Matemática III

Conferencia $\int$

Series de Potencias. Series de Taylor

Profesor Instructor:
Lic. Juan Cruz Oduardo

July 10, 2024

Sumario: Series de potencias. Intervalo de convergencia. Serie de Taylor. Cálculo Aproximado.
Objetivo: Determinar el radio, dominio de convergencia y límite de una serie de potencias.

Introducción

En la conferencia anterior estudiamos la series de numéricas: definimos el concepto, se estudió la serie geométrica y la serie hiperarmónica como series importantes al usar los criterios de comparación, también se estudiaron otros criterios: el de la integral, el del cociente y el de la raíz. Por último se estudió las series alternadas y la convergencia absoluta y condicional. Veamos la siguiente pregunta:

1. Supóngase que una unidad monetaria (u.m.) que se introduce a la economía circula de manera que 85% de u.m. original se gasta, luego se gasta 85% de los 0.15 u.m. restantes , etcétera. Calcule el impacto económico (es decir, la cantidad total gastada) si se introducen 1 000 000 u.m. en la economía.

En esta conferencia veremos que funciones como e^x , $senx$ y $\arctan x$ pueden representarse como series infinitas, los términos de tales series contienen a la variable x. Estas series se denominan "Series de Potencia". En los surgimientos del Cálculo Diferencial e Integral todas las funciones se "desarrollaban" en series de potencias para realizar de derivación e integración.

Desarrollo

Definicion de serie de potencias y Serie de Taylor

Dada una sucesión de coeficientes $\{a_n\}$ y una variable x, una serie de potencia centrada en $x = a$ es una expresión de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

donde:
- n es un índice entero no negativo que recorre los términos de la serie.
- a_n son coeficientes reales o complejos que pueden depender de n.
- x es la variable independiente.
- a es el punto de centro de la serie.

Esta expresión representa una suma infinita de términos, donde cada término es el producto de un coeficiente a_n por la potencia $(x-a)^n$. El valor de x puede variar, y la serie puede converger o diverger dependiendo de los valores de a_n y x.
El propósito de una serie de potencia es representar una función como una suma infinita de términos polinómicos, lo que permite aproximar funciones de manera precisa en un intervalo alrededor del punto $x = a$. El teorema de convergencia de series de potencia establece las condiciones bajo las cuales una serie de potencia converge y representa fielmente una función en su intervalo de convergencia.

Teorema de Convergencia de Series de Potencia:
Dada una serie de potencia $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ con coeficientes a_n y un punto a en el dominio de la serie, la serie de potencia converge en un intervalo abierto alrededor de a, que puede ser de la forma $(a-R, a+R)$,

donde R es el radio de convergencia. El radio de convergencia R está determinado por una de las siguientes tres posibilidades:
1. **Convergencia Absoluta:** La serie de potencia converge absolutamente para todos los valores de x en el intervalo $(a-R, a+R)$. En otras palabras, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(x-a)^n$ es convergente.
2. **Divergencia:** La serie de potencia diverge para cualquier valor de x fuera del punto a.
3. **Convergencia en el Punto a:** La serie de potencia converge solo en $x = a$, es decir, cuando x es igual al punto a.
El radio de convergencia R se puede calcular utilizando la fórmula de Cauchy-Hadamard:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

El teorema de convergencia de series de potencia es fundamental en análisis y cálculo, ya que proporciona una herramienta poderosa para expresar funciones de manera aproximada mediante sumas infinitas de términos polinómicos.

Radio de convergencia

El radio de convergencia es un concepto clave en el contexto de las series de potencia y se refiere a la distancia desde el punto central de la serie (denominado "centro" o "punto de expansión") hasta el punto más lejano en el cual la serie de potencia converge absolutamente. En otras palabras, es el radio del intervalo en el cual la serie de potencia es convergente.
El radio de convergencia se representa típicamente como R y se calcula utilizando la fórmula de Cauchy-Hadamard:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Donde:
- a_n son los coeficientes de la serie de potencia.
- $\limsup$ representa el límite superior.
El valor de R puede ser cualquier número real positivo, incluyendo $R = 0$ (lo que significa que la serie de potencia converge solo en el punto central) o $R = \infty$ (lo que significa que la serie de potencia converge en todo el eje real). En resumen:
- Si $R = 0$, la serie de potencia converge solo en el punto central.
- Si $0 < R < \infty$, la serie de potencia converge en un intervalo abierto $(a-R, a+R)$ alrededor del punto central.
- Si $R = \infty$, la serie de potencia converge en todo el eje real.
El radio de convergencia es fundamental para determinar en qué intervalo una serie de potencia representa fielmente una función y dónde es posible utilizarla para aproximaciones precisas. También es importante para establecer el dominio de validez de la expansión en series de potencia de una función.

