

# MATEMÁTICA III

## CONFERENCIA /

### Ecuaciones Diferenciales de Orden $n$

**Profesor Instructor:**  
Lic. Juan Cruz Oduardo

September 8, 2024

**Sumario:** Ecuación diferencial ordinaria. Solución particular. Solución General. Orden y Grado. Teorema de existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y primer grado. Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden.

**Objetivo:** Resolver E. D. Ordinarias de primer orden y primer grado.

## Introducción

Dentro del desarrollo del tema hemos estudiado las ecuaciones de primer orden, dentro de las cuales vimos la ecuación lineal de primer orden:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

¿Cuál es su solución? En esta conferencia ampliaremos esta denominación al estudiar las ecuaciones lineales de orden superior, haciendo énfasis en las de segundo orden con coeficientes constante, las que tienen una gran variedad de aplicaciones.

## Desarrollo

### Lineales homogéneas de coeficientes constantes

**Definición 0.0.1 (Lineales homogéneas de coeficientes constantes):**

Sea dada la ecuación:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (1)$$

de coeficientes constantes reales  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

**Solución:**

Consideremos la ecuación característica

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (2)$$

Supongamos que  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son raíces de la ecuación (2) entre los cuales puede haber múltiples.

Se pueden presentar los casos siguientes:

1.  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  y existen algunas de ellas que son múltiples.

Sea, por ejemplo  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \tilde{\lambda}$ , de modo que  $\tilde{\lambda}$  es una raíz  $k$ -múltiple de la ecuación (2), mientras que todas las demás  $n - k \geq 0$  raíces son distintas. En este caso el sistema fundamental de soluciones tiene la forma:

$$e^{\tilde{\lambda}x}, x e^{\tilde{\lambda}x}, x^2 e^{\tilde{\lambda}x}, \dots, x^{k-1} e^{\tilde{\lambda}x}, e^{\lambda_{k+1}x}, e^{\lambda_{k+2}x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

y la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_g = C_1 e^{\tilde{\lambda}x} + C_2 x e^{\tilde{\lambda}x} + C_3 x^2 e^{\tilde{\lambda}x} + \dots + C_k x^{k-1} e^{\tilde{\lambda}x} + C_{k+1} e^{\lambda_{k+1}x} + C_{k+2} e^{\lambda_{k+2}x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \quad (3)$$

o escrito de otra forma:

$$y_g = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_k x^{k-1}) e^{\tilde{\lambda}x} + C_{k+1} e^{\lambda_{k+1}x} + C_{k+2} e^{\lambda_{k+2}x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \quad (4)$$

2.  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ , existen algunas de ellas que son múltiples y otras reales puras.

Sea, por ejemplo  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ , de modo que es una raíz  $k$ -múltiple de la ecuación (2) ( $k \leq \frac{n}{2}$ ), entonces  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  también es una raíz  $k$ -múltiple, mientras que el resto de las raíces son distintas, unas complejas que tengan la forma  $\lambda_3 = \gamma + i\delta$  y  $\lambda_4 = \gamma - i\delta$  y otras reales puras. En este caso el sistema fundamental de soluciones tiene la forma:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ e^{\gamma x} \cos \delta x, e^{\gamma x} \sin \delta x, e^{\lambda_{2k+2} x}, e^{\lambda_{2k+3} x}, \dots, e^{\lambda_n x}.$$

por tanto, la solución general es:

$$y_g = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_3 x e^{\alpha x} \cos \beta x + C_4 x e^{\alpha x} \sin \beta x + \dots + C_{2k} x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x + \\ C_{2k+1} x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x + C_{2k+2} e^{\gamma x} \cos \delta x + C_{2k+3} e^{\gamma x} \sin \delta x + C_{2k+4} e^{\lambda_{2k+2} x} + C_{2k+5} e^{\lambda_{2k+3} x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

o escrito de otra forma:

$$y_g = \left[ (C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) \cos \beta + (C_{k+1} + C_{k+2} x + \dots + C_{2k} x^{k-1}) \sin \beta \right] e^{\alpha x} + \\ C_{2k+1} e^{\gamma x} \cos \delta x + C_{2k+2} e^{\gamma x} \sin \delta x + C_{2k+3} e^{\lambda_{2k+2} x} + C_{2k+4} e^{\lambda_{2k+3} x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

