Matemática I

Encuentro 6:

Matrices. Operaciones. Determinante. Rango e Inversa

Profesor: Ing. Raly Martínez Porra *(raly@unica.cu)*

Sumario:

1. Matrices. Diferentes tipos de matrices.
2. Operaciones con matrices: suma, multiplicación, multiplicación por un escalar.

Sumario:

3. Determinantes. Propiedades.

4. Dependencia lineal entre filas (columnas). Rango de una Matriz.

5. Inversa de una matriz

Objetivo

1. Identificar el concepto de matriz, sus operaciones y propiedades.

Introducción

¿Qué es una matriz?

Algunos significados de Matriz

1. En programación (arrays) es un conjunto de variables del mismo tipo cuyo acceso se realiza por índices.
2. En geografía una ciudad portuguesa en la región de Borba.
3. En geología, material instercial o que rodea a otras partículas.
4. En Matemáticas arreglo rectangular de números o bien de elementos de un álgebra. Los elementos de las matrices están divididos en columnas y filas.

Desarrollo

Definición:

Llamaremos matriz de m filas y n columnas a toda tabla rectangular de números dispuestos en m filas horizontales y n columnas verticales, en la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- A los números a_{ij} les llamaremos coeficientes de la matriz.

- El número a_{ij} es el (i, j)-ésimo elemento de A y está situado en la fila i, columna j.

- Si la matriz tiene m filas y n columnas diremos que es una matriz de tamaño mxn.

- Si $m=n$ diremos que es una matriz cuadrada de orden n.

Propiedades:

- La diagonal de la matriz cuadrada donde están los elementos de la forma a_{ii} se le conoce como diagonal principal.

- Si en una matriz cuadrada de orden *n* todos los elementos de la diagonal principal son iguales a *1* y el resto son *ceros*, se dice que es una *matriz identidad o idéntica* de orden *n*.

Ejemplos de matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{2x2}$$ es una matriz cuadrada de orden 2.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{3x1}$$ es una matriz columna.

Ejemplos de matrices:

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{1x3}$ es una matriz fila.

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ Esta es una matriz simétrica de orden 3.

Ejemplos de matrices:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ es matriz nula de orden 2.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4x3}$$ es la matriz nula de tamaño 4x3.

Casos particulares de matrices:

Triangular superior:

Si A es una matriz cuadrada cuyos elementos son a_{ij}, entonces su diagonal principal estará formada por los a_{ii}. La matriz A es *triangular superior* si todos los elementos debajo de la diagonal principal son cero.

Casos particulares de matrices:

Triangular superior [Ejemplo]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Casos particulares de matrices:

Triangular inferior:

Si A es una matriz cuadrada cuyos elementos son a_{ij}, entonces su diagonal principal estará formada por los a_{ii}. La matriz A es *triangular inferior* si todos los elementos encima de la diagonal principal son cero.

Casos particulares de matrices:

Triangular inferior [Ejemplo]:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Casos particulares de matrices:

Matriz diagonal:

A es diagonal si todos los elementos arriba y debajo de la diagonal principal son *cero*.

Casos particulares de matrices:

Matriz diagonal [Ejemplo]:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Casos particulares de matrices:

Matriz escalar:

A es escalar si es diagonal y todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Casos particulares de matrices:

Matriz escalar [Ejemplo]:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Casos particulares de matrices:

Matriz traspuesta:

Dada una matriz $A=(a_{ij})$ de orden mxn la traspuesta de A, que se denota A^t, es la matriz que se obtiene poniendo las filas como columnas.

Casos particulares de matrices:

Matriz traspuesta [Ejemplo]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -6 & 8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualdad de matrices

Dos matrices A=$(a_{ij})_{nxm}$ y B=$(b_{ij})_{nxm}$ del mismo tamaño son iguales si $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i \; \forall j$.