Dominio de convergencia

El dominio de convergencia de una serie de potencia es el conjunto de todos los valores de la variable independiente para los cuales la serie converge, es decir, donde la suma de la serie tiene un valor finito. En otras palabras, es el conjunto de valores de x para los cuales la expansión en serie de potencia es válida y representa fielmente a la función original.
El dominio de convergencia se establece por el radio de convergencia (R) de la serie de potencia. El radio de convergencia determina el intervalo alrededor del punto central (a) en el cual la serie de potencia es convergente. Dependiendo de los casos, el dominio de convergencia puede tomar una de las siguientes formas:
1. **Intervalo Abierto:** Si el radio de convergencia es un número real positivo finito $R > 0$, entonces el dominio de convergencia es un intervalo abierto $(a - R, a + R)$ alrededor del punto central a.
2. **Punto único:** Si el radio de convergencia es $R = 0$, entonces la serie de potencia converge solo en el punto central $x = a$, y ese es el único valor en el dominio de convergencia.
3. **Eje Real:** Si el radio de convergencia es infinito ($R = \infty$), entonces la serie de potencia converge en todo el eje real $(-\infty, \infty)$.
En resumen, el dominio de convergencia de una serie de potencia depende del valor del radio de convergencia R. Este dominio es crucial para determinar dónde la serie de potencia representa fielmente a la función original y es útil para realizar aproximaciones de la función en ese intervalo.

Importante

En la práctica el radio se calcula aplicando el criterio de la razón a la serie, si $L = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ y $R = \dfrac{1}{L}$, cuando:

1. L es igual a una inecuación modular esta se calcula, y de aqui se saca el centro de la serie , el radio y el dominio de convergencia (ver ejemplos).
2. $L = \infty \Longrightarrow R = 0$ y por tanto el centro es el mismo dominio de convergencia.
3. $L = 0 \Longrightarrow R = \infty$ y por tanto el dominio de convergencia es todo el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

.:*Ejemplo* *0.1*:.

Determine el radio y dominio de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+4)\,3^n}$$

Solución

Para determinar el radio de convergencia, utilizamos la fórmula del cociente de series:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Donde a_n es el término general de la serie. En este caso, $a_n = \dfrac{(x+2)^n}{(n+4)3^n}$. Calculamos a_{n+1}:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1+4)3^{n+1}} \\ &= \frac{(x+2)(x+2)^n}{(n+5)3\cdot 3^n} \\ &= \frac{(x+2)^n}{3^n}\cdot\frac{x+2}{n+5}\cdot\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+2)^n}{3^n}\cdot\frac{x+2}{n+5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{(x+2)^n}{3^n}\cdot\frac{1}{(n+4)}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+2)^n}{3^n}\cdot\frac{x+2}{n+5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{(x+2)^n}{3^n}\cdot\frac{1}{(n+4)}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x+2}{3}\cdot\frac{n+4}{n+5}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x+2}{3}\cdot 1\right| = \left|\frac{x+2}{3}\right| \end{aligned}$$

Para encontrar el dominio de convergencia, consideramos que la serie converge si $L<1$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \left|\frac{x+2}{3}\right| &< 1/\cdot 3 \\ |x+2| &< 3 \end{aligned}$$

de aqui se deduce que el radio de convergencia es 3 (R=3) alrededor del centro de la serie $x=-2$. Calculemos el domino de convergencia resolviendo las inecuaciones.

$$x+2<3 \quad \text{y} \quad x+2>-3$$

Resolvemos cada desigualdad:
1. $x+2<3$: Sustraemos 2 a ambos lados y obtenemos $x<1$.
2. $x+2>-3$: Sustraemos 2 a ambos lados y obtenemos $x>-5$.
Entonces, el dominio de convergencia es:

$$-5<x<1$$

En resumen, el centro es $x=-2$ el radio de convergencia de la serie es $R=3$, y el dominio de convergencia es $(-5,1)$.

.:*Ejemplo* 0.2:.

Determine el radio y dominio de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$$

Solución

Para determinar el radio y el dominio de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$$

podemos utilizar el criterio de la razón y el teorema de convergencia de las series de potencias, similar a lo que hicimos anteriormente.

Paso 1: Criterio de la Razón

El criterio de la razón establece que una serie de potencias converge absolutamente si:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

donde a_n es el término general de la serie.

Paso 2: Encontrar el Término General

El término general de la serie es $a_n = \dfrac{2^n x^n}{n!}$.

Paso 3: Aplicar el Criterio de la Razón

Calculamos el límite del criterio de la razón:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2x}{n+1} \right| = 0$$

Paso 4: Radio de Convergencia

Dado que el límite del criterio de la razón es igual a 0, podemos utilizar esta información para calcular el radio de convergencia R:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{0} = \infty$$

El radio de convergencia R es igual a infinito.

Paso 5: Dominio de Convergencia

El dominio de convergencia es el conjunto de valores de x para los cuales la serie converge. Dado que hemos establecido que el radio de convergencia es infinito, la serie de potencias converge para todos los valores de x. Por lo tanto, el dominio de convergencia es $\mathbb{R}$, es decir, todos los números reales.