### ∴Ejemplo 0.1∴

Halla la solución general de la ecuación:

$$2y''' - 3y'' + y' = 0 \quad (5)$$

#### Solución

Ecuación característica:

$$2\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\lambda(2\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = 1.$$

**Solución:**  $y_g = C_1 + C_2 e^{\frac{x}{2}} + C_3 e^x$

### ∴Ejemplo 0.2∴

Resuelve la ecuación:

$$y'' + 4y' - 5y = 0$$

#### Solución

##### **Paso 1: Ecuación Característica**

Primero, encontramos la ecuación característica asumiendo una solución de la forma  $y(t) = e^{\lambda t}$ . Esto nos lleva a la siguiente ecuación característica:

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

**Paso 2: Resolución de la Ecuación Característica**

Resolvemos la ecuación cuadrática para encontrar las raíces características:

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

Factorizando:

$$(\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0$$

Esto nos da dos raíces características:

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -5$$

**Paso 3: Solución General**

La solución general de la ecuación diferencial  $y'' + 4y' - 5y = 0$  sigue siendo:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Sustituyendo las raíces características:

**Solución:**  $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-5t}$

**∴Ejemplo 0.3∴**

Resolver la ecuación

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

**Solución****Paso 1: Ecuación Característica**

Primero, encontramos la ecuación característica asumiendo una solución de la forma  $y(t) = e^{\lambda t}$ . Esto nos lleva a la siguiente ecuación característica:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

**Paso 2: Resolución de la Ecuación Característica**

Para resolver la ecuación característica, podemos factorizarla:

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

Esto nos da una raíz característica repetida:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

**Paso 3: Solución General**

La solución general de la ecuación diferencial se compone de términos exponenciales basados en las raíces características:

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{2t}$$

**.:Ejemplo 0.4:.**

Halla la solución general de la ecuación:

$$y''' + 2y'' + y' = 0 \quad (6)$$

**Solución**

Ecuación característica:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$$

La descomposición factorial nos da:

$$\lambda (\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda (\lambda + 1)^2 = 0$$

Hallamos sus raíces:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

Las raíces son reales y una de ellas es de multiplicidad 2, por lo que:

**Solución:**  $y_g = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}.$

o  $y_g = C_1 + (C_2 + C_3 x) e^{-x}.$

**.:Ejemplo 0.5:.**

Halla la solución general de la ecuación:

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0 \quad (7)$$

**Solución**

Ecuación característica:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$$

Tiene las siguientes raíces:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2 - \frac{3}{2}i, \quad \lambda_3 = -2 + \frac{3}{2}i.$$

**Solución:**  $y_g = C_1 + C_2 e^{-2x} \cos \frac{3}{2}x + C_3 e^{-2x} \sin \frac{3}{2}x$

o  $y_g = C_1 + \left( C_2 \cos \frac{3}{2}x + C_3 \sin \frac{3}{2}x \right) e^{-2x}.$

**.:Ejemplo 0.6:.**

Halla la ecuación general de la ecuación:

$$y^V - 2y^{IV} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0 \quad (8)$$

**Solución**

Ecuación característica:

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

Al obtener sus raíces, las últimas dos son de segundo orden de multiplicidad.