[Ejemplo]:

$A = \begin{pmatrix} sen\ 90^\circ & sen\ 0 \\ \cos 90^\circ & \cos 0 \end{pmatrix}$ Es igual a $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Operaciones con matrices

Suma entre dos matrices

Producto de un escalar por una matriz

Producto entre dos matrices

Operaciones con matrices

- Denotemos por M_{mxn} al conjunto de todas las matrices de tamaño mxn con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Operaciones con matrices

Suma entre dos matrices:

Sean $A=(a_{ij})_{mxn}$ y $B=(b_{ij})_{mxn}$ dos matrices del mismo tamaño. Entonces la suma de A y B, que denotaremos por A+B, es también una matriz de tamaño mxn, definida por $A+B= (c_{ij})_{mxn}$, donde:

$c_{ij} =a_{ij} +b_{ij}$ para todo i y j .

Operaciones con matrices

Suma entre dos matrices [Ejemplo]:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & -5 & -9 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Producto de un escalar por una matriz:

Dado $\propto \in \mathbb{R}$ y $A = (a_{ij})$ *mxn* , se llama producto de $\propto$ por la matriz A a la matriz $\propto$.A de orden *mxn* tal que:

$$\propto \cdot A = (\propto \cdot a_{ij}) mxn \ \ \forall i \ y \ \forall j$$

Operaciones con matrices

Producto de un escalar por una matriz

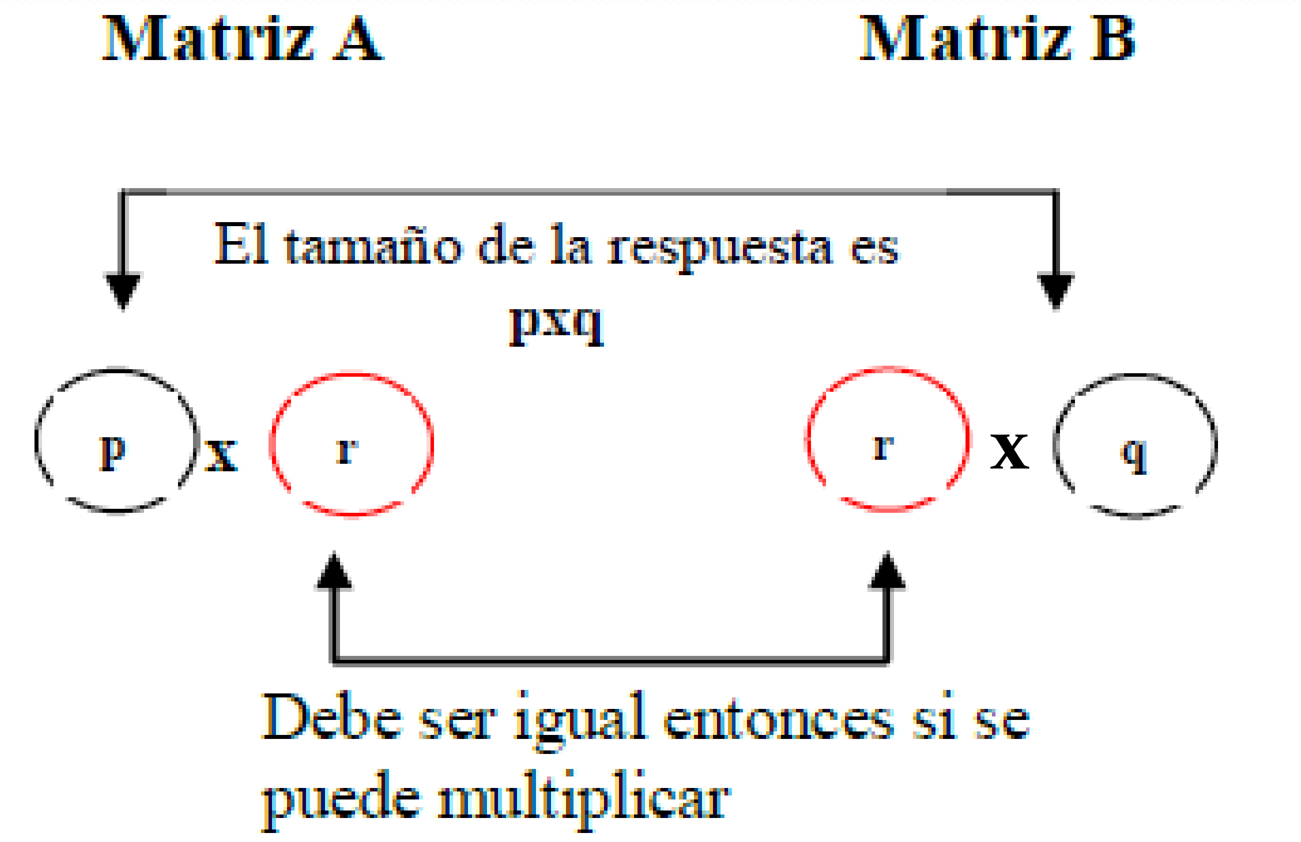
[Ejemplo]:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad \alpha = -2$$