En resumen, la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$ tiene un radio de convergencia infinito y converge para todos los valores de x, por lo que su dominio de convergencia es $\mathbb{R}$.

.:*Ejemplo* 0.3:.

Determine el radio y dominio de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)!}$$

Solución

Para determinar el radio y el dominio de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)!}$$

utilizaremos el criterio de la razón y el teorema de convergencia de las series de potencias. A continuación, se describen los pasos:

Paso 1: Criterio de la Razón

El criterio de la razón establece que una serie de potencias converge absolutamente si el siguiente límite es menor que 1:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

donde a_n es el término general de la serie.

Paso 2: Encontrar el Término General

El término general de la serie es $a_n = \dfrac{3^n x^n}{(n+1)!}$.

Paso 3: Aplicar el Criterio de la Razón

Calculamos el límite del criterio de la razón:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{3^n x^n}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{3^n x^n} \right|$$

Simplificamos:

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{3^n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3x}{n+2} \right| = 0$$

Paso 4: Radio de Convergencia

El límite del criterio de la razón es 0, lo que significa que el radio de convergencia R es infinito ($R = \infty$).

Paso 5: Dominio de Convergencia

El dominio de convergencia es el conjunto de valores de x para los cuales la serie converge. En este caso, dado que el radio de convergencia es infinito, la serie converge para todos los valores de x.

Por lo tanto, el radio de convergencia de la serie es infinito ($R = \infty$), y el dominio de convergencia es $\mathbb{R}$, lo que significa que la serie converge para todos los valores de x.

En resumen, la serie de potencias converge para todo x y tiene un radio de convergencia infinito ($R = \infty$).

.:*Ejemplo* *0.4*:.

Determine el radio y el dominio de convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)4^n}$$

Solución

Para determinar el radio y el dominio de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^n}{(2n+1)4^n}$$

utilizaremos el criterio de la razón y el teorema de convergencia de las series de potencias. A continuación, se describen los pasos:

Paso 1: Criterio de la Razón

El criterio de la razón establece que una serie de potencias converge absolutamente si el siguiente límite es menor que 1:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$$

donde a_n es el término general de la serie.

Paso 2: Encontrar el Término General

El término general de la serie es $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{(x-3)^n}{(2n+1)4^n}$.

Paso 3: Aplicar el Criterio de la Razón

Calculamos el límite del criterio de la razón:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}\frac{(x-3)^{n+1}}{(2(n+1)+1)4^{n+1}}}{(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^n}{(2n+1)4^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)(x-3)^{n+1}}{(2(n+1)+1)4(x-3)(x-3)^n}\right|$$

Simplificamos:

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-1(x-3)^{n+1}}{(2n+3)4(x-3)(x-3)^n}\right|=\left|\frac{-(x-3)}{(2n+3)4}\right|$$

Paso 4: Radio de Convergencia

El límite del criterio de la razón es $\left|\frac{-(x-3)}{(2n+3)4}\right|$, lo que significa que el radio de convergencia R se encuentra utilizando la siguiente fórmula:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\frac{1}{\left|\frac{-(x-3)}{(2n+3)4}\right|}$$

Ahora, evaluamos este límite cuando n tiende a infinito:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{-(x-3)}{(2n+3)4}\right|}=\frac{1}{\left|\frac{-(x-3)}{4}\right|}=\frac{4}{|x-3|}$$

Paso 5: Dominio de Convergencia

El dominio de convergencia es el conjunto de valores de x para los cuales la serie converge. Dado que el radio de convergencia es finito ($R=\frac{4}{|x-3|}$), la serie converge cuando:

$$\frac{4}{|x-3|} < 1$$

Esto implica que:

$$4 < |x-3|$$

$$|x-3| > 4$$

Lo cual se traduce en dos desigualdades:

$$x-3 > 4 \quad \text{y} \quad x-3 < -4$$

Resolvemos cada desigualdad:
1. $x-3 > 4$: Sumamos 3 a ambos lados y obtenemos $x > 7$.
2. $x-3 < -4$: Sumamos 3 a ambos lados y obtenemos $x < -1$.
Entonces, el dominio de convergencia es:

$$-1 < x < 7$$

En resumen, el radio de convergencia de la serie es $R = 4$, al rededor de el centro de la serie $x = 3$, y el dominio de convergencia es $(-1, 7)$.