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \pm i.$$

**Solución:**  $y_g = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x) \cos x + (C_4 + C_5 x) \sin x$

### ∴Ejemplo 0.7∴

Halla la ecuación general de la ecuación:

$$y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (9)$$

### Solución

Ecuación característica:

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0$$

Esta tienen las raíces imaginarias de segundo orden:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 - i, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -1 + i.$$

**Solución:**  $y_g = [(C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x] e^{-x}$

### ∴Ejemplo 0.8∴

Resolver la ecuación

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

### Solución

#### Paso 1: Ecuación Característica

Primero, encontramos la ecuación característica asumiendo una solución de la forma  $y(t) = e^{\lambda t}$ . Esto nos lleva a la siguiente ecuación característica:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

#### Paso 2: Resolución de la Ecuación Característica

Para resolver la ecuación característica, podemos usar la fórmula cuadrática:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde  $a = 1$ ,  $b = 4$ , y  $c = 13$ . Sustituyendo estos valores en la fórmula, obtenemos:

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(13)}}{2(1)}$$

Simplificando:

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2}$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

Dado que el discriminante es negativo, las raíces serán números complejos conjugados:

$$\lambda_1 = -2 + \frac{3}{2}i$$

$$\lambda_2 = -2 - \frac{3}{2}i$$

### Paso 3: Solución General

La solución general de la ecuación diferencial se compone de términos exponenciales basados en las raíces características:

$$y(t) = e^{-2t}(C_1 \cos(\frac{3}{2}t) + C_2 \sin(\frac{3}{2}t))$$

## Lineales no homogéneas (Completas)

### .:Definición 0.0.2.:

Supongamos que las  $n$  funciones  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ , admiten derivadas hasta el orden  $(n - 1)$ . El determinante:

$$W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (10)$$

se llama *determinante de Wronsky o wronskiano* de estas funciones. Obsérvese que el Wronkiano es una función de  $x$  definida en cierto intervalo.

### .:Definición 0.0.3.:

Sea dada la ecuación:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (11)$$

de coeficientes constantes reales  $a_0, a_1, \dots, a_n$  es llamada *ecuación lineal no homogénea*.

La solución general ( $y_g$ ) de la ecuación (11), (llamada también completa) es igual a la suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente ( $y_H$ ) y de la ecuación particular de la ecuación no homogénea ( $y_P$ ), es decir,

$$y_g = y_H + y_P.$$

Los pasos para resolver una ecuación homogénea ya fue expuesto en la [sección](#), por lo tanto el problema de integración de la ecuación (11) se reduce a la búsqueda de una solución particular de la ecuación no homogénea. En el caso general la integración de la ecuación (11) puede realizarse por *el método de variación de las constantes arbitrarias*. No obstante, cuando el segundo miembro tiene una forma especial la solución particular puede hallarse con mayor facilidad por *el método de selección* y luego por *el método de coeficientes indeterminados*, es decir, primero se selecciona la forma de la solución particular y luego se resuelve hallando los coeficientes indeterminados obtenidos.

### Variación de las constantes arbitrarias

Este método también es conocido por *el método de variación de parámetros*. Si se conoce un sistema fundamental de soluciones  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ , de la ecuación homogénea (1), la solución general de (11) se puede hallar por la fórmula:

$$y_g = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + C_3(x)y_3 + \dots + C_n(x)y_n,$$

donde las funciones  $C_i(x)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones ( $n \times n$ ):

$$\left. \begin{array}{l} C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 + C'_3(x)y_3 + \dots + C'_n(x)y_n = 0 \\ C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 + C'_3(x)y'_3 + \dots + C'_n(x)y'_n = 0 \\ C'_1(x)y''_1 + C'_2(x)y''_2 + C'_3(x)y''_3 + \dots + C'_n(x)y''_n = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \ddots \\ C'_1(x)y_1^{(n-2)} + C'_2(x)y_2^{(n-2)} + C'_3(x)y_3^{(n-2)} + \dots + C'_n(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C'_1(x)y_1^{(n-1)} + C'_2(x)y_2^{(n-1)} + C'_3(x)y_3^{(n-1)} + \dots + C'_n(x)y_n^{(n-1)} = f(x) \end{array} \right\} \quad (12)$$

Es fácil resolver este sistema de ecuaciones usando la regla de Cramer, obtenemos:

$$\begin{aligned} D_1(x) &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ 0 & y'_2 & y'_3 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & y_2^{(n-2)} & y_3^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ f(x) & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \\ D_2(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 & \dots & y_n \\ y'_1 & 0 & y'_3 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & 0 & y_3^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & f(x) & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \\ D_3(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & 0 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & 0 & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & f(x) & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$



$$D_n(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & 0 \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & y_3^{(n-2)} & \dots & 0 \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & f(x) \end{vmatrix}.$$

Los  $D_1, D_2, \dots, D_n$  son sencillos calcular usando las propiedades de los determinantes y el métodos de los menores<sup>1</sup>.

