Matemática III

Conferencia $\int$

Aproximación de funciones

Profesor Instructor:
Lic. Juan Cruz Oduardo

December 3, 2024

Sumario:

1. Interpolación polinomial.
2. Polinomio de interpolación de Lagrange.
3. Polinomio de Interpolación de Newton.
4. Ajuste por mínimos cuadrados

Introducción

La interpolación es un método utilizado en matemáticas y ciencias computacionales para encontrar una función que pase a través de un conjunto dado de puntos. Dado un conjunto de puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$, la interpolación busca encontrar una función $f(x)$ que satisfaga $f(x_i) = y_i$ para cada $i = 0, 1, ..., n$.
La interpolación puede realizarse mediante diferentes métodos, como el método de Lagrange, el método de Newton, spline cúbico, entre otros. Estos métodos permiten encontrar una función continua que aproxima los valores conocidos en los puntos dados, facilitando la estimación de valores intermedios.
La interpolación es ampliamente utilizada en diversas áreas, como en la aproximación de funciones, en el procesamiento de señales, en la construcción de curvas suaves, entre otros. Es una herramienta fundamental en matemáticas numéricas y computacionales para el análisis y la representación de datos.

Desarrollo

Método de Lagrange

.:Definición 0.0.1 (Interpolación por Lagrange):.
El método de Lagrange es un método de interpolación polinomial que permite encontrar un polinomio que pase a través de un conjunto dado de puntos. La fórmula general del método de Lagrange para la interpolación polinomial de grado n es la siguiente:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x)$$

donde $P(x)$ es el polinomio interpolante, y_i son los valores de la función en los nodos de interpolación x_i, y $l_i(x)$ son los polinomios de Lagrange definidos como:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Estos polinomios de Lagrange tienen la propiedad de que $l_i(x_i) = 1$ y $l_i(x_j) = 0$ para $j \neq i$, lo que garantiza que el polinomio interpolante pase por los puntos de interpolación.

A continuación, te presento varios ejemplos resueltos de interpolación polinomial utilizando el método de Lagrange:

.:Ejemplo 0.1:.

De la función $f(x)$ se conoce que:
$f(1) = 2,\ \ f(2) = 3$ y $f(4) = 1$

a) Halle el polinomio interpolador de Lagrange correspondiente a estos nodos.

b) Halle directamente $P(2.5)$ sin utilizar $P(x)$.

Solución

a) Como se tienen tres nodos de interpolación, el grado del polinomio interpolador será menor o igual que 2. Para hallar $P(x)$ primero es necesario calcular los tres polinomios de segundo grado $l_0(x),\ \ l_1(x)\ \ y\ \ l_2(x)$.

$$P(x) = y_0 \cdot l_0(x) + y_1 \cdot l_1(x) + y_2 \cdot l_2(x)$$

1. Calculamos los polinomios de Lagrange para cada punto de interpolación:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{(x-2)(x-4)}{3}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = -\frac{(x-1)(x-4)}{2}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{6}$$

2. Construimos el polinomio interpolante:

$$P(x) = 2 \cdot l_0(x) + 3 \cdot l_1(x) + 1 \cdot l_2(x)$$

3. Sustituimos los polinomios de Lagrange en la fórmula del polinomio interpolante:

$$P(x) = 2 \cdot \frac{(x-2)(x-4)}{3} + 3 \cdot \left[-\frac{(x-1)(x-4)}{2}\right] + \frac{(x-1)(x-2)}{6}$$

4. Simplificamos y expandimos los términos:

$$P(x) = \frac{2}{3}(x-2)(x-4) - \frac{3}{2}(x-1)(x-4) + \frac{1}{6}(x-1)(x-2)$$

$$P(x) = \frac{2}{3}(x^2-5x+6) - \frac{3}{2}(x^2-5x+4) + \frac{1}{6}(x^2-3x+2)$$

$$P(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{3}$$

b) Para hallar $P(2,5)$ bastaría con evaluar el polinomio del inciso a). Sin embargo puede calcularse $P(2.5)$ sin tener que encontrar previamente $P(x)$. Esta forma de proceder tiene la ventaja de que no es necesario realizar operaciones algebraicas, sino que todo el cálculo es puramente con números. Todo lo que se requiere es tomar $x = 2.5$ desde un principio.

$$P(2.5) = y_0 \cdot l_0(2.5) + y_1 \cdot l_1(2.5) + y_2 \cdot l_2(2.5)$$

$$l_0(x) = \frac{(2.5-x_1)(2.5-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(2.5-2)(2.5-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{(2.5-2)(2.5-4)}{3} = -0.25$$

$$l_1(x) = \frac{(2.5-x_0)(2.5-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(2.5-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = -\frac{(2.5-1)(2.5-4)}{2} = -1.125$$

$$l_2(x) = \frac{(2.5-x_0)(2.5-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(2.5-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{(2.5-1)(2.5-2)}{6} = 0.125$$

$$P(2.5) = 2\cdot(-0.25) + 3\cdot(-1.125) + 1\cdot(0.125) = 3$$

.:*Ejemplo* ***0.2***:.

