序(Orderings)

数上的例子

- $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ 整数集合

$$-2 < -1 < 0 < 1 < 2$$

- R 表示所有实数的集合

$$0.5 < \frac{2}{3} < 1 < \sqrt{2} < \pi$$

一个实际例子

- 冰箱有三个参数(V,E,C)，其中V表示容积（升）， E表示耗电量(KWh/24h)，C表示价格（元）。并假设我们总是更喜欢相对容积大、耗电量低、价格低的产品。那么如下几款冰箱相比哪款最有优势？
- I号：　(110, 0.47, 1500)
  II号：(120, 0.47, 1350)
  III号：(100, 0.51, 1400)

一个实际例子

- 冰箱有三个参数(V, E, C)，其中V表示容积（升）， E表示耗电量(KWh/24h)，C表示价格（元）。并假设我们总是更喜欢相对容积大、耗电量低、价格低的产品。那么如下几款冰箱相比哪款最有优势？
- I号： (110, 0.47, 1500)
  II号：(120, 0.47, 1350)
  III号：(100, 0.51, 1400)

一个实际例子

- 冰箱有三个参数(V,E,C)，其中V表示容积（升）， E表示耗电量(KWh/24h)，C表示价格（元）。并假设我们总是更喜欢相对容积大、耗电量低、价格低的产品。那么如下几款冰箱相比哪款最有优势？
- I号：　(110, 0.47, 1500)
  II号：　(120, 0.47, 1350)
  III号：(100, 0.51, 1400)

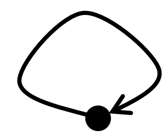
一个实际例子

- 冰箱有三个参数(V, E, C)，其中V表示容积（升），E表示耗电量(KWh/24h)，C表示价格（元）。并假设我们总是更喜欢相对容积大、耗电量低、价格低的产品。那么如下几款冰箱相比哪款最有优势？
- I号：　(110, 0.47, 1500)
  II号：(120, 0.47, 1350)
  III号：(100, 0.51, 1400)

偏序(Partial ordering)

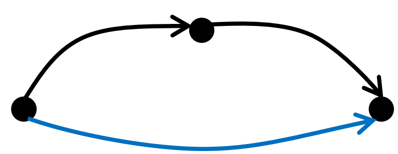
- **偏序(Partial ordering)**：若集合S上的关系R（即：$R \subseteq S \times S$）同时具有自反性、反对称性、传递性，则关系R被称为偏序。

自反(Reflexive)：$(\forall x \in S)\ xRx$



反对称(Anti-symmetric)：$(\forall x, y \in S)\ (xRy \land yRx \rightarrow x = y)$

传递(Transitive)：$(\forall x, y, z \in S)\ (xRy \land yRz \rightarrow xRz)$



符号约定

- 偏序集(S,R): R是集合S上的偏序关系。
- 常用符号
  - 偏序 (Partial ordering): $\preccurlyeq$, $\leq$
  - 严格序(Strict inequality): $\prec$, $<$

    $x \prec y$ 若 $(x \preccurlyeq y)$且$(x \neq y)$
  - 逆序(Reverse inequality): $\succcurlyeq$, $\succ$

    $x \succcurlyeq y$ 若 $y \preccurlyeq x$

线性序

- 集合S上的关系R被称为**线性序**，若R满足：

  相当于S中的任意两个元素可比

  - R是偏序；
  - 对任意S中的元素x, y，都有 $\boxed{xRy \text{ 或 } yRx}$。

线性序举例

- $(N, \leq)$

- $(Z, \leq)$, $(R, \leq)$

（非线性）偏序例子

- 自然数集上的整除关系： $(N, |)$
  $a|b$ 当且仅当存在自然数c, 使得$b = a \times c$。

- 集合A上的子集关系：$(2^A, \subseteq)$。

- 冰箱选择。

一个重要的序

$(S_1, \leq_1), (S_2, \leq_2), \ldots, (S_n, \leq_n)$是$n$个线性序,

$(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$,

n元字典序(Lexicographic ordering)：

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ 当且仅当

- $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$，或
- 存在$i \in \{1,2, \ldots, n\}$ $(\forall\, j < i)\; a_j = b_j$ 且 $a_i <_i b_i$。

