问题求解与实践
——多项式乘法和除法

主讲教师： 陈雨亭、沈艳艳

多项式乘法和除法

- 这里仅考虑一元多项式乘法和除法
- 乘法

  假定两个多项式 $A(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 和 $B(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ 相乘，其结果放到多项式 $C(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_kx^k$ 中
- 除法

  假定两个多项式做除法，$\mathrm{P}(x)=p_0+p_1x+\cdots+p_\mathrm{m}x^m$ 为被除式，$\mathrm{Q}(x)=q_0+q_1x+\cdots+q_nx^n$ 为除式， $\mathrm{T}(x)=t_0+t_1x+\cdots+t_{m\text{-}n}x^{m\text{-}n}$ 为商式，$\mathrm{R}(x)=r_0+r_1x+\cdots+r_kx^k$ 为余式

一元多项式的运算

- 首先需要将多项式存储到计算机中，其次才能谈多项式之间如何运算
- **最直观的方法是**：将多项式对应 $x^0, x^1, \cdots, x^n$ 的系数存储在数组的下标为0,1,⋯,n 的位置中，这样数组的**数据就是系数**，而下标的值**就是指数**

$$1 + 2x + 0x^2 + x^3$$

0	1	2	3
1	2	0	1

- 按这种方式存储，则多项式的加法、减法运算就转化为数组对应项的加减运算。较为复杂的是乘法和除法运算。

一元多项式乘法

已知 $A(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 和 $B(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$

$C(x)=A(x)\times B(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_kx^k$

$A(x)\times B(x)$ 中所有 $A(x)$ 的系数都要和 $B(x)$ 的系数相乘，共有$(m+1)\times(n+1)$ 项，它们是 $a_i\times b_j$，其中 $i=0,1,\cdots\cdots,n$ $j=0,1,\cdots\cdots,m$

```
for( i = 0;  i <= n;  i++ )
    for( j = 0;  j <= m;  j++ )
        得到 a[i]*b[j] 用于计算 C(x) 的系数;
```

一元多项式乘法

显然：$a_i \times b_j$ 作为对应结果中 x^{i+j} 项的系数的一部分，
一定是会累加到结果系数 c_{i+j} 中

于是，可以到到乘法的核心代码：

```
……
for(i=0;i<=m+n;i++)   c[i]=0;       //C(x)最高次项为x^(m+n)
for(i = 0; i <= m; ++i)
{
        for(j = 0; j <= n; ++j)
        {
            c[i+j]=a[i]*b[j]+c[i+j];
        }
}
```

一元多项式除法

◆一元多项式除法可仿照整数的竖式除法，用减法实现带余项的除法

被除式 x^3-3x^2-x-1

除式 $3x^2-2x+1$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & & & \frac{1}{3}x & -\frac{7}{9} \\ \cline{2-5}
3x^2-2x+1 & x^3 & -3x^2 & -x & -1 \\
 & x^3 & -\frac{2}{3}x^2 & +\frac{1}{3}x & \\ \cline{2-4}
 & & -\frac{7}{3}x^2 & -\frac{4}{3}x & -1 \\
 & & -\frac{7}{3}x^2 & +\frac{14}{9}x & -\frac{7}{9} \\ \cline{3-5}
 & & & -\frac{26}{9}x & -\frac{2}{9}
\end{array}
$$

一元多项式除法

转化为数组时执行过程

$$
\begin{array}{r|llll}
 & & & \frac{1}{3}x & -\frac{7}{9} \\ \hline
3x^2-2x+1 & x^3 & -3x^2 & -x & -1 \\
 & x^3 & -\frac{2}{3}x^2 & +\frac{1}{3}x & \\ \hline
 & & -\frac{7}{3}x^2 & -\frac{4}{3}x & -1 \\
 & & -\frac{7}{3}x^2 & +\frac{14}{9}x & -\frac{7}{9} \\ \hline
 & & & -\frac{26}{9}x & -\frac{2}{9}
\end{array}
$$

1	0
1/3	

2	1	0
3	-2	1

3	2	1	0
1	-3	-1	-1
1	-2/3	1/3	
0	-7/3	-4/3	-1

一元多项式除法

转化为数组时执行过程

$$
\begin{array}{r}
\frac{1}{3}x - \frac{7}{9} \\
3x^2 - 2x + 1 \,\big)\, x^3 - 3x^2 - x - 1 \\
x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x \\
\hline
-\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 \\
-\frac{7}{3}x^2 + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9} \\
\hline
-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}
\end{array}
$$

1	0
1/3	-7/9

2	1	0
3	-2	1

3	2	1	0
0	0	-26/9	-2/9
	-7/3	14/9	-7/9
0	0	-26/9	-2/9

结果:

被除式 $x^3 - 3x^2 - x - 1$ ⇒ 余式 $-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$

除式 $3x^2 - 2x + 1$

商式 $\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$

一元多项式除法

核心代码

被除式 x^3-3x^2-x-1 m=3

除式 $3x^2-2x+1$ n=2

商式 $\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$ m-n=1

余式 $-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$

```
……
//商式 T(x) 最高次项为x^(m-n)
for( i = m-n;  i>=0;  i-- )
{
    T[i] = P[i+n]/Q[n];          // 商式系数
    for(j = n; j >= 0; j--)
    {
        P[i+j]=P[i+j]-Q[j]*T[i];
    }
}
```

正确性：考察 i=m-n, j=n 时，P[i+j]在内部循环中恰好为 P[m]， P[m-1]，……， P[m-n]