Matemática III

Conferencia $\int$

Teoría de Error y Solución de Ecuaciones

Profesor Instructor:
Lic. Juan Cruz Oduardo

November 23, 2024

Sumario:
Objetivo:

Introducción

Elementos teóricos

.:Teorema 0.0.1 (Teorema Fundamental del Álgebra):.
El Teorema Fundamental del Álgebra establece que todo polinomio de grado n (donde n es un número entero mayor o igual a 1) con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces en el plano complejo. Esto significa que si consideramos un polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ (donde $a_n \neq 0$), entonces existen n números complejos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tales que $P(z_i) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Además, **estas raíces pueden ser reales** o complejas y, en el caso de que algunas raíces sean idénticas, se cuentan con su multiplicidad.

.:Teorema 0.0.2 (Teorema de Bolzano):.
Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos (es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$), entonces existe al menos un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f(c) = 0$.

Este teorema se basa en la continuidad de las funciones. Este resultado se utiliza frecuentemente en análisis numérico y cálculo para **localizar raíces de funciones**.

Desarrollo

Métodos para determinar las raices de una ecuación

Ahora veamos un ejemplo para comprender los conceptos:

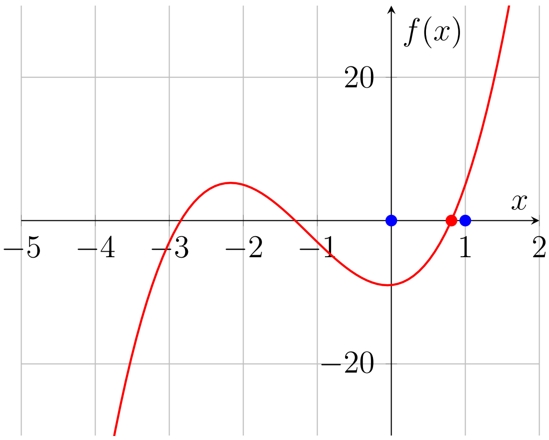
1. Dada la ecuación $3x^3 + 10x^2 + x - 9 = 0$

   (a) Separa la raices.

   (b) Encuentre una de ellas usando los métodos estudiados (bisección, falsa posición, Newton-Raphson y secante) realizando tres o más iteraciones

Solución

a) La separación de raices consiste en buscar los intervalos donde existen cambios de signos, es decir, intervalos que al evaluar los extremos en la ecuación se aprecia un cambio de signo y por tanto la presencia de una raiz. Con ayuda de un programa informático podemos plotear la ecuación para ver su gráfico y ver los intervalos donde se encuentran las raices como en la siguiente figura:



Otra manera de hacerlo es ir probando números enteros buscando los cambios de signos, simpre teniendo en cuenta el Teorema Fundamental del Álgebra, por ejemplo:

si evaluamos la ecuación en 0 obtenemos que:
$f(0) = 3(0)^3 + 10(0)^2 + 0 - 9 = -9$,
y si la evaluamos en 1 obtenemos que:
$f(1) = 3(1)^3 + 10(1)^2 + 1 - 9 = 5$,

de aqui que según el Teorema de Bolzano podemos decir que en el intervalo de $[0, 1]$ existe una raíz del polinomio $3x^3 + 10x^2 + x - 9 = 0$, dicho resultado lo usaremos para continuar con la resolución del ejemplo.

b)

Método de Bisección

.:Definición 0.0.1 (Método de Bisección):.
Dado un intervalo $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, se calcula el punto medio $c = \frac{a+b}{2}$. Luego se evalúa $f(c)$. Si $f(c)$ es igual a cero o si el intervalo $[a, b]$ es suficientemente pequeño, se considera que c es la raíz aproximada. De lo contrario, se selecciona el subintervalo donde $f(a) \cdot f(c) < 0$ o $f(b) \cdot f(c) < 0$ y se repite el proceso.

El Método de Bisección es un método de búsqueda de raíces que consiste en dividir repetidamente el intervalo en el que se encuentra la raíz a la mitad y seleccionar el subintervalo que garantiza un cambio de signo en la función. Este proceso se repite hasta alcanzar la precisión deseada.

Ahora, resolveremos el ejercicio anterior utilizando el Método de Bisección.
Paso 1: Definir la función y el intervalo inicial
De el inciso anterior sabemos que uno de los intervalos donde se encuentra una raiz es $[0, 1]$.
Paso 2: Iteraciones del método de bisección
Se realizarán iteraciones del método de bisección, asegurando que a y b se actualicen en cada iteración para mantener un cambio de signo entre $f(a)$ y $f(b)$, es decir, garantizando que la raiz buscada se encuentre entre los nuevos a y b.

Iteración	a	b	$c = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$E_r = \frac{b-a}{2}$
1	0	1	0.5	-9	5	-5.625	0.5
2	0.5	1	0.75	-5.625	5	-1.35938	0.25
3	0.75	1	0.875	-1.35938	5	1.54102	0.125
4	0.75	0.875	0.8125	-1.35938	1.54102	0.0231934	0.0625

De aqui se sabe que la posible raíz es $x \approx 0.8125$ con un error de 0.0625.