例： S_k是 26个英文字母，$\leq_k$是字母序

则 $abcdef \leq_{\text{lex}} abeaay$

一个重要的序

$(S_1, \leq_1), (S_2, \leq_2), \dots, (S_n, \leq_n)$是$n$个线性序，

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$，

n元字典序(Lexicographic ordering)：

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$，或
- 存在$i \in \{1,2, \dots, n\}$ $(\forall\, j < i)\ a_j = b_j$ 且 $a_i <_i b_i$。

n元字典序是线性序。需要证明具有自反、传递，反对称性质。以及任意两个元素之间可比

$$x = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots a_j, \dots, a_n)$$
$$y = (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots b_j, \dots, b_n)$$
$$z = (c_1, c_2, \dots, c_i, \dots c_j, \dots, c_n)$$

$$a_i < b_i = c_i$$

一个重要的序

$(S_1, \leq_1), (S_2, \leq_2), \dots, (S_n, \leq_n)$是$n$个线性序，

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$，

n元字典序(Lexicographic ordering)：
$(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$，或
- 存在$i \in \{1,2, \dots, n\}$ $(\forall\, j < i)\ a_j = b_j$ 且 $a_i <_i b_i$。

n元字典序是线性序。

$$x = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots a_j, \dots, a_n)$$
$$y = (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots b_j, \dots, b_n)$$
$$z = (c_1, c_2, \dots, c_i, \dots c_j, \dots, c_n)$$

$$a_i = b_i < c_i$$

- 立即前元(Immediate predecessor)

对偏序集$(S,\preccurlyeq)$，元素$x,y\in S$，如果以下两个条件成立，称x是y的立即前元：

1. $x \prec y$,
2. $\boxed{\neg(\exists z\in S)(x\prec z\prec y)}$。

用符号$x \lhd y$表示立即前元关系。

- 例：

$(N,|)$

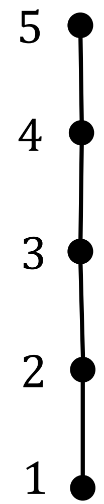
- $2\lhd 4\lhd 8$，但是 2 不是8 的立即前元。（$\lhd$ 不具有传递性）
- $3\lhd 6, 3\lhd 9$
- 对任意素数x,有 $1\lhd x$

（多个元素可能有同一立即前元）

- $2\lhd 10, 5\lhd 10$ （一个元素可能有多个立即前元）

哈斯图(Hasse diagram)

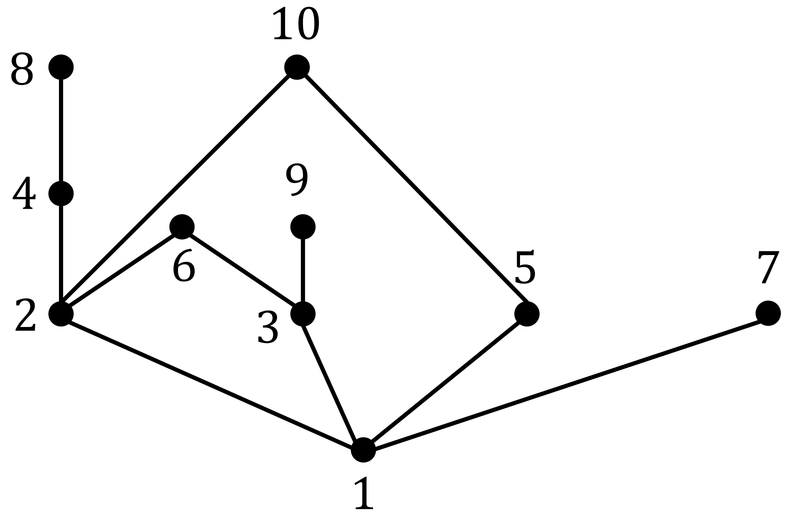
- **哈斯图**：给定偏序集$(S, \preccurlyeq)$， S为有限集
  - 只保留立即前元关系对应的边。
  - 若$x \lhd y$，则代表的y点画在代表x的点的上方。
- 例：
  $(\{1,2,3,4,5\}, \leq)$



哈斯图(Hasse diagram)

- **哈斯图：** 给定偏序集$(S,\preccurlyeq)$， S为有限集
  - 只保留立即前元关系对应的边。
  - 若$x \lhd y$，则代表的y点画在代表x的点的上方。