Supongamos que tenemos los puntos de interpolación $(1, 2), (2, 3), (3, 5)$ y queremos encontrar el polinomio interpolante de grado 2.

Solución

1. Calculamos los polinomios de Lagrange para cada punto de interpolación:
Para $i = 0$:

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2}$$

Para $i = 1$:

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3)$$

Para $i = 2$:

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

2. Construimos el polinomio interpolante:

$$P(x) = 2\cdot l_0(x) + 3\cdot l_1(x) + 5\cdot l_2(x)$$

3. Sustituimos los polinomios de Lagrange en la fórmula del polinomio interpolante:

$$P(x) = 2\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{2} + 3\cdot -(x-1)(x-3) + 5\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

4. Simplificamos y expandimos los términos:

$$P(x) = (x-2)(x-3) - 3(x-1)(x-3) + 2.5(x-1)(x-2)$$

$$P(x) = x^2 - 5x + 6 - 3(x^2 - 4x + 3) + 2.5(x^2 - 3x + 2)$$

$$P(x) = x^2 - 5x + 6 - 3x^2 + 12x - 9 + 2.5x^2 - 7.5x + 5$$

$$P(x) = -0.5x^2 - 0.5x + 2$$

Por lo tanto, el polinomio interpolante de grado 2 que pasa por los puntos $(1, 2), (2, 3), (3, 5)$ utilizando el método de Lagrange es:

$$P(x) = -0.5x^2 - 0.5x + 2$$

Este polinomio representa una aproximación de la función que pasa por los puntos dados y se obtiene mediante el método de interpolación de Lagrange.

.:*Ejemplo* 0.3:.

Hallar el polinomio interpolador correspondiente a los nodos:
$x_0 = 1$ $\quad y_0 = f(1) = 1.5$
$x_1 = 2.3$ $\quad y_0 = f(2.3) = 3.6$
$x_2 = 3$ $\quad y_0 = f(2) = 4.1$

Solución

Para encontrar el polinomio interpolador correspondiente a los nodos dados $(1, 1.5), (2.3, 3.6), (3, 4.1)$ utilizando el método de Lagrange, primero calculamos los polinomios de Lagrange para cada punto de interpolación:
Para $i = 0$:

$$l_0(x) = \frac{(x-2.3)(x-3)}{(1-2.3)(1-3)} = \frac{(x-2.3)(x-3)}{2.3}$$

Para $i = 1$:

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2.3-1)(2.3-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{1.3 \times 0.7}$$

Para $i = 2$:

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2.3)}{(3-1)(3-2.3)} = \frac{(x-1)(x-2.3)}{2 \times 0.7}$$

Luego, construimos el polinomio interpolador:

$$P(x) = 1.5 \cdot l_0(x) + 3.6 \cdot l_1(x) + 4.1 \cdot l_2(x)$$

Sustituyendo los valores de los polinomios de Lagrange y simplificando, obtenemos el polinomio interpolador final:

$$P(x) = 1.5 \cdot \frac{(x-2.3)(x-3)}{2.3} + 3.6 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{1.3 \times 0.7} + 4.1 \cdot \frac{(x-1)(x-2.3)}{2 \times 0.7}$$

Realizando las operaciones necesarias, se puede obtener la ecuación del polinomio interpolador correspondiente a los nodos dados. Vamos a realizar los cálculos paso a paso:

$$l_0(x) = \frac{(x-2.3)(x-3)}{2.3} = \frac{x^2 - 5.3x + 6.9}{2.3}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{1.3 \times 0.7} = \frac{x^2 - 4x + 3}{0.91}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2.3)}{2 \times 0.7} = \frac{x^2 - 3.3x + 2.3}{1.4}$$

Sustituyendo en la ecuación del polinomio interpolador y simplificando, obtenemos:

$$P(x) = 1.5 \cdot \frac{x^2 - 5.3x + 6.9}{2.3} + 3.6 \cdot \frac{x^2 - 4x + 3}{0.91} + 4.1 \cdot \frac{x^2 - 3.3x + 2.3}{1.4}$$

Realizando las multiplicaciones y sumas pertinentes en la expresión del polinomio interpolador, obtenemos:

$$P(x) = 1.5 \cdot \frac{x^2 - 5.3x + 6.9}{2.3} + 3.6 \cdot \frac{x^2 - 4x + 3}{0.91} + 4.1 \cdot \frac{x^2 - 3.3x + 2.3}{1.4}$$

Realizamos las multiplicaciones y sumas:

$$P(x) = 0.6522x^2 - 3.0435x + 3.9565 + 3.9604x^2 - 14.7549x + 11.1692 + 2.9357x^2 - 7.64x + 3.2571$$

Sumando los términos semejantes:

$$P(x) = 7.5483x^2 - 25.4384x + 18.3828$$

Por lo tanto, el polinomio interpolador correspondiente a los nodos dados es:

$$P(x) = 7.5483x^2 - 25.4384x + 18.3828$$

.:*Ejemplo 0.4*:.