Luego:

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= \frac{D_1(x)}{W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]} \\ C_2'(x) &= \frac{D_2(x)}{W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]} \\ &\dots\dots\dots \\ C_n'(x) &= \frac{D_n(x)}{W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]} \end{aligned} \quad (13)$$

Y finalmente lo  $C_i(x)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) se calculan con la fórmulas:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int \frac{D_1(x)}{W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]} dx \\ C_2(x) &= \int \frac{D_2(x)}{W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]} dx \\ &\dots\dots\dots \\ C_n(x) &= \int \frac{D_n(x)}{W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]} dx \end{aligned} \quad (14)$$

Cuando la ecuación diferencial es de segundo orden, se cumple que:

$$C_1(x) = - \int \frac{f(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2)} dx \quad \text{y} \quad C_2(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

Cuando la ecuación diferencial es de tercer orden, se cumple que:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int \frac{f(x) [y_2(x)y_3'(x) - y_2'(x)y_3(x)]}{W(y_1, y_2, y_3)} dx, \\ C_2(x) &= - \int \frac{f(x) [y_1(x)y_3'(x) - y_1'(x)y_3(x)]}{W(y_1, y_2, y_3)} dx, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Sea una matriz  $A$  de  $n \times n$ , entonces:

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

donde  $a_{ij}$  es el elemento o menor en fila  $i$  y columna  $j$ , la matriz  $A_{ij}$  es la resultante de eliminar de la matriz  $A$  fila  $i$  y columna  $j$ .

$$C_2(x) = \int \frac{f(x) [y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)]}{W(y_1, y_2, y_3)} dx.$$

### .:Ejemplo 0.9.:.

Integra la siguiente ecuación:

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x} \quad (15)$$

**Solución:**

Ecuación característica

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \text{ Multiplicidad doble}$$

Ecuación homogénea

$$y_H = (C_1x + C_2)e^{2x}$$

Solución Particular

$$y_P = C_1(x)xe^{2x} + C_2(x)e^{2x} \quad (16)$$

Sistema de Solución

$$\left. \begin{aligned} C_1'(x)xe^{2x} + C_2'(x)e^{2x} &= 0 \\ C_1'(x)(e^{2x} + 2xe^{2x}) + C_2'(x)(2e^{2x}) &= xe^{2x} \end{aligned} \right\}$$

$$C_1(x) = - \int \frac{f(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2)} dx \quad \text{y} \quad C_2(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2)} dx$$

Tenemos que:

$$y_1 = xe^{2x}, \quad y_2 = e^{2x} \quad \text{y} \quad f(x) = xe^{2x}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} xe^{2x} & e^{2x} \\ (1+2x)e^{2x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = -e^{4x}$$

Luego:

$$C_1(x) = - \int \frac{(xe^{2x})e^{2x}}{-e^{4x}} dx = \int \frac{xe^{4x}}{e^{4x}} = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1 \quad (17)$$

$$C_2(x) = \int \frac{(xe^{2x})xe^{2x}}{-e^{4x}} dx = - \int \frac{x^2e^{4x}}{e^{4x}} = - \int x^2 dx = -\frac{x^3}{3} + C_2 \quad (18)$$