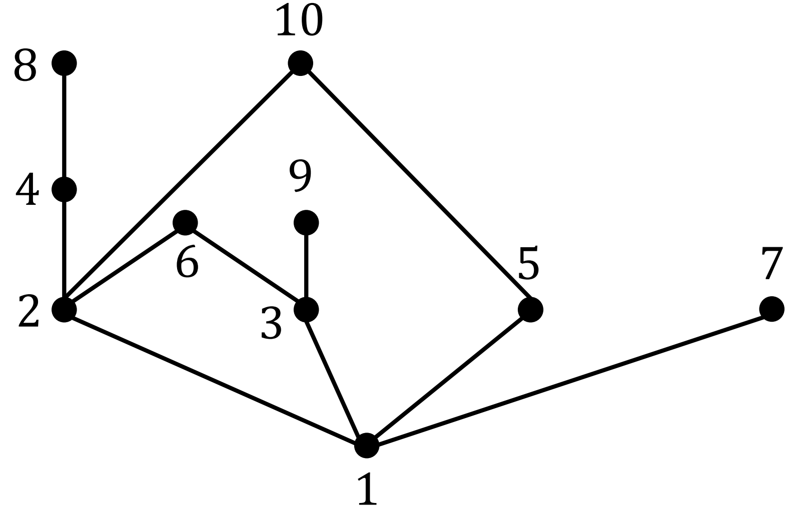
- 例：
  $(\{1,2,\ldots,10\},|)$



极大元/极小元

(Minimal/Maximal element)

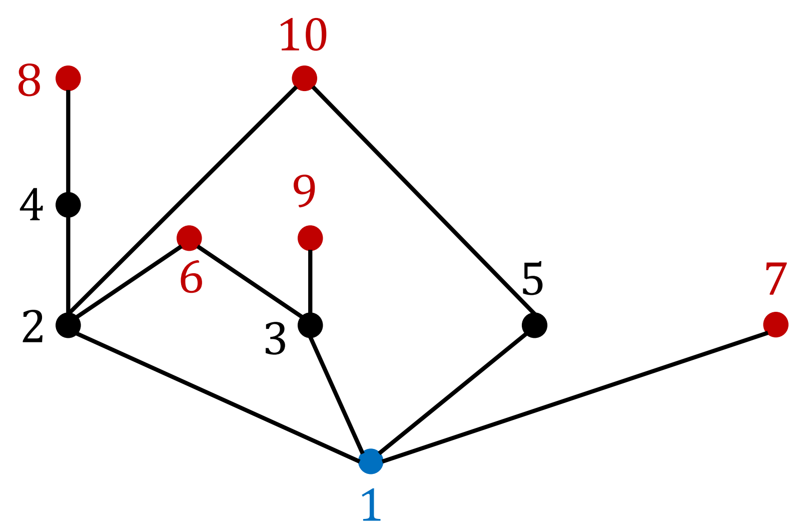
- 偏序集$(S, \preccurlyeq)$，称$a \in S$是此有序集上的
  - 极小元(Minimal element)：如果$\neg(\exists x \in S) x \prec a$;
  - 极大元(Maximal element)：如果$\neg(\exists x \in S) x \succ a$;
- 例：$(\{1,2, \ldots, 10\}, |)$



极大元/极小元

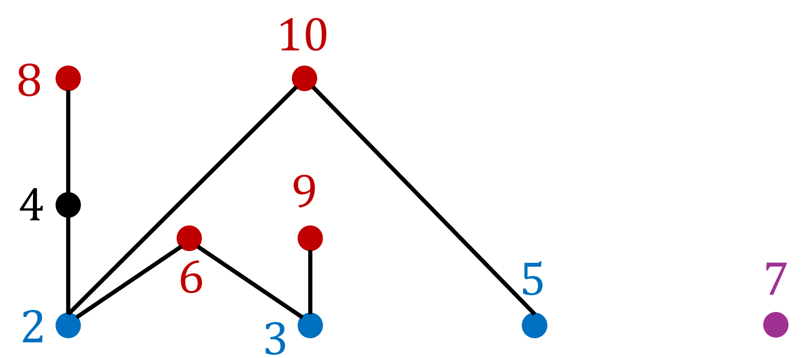
(Minimal/Maximal element)