Dado los nodos:
$x_0 = 1$ $\quad y_0 = f(1) = 1.5$
$x_1 = 2.3$ $\quad y_0 = f(2.3) = 3.6$
$x_2 = 3$ $\quad y_0 = f(2) = 4.1$
Hallar el valor interpolado correspondiente a $x = 2$.

Solución

Para encontrar el polinomio interpolador correspondiente a $x = 2$ en los nodos $(1, 1.5), (2.3, 3.6), (3, 4.1)$ utilizando el método de Lagrange y sólo hay que sustituir el valor de $x = 2$ en cada uno de los polinomios de Lagrange para cada punto de interpolación:
Para $i = 0$:

$$l_0(2) = \frac{(2-2.3)(2-3)}{(1-2.3)(1-3)} = \frac{(2-2.3)(2-3)}{2.3} = 0.11538$$

Para $i = 1$:

$$l_1(2) = \frac{(2-1)(2-3)}{(2.3-1)(2.3-3)} = \frac{(2-1)(2-3)}{1.3 \times 0.7} = 1.09890$$

Para $i = 2$:

$$l_2(2) = \frac{(2-1)(2-2.3)}{(3-1)(3-2.3)} = \frac{(2-1)(2-2.3)}{2 \times 0.7} = -0.21429$$

Luego, construimos el polinomio interpolador:

$$P(2) = 1.5 \cdot (0.11538) + 3.6 \cdot (1.09890) + 4.1 \cdot (-0.21429)$$

$$P(2) = 3.25055$$

Error de interpolación

La fórmula que falta para completar la afirmación sobre el error de interpolación en el teorema de Taylor es la siguiente:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

donde $R_n(x)$ es el término de error de interpolación, $f^{(n+1)}(c)$ representa la derivada de orden $n+1$ de la función $f(x)$ evaluada en un punto c dentro del intervalo I, y $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ es el producto de los términos $(x - x_i)$ para cada nodo de interpolación x_i.
Esta fórmula es fundamental en el análisis del error de interpolación y se deriva del teorema de Taylor, que establece condiciones sobre la existencia de un número c en el intervalo I donde se cumple el error de interpolación.

.:*Ejemplo* 0.5:.

Dada la tabla de valores:

x	y
3	4
3.2	8.768
3.5	17.375
3.9	31.819

Hallar el polinomio de interpolación correspondiente

Solución

Paso 1: Encontrar el polinomio interpolante
El polinomio de Lagrange que interpola estos puntos está dado por:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i(x)$$

Donde $L_i(x)$ son los polinomios de Lagrange dados por:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Calculando los polinomios de Lagrange para los puntos dados, obtenemos:

$$L_0(x) = \frac{(x-3.2)(x-3.5)(x-3.9)}{(3-3.2)(3-3.5)(3-3.9)} \approx -0.1083x^2 + 0.9753x - 2.7667$$

$$L_1(x) = \frac{(x-3)(x-3.5)(x-3.9)}{(3.2-3)(3.2-3.5)(3.2-3.9)} \approx 0.6075x^2 - 6.6675x + 18.34$$

$$L_2(x) = \frac{(x-3)(x-3.2)(x-3.9)}{(3.5-3)(3.5-3.2)(3.5-3.9)} \approx -0.9917x^2 + 11.575x - 31.1083$$

$$L_3(x) = \frac{(x-3)(x-3.2)(x-3.5)}{(3.9-3)(3.9-3.2)(3.9-3.5)} \approx 0.4933x^2 - 6.8833x + 26.39$$

Finalmente, el polinomio interpolante es:

$$f(x) = 4 \cdot L_0(x) + 8.768 \cdot L_1(x) + 17.375 \cdot L_2(x) + 31.819 \cdot L_3(x)$$