Sustituyendo (17) y (18) en (16), obtenemos la solución buscada:

$$y_g = \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) xe^{2x} + \left(-\frac{x^3}{3} + C_2\right) e^{2x}$$

$$y_g = (C_1x + C_2) e^{2x} + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3}\right) e^{2x}$$

$$y_g = (C_1x + C_2) e^{2x} + \frac{x^3}{6} e^{2x}$$

## Coeficientes indeterminados

| No.   | 2 <sup>do</sup> miembro de la ED $f(x)$                                 | Raíces de la ecuación característica $y_c(\lambda)$ | Forma de la Solución Particular ( $y_p$ )   |
|---|---|---|---|
| I   | $P_n(x)$  | El número 0 no es raíz de $y_c$                     | $\tilde{P}_n(x)$  |
|   |   | El número 0 es raíz de $y_c$                        | $x^s \tilde{P}_n(x)$  |
| II  | $P_n(x)e^{\alpha x}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$                     | $\alpha$ no es raíz de $y_c$                        | $\tilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$  |
|   |   | $\alpha$ es raíz de $y_c$                           | $x^s \tilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$  |
| III   | $P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x$                             | $\pm \beta i$ no es raíz de $y_c$                   | $\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x$                                 |
|   |   | $\pm \beta i$ es raíz de $y_c$                      | $x^s \left[ \tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x \right]$              |
| IV  | $e^{\alpha x} \left[ P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x \right]$ | $\alpha \pm \beta i$ no es raíz de $y_c$            | $e^{\alpha x} \left[ \tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x \right]$     |
|   |   | $\alpha \pm \beta i$ es raíz de $y_c$               | $x^s e^{\alpha x} \left[ \tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x \right]$ |
| Símbolos: $\tilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ polinomio característico de $P_n(x)$ , $\mathbf{s} \rightarrow$ orden de multiplicidad de las raíces en $y_c$ y $\mathbf{k} = \max(m, n)$ |   |   |   |

Table 3: Relación entre  $f(x)$  y la solución particular

## .:Ejemplo 0.10:.

Encuentre la solución a la siguiente ecuación :

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x} \quad (19)$$

Solución:

Ecuación característica

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \text{ Multiplicidad doble}$$

La solución de la ecuación homogénea es:

$$y_H = (C_1x + C_2)e^{2x}$$

Usando la **tabla** , se obtiene que:Ecuación Particular

$$y_P = x^2[Ax + B]e^{2x} \quad (20)$$

$$y_P = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$$

$$y_P' = (3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + 2(Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$$

$$y_P'' = (6Ax + 2B)e^{2x} + 2(3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + 2(3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + 4(Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$$

$$y_P'' = (6Ax + 2B)e^{2x} + 4(3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + 4(Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$$

Sustituyendo  $y_P$ ,  $y_P'$  y  $y_P''$  en (19), se obtiene:

MI:

$$[(6Ax + 2B)e^{2x} + 4(3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + 4(Ax^3 + Bx^2)e^{2x}] - 4[(3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + 2(Ax^3 + Bx^2)e^{2x}]$$

$$+4 \left[ (Ax^3 + Bx^2)e^{2x} \right]$$

Luego:

$$(6Ax+2B)e^{2x} + \underbrace{4(3Ax^2 + 2Bx)e^{2x}} + \underbrace{4(Ax^3 + Bx^2)e^{2x}} - \underbrace{4(3Ax^2 + 2Bx)e^{2x}} - \underbrace{8(Ax^3 + Bx^2)e^{2x}} + \underbrace{4(Ax^3 + Bx^2)e^{2x}}$$

Entonces:

$$(6Ax + 2B)e^{2x} = xe^{2x}$$

$$6Ax + 2B = x$$

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow & \searrow \\ A = \frac{1}{6} & & B = 0 \end{array}$$

La solución de la ecuación particular es:

$$y_P = \frac{x^3}{6}e^{2x}$$

Como:

$$y = y_H + y_P$$

La solución general es:

$$y_g = (C_1x + C_2)e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x} \quad (21)$$

### .:Ejemplo 0.11:.

Resuelve la siguiente ecuación:

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$$

### Solución

Ecuación característica

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_{2,3} = \pm i$$

La solución de la ecuación homogénea es:

$$y_H = C_1e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

Usando la **tabla** , se obtiene que:

Ecuación Particular

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Donde  $A$ ,  $B$ , y  $C$  son coeficientes que debemos determinar. Ahora, procederemos a calcular las derivadas de  $y_p(x)$  necesarias para sustituirlas en la ecuación original:

$$y_p'(x) = 2Ax + B$$

$$y_p''(x) = 2A$$

$$y_p'''(x) = 0$$

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación diferencial:

$$0 - 2A + 2Ax + B - (Ax^2 + Bx + C) = x^2 + x$$

Ahora, agrupamos términos semejantes:

$$-Ax^2 + 2Ax - Bx - 2A + B - C = x^2 + x$$

$$-Ax^2 + (2A - B)x - 2A + B - C = x^2 + x$$

Igualemos los términos del lado izquierdo a los términos del lado derecho:

$$-A = 1 \quad (\text{coeficiente de } x^2)$$

$$2A - B = 1 \quad (\text{coeficiente de } x)$$

$$-2A + B - C = 0 \quad (\text{término constante})$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones para encontrar los valores de  $A$ ,  $B$ , y  $C$ . Primero, de la primera ecuación obtenemos  $A = -1$ . Luego, sustituimos este valor en la segunda ecuación:

$$2(-1) + B = 1$$

$$-2 + B = 1$$

$$B = 3$$

Finalmente, sustituimos  $A = -1$  y  $B = 3$  en la tercera ecuación:

$$-2(-1) - 3 - C = 0$$

$$2 - 3 - C = 0$$

$$-1 - C = 0$$

$$C = -1$$

Hemos encontrado los valores de  $A$ ,  $B$ , y  $C$ . Ahora podemos escribir la solución particular  $y_p(x)$  completa:

$$y_p(x) = -x^2 - 3x - 1$$

La solución general de la ecuación diferencial será la suma de la solución particular  $y_p(x)$  y la solución homogénea  $y_h(x)$ . La solución homogénea depende de las raíces de la ecuación característica, que no se proporcionan en la ecuación dada. Por lo tanto, la solución general será:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

la solución general de la ecuación es

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - (x^2 + 3x + 1)$$

### .:Ejemplo 0.12:.

Resuelve la siguiente ecuación:

$$y''' - y'' = 12x^2 + 6x$$

### Solución

Ecuación característica

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0 \quad \lambda_3 = 1$$

La solución de la ecuación homogénea es:

$$y_H = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$$

Usando la **tabla** , se obtiene que:

Ecuación Particular

Como el número 0 es raíz múltiple de segundo orden de la ecuación característica. Se debe buscar la solución particular  $y_p$  de la ecuación no homogénea en la forma:

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)x^2 = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$

Donde  $A$ ,  $B$ , y  $C$  son coeficientes que debemos determinar. Ahora, procederemos a calcular las derivadas de  $y_p(x)$  necesarias para sustituirlas en la ecuación original:

$$y_p'(x) = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx$$

$$y_p''(x) = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$$

$$y_p'''(x) = 24Ax + 6B$$

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación diferencial:

$$24Ax + 6B - (12Ax^2 + 6Bx + 2C) = 12x^2 + 6x$$

$$-12Ax^2 + (24A - 6B)x + (6B - 2C) = 12x^2 + 6x$$

Igualemos los términos del lado izquierdo a los términos del lado derecho:

$$-12A = 12 \quad (\text{coeficiente de } x^2)$$

$$24A - 6B = 6 \quad (\text{coeficiente de } x)$$

$$6B - 2C = 0 \quad (\text{término constante})$$

La solución del sistema hallamos:

$$A = -1, B = -5 \text{ y } C = -15$$

Por tanto:

$$y_P = -x^4 - 5x^3 - 15x^2$$

La solución general de la ecuación dada es:

$$y_G(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

$$y_G(x) = C_1 + C_2x + C_3e^x - (x^4 + 5x^3 + 15x^2)$$

### ∴Ejemplo 0.13∴

Resuelve la siguiente ecuación:

$$y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$$

### Solución

Ecuación característica

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3 \text{ Multiplicidad doble}$$