Método de Falsa Posición

.:Definición 0.0.2 (Método de Bisección):.
El método de la falsa posición, también conocido como método de la regla falsa, es un método numérico utilizado para encontrar raíces de una función. Consiste en aproximar la intersección de la función con el eje x mediante una recta secante entre dos puntos del intervalo inicial, y luego encontrar el punto de intersección de esa recta con el eje x. Este proceso se repite iterativamente hasta alcanzar una aproximación deseada de la raíz.
La fórmula para calcular el nuevo punto c en el método de la falsa posición es:

$$\boxed{c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}}$$

donde:
- $f(a)$ y $f(b)$ son los valores de la función en los extremos a y b, respectivamente.

El error absoluto en cada iteración se puede calcular como la diferencia entre el valor actual de c y el valor anterior de c, es decir:

$$Error = |c_{actual} - c_{anterior}|$$

Ahora, aplicaremos el método de la falsa posición para encontrar la raíz de la función $f(x) = 3x^3 + 10x^2 + x - 9$ en el intervalo $[0, 1]$, y realizaremos 4 iteraciones como se muestra en el ejemplo resuelto anteriormente con el método de bisección.

Paso 1: Definir la función y el intervalo inicial

La función dada es $f(x) = 3x^3 + 10x^2 + x - 9$. Evaluamos la función en los extremos del intervalo:
$f(0) = -9$
$f(1) = 5$
Ambos resultados indican un cambio de signo en el intervalo $[0, 1]$, lo que sugiere la presencia de al menos una raíz.

Paso 2: Iteraciones del método de falsa posición

Se realizarán iteraciones del método de falsa posición, actualizando los extremos del intervalo a y b en cada iteración para mantener un cambio de signo entre $f(a)$ y $f(b)$, similar al método de bisección.
Voy a calcular los valores de c para cada iteración y luego construir la tabla con los resultados obtenidos.

$$
\begin{aligned}
\text{Iteración 1: } c &= \frac{0 \cdot 5 - 1 \cdot (-9)}{5 - (-9)} = \frac{9}{14} \approx 0.642857 \\
\text{Iteración 2: } c &= \frac{0.6429 \cdot 5 - 1 \cdot (-4.3077)}{5 - (-4.3077)} \approx 0.788108 \\
\text{Iteración 3: } c &= \frac{0.8082 \cdot 5 - 1 \cdot (-1.7201)}{5 - (-1.7201)} \approx 0.0.808493 \\
\text{Iteración 4: } c &= \frac{0.7905 \cdot 5 - 1 \cdot (-0.5463)}{5 - (-0.5463)} \approx 0.811117
\end{aligned}
$$

Ahora, voy a construir la tabla con los resultados obtenidos:

Iteración	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	Error
1	0	1	0.642857	-9	5	-3.42748	0.642857
2	0.642857	1	0.788108	-3.42748	5	-0.532233	0.145251
3	0.788108	1	0.808493	-0.532235	5	-0.06945	0.0203853
4	0.808493	1	0.811117	-0.0694568	5	-0.00885084	0.00262384

De aquí se observa que la raíz aproximada es $x \approx 0.811117$ con un error de 0.00262384.

Método de la Secante

El método de la secante es un método numérico para encontrar raíces de una función mediante la interpolación lineal de dos puntos cercanos en la curva de la función. A diferencia del método de Newton-Raphson, el método de la secante no requiere el cálculo de la derivada de la función. En su lugar, utiliza una aproximación de la derivada basada en dos puntos cercanos.
La idea básica del método de la secante es aproximar la pendiente de la tangente a la curva de la función en lugar de calcularla directamente. Luego, se utiliza esta aproximación para encontrar una nueva aproximación de la raíz de la función.

La fórmula general para el método de la secante se expresa como:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)}$$

Donde x_n y x_{n-1} son dos aproximaciones sucesivas de la raíz de la función.
El error en el método de la secante se puede calcular de manera similar a otros métodos iterativos. Una posible forma de calcular el error en la iteración n es la diferencia absoluta entre la aproximación actual x_{n+1} y la aproximación anterior x_n, es decir:

$$\text{Error} = |x_{n+1} - x_n|$$

Dado que estamos resolviendo la ecuación $3x^3 + 10x^2 + x - 9 = 0$, usaremos las aproximaciones iniciales $x_0 = 1$ y $x_1 = 0.8$, ya que sabemos que la raíz está entre estos dos valores.

La función dada es $f(x) = 3x^3 + 10x^2 + x - 9$. Evaluamos la función obtenemos que:
$f(1) = 5$
$f(0.8) = -0.264$
Ahora, procederé a calcular las siguientes aproximaciones de la raíz y a construir una tabla con los resultados obtenidos en cada iteración. Luego, explicaré el error en cada iteración.

