2020～2021 学年第二学期期中模拟考试试卷

《高等数学 2B》 (共 4 页，附 2 页草纸)

(考试时间: 2021 年 5 月 7 日 13:30～15:30)

题号	一	二	三	四	五	成绩	核分人签字
得分							

一、选择题 (本题满分 15 分, 每小题 3 分)

1. 设在 $\mathbb{R}^2$ 中有 $f_x'(x,y)<0, f_y'(x,y)>0$, 则在下列条件中使 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 必定成立的是 ( ).

(A) $x_1>x_2, y_1<y_2$ (B) $x_1<x_2, y_1<y_2$

(C) $x_1<x_2, y_1>y_2$ (D) $x_1>x_2, y_1>y_2$

2. 在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中, 与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线 ( ).

(A) 只有一条 (B) 只有两条 (C) 至少有三条 (D) 不存在

3. 设 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x=(\quad)$.

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x-1} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

(B) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

4. 设 L_1 和 L_2 是将原点围在其内的两条光滑简单闭曲线, $\oint_{L_1} \dfrac{2x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=k$, 则 $\oint_{L_2} \dfrac{2x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 的值 ( ).

(A) 不一定等于 k, 其值与曲线 L_2 无关 (B) 一定等于 k

(C) 不一定等于 k, 其值与曲线 L_2 有关 (D) 一定等于 $-k$

5. 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的外侧, $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 4\}$,

$$I=\oiint_{\Sigma} xy^2z^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

则下列各式中不成立的是 ( ).

(A) $I=\dfrac{3}{2}\iint_{\Sigma} x^2y^2z^2\mathrm{d}S$ (B) $I=3\iiint_{\Omega} y^2z^2\mathrm{d}V$

(C) $I=\iiint_{\Omega}\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\mathrm{d}V$ (D) $I=0$

二、填空题 (本题满分 15 分, 每小题 3 分)

1. 已知 $\boldsymbol{A}=xy^2\boldsymbol{i}+y\mathrm{e}^z\boldsymbol{j}+x\ln\left(1+z^2\right)\boldsymbol{k}$, 则 $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{A})|_{(1,1,0)}=$ ______.

2. 设 L 是闭曲线 $|x|+|y|=1$, 则 $\oint_L |x|[1+\sin(xy)]\mathrm{d}s=$ ______.

3. 半椭圆形平面闭区域 $D=\left\{(x,y)\left|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1, y\geqslant 0\right.\right\}$ 上的薄片的质心坐标为 ______.

4. 设 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 介于平面 $z=0$ 和 $z=H$ 之间的部分, 其中 $R,H>0$, 则 $\oiint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}S=$ ______.

5. 微分方程 $\left(3x^2+6xy^2\right)\mathrm{d}x+\left(4y^3+6x^2y\right)\mathrm{d}y=0$ 的通解为 ______.

三、计算题 (本题满分 48 分, 每小题 8 分)

1. 设 $f(x,y)=\int_0^{xy} e^{-t^2}\mathrm{d}t$, 求 $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

2. 计算 $I=\iint\limits_D |\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $y=x, y=0, x=\frac{\pi}{2}$ 围成的闭区域.

3. 设 Ω 是由曲面 $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=2\left(z^2-x^2-y^2\right)$ 所围成的区域在 $z\geqslant 0$ 的部分, 求 $\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}V$.

4. 一质点受力 $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(2xy^2, 2x^2y\right)$ 的作用, 沿平面曲线 $L: x=t, y=t^2$ 从点 $A(1,1)$ 移动到点 $B(2,4)$, 求力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功.

5. 求 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Σ 为 $x^2+y^2=1$ 被 $z=0$ 和 $z=1$ 所截部分在第一卦限内的前侧.

6. 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, 求积分 $\oiint\limits_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x} + \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y} + \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$ 的值.

四、计算题 (本题满分 16 分, 每小题 8 分)

1. 设 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$, 再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段, 计算 $\int_L 3x^2y\mathrm{d}x + \left(x^3+x-2y\right)\mathrm{d}y$.

2. 已知 Σ 是上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a,b,c>0,0\leqslant z\leqslant c)$ 的上侧, 计算

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{\frac{xy^2}{b^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{yz^2}{c^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{zx^2}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}.$$

五、证明题 (本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 是连续函数且其值恒大于零, 又

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)}f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}V}{\iint\limits_{D(t)}f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma},G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)}f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t}f\left(x^2\right)\mathrm{d}x},$$

其中 $\Omega(t)=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\right\},D(t)=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\right\}$.

(1) 讨论函数 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性;

(2) 证明当 $t>0$ 时,$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.