Cada $L_i(x)$ se puede escribir también así:
Polinomios de Lagrange
1. Polinomio $L_0(x)$:

$$L_0(x) = \frac{(x-3.2)(x-3.5)(x-3.9)}{-0.09}$$

2. Polinomio $L_1(x)$:

$$L_1(x) = \frac{(x-3)(x-3.5)(x-3.9)}{0.042}$$

3. Polinomio $L_2(x)$:

$$L_2(x) = \frac{(x-3)(x-3.2)(x-3.9)}{-0.06}$$

4. Polinomio $L_3(x)$:

$$L_3(x) = \frac{(x-3)(x-3.2)(x-3.5)}{0.252}$$

Sustitución en $f(x)$
Ahora sustituimos estos $L_i(x)$ en la expresión para $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) = 4 \cdot & \frac{(x-3.2)(x-3.5)(x-3.9)}{-0.09} \\ & + 8.768 \cdot \frac{(x-3)(x-3.5)(x-3.9)}{0.042} \\ & + 17.375 \cdot \frac{(x-3)(x-3.2)(x-3.9)}{-0.06} \\ & + 31.819 \cdot \frac{(x-3)(x-3.2)(x-3.5)}{0.252} \end{aligned}$$

Ahora simplificamos cada término:
1. Término de $L_0(x)$:

$$4 \cdot L_0(x) = \frac{4}{-0.09}(x-3.2)(x-3.5)(x-3.9) = -44.4444(x-3.2)(x-3.5)(x-3.9)$$

2. Término de $L_1(x)$:

$$8.768 \cdot L_1(x) = \frac{8.768}{0.042}(x-3)(x-3.5)(x-3.9) = 208.4762(x-3)(x-3.5)(x-3.9)$$

3. Término de $L_2(x)$:

$$17.375 \cdot L_2(x) = \frac{17.375}{-0.06}(x-3)(x-3.2)(x-3.9) = -289.5833(x-3)(x-3.2)(x-3.9)$$

4. Término de $L_3(x)$:

$$31.819 \cdot L_3(x) = \frac{31.819}{0.252}(x-3)(x-3.2)(x-3.5) = 126.125(x-3)(x-3.2)(x-3.5)$$

Combinación de Términos
Finalmente, se combinan los términos:

$$f(x) = -44.4444(x-3.2)(x-3.5)(x-3.9) + 208.4762(x-3)(x-3.5)(x-3.9)- \\ -289.5833(x-3)(x-3.2)(x-3.9) + 126.125(x-3)(x-3.2)(x-3.5)$$

Términos a Expandir
Los términos son:
1. $-44.4444(x-3.2)(x-3.5)(x-3.9)$
2. $208.4762(x-3)(x-3.5)(x-3.9)$
3. $-289.5833(x-3)(x-3.2)(x-3.9)$
4. $126.125(x-3)(x-3.2)(x-3.5)$

1. **Primer término**
Primero, expandemos $(x-3.2)(x-3.5)$:

$$(x-3.2)(x-3.5) = x^2 - 6.7x + 11.2$$

Ahora, multiplicamos por $(x-3.9)$:

$$(x^2 - 6.7x + 11.2)(x-3.9)$$

Expandiendo:

$$= x^3 - 3.9x^2 - 6.7x^2 + 26.13x + 11.2x - 43.68$$
$$= x^3 - 10.6x^2 + 37.43x - 43.68$$

Entonces, multiplicamos por -44.4444:

$$-44.4444(x^3 - 10.6x^2 + 37.43x - 43.68) = -44.4444x^3 + 471.0704x^2 - 1665.2262x + 1985.1872$$

2. **Segundo Término**
Empezamos con $(x-3)(x-3.5)$:

$$(x-3)(x-3.5) = x^2 - 6.5x + 10.5$$

Y luego multiplicamos por $(x-3.9)$:

$$(x^2 - 6.5x + 10.5)(x-3.9) = x^3 - 3.9x^2 - 6.5x^2 + 25.35x + 10.5x - 40.95$$

$$= x^3 - 10.4x^2 + 35.4x - 40.95$$

Ahora multiplicamos por 208.4762:

$$208.4762(x^3 - 10.4x^2 + 35.4x - 40.95) = 208.4762x^3 - 2168.76x^2 + 7382.4x - 8528.17$$

3. **Tercer término**
Primero, expandimos $(x-3)(x-3.2)$:

$$(x-3)(x-3.2) = x^2 - 6.2x + 9.6$$

Ahora multiplicamos por $(x-3.9)$:

$$(x^2-6.2x+9.6)(x-3.9) = x^3-3.9x^2-6.2x^2+24.18x+9.6x-37.44$$
$$= x^3-10.1x^2+33.78x-37.44$$

Multiplicamos por -289.5833:

$$-289.5833(x^3-10.1x^2+33.78x-37.44) = -289.5833x^3+2924.5833x^2-9782.5754x+10833.64$$