Otra vía

Determine el radio y dominio de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)4^n}$$

Para determinar el radio y el dominio de convergencia de la serie de potencias dada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)4^n}$$

podemos utilizar la prueba de la razón. La prueba de la razón se basa en el siguiente resultado:
Si tenemos una serie de potencias de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

y calculamos el límite de la razón:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

entonces el radio de convergencia de la serie es:

$$R = \frac{1}{L}$$

Si el límite L existe y es finito. Además, la serie converge absolutamente si $L < 1$ y diverge si $L > 1$.
En este caso, tenemos:

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)4^n}$$

y

$$a_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{1}{(2(n+1)+1)4^{n+1}} = (-1)^{n+2} \frac{1}{(2n+3)4^{n+1}}$$

Ahora, calculemos el límite de la razón:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} \frac{1}{(2n+3)4^{n+1}}}{(-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)4^n}} \right|$$

Simplificamos:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)(2n+1)4^n}{(2n+3)4^{n+1}} \right|$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+1)}{(2n+3)4} \right|$$

Ahora, tomamos el límite:

$$L = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, el radio de convergencia de la serie es:

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{1/4} = 4$$

La serie converge absolutamente si $L < 1$, lo que es cierto en este caso $(1/4 < 1)$. Por lo tanto, la serie de potencias converge absolutamente para x en un intervalo alrededor del punto $x = 3$ cuyo radio es 4. Esto significa que el dominio de convergencia de la serie es el intervalo abierto $(-1, 7)$, ya que la distancia desde 3 hasta el extremo más cercano es 4 unidades en cada dirección.

Desarrollo de Taylor para algunas funciones

El desarrollo de Taylor de una función $f(x)$ alrededor de un punto a se expresa como una serie de potencia:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

1. **Función Exponencial** (e^x) en $a = 0$:
El desarrollo de Taylor de e^x alrededor de $a = 0$ (también conocido como la serie de Maclaurin) es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2. **Función Seno** $(\sin(x))$ en $a = 0$:
El desarrollo de Taylor de $\sin(x)$ alrededor de $a = 0$ (serie de Maclaurin) es:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3. **Función Coseno** ($\cos(x)$) en $a = 0$:
El desarrollo de Taylor de $\cos(x)$ alrededor de $a = 0$ (serie de Maclaurin) es:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

4. **Función Logaritmo Natural** ($\ln(x)$) en $a = 1$:
El desarrollo de Taylor de $\ln(x)$ alrededor de $a = 1$ es:

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

5. **Función Tangente Inversa** ($\arctan(x)$) en $a = 0$:
El desarrollo de Taylor de $\arctan(x)$ alrededor de $a = 0$ (serie de Maclaurin) es:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

6. **Función Proporcionalidad Inversa** ($\frac{1}{1-x}$) en $a = 0$:
El desarrollo de Taylor de $\frac{1}{1-x}$ alrededor de $a = 0$ (serie de Maclaurin) es:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Estos son solo algunos ejemplos de desarrollos de Taylor comunes. El desarrollo de Taylor generalmente se utiliza para aproximar funciones alrededor de un punto específico a y puede requerir más términos para una precisión mayor.

Aplicar los desarrollos en serie de las funciones al cálculo de límites

Los desarrollos en serie de Taylor o Maclaurin de las funciones son herramientas útiles para calcular límites de funciones en casos donde la evaluación directa del límite puede ser complicada o inconclusa. Aquí te muestro cómo aplicar estos desarrollos en serie al cálculo de límites:

1. **Identificar el límite a calcular:** Comienza por identificar el límite que deseas calcular. Puede ser un límite de la forma $\lim_{x \to a} f(x)$ donde $f(x)$ es una función y a es un número real.
2. **Verifica si el límite es indeterminado:** Asegúrate de que el límite que estás evaluando es de tipo indeterminado, como $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Si el límite ya es un valor numérico o está bien definido, no necesitas aplicar un desarrollo en serie.
3. **Aplicar el desarrollo en serie:** Utiliza el desarrollo en serie de Taylor o Maclaurin de la función $f(x)$ alrededor del punto a si está disponible. Esto significa que debes expresar $f(x)$ como una serie de potencia centrada en a:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots$$

Dependiendo de la precisión requerida, puedes detenerte en un término específico de la expansión o continuar hasta donde sea necesario.
4. **Sustituir y simplificar:** Reemplaza $f(x)$ en la expresión del límite original con su desarrollo en serie. Esto da como resultado una expresión que involucra términos polinómicos de x alrededor de a. Luego, simplifica la expresión tanto como sea posible.
5. **Evaluar el límite:** Ahora que tienes una expresión simplificada que involucra solo polinomios en x, puedes evaluar el límite directamente sin problemas. Sustituye $x=a$ en la expresión simplificada y obtén el valor del límite.
6. **Interpretación del resultado:** El valor que obtuviste en el paso anterior es el valor del límite. Asegúrate de comprender qué representa este resultado en el contexto del problema original.
Es importante recordar que los desarrollos en serie de Taylor o Maclaurin son aproximaciones y, por lo tanto, cuanto más términos incluyas en la expansión, mayor será la precisión de la aproximación. En algunos casos, solo se necesitarán unos pocos términos para obtener una buena aproximación del límite, mientras que en otros casos, puede ser necesario incluir más términos para obtener una aproximación precisa.

.:Ejemplo ***0.5:.***

Calcular el límite de la función $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ cuando x tiende a 0.