$$\alpha\ A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ -4 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Producto entre dos matrices:



Operaciones con matrices

Producto entre dos matrices [Ejemplo]:

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [(0\cdot 6)+(1\cdot 9)+(2\cdot 12)] & - \\ - & - \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{33} & - \\ - & - \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Producto entre dos matrices [Ejemplo]:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 36 & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 36 & 39 \\ & & \end{bmatrix}$$

Operaciones con matrices

Ejercicio:

Termine de realizar la multiplicación del ejemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 36 & 39 \\ & & \end{bmatrix}$$

Resumen

- ¿Qué es una matriz?

- Mencione algunos tipos de matrices.

- ¿A qué llamamos tamaño de una matriz?

- ¿Cuándo decimos que una matriz es cuadrada?

- ¿Cómo se define la suma de matrices? ¿Cuándo dos matrices pueden sumarse?

- ¿Qué propiedades satisface la suma de matrices?

Resumen

- ¿Cómo se define la multiplicación de un escalar por una matriz?

- ¿Qué propiedades satisface la multiplicación de un escalar por una matriz?

- ¿Cómo se define la multiplicación de matrices?

- ¿Cuándo dos matrices pueden multiplicarse?

- ¿Qué propiedades satisface la multiplicación de matrices?

Determinante de orden 1:

El determinante de una matriz de orden *1*, formada por el número real ***a*** es el propio número ***a***.

Determinante de orden 1[Ejemplo]:

Dada la matriz de orden 1:

$$A=[3]$$

calcular el determinante de A.

R/:

$|A|=3$

Determinantes de orden 2:

Dada la matriz de orden 2:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

La expresión $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ se le llama, por **definición** determinante y se denota como |A|

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{a_{11}a_{22}} - \boxed{a_{12}a_{21}} = |A|$$

Determinantes de orden 2[Ejemplo]:

Dada la matriz de orden 2:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calcular el determinante de A.

R/:

$|A|=[2\cdot(-1)]-[(-3)\cdot 1]=1$

Determinante de la matriz A

Determinantes de orden 3:

Dada la matriz de orden 3:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

la expresión:

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}$$

es el determinante de la matriz A

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| \Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & + & + \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. \\ \begin{array}{ccc} - & - & - \end{array} \end{array}$$

Determinantes de orden 3[Ejemplo]:

Dada la matriz de orden 3:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

calcular el determinante de A.

R/: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$|A|=[1\cdot1\cdot3]+[(-2)\cdot3\cdot2]+[1\cdot0\cdot1]-[(-2)\cdot0\cdot3]-[1\cdot3\cdot1]-[1\cdot1\cdot2]$

$|A| = \boldsymbol{-14}$

Determinantes de orden n:

Métodos para calcular determinantes:

•*Método de Sarrus(*)*

•*Método de desarrollo en menores*

(*)El método de Sarrus fue el que utilizamos en las matrices de orden 3, solo sirve para ese orden.