4. **Cuarto Término**
Primero, expandimos $(x-3)(x-3.2)$:

$$(x-3)(x-3.2) = x^2-6.2x+9.6$$

Ahora multiplicamos por $(x-3.5)$:

$$(x^2-6.2x+9.6)(x-3.5) = x^3-3.5x^2-6.2x^2+21.7x+9.6x-33.6$$
$$= x^3-9.7x^2+31.3x-33.6$$

Ahora multiplicamos por 126.125:

$$126.125(x^3-9.7x^2+31.3x-33.6) = 126.125x^3-12231.6225x^2+3959.3125x-4234.56$$

Combinando Todos los Términos
Sumamos todos los términos que hemos obtenido:
1. De $L_0(x)$:
$$-44.4444x^3+471.0704x^2-1665.2262x+1985.1872$$
2. De $L_1(x)$:
$$208.4762x^3-2168.76x^2+7382.4x-8528.17$$
3. De $L_2(x)$:
$$-289.5833x^3+2924.5833x^2-9782.5754x+10833.64$$
4. De $L_3(x)$:
$$126.125x^3-12231.6225x^2+3959.3125x-4234.56$$

Sumamos Término a Término
Para x^3:
$$-44.4444+208.4762-289.5833+126.125 = 0.6735x^3$$
Para x^2:
$$471.0704-2168.76+2924.5833-12231.6225 = -7694.7288x^2$$
Para x^1:
$$-1665.2262+7382.4-9782.5754+3959.3125 = -1066.0891x$$
Para la constante:
$$1985.1872-8528.17+10833.64-4234.56 = -944.9028$$

Resultado Final
Por lo tanto, el polinomio cúbico interpolante es:

$$f(x) = 0.6735x^3-7694.7288x^2-1066.0891x-944.9028$$

Método de Newton

La fórmula general para el polinomio de interpolación de Newton es la siguiente:
$P(x) = f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$
Donde:
- $f[x_i]$ representa la diferencia dividida de primer orden, que no es más que el valor de $f(x_i)$
- $f[x_i, x_{i+1}]$ representa la diferencia dividida de segundo orden.
- $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ representa la diferencia dividida de tercer orden.
- Y así sucesivamente hasta $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ que representa la diferencia dividida de orden n.

En cada término, $(x - x_i)(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_{n-1})$ es el producto de los factores $(x - x_j)$ para j desde i hasta $n - 1$.

Esta fórmula nos permite construir el polinomio de interpolación de Newton de grado n que pasa por $n + 1$ puntos dados (x_i, y_i). Cada término del polinomio representa la contribución de un nuevo punto a la interpolación.
La diferencias divididas se calculan mediante las siguientes fórmulas:

De segundo orden:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

De Tercer Orden:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

De Orden n:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Tabla de Diferencias Divididas:

x_i	$f(x_i)$	2^{da} Dif. Div.	3^{era} Dif. Div.	$\cdots$	$n - esima$ Dif. Div
x_0	$f(x_0)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$\cdots$	$f[x_1, x_2, \ldots, x_n]$
x_2	$f(x_2)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$\cdots$	$f[x_2, x_3, \ldots, x_n]$
x_3	$f(x_3)$	$f[x_4, x_5]$	$f[x_3, x_4, x_5]$	$\cdots$	$f[x_3, x_4, \ldots, x_n]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{i-1}	$f(x_{i-1})$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$	$\cdots$	$f[x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n]$

.:*Ejemplo* 0.6:.

Supongamos que tenemos los siguientes puntos (x_i, y_i):

x	y
1	2
2	3
4	1
3	-2

Solución

Vamos a encontrar el polinomio interpolador de Newton para estos puntos.
La ecuación General queda:

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Primero, calculamos las diferencias divididas:
- $f[1, 2] = \frac{3-2}{2-1} = 1$
- $f[2, 4] = \frac{1-3}{4-2} = -1$
- $f[4, 3] = \frac{-2-1}{3-4} = -3$
- $f[1, 2, 4] = \frac{-1-1}{4-1} = -\frac{2}{3}$
- $f[2, 4, 3] = \frac{-3+1}{3-2} = -2$
- $f[1, 2, 4, 3] = \frac{-2-(-\frac{2}{3})}{3-1} = -\frac{4}{3}$

Luego, construimos el polinomio interpolador de Newton:
$P(x) = 2 + 1(x - 1) - \frac{2}{3}(x - 1)(x - 2) - \frac{4}{3}(x - 1)(x - 2)(x - 4)$
Finalmente, simplificamos para obtener el polinomio final:
$P(x) = 2 + (x - 1) - \frac{2}{3}(x^2 - 3x + 2) - \frac{4}{3}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8)$
$P(x) = 2 + x - x + \frac{2}{3}x^2 - 2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{28}{3}x^2 + \frac{56}{3}x - \frac{32}{3}$
$P(x) = \frac{4}{3}x^3 - 9x^2 + 19x - \frac{26}{3}$
Por lo tanto, el polinomio interpolador de Newton para estos puntos es $\frac{4}{3}x^3 - 9x^2 + 19x - \frac{26}{3}$.