Solución

Primero, recordemos la serie de Taylor de la función $\sin(x)$ alrededor de $x=0$, que calculamos en el ejemplo anterior:

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

Ahora, evaluemos $\frac{\sin(x)}{x}$ en $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots}{x}$$

Podemos simplificar esta expresión dividiendo cada término por x:

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right)$$

Ahora, evaluamos el límite término a término:

$$\lim_{x\to 0}1-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3!}+\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{5!}-\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{7!}+\ldots$$

$$1-0+0-0+\ldots=1$$

Por lo tanto, el límite de $\frac{\sin(x)}{x}$ cuando x tiende a 0 es igual a 1.

.:*Ejemplo* 0.6:.

Calcular el límite de la función $f(x) = e^{-x^2}\cos(x)$ cuando x tiende a 0.

Solución

Para calcular este límite, primero necesitamos las series de Taylor de las funciones e^{-x^2} y $\cos(x)$ alrededor de $x = 0$.
Para e^{-x^2}, la serie de Taylor es:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

Para $\cos(x)$, la serie de Taylor es:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Ahora, multiplicamos estas dos series término a término y evaluamos el límite:

$$\lim_{x\to 0} e^{-x^2}\cos(x) = \lim_{x\to 0}\left[(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots)(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots)\right]$$

Para calcular este límite, multiplicamos las dos series y sumamos los términos:

$$1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{24}x^4 + \ldots$$

Ahora, evaluamos el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{24}x^4 + \ldots\right) = 1$$

Por lo tanto, el límite de $e^{-x^2}\cos(x)$ cuando x tiende a 0 es igual a 1.

Otros ejemplos

.:*Ejemplo* 0.7:.

Calcular el límite de la función $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ cuando x tiende a 0.

Solución

Primero, recordemos la serie de Taylor de $\ln(1+x)$ alrededor de $x = 0$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Ahora, evaluemos $\frac{\ln(1+x)}{x}$ en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots}{x}$$

Podemos simplificar esta expresión dividiendo cada término por x:

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots\right)$$

Ahora, evaluamos el límite término a término:

$$1-\frac{0}{2}+\frac{0}{3}-\frac{0}{4}+\dots=1$$

Por lo tanto, el límite de $\frac{\ln(1+x)}{x}$ cuando x tiende a 0 es igual a 1.

.:*Ejemplo* *0.8*:.

Calcular el límite de la función $f(x)=\frac{\sin^2(x)}{x^2}$ cuando x tiende a 0.

Solución

Primero, recordemos la serie de Taylor de $\sin(x)$ alrededor de $x=0$:

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

Luego, elevamos al cuadrado la serie de Taylor de $\sin(x)$:

$$\sin^2(x)=x^2-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^6}{5!}-\frac{x^8}{7!}+\dots$$

Ahora, evaluemos $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$ en $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^6}{5!}-\frac{x^8}{7!}+\dots}{x^2}$$

Simplificamos esta expresión dividiendo cada término por x^2:

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\dots\right)$$

Evaluamos el límite término a término:

$$1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\dots=\frac{\pi^2}{6}$$

Por lo tanto, el límite de $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$ cuando x tiende a 0 es igual a $\frac{\pi^2}{6}$.

.:*Ejemplo* *0.9*:.

Calcular el límite de la función $f(x)=\ln(\cos(x))$ cuando x tiende a $\frac{\pi}{2}$.

Solución

Primero, recordemos la serie de Taylor de $\cos(x)$ alrededor de $x=\frac{\pi}{2}$:

$$\cos(x)=0-(x-\frac{\pi}{2})+\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!}-\frac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{3!}+\dots$$

Ahora, evaluemos $\ln(\cos(x))$ en $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\left(0 - (x - \frac{\pi}{2}) + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!} - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{3!} + \dots\right)$$

Simplificamos esta expresión:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2 - \frac{1}{3!}(x - \frac{\pi}{2})^3 + \dots\right)$$

Ahora, evaluamos el límite término a término:

$$\ln\left(\frac{1}{2!}(0)^2 - \frac{1}{3!}(0)^3 + \dots\right) = \ln(0)$$

El límite de $\ln(\cos(x))$ cuando x tiende a $\frac{\pi}{2}$ no existe, ya que $\ln(0)$ es una indeterminación.
Estos ejemplos muestran cómo el uso de las series de Taylor puede ayudarte a calcular límites de funciones más complejas alrededor de un punto específico.

Realización de cálculos aproximados.

