问题求解与实践
——线性方程组求解

主讲教师： 陈雨亭、沈艳艳

线性方程组求解

设线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 可逆且主对角元素 $a_{00},a_{11},\cdots,a_{(n-1)(n-1)}$ 均不为零，求解 x

- **迭代法**

  雅克比迭代、松弛迭代等

- **解析法**

  高斯消去法、行列式法等

雅克比迭代法

◆ 数学原理

$Ax=b$ 的系数矩阵 A 对角元素均不为零，将 A 分解成：$A=(A-D)+D$

这里 $D=\begin{bmatrix} a_{00} & & & \\ & a_{11} & & \\ & & \cdots & \\ & & & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$

从而原方程可写成：$Dx=(D-A)x+b \Rightarrow x=(I-D^{-1}A)x+D^{-1}b$

于是有雅克比迭代式：$x^{(k+1)}=(I-D^{-1}A)x^{(k)}+D^{-1}b$

$x^{(0)}=(x_0{}^{(0)},x_1{}^{(0)},\cdots,x_{n\text{-}1}{}^{(0)})^T$ 为初始向量

写成分量的形式：$x_i{}^{(k+1)}=\dfrac{1}{a_{ii}}[b_i-\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1}a_{ij}x_j{}^{(k)}]\quad i=0,1,\cdots,n-1$

雅克比迭代法

◆ 关键代码分析

设系数存放于二维数组a[][]，常数项存放于数组b[]，根据下面公式编程：

$$x_i^{(k+1)} = \boxed{\frac{1}{a_{ii}}[b_i - \boxed{\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n-1} a_{ij} x_j^{(k)}}]}$$

```
//前一次近似解存放在数组x2[]中
//本次近似解存放在数组x[]中
for( i=0; i<n; i++)  {
    tmp=0.0;
    for(j=0;  j<n;   j++)  {
        if(j==i) continue;
        tmp+=a[i][j]*x2[j];
    }
    x[i]=(b[i]-tmp)/a[i][i];
}
```

i 对应 x_i

高斯消去法

高斯消去法就是利用初等变换将矩阵A化为上三角形式，然后利用回代法求此三角阵的解。

也就是将线性方程组转化为下面的形式：

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

回代求解：

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)} \Big/ a_{nn}^{(n)} \\ x_i = \left(b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j\right) \Big/ a_{ii}^{(i)} \qquad (i = n-1, \cdots, 2, 1) \end{cases}$$

高斯消去法

处理第 i 行

```
for(i=1; i<n; i++)
{
    temp=A[i][0]/A[0][0];
    for(j=0; j<n; j++)
    {
        A[i][j]=A[i][j]-temp*A[0][j];
    }
    b[i]=b[i]-temp*b[0];
}
```

第 i 行 – 第 0 行*$\boldsymbol{a_{i0}/a_{00}}$

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \cdots & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-10} & a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}$$

高斯消去法

处理第 *i* 行

第 i 行 – 第 1 行$*\boldsymbol{a_{i1}/a_{11}}$

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \cdots & a_{0n-1} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}$$

```
for(i=2; i<n; i++)
{
    temp=A[i][1]/A[1][1];
    for(j=1; j<n; j++)
    {
        A[i][j]=A[i][j]-temp*A[1][j];
    }
    b[i]=b[i]-temp*b[1];
}
```

高斯消去法

```
for(i=1; i<n; i++)  {
    temp=A[i][0]/A[0][0];
    for(j=0; j<n; j++)  {  A[i][j]=A[i][j]-temp*A[0][j];   }
    b[i]=b[i]-temp*b[0];
}
```

$$\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# \end{bmatrix}$$

```
for(i=2; i<n; i++)  {
    temp=A[i][1]/A[1][1];
    for(j=1; j<n; j++)  {  A[i][j]=A[i][j]-temp*A[1][j];   }
    b[i]=b[i]-temp*b[1];
}
```

$$\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# \\ 0 & 0 & \# & \# \\ 0 & 0 & \# & \# \end{bmatrix}$$

```
for(i=3; i<n; i++) {
    temp=A[i][2]/A[2][2];
    for(j=2; j<n; j++)   { A[i][j]=A[i][j]-temp*A[2][j];   }
    b[i]=b[i]-temp*b[2];
}
```

$$\begin{bmatrix} \# & \# & \# & \# \\ 0 & \# & \# & \# \\ 0 & 0 & \# & \# \\ 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}$$

高斯消去法

```
for(k=0;k<n-1;k++)
{
    // 若有选主元的步骤，可以添加在此处
    if(!A[k][k])    return -1;
    //消去过程
    for(i=k+1;i<n;i++)
    {
        temp=A[i][k]/A[k][k];
        for(j=k;j<n;j++)
        {  A[i][j]=A[i][j]-temp*A[k][j];     }
        b[i]=b[i]-temp*b[k];
    }
}
```

$a_{k+1k}, a_{k+2k}, \cdots, a_{(n-1)k}$

清零