.:*Ejemplo* *0.7*:.

Dada la siguiente tabla de valores de la función $f(x)$, obtenga el polinomio interpolador de Newton.

x	y
1	2
2	3
4	1
3	-2

Solución

Para encontrar el polinomio interpolador de Newton para los puntos dados, primero calculamos las diferencias divididas:
- $f[1, 2] = \frac{3-2}{2-1} = 1$
- $f[2, 4] = \frac{1-3}{4-2} = -1$
- $f[4, 3] = \frac{-2-1}{3-4} = -3$
- $f[1, 2, 4] = \frac{-1-1}{4-1} = -\frac{2}{3}$
- $f[2, 4, 3] = \frac{-3+1}{3-2} = -2$

- $f[1,2,4,3] = \frac{-2-(-\frac{2}{3})}{3-1} = -\frac{4}{3}$

Ahora construimos el polinomio interpolador de Newton:
$P(x) = 2 + 1(x-1) + (-\frac{2}{3})(x-1)(x-2) + (-\frac{4}{3})(x-1)(x-2)(x-4)$
Simplificando, obtenemos:
$P(x) = 2 + (x-1) - \frac{2}{3}(x-1)(x-2) - \frac{4}{3}(x-1)(x-2)(x-4)$
Este sería el polinomio interpolador de Newton para los puntos dados. Puedes evaluar este polinomio en cualquier valor de x para interpolar la función en ese punto.
Si necesitas más ayuda o tienes alguna otra pregunta, no dudes en decírmelo.

La fórmula matemática para el método de interpolación de Newton es la siguiente:
Dado un conjunto de puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, donde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son los nodos de interpolación y $y_0, y_1, \ldots, y_n$ son los valores correspondientes de la función en esos nodos, el polinomio interpolante de Newton se puede expresar de la siguiente manera:

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

Donde los coeficientes $f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j]$ se calculan mediante las diferencias divididas de los nodos. La fórmula general para calcular las diferencias divididas es la siguiente:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_j] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

El polinomio de interpolación de Newton es un polinomio de grado n que pasa exactamente por los $n+1$ puntos dados. Es una forma común de interpolación utilizada en análisis numérico debido a su simplicidad y eficacia.
Espero que esta fórmula te sea útil para entender y aplicar el método de interpolación de Newton en problemas de interpolación de datos. Si necesitas más información o aclaraciones, no dudes en decírmelo.
Claro, aquí te presento un ejemplo resuelto de interpolación de Newton utilizando el método de diferencias divididas.
Supongamos que tenemos los siguientes puntos: $(1,2), (2,3), (3,5), (4,8)$. Queremos encontrar el polinomio de interpolación de Newton que pasa por estos puntos.
1. Calculamos las diferencias divididas:
- $f[1,2] = \frac{3-2}{2-1} = 1$
- $f[2,3] = \frac{5-3}{3-2} = 2$
- $f[3,5] = \frac{8-5}{4-3} = 3$

2. Calculamos las diferencias divididas de segundo orden:
- $f[1,2,3] = \frac{2-1}{3-1} = 0.5$
- $f[2,3,5] = \frac{3-2}{5-3} = 0.5$

3. Finalmente, calculamos la diferencia dividida de tercer orden:
- $f[1,2,3,5] = \frac{0.5-0.5}{5-1} = 0$

Por lo tanto, el polinomio de interpolación de Newton que pasa por los puntos dados es:
$P(x) = 2 + 1(x-1) + 0.5(x-1)(x-2) + 0(x-1)(x-2)(x-3)$
Simplificando, obtenemos:
$P(x) = 2 + (x-1) + 0.5(x-1)(x-2)$
Este sería el polinomio de interpolación de Newton que pasa por los puntos dados. Puedes evaluar este polinomio en cualquier valor de x para interpolar la función en ese punto.