Para realizar cálculos aproximados con las series de Taylor, sigue estos pasos:
1. **Identifica la función y el punto de expansión:** Comienza por identificar la función $f(x)$ que deseas aproximar y el punto de expansión a. El punto de expansión es el punto alrededor del cual realizarás la aproximación.
2. **Encuentra las derivadas:** Calcula las derivadas sucesivas de la función $f(x)$ hasta el grado necesario. Esto te proporcionará los coeficientes de la serie de Taylor.
3. **Escribe la serie de Taylor:** Utiliza la fórmula general de la serie de Taylor alrededor de a para escribir la aproximación. La fórmula es:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Puedes truncar la serie después de un cierto número de términos si solo necesitas una aproximación hasta cierto grado de precisión.
4. **Sustituye los valores:** Sustituye los valores relevantes en la serie de Taylor. Esto incluye $f(a)$ y las derivadas de f evaluadas en a.
5. **Simplifica:** Simplifica la expresión tanto como sea posible. Esto a menudo implica eliminar términos que sean iguales a cero o que no contribuyan significativamente a la aproximación deseada.
6. **Evalúa la aproximación:** Ahora que tienes una expresión simplificada que aproxima $f(x)$ alrededor de a, puedes usarla para realizar cálculos aproximados. Sustituye el valor de x para el cual deseas realizar la aproximación y calcula el resultado.
7. **Interpreta el resultado:** El valor obtenido es una aproximación de $f(x)$ alrededor de a. Comprende lo que representa este resultado en el contexto de tu problema y cuál es su grado de precisión.
8. **Ajusta la aproximación si es necesario:** Si la aproximación no es lo suficientemente precisa, puedes considerar incluir más términos en la serie de Taylor o utilizar un punto de expansión diferente para mejorar la aproximación.
Es importante recordar que las series de Taylor son aproximaciones y su precisión depende de la cantidad de términos incluidos en la expansión. Cuantos más términos incluyas, mayor será la precisión de la

aproximación, pero también será más compleja. Por lo tanto, es importante equilibrar la precisión deseada con la simplicidad del cálculo.

Ejemplos

1. Calcule con precisión de 4 decimales $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$

   ### Solución

   Para calcular el valor de $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ con una precisión de 4 decimales utilizando el desarrollo de la serie de Taylor de e^x, podemos hacer lo siguiente:

   Primero, recordemos la serie de Taylor de la función e^x alrededor de $x = 0$:

   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

   Luego, evaluaremos esta serie en $x = -\dfrac{1}{4}$, ya que queremos calcular $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$, lo cual es equivalente a $e^{-\frac{1}{4}}$:

   $$e^{-\frac{1}{4}} = 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^4}{4!} + \dots$$

   Calculemos los términos de la serie hasta que obtengamos la precisión deseada de 4 decimales. Para esto, calcularemos términos sucesivos de la serie hasta que el término sea menor que 0.00005, ya que eso asegurará al menos 4 decimales de precisión.

   $$e^{-\frac{1}{4}} \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^4}{4!}$$

   Calculamos cada término por separado:

   $$1 - \frac{1}{4} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^4}{4!} \approx 0.7788$$

   Entonces, $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \approx 0.7788$ con una precisión de 4 decimales.

2. Calcular $\sqrt[3]{5}$ con una precisión de 4 decimales utilizando el desarrollo de la serie de Taylor de $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ alrededor de $x = 0$.

   ### Solución

   La serie de Taylor para $(1 + x)^{\frac{1}{3}}$ alrededor de $x = 0$ es:

   $$(1 + x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \dots$$

Para calcular $\sqrt[3]{5}$, debemos hacer $x = \frac{4}{5}$ en la serie:

$$(1+\frac{4}{5})^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5} - \frac{1}{9}\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{5}{81}\left(\frac{4}{5}\right)^3$$

Realizando los cálculos:

$$(1+\frac{4}{5})^{\frac{1}{3}} \approx 1.7096$$

Por lo tanto, $\sqrt[3]{5} \approx 1.7096$ con una precisión de 4 decimales.

3. Calcular $\ln(2)$ con una precisión de 4 decimales utilizando el desarrollo de la serie de Taylor de $\ln(1+x)$ alrededor de $x = 0$.

Solución

La serie de Taylor para $\ln(1+x)$ alrededor de $x = 0$ es:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

Para calcular $\ln(2)$, debemos hacer $x = 1$ en la serie:

$$\ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{4}\cdot 1^4$$

Realizando los cálculos:

$$\ln(2) \approx 0.6931$$

Por lo tanto, $\ln(2) \approx 0.6931$ con una precisión de 4 decimales.

4. Calcular $\sin(0.1)$ con una precisión de 4 decimales utilizando el desarrollo de la serie de Taylor de $\sin(x)$ alrededor de $x = 0$.

Solución

La serie de Taylor para $\sin(x)$ alrededor de $x = 0$ es:

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots$$

Para calcular $\sin(0.1)$, simplemente hacemos $x = 0.1$ en la serie:

$$\sin(0.1) = 0.1 - \frac{1}{3!}(0.1)^3 + \frac{1}{5!}(0.1)^5 - \frac{1}{7!}(0.1)^7$$

Realizando los cálculos:

$$\sin(0.1) \approx 0.0998$$

Por lo tanto, $\sin(0.1) \approx 0.0998$ con una precisión de 4 decimales.