Determinantes de orden n:

Menor de un elemento en una matriz

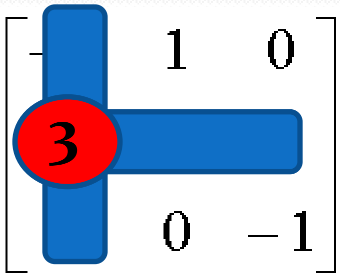
Sea A una matriz cuadrada de orden n y a_{ik} un elemento de dicha matriz, se llama menor del elemento a_{ik} al determinante de orden n-1 que resulta de suprimir en A la fila i y la columna k, y se denota como M_{ik}.

Menor de un elemento en una matriz

[Ejemplo]:

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

El menor M_{21} del elemento a_{21} de la fila 2 columna 1 será:



$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1$$

Determinantes de orden n:

Complemento algebraico o cofactor:

Se denomina complemento algebraico o cofactor de un elemento a_{ik} de una matriz A, al menor M_{ik} correspondiente a dicho elemento precedido del signo $(-1)^{i+k}$, y se denota como C_{ik}, entonces:

$$C_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$$

Complemento algebraico o cofactor:

[Ejemplo]:

Hallemos el cofactor del elemento a_{21} del ejemplo anterior:

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1) = 1$$

Método de desarrollo en menores

El *determinante* de una matriz cuadrada *A* de orden *n* es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquiera de sus columnas (o filas) por los correspondientes complementos algebraicos.

PD: Para facilitar el trabajo siempre escogeremos la fila o columna con mayor cantidad de *ceros*.

Método de desarrollo en menores

[Ejemplo]:

Dada la matriz A= $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

calcular el determinante de A utilizando el método de los menores.

Método de desarrollo en menores

R/:

Fila con mayor cantidad de ceros

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

1

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

2

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+4} \cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Método de desarrollo en menores

$$\Rightarrow (-1)^{1+1}\cdot 1\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}\cdot 2\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

Seguir en sus libretas

Rango de una matriz:

Combinación lineal entre filas (o columnas):

Sean $F_1, F_2, \ldots\ldots, F_n$ las *n* filas de una matriz *A* y sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ números reales, una combinación lineal de las *n* filas de *A*, es una expresión del tipo

$$\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots\ldots + \alpha_n F_n$$

Si en una matriz *A* se tiene que cualquiera de sus filas se puede escribir como combinación lineal de las demás, es decir, existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ escalares tales que $F_i = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots\ldots + \alpha_n F_n$ decimos que la fila *i* es combinación lineal de las demás.

Rango de una matriz:

Combinación lineal entre filas (o columnas) **[Ejemplo]:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

Como se puede apreciar: $\boldsymbol{f_3 = 2f_1 - 3f_2}$ podemos decir entonces que la ***fila 3*** es una ***combinación lineal*** de las demás.

Rango de una matriz:

Dependencia Lineal entre filas (o columnas):

Se dice que ***k*** filas de una matriz ***A*** son linealmente dependientes ***(L.D),*** si al menos una de ellas se puede expresar como combinación lineal de las demás.

Número máximo de filas o columnas linealmente independientes (L.I):

Se dice que el número máximo de filas o columnas ***L.I*** de una matriz es ***k***, si existen ***k*** filas o columnas en ***A L.I*** y cualquier otra fila o columna de ***A*** se puede expresar como combinación lineal de las ***k*** filas o columnas ***L.I*** de ***A***

Rango de una matriz:

Dependencia Lineal e Independencia Lineal entre filas (o columnas) [Ejemplo]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

La ***fila 3*** es una ***combinación lineal*** de las demás, por tanto podemos decir que las filas de ***A*** son ***L.D***, y al mismo tiempo que las filas ***1*** y ***2*** son ***L.I***.

Rango de una matriz:

Definición de rango de una matriz:

El rango de una matriz ***A*** es el número máximo de filas o columnas ***L.I*** de ***A*** y lo denotaremos como ***r(A).***

Retomando el ejemplo anterior podemos decir que el número máximo de filas o columnas ***L.I*** de ***A*** es **2**, por tanto el rango de ***A*** es **2** también, ***r(A) = 2***.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & -6 \end{pmatrix} \qquad f_3 = 2f_1 - 3f_2$$

Rango de una matriz:

Utilizando la **matriz escalón:**

El ***rango de una matriz escalón*** es igual a la cantidad de filas con elementos no todos nulos de la matriz.