- 偏序集$(S,\preccurlyeq)$，称$a \in S$是此有序集上的
  - 极小元(Minimal element)：
    如果$\neg(\exists x \in S)x \prec a$;
  - 极大元(Maximal element)：
    如果$\neg(\exists x \in S)x \succ a$;
- 例：
  $(\{1,2,\dots,10\},|)$



极大元/极小元
(Minimal/Maximal element)

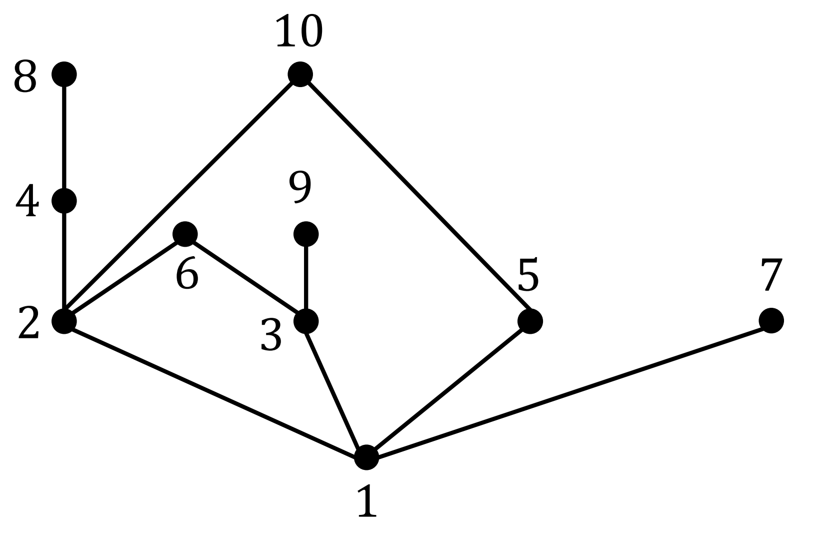
- 偏序集$(S, \preccurlyeq)$，称$a \in S$是此有序集上的
  - 极小元(Minimal element)：
    如果$\neg(\exists x \in S) x \prec a$;
  - 极大元(Maximal element)：
    如果$\neg(\exists x \in S) x \succ a$;
- 例：
  $(\{2, \ldots, 10\}, |)$



最大元/最小元

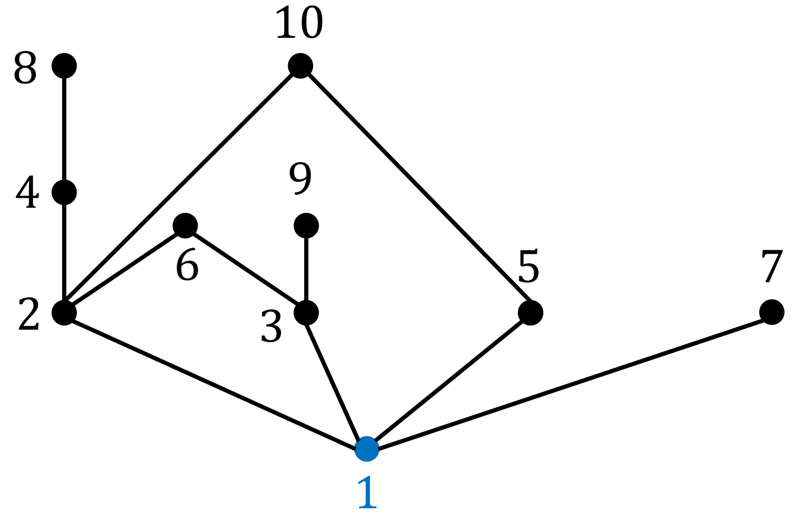
(Smallest/Largest element)

- 偏序集$(S,\preccurlyeq)$，称$a \in S$是此有序集上的
  - 最小元(Smallest element)：
    如果$(\forall x \in S)\ a \preccurlyeq x$;
  - 最大元(Largest element)：
    如果$(\forall x \in S)\ a \succcurlyeq x$;
- 例：
  $(\{1,2,\dots,10\},|)$