5. Calcular $\sqrt{8}$ con una precisión de 2 decimales utilizando el desarrollo de la serie de Taylor de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ alrededor de $x = 0$.

Solución

La serie de Taylor para $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ alrededor de $x = 0$ es:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots$$

Para calcular $\sqrt{8}$, debemos hacer $x = 7$ en la serie:

$$(1+7)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 7 - \frac{1}{8} \cdot 7^2 + \frac{1}{16} \cdot 7^3$$

Realizando los cálculos:

$$(1+7)^{\frac{1}{2}} \approx 3.94$$

Por lo tanto, $\sqrt{8} \approx 3.94$ con una precisión de 2 decimales.

6. Calcular $\cos(0.5)$ con una precisión de 2 decimales utilizando el desarrollo de la serie de Taylor de $\cos(x)$ alrededor de $x = 0$.

Solución

La serie de Taylor para $\cos(x)$ alrededor de $x = 0$ es:

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

Para calcular $\cos(0.5)$, simplemente hacemos $x = 0.5$ en la serie:

$$\cos(0.5) = 1 - \frac{1}{2!}(0.5)^2 + \frac{1}{4!}(0.5)^4 - \frac{1}{6!}(0.5)^6$$

Realizando los cálculos:

$$\cos(0.5) \approx 0.8776$$

Por lo tanto, $\cos(0.5) \approx 0.88$ con una precisión de 2 decimales.

Integración aproximada

1. Calcular con error de 10^{-2} el valor de $\displaystyle\int_0^{0.5} \frac{\sin(2x^2)}{x}dx$.

Solución

Para calcular la integral $\displaystyle\int_0^{0.5} \frac{\sin(2x^2)}{x}dx$ con un error de 10^{-2} utilizando el desarrollo en serie de Taylor de $\sin x$, vamos a seguir estos pasos:

Paso 1: Desarrolla la serie de Taylor de $\sin x$ alrededor de $x = 0$. La serie de Taylor es:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Paso 2: Sustituye la serie en la integral:

$$\int_0^{0.5} \frac{\sin(2x^2)}{x}dx = \int_0^{0.5} \frac{\left(2x^2 - \frac{(2x^2)^3}{3!} + \frac{(2x^2)^5}{5!} - \frac{(2x^2)^7}{7!} + \dots\right)}{x}dx$$

Paso 3: Realiza la integral término a término:

$$\int_0^{0.5} 2x - \frac{8x^6}{3!} + \frac{32x^{10}}{5!} - \frac{128x^{14}}{7!} + \dots dx$$

Paso 4: Integra cada término individualmente:

- El primer término se integra como:

$$\int_0^{0.5} 2xdx = x^2\Big|_0^{0.5} = \frac{1}{4}$$

- El segundo término se integra como:

$$-\frac{8}{3!}\int_0^{0.5} x^6dx = -\frac{8}{3!}\cdot\frac{x^7}{7}\Big|_0^{0.5} = -\frac{1}{7!}\left(\frac{1}{2^7} - 0\right) = -\frac{1}{7!\cdot 2^7}$$

- El tercer término se integra como:

$$\frac{32}{5!}\int_0^{0.5} x^{10}dx = \frac{32}{5!}\cdot\frac{x^{11}}{11}\Big|_0^{0.5} = \frac{1}{11\cdot 5!\cdot 2^{11}}\left(\frac{1}{2^5} - 0\right) = \frac{1}{11\cdot 5!\cdot 2^{16}}$$

- Continuaríamos integrando los términos adicionales de manera similar.

Paso 5: Suma los resultados de las integrales:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{7!\cdot 2^7} + \frac{1}{11\cdot 5!\cdot 2^{16}} - \dots$$

Para lograr una precisión de 10^{-2}, podemos calcular los primeros términos y sumarlos:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{7!\cdot 2^7} + \frac{1}{11\cdot 5!\cdot 2^{16}} \approx 0.250878$$

Paso 5: Calcula la suma final y proporciona el resultado. La suma final será la aproximación de la integral con el error especificado.

Por lo tanto, con esta aproximación, la integral

$$\int_0^{0.5} \frac{\sin(2x^2)}{x} dx \approx 0.250878$$

garantiza una precisión de al menos 10^{-2}. Ten en cuenta que esta aproximación se basa en la suma de un número limitado de términos y puede no ser exacta, pero debería ser lo suficientemente precisa para tus necesidades con la precisión requerida.

2. Calcular con un error de 10^{-4} el valor de $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^{x^2}}{x} dx$ utilizando el desarrollo en serie de Taylor de e^x.