Rango de una matriz:

Utilizando la **matriz escalón [Ejemplo]:**

Dadas las matrices escalón siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\0 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 4\\0 & 1 & -5 & 3\\0 & 0 & -2 & 1\\0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\0 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$r(A)=2;\quad r(B)=4;\quad r(C)=2;\quad r(D)=2$$

Matriz Inversa

Definición de matriz inversible

Una matriz cuadrada A es inversible, si existe otra matriz cuadrada B que conmuta con A y que cumple que $AB = BA = I$.

Ver ejemplo 1 de la página 135 del libro.

Matriz Inversa

Teorema

Una condición necesaria y suficiente para que una matriz A sea inversible es que A sea no singular.

Las matrices singulares son las que tienen determinante igual a 0.

Matriz Inversa

Definición de matriz inversa

La matriz inversa de una matriz A inversible es una matriz A^{-1} que cumple que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Matriz Inversa

Teorema

La matriz inversa de una matriz cuadrada A si existe es **única.**

Concluir:

1. Sólo las matrices cuadradas no singulares son inversibles
2. Si A es inversible, $|A| \neq 0$
3. Si A es inversible, A^{-1} es única

Matriz Inversa

Definición de matriz adjunta

La matriz adjunta de una matriz cuadrada A, es otra matriz cuadrada que denotamos por: A^+
y que es la matriz traspuesta de la matriz formada por los cofactores de los coeficientes de A.

Matriz Inversa

Ejemplo de matriz adjunta

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, encontrar $\mathbf{A}^{+}$.

Matriz Inversa

Ejemplo de matriz adjunta

Primero debemos hallar los cofactores de A:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad C_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad C_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Matriz Inversa

Ejemplo de matriz adjunta

Entonces la matriz de cofactores sería:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz adjunta es la traspuesta:

$$A^{+} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz Inversa

Propiedades de la matriz adjunta

1. $kA\ ^{+} = k^{n-1}A^{+}$

2. $AB\ ^{+} = B^{+}A^{+}$

3. $AA^{+} = A^{+}A = |A|I$

Matriz Inversa

De la última propiedad se infiere que si $|A| \neq 0$, entonces es posible dividir toda la expresión por $|A|$, lo cuál queda de la siguiente forma:

$$A\frac{A^+}{|A|} = \frac{A^+}{|A|}A = I$$

y aplicando la definición de matriz:

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad \text{se tiene que} \quad A^{-1} = \frac{A^+}{|A|}}$$

Matriz Inversa

Por lo tanto ya tenemos una fórmula para calcular la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{A^{+}}{|A|}$$

Matriz Inversa

Propiedades de la inversa

1. $kA^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

2. $AB^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3. $(A^{-1})^{-1} = A$

4. $(A^{+})^{-1} = (A^{-1})^{+}$

Matriz Inversa

Ejemplo:

Calcule la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Inversa

Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1\ 1\ = -1$$

$$\text{entonces como } A^{-1} = \frac{A^{+}}{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

Ejercicios:

1. Dada las siguientes matrices seleccione las que se pueden sumar y súmelas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicios:

2. Dada las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular:

- A + B
- B – A
- 3(2A + B)

Ejercicios:

3. Dada las siguientes matrices, calcule: [A·B], [A·D], [B·C], [C·B], [D·F], [F·D], [E·A].

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicios:

1. Calcular el rango de cada una de las siguientes matrices. En caso de ser posible, calcular el determinante y la inversa:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 11 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicios:

2. Muestre que la matriz A es su propia inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicios:

3.Encuentre la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejercicios:

4. Dadas las matrices no singulares A, B y C si se cumple que A·B=C

a) Encuentre la matriz B si se conoce que:

A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ C= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) Encuentre la matriz A si se conoce que:

B= $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ C= $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Bibliografía

Libro de texto: Álgebra Lineal, Colectivo de autores.
Páginas: 25 - 39