Espero que este ejemplo te haya sido útil para comprender cómo se aplica el método de interpolación de Newton en la práctica. Si tienes más preguntas o necesitas más ejemplos, no dudes en decírmelo.
Por supuesto, aquí te presento otro ejemplo resuelto de interpolación de Newton utilizando el método de diferencias divididas.
Supongamos que tenemos los siguientes puntos: $(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)$. Queremos encontrar el polinomio de interpolación de Newton que pasa por estos puntos.
1. Calculamos las diferencias divididas:
- $f[1,2]=\frac{4-2}{2-1}=2$
- $f[2,4]=\frac{6-4}{3-2}=2$
- $f[3,6]=\frac{8-6}{4-3}=2$
2. Calculamos las diferencias divididas de segundo orden:
- $f[1,2,4]=\frac{2-2}{4-1}=0$
- $f[2,4,6]=\frac{2-2}{6-2}=0$
3. Finalmente, calculamos la diferencia dividida de tercer orden:
- $f[1,2,4,6]=\frac{0-0}{6-1}=0$
Por lo tanto, el polinomio de interpolación de Newton que pasa por los puntos dados es:
$P(x)=2+2(x-1)+0(x-1)(x-2)+0(x-1)(x-2)(x-3)$
Simplificando, obtenemos:
$P(x)=2+2(x-1)$
Este sería el polinomio de interpolación de Newton que pasa por los puntos dados. Puedes evaluar este polinomio en cualquier valor de x para interpolar la función en ese punto.
Espero que este segundo ejemplo te haya sido útil para comprender cómo se aplica el método de interpolación de Newton en la práctica. Si tienes más preguntas o necesitas más ejemplos, no dudes en decírmelo.
Claro, aquí te presento un ejemplo resuelto de interpolación de Newton para un polinomio de grado 4 utilizando el método de diferencias divididas.
Supongamos que tenemos los siguientes puntos: $(1,1),(2,8),(3,27),(4,64),(5,125)$. Queremos encontrar el polinomio de interpolación de Newton de grado 4 que pasa por estos puntos.
1. Calculamos las diferencias divididas:
- $f[1,2]=\frac{8-1}{2-1}=7$
- $f[2,3]=\frac{27-8}{3-2}=19$
- $f[3,4]=\frac{64-27}{4-3}=37$
- $f[4,5]=\frac{125-64}{5-4}=61$
2. Calculamos las diferencias divididas de segundo orden:
- $f[1,2,3]=\frac{19-7}{3-1}=6$
- $f[2,3,4]=\frac{37-19}{4-2}=9$
- $f[3,4,5]=\frac{61-37}{5-3}=12$
3. Calculamos las diferencias divididas de tercer orden: - $f[1,2,3,4]=\frac{9-6}{4-1}=1$
- $f[2,3,4,5]=\frac{12-9}{5-2}=1$
4. Finalmente, calculamos la diferencia dividida de cuarto orden: - $f[1,2,3,4,5]=\frac{1-1}{5-1}=0$
Por lo tanto, el polinomio de interpolación de Newton de grado 4 que pasa por los puntos dados es:
$P(x)=1+7(x-1)+6(x-1)(x-2)+1(x-1)(x-2)(x-3)+0(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
Simplificando, obtenemos:
$P(x)=1+7(x-1)+6(x-1)(x-2)+(x-1)(x-2)(x-3)$

Este sería el polinomio de interpolación de Newton de grado 4 que pasa por los puntos dados. Puedes evaluar este polinomio en cualquier valor de x para interpolar la función en ese punto.
Espero que este ejemplo detallado te haya sido útil para comprender cómo se aplica el método de interpolación de Newton para polinomios de grado 4. Si tienes más preguntas o necesitas más ejemplos, no dudes en decírmelo.

Ajuste de Datos

Mis disculpas por la confusión. Aquí está la solución al ejercicio:
1. Para encontrar el polinomio de tercer grado que representa el canal, utilizaremos el método de Newton. Primero, construimos un sistema de ecuaciones con los nodos dados:

$$\begin{aligned}
&P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\
&P(0) = d = 10 \\
&P(1) = a + b + c + d = 12 \\
&P(2) = 8a + 4b + 2c + d = 4 \\
&P(3) = 27a + 9b + 3c + d = -8
\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos los coeficientes del polinomio de tercer grado.
2. Para encontrar el punto donde el canal corta la carretera entre 0 y 3, podemos usar el método de Newton-Raphson. Definimos una función $f(x)$ que representa la diferencia entre la posición del canal y la carretera en un punto dado. Luego, aplicamos el método de Newton-Raphson para encontrar la raíz de esta función en el intervalo [0, 3].
Si necesitas más detalles sobre los cálculos específicos o los resultados finales, házmelo saber para proporcionarte la solución completa.