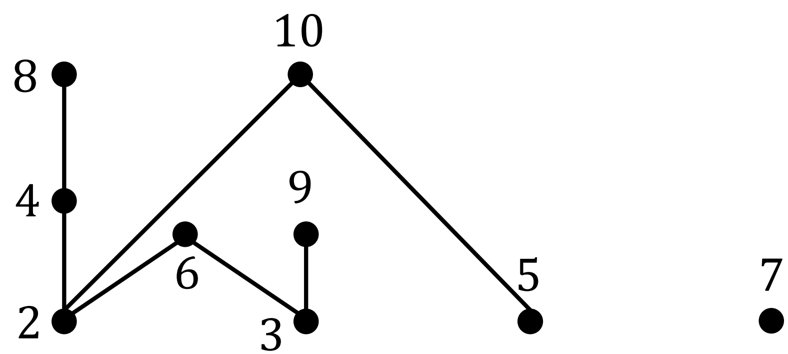
最大元/最小元
(Smallest/Largest element)

- 偏序集$(S,\preccurlyeq)$，称$a\in S$是此有序集上的
  - 最小元(Smallest element)：
    如果$(\forall x\in S)\ a\preccurlyeq x$;
  - 最大元(Largest element)：
    如果$(\forall x\in S)\ a\succcurlyeq x$;
- 例：
  $(\{1,2,\ldots,10\},|)$



最大元/最小元
(Smallest/Largest element)

- 偏序集$(S,\preccurlyeq)$，称$a\in S$是此有序集上的
  - 最小元(Smallest element)：
    如果$(\forall x\in S)\ a\preccurlyeq x$;
  - 最大元(Largest element)：
    如果$(\forall x\in S)\ a\succcurlyeq x$;
- 例：
  $(\{2,\ldots,10\},|)$



- 偏序集$(S, \preccurlyeq)$，称$a \in S$是此有序集上的
  - 极小元(Minimal element)：
    如果$\neg(\exists x \in S) x \prec a$;
  - 极大元(Maximal element)：
    如果$\neg(\exists x \in S) x \succ a$;
- 偏序集$(S, \preccurlyeq)$，称$a \in S$是此有序集上的
  - 最小元(Smallest element)：
    如果$(\forall x \in S)\ a \preccurlyeq x$;
  - 最大元(Largest element)：
    如果$(\forall x \in S)\ a \succcurlyeq x$;

最大元（最小元）必是极大元（极小元），反之不成立。

- 偏序集$(S, \preccurlyeq)$
  - S无限：
    极大元、极小元、最大元、最小元都不一定存在。
    反例：$(Z, \leq)$，$(N, \leq)$
  - S有限：
    最大元、最小元不一定存在。
    极大元、极小元一定存在。

有限偏序必含极小元

- **定理：** 任意有限偏序集$(S, \preccurlyeq)$中存在至少一个极小元。
- 证明：

任意取S中的元素x_0：

情况1：如果x_0是极小元，则定理得证；

情况2：否则，一定能找到$x_1 \prec x_0$。

对x_1重复前述讨论，因为S有限，故情况2必在有限步后不成立。从而情况1成立。

线性扩充定理

- 线性扩充(Linear extensions):对有限偏序集$(S,\preccurlyeq)$,存在一个线性序集$(S,\preccurlyeq')$满足

$$x \preccurlyeq y \rightarrow \ x \preccurlyeq' y.$$

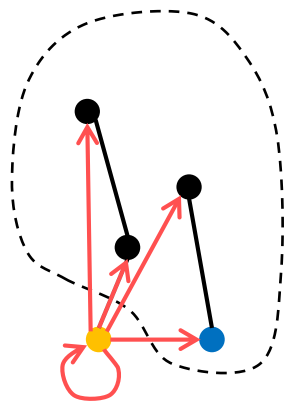
- 证明:（归纳法）
  - $|S| = 1$，$(S,\preccurlyeq') = (S,\preccurlyeq)$。
  - $|S| > 1$：取$(S,\preccurlyeq)$中的一个极小元x_0， $S' = S\backslash\{x_0\}$。

  $(S',\preccurlyeq)$是一个偏序集， 且$|S'| < |S|$。

  根据归纳假设， 存在$(S',\preccurlyeq)$的线性扩充$(S',\preccurlyeq'')$，

  构造$(S,\preccurlyeq')$为：$\boxed{\preccurlyeq' = \preccurlyeq'' \cup \{(x_0,y) \mid y \in S\}}$.

  可证$(S,\preccurlyeq')$是一个线性序。



一般地， 线性扩充不唯一。

总结

- 偏序、线性序
- 哈斯图
- 极大元/极小元，最大元/最小元
- 线性扩充定理