Solución

Paso 1: Desarrolla la serie de Taylor de e^x alrededor de $x = 0$. La serie de Taylor es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Paso 2: Sustituye la serie en la integral:

$$\int_0^2 \frac{e^{x^2}}{x} dx = \int_0^2 \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)}{x} dx$$

Paso 3: Realiza la integral término a término:

$$\int_0^2 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots dx$$

Paso 4: Integra cada término individualmente:

- El primer término se integra como:

$$\int_0^2 1dx = x\Big|_0^2 = 2$$

- El segundo término se integra como:

$$\int_0^2 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2$$

- El tercer término se integra como:

$$\int_0^2 \frac{x^2}{2!} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

- El cuarto término se integra como:

$$\int_0^2 \frac{x^3}{3!}dx = \frac{1}{3!}\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Paso 5: Suma los resultados de las integrales:

$$2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \dots$$

Para lograr una precisión de 10^{-4}, podemos calcular los primeros términos y sumarlos:

$$2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \approx 5.33333$$

Paso 6: Calcula la suma final y proporciona el resultado:

Por lo tanto, con esta aproximación, la integral

$$\int_0^2 \frac{e^{x^2}}{x}dx \approx 5.33333$$

garantiza una precisión de al menos 10^{-4}.

3. Calcular con un error de 10^{-5} el valor de $\int_1^3 \frac{\ln x}{x^2}dx$ utilizando el desarrollo en serie de Taylor de $\ln x$.

Solución

Paso 1: Desarrolla la serie de Taylor de $\ln x$ alrededor de $x = 1$. La serie de Taylor es:

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$$

Paso 2: Sustituye la serie en la integral:

$$\int_1^3 \frac{\ln x}{x^2}dx = \int_1^3 \frac{\left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots\right)}{x^2}dx$$

Paso 3: Realiza la integral término a término:

$$\int_1^3 (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots dx$$

Paso 4: Integra cada término individualmente:

- El primer término se integra como:

$$\int_1^3 (x-1)dx = \left.\frac{x^2}{2} - x\right|_1^3 = \frac{9}{2} - 3 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{7}{2}$$

- El segundo término se integra como:

$$\int_1^3 -\frac{(x-1)^2}{2}dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)^3}{3}\bigg|_1^3 = -\frac{1}{6}\left(\frac{8}{3}-0\right) = -\frac{4}{9}$$

- El tercer término se integra como:

$$\int_1^3 \frac{(x-1)^3}{3}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(x-1)^4}{4}\bigg|_1^3 = \frac{1}{12}\left(\frac{64}{4}-0\right) = \frac{16}{3}$$

- El cuarto término se integra como:

$$\int_1^3 -\frac{(x-1)^4}{4}dx = -\frac{1}{4}\cdot\frac{(x-1)^5}{5}\bigg|_1^3 = -\frac{1}{20}\left(\frac{1024}{5}-0\right) = -\frac{512}{25}$$

Paso 5: Suma los resultados de las integrales:

$$\frac{7}{2}-\frac{4}{9}+\frac{16}{3}-\frac{512}{25}+\dots$$

Para lograr una precisión de 10^{-5}, podemos calcular los primeros términos y sumarlos:

$$\frac{7}{2}-\frac{4}{9}+\frac{16}{3}-\frac{512}{25}\approx 2.03063$$

Paso 6: Calcula la suma final y proporciona el resultado:

Por lo tanto, con esta aproximación, la integral

$$\int_1^3 \frac{\ln x}{x^2}dx \approx 2.03063$$

garantiza una precisión de al menos 10^{-5}.

Conclusiones

Se ha estudiado lo referido a la determinación del radio y dominio de convergencia de una serie de potencias, así como es posible obtener el desarrollo en series de potencias para una función y su aplicación al cálculo aproximado.

Ejericios Propuestos

1. Determine el radio y dominio de convergencia de la serie de potencias:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+3)^n}{n^2}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\sqrt{n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-2)^n}{2^n \cdot n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n^n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^n}{n^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n+3^n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-5)^n}{n^3}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n4^n}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-2)^n}{n^2+1}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n \cdot n!}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+4)^n}{n2^n}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(2^n+3^n)}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-3)^n}{n^4}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2^n+1)(n+1)!}$

2. Calcular el límite de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \sin(2x)$ cuando x tiende a $\pi/4$.

(b) $f(x) = \ln(1+x)$ cuando x tiende a 0.

(c) $f(x) = \sqrt{x+1}$ cuando x tiende a 3.

(d) $f(x) = \cos(x)e^x$ cuando x tiende a π.

(e) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ cuando x tiende a 0.

(f) $f(x) = \dfrac{e^x-1}{x}$ cuando x tiende a 0.

(g) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x}$ cuando x tiende a $\pi/2$.

(h) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ cuando x tiende a 0.

(i) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ cuando x tiende a 4.

(j) $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{x^2}$ cuando x tiende a 0.

Bibliografía

1. Cálculo con Geometría Analítica, Tomo II. Earl W. Swokowski.
2. Calculus Volumen 1. Tom M. Apostol
3. Matemáticas Superiores en Ejercicios y Problemas. Parte 2, P. E. Dankó y Otros.