > \frac{1}{2^n}$$

Dado que la serie geométrica con razón $1/2$ converge, y la serie dada es mayor que la serie geométrica con razón $1/2$, podemos concluir que la serie dada también diverge.

2. Criterio de la Razón o del Cociente

   - Este criterio compara los términos sucesivos de la serie. Si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$:

   - Si $L < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

   - Si $L > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

   - Si $L = 1$, el criterio no proporciona información concluyente.

   Ejemplo 1: Consideremos la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Queremos determinar si esta serie converge o diverge utilizando el Criterio de la Razón.

1. Calculamos el cociente de dos términos sucesivos de la serie:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{1} = \frac{1}{2}$$

2. Calculamos el límite del cociente cuando n tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3. Ahora, aplicamos el Criterio de la Razón. Si el límite del cociente es menor que 1, la serie converge. En este caso, $\frac{1}{2} < 1$, por lo que la serie original $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge.

Ejemplo 2: Consideremos la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Queremos determinar si esta serie converge o diverge utilizando el Criterio de la Razón.

1. Calculamos el cociente de dos términos sucesivos de la serie:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$$

2. Calculamos el límite del cociente cuando n tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

3. Aplicamos el Criterio de la Razón. Como el límite del cociente es igual a $\frac{1}{2}$, que es menor que 1, la serie original $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ converge.

Otros ejemplos

Ejemplos resueltos donde se aplica el Criterio de la Razón (también conocido como Criterio de D'Alembert) para determinar la convergencia de una serie:

Ejemplo 1:

Considera la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

Aplicamos el Criterio de la Razón:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

Dado que $L < 1$, por el Criterio de la Razón, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ es convergente.

Ejemplo 2:

Considera la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Aplicamos el Criterio de la Razón:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e}$$

Dado que $L = \frac{1}{e} < 1$, por el Criterio de la Razón, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ es convergente.

Ejemplo 3:

Considera la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

Para determinar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ utilizando el criterio de la razón, calculamos el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} \right|$$

Simplificamos esta expresión:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}\right|$$

Dividimos los términos de la fracción y simplificamos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|2\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n^2}{(n+1)^2}\right|$$

Ahora calculamos el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n^2}{(n+1)^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)^2}$$

Podemos aplicar la regla de L'Hôpital para simplificar aún más este límite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{d}{dn}(2n^2)}{\frac{d}{dn}((n+1)^2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = 2$$

En este caso, dado que $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2 > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$ es divergente según el criterio de la razón.

En estos ejemplos, hemos utilizado el Criterio de la Razón para determinar la convergencia de las series dadas, calculando el límite L de la razón de los términos sucesivos y verificando si L es menor que 1. Cuando $L < 1$, la serie es convergente.

3. Criterio de la Raíz

El Criterio de la Raíz es un criterio utilizado para determinar la convergencia de una serie infinita. Este criterio se basa en el cálculo del límite de la raíz enésima de los términos de la serie. La definición del Criterio de la Raíz es la siguiente:

Dada una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, si existe el límite:

$$L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

Entonces:

1. Si $L < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.
2. Si $L > 1$ o el límite L no existe, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
3. Si $L = 1$, el criterio no proporciona una conclusión definitiva.

Ejemplo 1: Consideremos la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Para determinar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ utilizando el criterio de la raíz, primero calculamos el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$$

Si este límite es menor que 1, la serie converge; si es mayor que 1 o igual a 1, la serie diverge.

Aplicamos la regla de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1^{\frac{1}{n}}}{n^{\frac{2}{n}}}$$

Ahora, notamos que $\lim_{n\to\infty} 1^{\frac{1}{n}} = 1$ y $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}} = 1$ también, ya que la segunda parte tiende a 1 debido a que el exponente $\frac{2}{n}$ se hace cada vez más pequeño cuando n tiende a infinito.

Entonces, el límite total es:

$$1 \cdot 1 = 1$$

Dado que el límite es igual a 1, el criterio de la raíz no nos da información concluyente sobre la convergencia o divergencia de la serie. En este caso, necesitamos recurrir a otros métodos para determinar la convergencia.