Iteración	x_{n-1}	x_n	x_{n+1}	Error
1	1	0.8	0.81003	0.0100304
2	0.8	0.81003	0.811512	0.00148189
3	0.81003	0.811512	0.811499	$1.28459e-005$
4	0.811512	0.811499	0.811499	$1.68163e-007$

En la primera iteración, calculamos x_2 usando x_0 y x_1. Luego, en las iteraciones siguientes, calculamos x_{n+1} utilizando x_{n-1} y x_n para cada n. El error en cada iteración se calcula como la diferencia absoluta entre x_{n+1} y x_n.
Después de 4 iteraciones, obtenemos $x_5 \approx 0.811499$ como nuestra aproximación de la raíz de la función $f(x)$. Como el error en la cuarta iteración es 0.00000168163, esto indica que hemos alcanzado la raíz con suficiente precisión.

Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es un algoritmo iterativo para encontrar raíces de una función real. Este método es particularmenteútil para resolver ecuaciones no lineales. La idea básica es iniciar con una suposición inicial y luego utilizar la tangente a la curva de la función en ese punto para encontrar una mejor aproximación de la raíz.
El método de Newton-Raphson se define por la siguiente fórmula de iteración:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Donde:
- x_{n+1} es la nueva aproximación.
- x_n es la aproximación actual.
- $f(x_n)$ es el valor de la función en x_n.
- $f'(x_n)$ es la derivada de la función evaluada en x_n.

Pasos básicos del método de Newton-Raphson:

1. Elija una suposición inicial x_0:

   (a) Si la función es cóncava hacia arriba ($f''(x) > 0$) y creciente ($f'(x) > 0$) elegir x_0 a la derecha de la raíz (r).

   (b) Si la función es cóncava hacia arriba ($f''(x) > 0$) y creciente ($f'(x) < 0$) elegir x_0 a la izquierda de la raíz (r).

   (c) Si la función es cóncava hacia abajo ($f''(x) < 0$) y decreciente ($f'(x) < 0$) elegir x_0 a la derecha de la raíz (r).

   (d) Si la función es cóncava hacia abajo ($f''(x) < 0$) y creciente ($f'(x) > 0$) elegir x_0 a la izquierda de la raíz (r).

   En resumen si la primera y la segunda derivada tienen el mismo signo se escoge el x_0 a la derecha de la raíz (r) y si no a la izquierda.

2. Aplique la fórmula de iteración: Utilice la fórmula mencionada anteriormente para calcular x_{n+1}.

3. Repita el proceso: Aplique la fórmula en cada iteración hasta que la aproximación converja a la raíz deseada.

Dada la ecuación $3x^3 + 10x^2 + x - 9 = 0$, vamos a encontrar una de las raíces utilizando el método de Newton-Raphson.
La función es $f(x) = 3x^3 + 10x^2 + x - 9$, su derivada es $f'(x) = 9x^2 + 20x + 1$ y su segunda derivada es $f''(x) = 18x + 20$.
Como la primera y la segunda derivada de la función son mayores que 0, escogemos $x_0 = 1$, que es el intervalo de la derecha.
Dado que elegimos $x_0 = 1$ como suposición inicial, podemos calcular $f(x_0)$ y $f'(x_0)$ para comenzar la iteración.

$$f(1) = 3(1)^3 + 10(1)^2 + 1 - 9 = 5$$

$$f'(1) = 9(1)^2 + 20(1) + 1 = 30$$

Ahora, podemos aplicar la fórmula de Newton-Raphson para encontrar la siguiente aproximación x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{5}{30} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0.8333$$

Continuamos este proceso para encontrar x_2, x_3, y x_4. Construiré una tabla para mostrar los resultados obtenidos en cada iteración:

Iteración	x_n	x_{n+1}	Error
0	1	0.8333	0.166667
1	0.8333	0.811847	0.0214863
2	0.811847	0.811499	0.000347741
3	0.811499	0.811499	$1.68165e-007$

En la primera iteración, utilizamos la fórmula de Newton-Raphson para calcular x_1. Luego, en las iteraciones subsiguientes, usamos x_n para calcular x_{n+1}. El error se calcula como la diferencia absoluta entre x_{n+1} y x_n.
Después de cuatro iteraciones, obtenemos $x_4 \approx 0.811499$ como nuestra aproximación de la raíz de la función $f(x)$. Como el error en la cuarta iteración es 0.000000168165, esto indica que hemos alcanzado la raíz con suficiente precisión.

Conclusiones

Ejercicios Propuestos

Bibliografía

1. Curso de Matemáticas Superiores para ingenieros, Tomo II. M. Krasnov y otros
2. Calculus Volumen 1. Tom M. Apostol
3. Matemáticas Superiores en Ejercicios y Problemas. Parte 2, P. E. Dankó y Otros.
4. Problemas de Análisis Matemático. B. Demidovich.
5. Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de A. Kiselev, M. Krasnov y G. Makarenko.
6. Cálculo con Geometría Analítica, Tomo II. Earl W. Swokowski