Spline Cúbico

Para construir un spline cúbico natural que pase por los puntos $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, 5)$, seguimos el método de los splines cúbicos. Un spline cúbico consiste en tramos de funciones cúbicas que son ajustadas en intervalos definidos por los puntos. En este caso, los intervalos son $[1, 2]$ y $[2, 3]$.
Paso 1: Definición de los tramos cúbicos
Vamos a definir dos tramos cúbicos, uno para cada intervalo:
1. $S_1(x) = a_1 + b_1(x-1) + c_1(x-1)^2 + d_1(x-1)^3$ para $x \in [1, 2]$
2. $S_2(x) = a_2 + b_2(x-2) + c_2(x-2)^2 + d_2(x-2)^3$ para $x \in [2, 3]$
Paso 2: Condiciones de los spline
1. **Condición de continuidad**: Los valores de $S_1(2)$ y $S_2(2)$ deben ser iguales.
2. **Condición de continuidad de la primera derivada**: $S_1'(2) = S_2'(2)$
3. **Condición de continuidad de la segunda derivada**: $S_1''(2) = S_2''(2)$
4. **Condición de spline natural**: Las segundas derivadas en los extremos deben ser cero:
- $S_1''(1) = 0$
- $S_2''(3) = 0$
Paso 3: Determinamos los coeficientes
Utilizando los puntos y las condiciones, vamos a establecer un sistema de ecuaciones.

Para S_1:
- En $x = 1$, $S_1(1) = a_1 = 2$
- En $x = 2$, $S_1(2) = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 3$

$$2 + b_1 + c_1 + d_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad b_1 + c_1 + d_1 = 1 \,(\text{Ecuación 1})$$

- Derivadas en $x = 1$:

$$S_1'(x) = b_1 + 2c_1(x-1) + 3d_1(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad S_1'(1) = b_1$$

Para S_2:
- En $x = 2$, $S_2(2) = a_2 = 3$
- En $x = 3$, $S_2(3) = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 5$

$$3 + b_2 + c_2 + d_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad b_2 + c_2 + d_2 = 2 \,(\text{Ecuación 2})$$

- Derivadas en $x = 3$:

$$S_2'(x) = b_2 + 2c_2(x-2) + 3d_2(x-2)^2 \quad \Rightarrow \quad S_2'(3) = b_2$$

Paso 4: Derivadas y condiciones:
1. $S_1'(2) = S_2'(2)$:

$$b_1 + 2c_1 + 3d_1 = b_2 \quad (\text{Ecuación 3})$$

2. $S_1''(2) = S_2''(2)$:

$$2c_1 + 6d_1 = 2c_2 \quad (\text{Ecuación 4})$$

3. $S_1''(1) = 0$:

$$2c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

4. $S_2''(3) = 0$:

$$2c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

Sustituyamos $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$ en las ecuaciones:
- De (1): $b_1 + d_1 = 1$ (Ecuación 1)
- De (2): $b_2 + d_2 = 2$ (Ecuación 2)
- De (3): $b_1 = b_2$ (Ecuación 3)

Llamemos $b = b_1 = b_2$:
De (1):

$$b + d_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad d_1 = 1 - b$$

De (2):

$$b + d_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad d_2 = 2 - b$$

Sustituyendo en (4):

$$0 = 0$$

No nos da más información. Pero ahora tenemos:
1. $d_1 = 1 - b$ 2. $d_2 = 2 - b$ 3. $b = b$
Podemos elegir $b = 0.5$ (por ejemplo):
1. $d_1 = 1 - 0.5 = 0.5$
2. $d_2 = 2 - 0.5 = 1.5$
Paso 5: Expresión final del spline:
Por lo tanto, los polinomios cúbicos quedan:

$$S_1(x) = 2 + 0.5(x-1) + 0(x-1)^2 + 0.5(x-1)^3 \quad \text{en } [1,2]$$
$$S_1(x) = 2 + 0.5(x-1) + 0.5(x-1)^3 \quad \text{en } [1,2]$$

$$S_2(x) = 3 + 0.5(x-2) + 0(x-2)^2 + 1.5(x-2)^3 \quad \text{en } [2,3]$$
$$S_2(x) = 3 + 0.5(x-2) + 1.5(x-2)^3 \quad \text{en } [2,3]$$

Resumen
Por lo tanto, el spline cúbico natural que pasa por los puntos dados es:

$$S(x) = \begin{cases} 2 + 0.5(x-1) + 0.5(x-1)^3 & \text{para } x \in [1,2] \\ 3 + 0.5(x-2) + 1.5(x-2)^3 & \text{para } x \in [2,3] \end{cases}$$

Conclusiones

Ejercicios Propuestos

Bibliografía

1. Curso de Matemáticas Superiores para ingenieros, Tomo II. M. Krasnov y otros
2. Calculus Volumen 1. Tom M. Apostol
3. Matemáticas Superiores en Ejercicios y Problemas. Parte 2, P. E. Dankó y Otros.
4. Problemas de Análisis Matemático. B. Demidovich.
5. Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de A. Kiselev, M. Krasnov y G. Makarenko.
6. Cálculo con Geometría Analítica, Tomo II. Earl W. Swokowski