4. Criterio de la Integral

- Este criterio establece que si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene términos no negativos y si su término general a_n es una función decreciente y positiva de n para valores de n grandes, entonces la serie y la integral definida $\int_1^{\infty} a(x)\,dx$ convergen o divergen simultáneamente. Es decir, la serie y la integral tienen el mismo comportamiento.

Ejemplo 1: Consideremos la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Queremos determinar si esta serie converge o diverge utilizando el Criterio de la Integral.

1. Definimos la función $f(x)$ que representa la suma infinita:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

2. Consideramos la integral definida de $f(x)$ desde 1 hasta infinito:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

3. Calculamos la integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = (0-(-1)) = 1$$

4. Aplicamos el Criterio de la Integral: Si la integral definida converge (si tiene un valor numérico finito), entonces la serie original también converge. En este caso, la integral definida converge (es igual a 1), por lo tanto, la serie original $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ también converge.

Ejemplo 2: Consideremos la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Queremos determinar si esta serie converge o diverge utilizando el Criterio de la Integral.

1. Definimos la función $f(x)$ que representa la suma infinita:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

2. Consideramos la integral definida de $f(x)$ desde 1 hasta infinito:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

3. Calculamos la integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_1^\infty = (\infty - 0) = \infty$$

4. Aplicamos el Criterio de la Integral: Si la integral definida diverge, entonces la serie original también diverge. En este caso, la integral definida diverge (es igual a infinito), por lo tanto, la serie original $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ también diverge.

Series Alternadas

Clasificación de las series alternas

Las series alternantes se clasifican en función de su naturaleza y convergencia en términos de la sucesión de términos que alternan de signo. Aquí están las principales clasificaciones:

1. **Convergente**: Una serie alternante es convergente si la sucesión de términos positivos (sin los signos) converge a cero. En otras palabras, si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Un ejemplo es la serie alternante de Leibniz.

2. **Divergente**: Una serie alternante es divergente si la sucesión de términos positivos (sin los signos) no converge a cero. En este caso, la serie no tiene un valor de suma finito. Por ejemplo, la serie armónica alternante es un ejemplo de una serie divergente.

3. **Absolutamente convergente**: Una serie alternante es absolutamente convergente si la serie formada por los términos positivos (sin los signos) es convergente. En otras palabras, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Las series absolutamente convergentes son siempre convergentes.
4. **Condicionalmente convergente**: Una serie alternante es condicionalmente convergente si la serie formada por los términos positivos (sin los signos) diverge, pero la serie formada por los términos negativos (con los signos cambiados) también diverge, y la serie original (alternante) converge. Esto significa que la convergencia de la serie depende de cómo se ordenen los términos. Las series condicionalmente convergentes son un fenómeno interesante en análisis matemático.
En resumen, una serie alternante puede ser convergente, divergente, absolutamente convergente o condicionalmente convergente, dependiendo de las propiedades de la sucesión de términos que alternan de signo.

Para determinar si una serie alternante convergente es absoluta o condicional, puedes utilizar el criterio de convergencia absoluta. El criterio de convergencia absoluta establece lo siguiente:
1. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, la serie alternante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.
2. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, pero $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, la serie alternante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es condicionalmente convergente.

Este criterio se basa en el hecho de que si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces los términos individuales de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (los a_n originales) deben tender a cero, lo que garantiza la convergencia absoluta. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge pero los términos a_n individuales siguen tendiendo a cero, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ podría converger condicionalmente debido al comportamiento oscilante de los términos negativos y positivos.
Es importante recordar que la convergencia condicional implica que la serie es convergente, pero no absolutamente convergente. La convergencia absoluta es un nivel más fuerte de convergencia.
Aquí tienes tres ejemplos de cómo se utiliza el Criterio de Convergencia Absoluta:

Ejemplo 1: Serie Alternante

Considera la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$. Para determinar si converge absolutamente, examinamos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Esta última es una Serie P convergente (puedes usar el Criterio de la Serie P), por lo que la serie original converge absolutamente.

Ejemplo 2: Serie Harmónica

Tomemos la serie Harmónica alternante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Al examinar la serie de términos absolutos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, vemos que es la Serie Harmónica, que sabemos que diverge. Esto significa que la serie original no converge absolutamente.