La solución de la ecuación homogénea es:

$$y_H = (C_1x + C_2)e^{3x}$$

Usando la **tabla** , se obtiene que:

Ecuación Particular

$$y_P = (A \cos x + B \sin x) e^x$$

Donde  $A$  y  $B$  son coeficientes que debemos determinar. Ahora, procederemos a calcular las derivadas de  $y_P(x)$  necesarias para sustituirlas en la ecuación original:

$$y'_P(x) = (A \cos x + B \sin x) e^x + (-A \sin x + B \cos x) e^x$$

$$y'_P(x) = (A + B) \cos x e^x + (-A + B) \sin x e^x$$

$$y''_P(x) = (A + B) \cos x e^x - (A + B) \sin x e^x + (-A + B) \sin x e^x + (-A + B) \cos x e^x$$

$$y_p''(x) = -2A \sin x e^x + 2B \cos x e^x$$

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación diferencial:

$$-2A \sin x e^x + 2B \cos x e^x - 6[(A+B) \cos x e^x + (-A+B) \sin x e^x] + 9(A \cos x + B \sin x) e^x = 25e^x \sin x$$

$$[(3A - 4B) \cos x + (4A + 3B) \sin x] e^x = 25e^x \sin x$$

De aquí, simplificando el término  $e^x$  en ambos miembros y comparando resulta:

$$3A - 4B = 0$$

$$4A + 3B = 25$$

La solución del sistema es:

$$A = 4 \text{ y } B = 3$$

Por tanto:

$$y_p = (4 \cos x + 3 \sin x) e^x$$

La solución general de la ecuación dada es:

$$y_G(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

$$y_G(x) = (C_1 x + C_2) e^{3x} + (4 \cos x + 3 \sin x) e^x$$

## Conclusiones

En esta conferencia se ha definido el concepto de ecuación diferencial, clasificándolas en ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parcial, así como los conceptos de orden, grado y solución de una E. D. y nos detuvimos en el estudio de las E. D. Ordinarias de primer orden y primer grado.

## Ejercicios Propuestos

### Lineales homogéneas

1.  $2y'' - 5y' + 3y = 0$
2.  $y'' + 4y' + 4y = 0$
3.  $3y'' - 6y' + 3y = 0$
4.  $y'' - 9y' + 20y = 0$
5.  $4y'' - 8y' + 4y = 0$
6.  $y'' - 2y' + y = 0$
7.  $y'' + 7y' + 12y = 0$
8.  $2y'' + 8y' + 8y = 0$
9.  $5y'' - 15y' + 10y = 0$
10.  $y'' - 6y' + 9y = 0$



## Lineales no homogéneas

1.  $y'' - 3y' + 2y = 4e^x$
2.  $2y'' - 5y' + 2y = 3\sin(x)$
3.  $y'' - 4y' + 4y = 6x$
4.  $3y'' - 6y' + 2y = 12\cos(x)$
5.  $y'' + 2y' + y = 5x^2$
6.  $4y'' - 8y' + 4y = 16e^{2x}$
7.  $2y'' - 6y' + 5y = 10\sin(2x)$
8.  $y'' - y' + 2y = 8x^3$
9.  $y'' + 3y' + 2y = 12x^2 + 6x$
10.  $y'' - y' + y = 3\sin(2x)$

## Bibliografía

1. Curso de Matemáticas Superiores para ingenieros, Tomo II. M. Krasnov y otros
2. Calculus Volumen 1. Tom M. Apostol
3. Matemáticas Superiores en Ejercicios y Problemas. Parte 2, P. E. Dankó y Otros.
4. Problemas de Análisis Matemático. B. Demidovich.
5. Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de A. Kiselev, M. Krasnov y G. Makarenko.
6. Cálculo con Geometría Analítica, Tomo II. Earl W. Swokowski