问题求解与实践——多项式乘法和除法

主讲教师: 陈雨亭、沈艳艳

多项式乘法和除法

- 这里仅考虑一元多项式乘法和除法
- 乘法

假定两个多项式 $A(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ 和 $B(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ 相乘, 其结果放到多项式 $C(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k$ 中

除法

假定两个多项式做除法, $P(x) = p_0 + p_1 x + \dots + p_m x^m$ 为被除式, $Q(x) = q_0 + q_1 x + \dots + q_n x^n$ 为除式, $T(x) = t_0 + t_1 x + \dots + t_{m-n} x^{m-n}$ 为商式, $R(x) = r_0 + r_1 x + \dots + r_k x^k$ 为余式

一元多项式的运算

- ◆ 首先需要将多项式存储到计算机中, 其次才能谈多项式之间如何运算
- ◆ 最直观的方法是: 将多项式对应 x^0, x^1, \dots, x^n 的系数存储在数组的下标为0,1,…,n 的位置中,这样数组的数据就是系数,而下标的值就是指数

$$1 + 2x + Qx^2 + x^3$$

$$1 | 2 | 0 | 1$$

◆ 按这种方式存储,则多项式的加法、减法运算就转化为数组对应项的加减运算。较为复杂的是乘法和除法运算。

一元多项式乘法

已知
$$A(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$
 和 $B(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ $C(x) = A(x) \times B(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k$

 $A(x) \times B(x)$ 中所有 A(x) 的系数都要和 B(x) 的系数相乘,共有 $(m+1) \times (n+1)$ 项,它们是 $a_i \times b_j$,其中 $i=0,1,\dots,n$ $j=0,1,\dots,m$

一元多项式乘法

显然: $a_i \times b_j$ 作为对应结果中 x^{i+j} 项的系数的一部分,一定是会累加到结果系数 c_{i+j} 中

于是,可以到到乘法的核心代码:

```
for(i=0;i<=m+n;i++) c[i]=0; //C(x)最高次项为x<sup>m+n</sup>
for(i = 0; i <= m; ++i)
{
    for(j = 0; j <= n; ++j)
    {
        c[i+j]=a[i]*b[j]+c[i+j];
    }
}
```

◆一元多项式除法可仿照整数的竖式除法,用减法实现带余项的除法

被除式
$$x^3 - 3x^2 - x - 1$$

除式
$$3x^2 - 2x + 1$$

$$\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$$

$$3x^{2} - 2x + 1 \overline{\smash)}x^{3} - 3x^{2} - x - 1$$

$$x^{3} - \frac{2}{3}x^{2} + \frac{1}{3}x$$

$$-\frac{7}{3}x^{2} - \frac{4}{3}x - 1$$

$$-\frac{7}{3}x^{2} + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9}$$

$$-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$$

■ 转化为数组时执行过程

$$\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$$

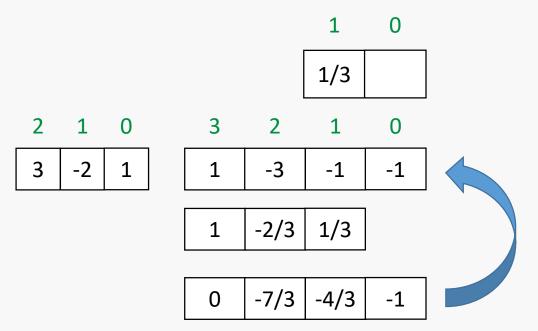
$$3x^{2} - 2x + 1)x^{3} - 3x^{2} - x - 1$$

$$x^{3} - \frac{2}{3}x^{2} + \frac{1}{3}x$$

$$-\frac{7}{3}x^{2} - \frac{4}{3}x - 1$$

$$-\frac{7}{3}x^{2} + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9}$$

$$-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$$



■ 转化为数组时执行过程

$$\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$$

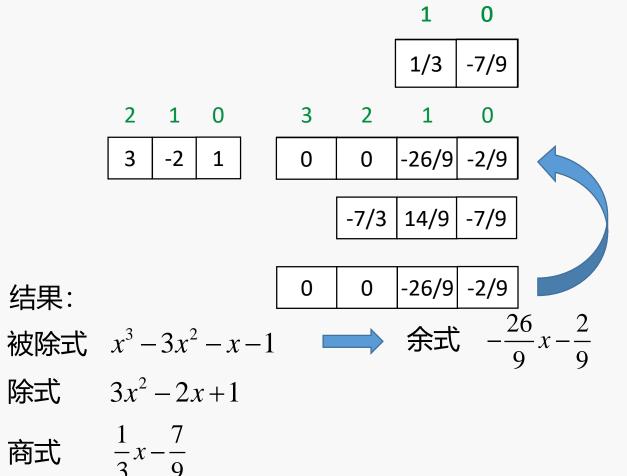
$$3x^{2} - 2x + 1)x^{3} - 3x^{2} - x - 1$$

$$x^{3} - \frac{2}{3}x^{2} + \frac{1}{3}x$$

$$-\frac{7}{3}x^{2} - \frac{4}{3}x - 1$$

$$-\frac{7}{3}x^{2} + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9}$$

$$-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$$



■ 核心代码

```
被除式 x^3 - 3x^2 - x - 1
                            m=3
                                       //商式 T(x) 最高次项为x^{m-n}
                                       for( i = m-n; i > = 0; i--)
除式 3x^2 - 2x + 1
                            n=2
         \frac{1}{3}x - \frac{7}{9}
                            m-n=1
商式
                                                                       // 商式系数
                                             T[i] = P[i+n]/Q[n];
                                             for(j = n; j >= 0; j--)
余式
                                                P[i+j]=P[i+j]-Q[j]*T[i];
```

正确性: 考察 i=m-n, j=n 时, P[i+j]在内部循环中恰好为 P[m], P[m-1],, P[m-n]