Ejemplo 3: Serie Geométrica

Considera la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$. Al examinar la serie de términos absolutos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, vemos que es una Serie Geométrica convergente con $a = 1$ y $r = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, la serie original converge absolutamente.

1. Criterio de Leibniz

   El criterio de Leibniz es un criterio de convergencia utilizado para determinar si una serie alternante (una serie en la que los términos alternan de signo) es convergente o no. El criterio se basa en dos condiciones que deben cumplirse para que la serie sea convergente. Estas condiciones son:

   1. **La sucesión de términos positivos disminuye en valor absoluto a medida que avanzamos en la serie:** Esto significa que para cada n, se cumple que $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ (donde a_n es el término n-ésimo de la serie).

   2. **La sucesión de términos tiende a cero a medida que avanzamos en la serie:** Esto significa que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

   Si ambas condiciones se cumplen, entonces la serie alternante es convergente según el criterio de Leibniz. Además, este criterio proporciona información adicional: cuanto más rápido disminuyan en valor absoluto los términos y más rápido tiendan a cero, más rápida será la convergencia de la serie.

   Ejemplo 1: Serie alternante de Leibniz convergente

   - Este criterio se aplica a series alternantes, donde los términos de la serie cambian de signo alternativamente.

   -Si los términos **son decrecientes en valor absoluto y tienden a cero**, entonces la serie alternante **converge**.

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

   En este caso, los términos de la serie son $\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$. Observamos que los términos alternan de signo y disminuyen en valor absoluto a medida que avanzamos (condición 1). Además, la sucesión $|a_n| = \frac{1}{n}$ tiende a cero a medida que n tiende a infinito (condición 2). Por lo tanto, según el criterio de Leibniz, esta serie es convergente.

   Ejemplo 2: Serie alternante de Leibniz divergente

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

   En este caso, los términos de la serie son $\frac{1}{1}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \ldots$. Nuevamente, los términos alternan de signo (condición 1). Sin embargo, la sucesión $|a_n| = \frac{1}{n^2}$ también tiende a cero a medida que n tiende a infinito (condición 2). A pesar de que ambas condiciones se cumplen, esta serie es un ejemplo de una serie alternante que es convergente según el criterio de Leibniz.

   Ejemplo 3: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3n^2+2}$

   Para determinar si esta serie es alternante, debemos verificar dos condiciones:

   1. Los términos sucesivos deben disminuir en magnitud.

   2. La sucesión de términos no alternados debe tender a cero y ser decreciente.

Primero, verifiquemos si los términos sucesivos disminuyen en magnitud en valor absoluto:

Observemos los términos sucesivos $\frac{n}{3n^2+2}$:

$n = 1$: $\frac{1}{3+2} = \frac{1}{5}$

$n = 2$: $\frac{2}{12+2} = \frac{1}{7}$

$n = 3$: $\frac{3}{27+2} = \frac{3}{29}$

Parece que los términos sucesivos están disminuyendo en magnitud en valor absoluto. Ahora, veamos si la sucesión de términos no alternados tiende a cero y es decreciente:

Para analizar esta serie, observemos el comportamiento del término general $\frac{n}{3n^2+2}$ a medida que n tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n^2+2} = 0$$

El término general tiende a cero a medida que n tiende a infinito, lo que sugiere que la serie podría converger.

$\dfrac{n}{3n^2+2}$ es una sucesión decreciente, y al verificar los términos pares e impares, observamos que la sucesión de términos no alternados tiende a cero y es decreciente.

En resumen:

- La serie a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{3^n}$ es converger.

- La serie b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3n^2+2}$ parece converger y satisface las condiciones para ser una serie alternante.

Conclusiones

En esta conferencia hemos abordado el concepto de serie numérica, los criterios de convergencias para analizar la naturaleza de una serie, así como las series alternadas.

Ejercicios Propuestos

Ejercicios de Convergencia de Series Numéricas:

1. Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n}$ converge o diverge.
2. Compruebe si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ converge.
3. Analice la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
4. Investigue si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente.
5. Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3+3}$ converge absolutamente.

6. Compruebe si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$ es convergente.
7. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.
8. Investigue si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
9. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$ converge.
10. Compruebe si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ es convergente.
11. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
12. Investigue si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$ converge.
13. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge condicionalmente.
14. Compruebe si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+2)}$ converge.
15. Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.