Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Ecole Supérieure Polytechnique

Probabilité – Statistique

Chapitre II : Variables aléatoires

Année universitaire : 2024 – 2025

Objectif

L’objectif de ce chapitre est de donner à l’étudiant les outils nécessaires pour comprendre la notion de variable aléatoire et calculer les paramètres caractéristiques d'une variable aléatoire et/ou d'un couple de variables aléatoires.

L’étudiant sera en mesure de :

- ✓ définir une variable aléatoire
- ✓ évaluer des probabilités sur une variable aléatoire discrète et une variable aléatoir continue
- ✓ calculer et interpréter l’espérance et la variance d’une variable aléatoire
- ✓ ….

Plan

I — Variables aléatoires discrètes

II — Variables aléatoires continues

Plan

I

Variables aléatoires discrètes

I.1. Définitions

I.2. Fonction de répartition

I.3. Couple de variables aléatoires

I.4. Notion de moment, variance et écart-type

I.5. Covariance et coefficient de corrélation linéaire

I.1. Définitions

Une variable aléatoire (v.a.) X est une fonction définie sur l'espace fondamental Ω, qui associe une valeur numérique à chaque résultat de l'expérience aléatoire étudiée. Ainsi, à chaque événement élémentaire ω, on associe un nombre X(ω).

v.a discrète : v.a. dont les différentes valeurs sont finies ou infinies dénombrables.

Exemple 1 : On lance un dé équilibré. Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

On cherche la probabilité de l'événement X ≤ 2.

Posons X la variable aléatoire qui donne le nombre de points sur la face du dé. Puisque la v.a. est une fonction de Ω vers les nombres réels, il faut définir l'association pour toutes les valeurs de Ω : X(1) = 1, X(2) = 2, …, X(6) = 6.

L'événement X ≤ 2 correspond aux valeurs 1 et 2, donc $P(X \leq 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

I.2. Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une v.a. X à valeurs dans un ensemble $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ est la fonction, notée F_x, qui à tout réel x associe la probabilité que X prenne une valeur inférieure ou égale à x :

$$F(X) : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \to P(X \leq x) \end{cases}$$

$$F(X) = P(X \leq x)$$

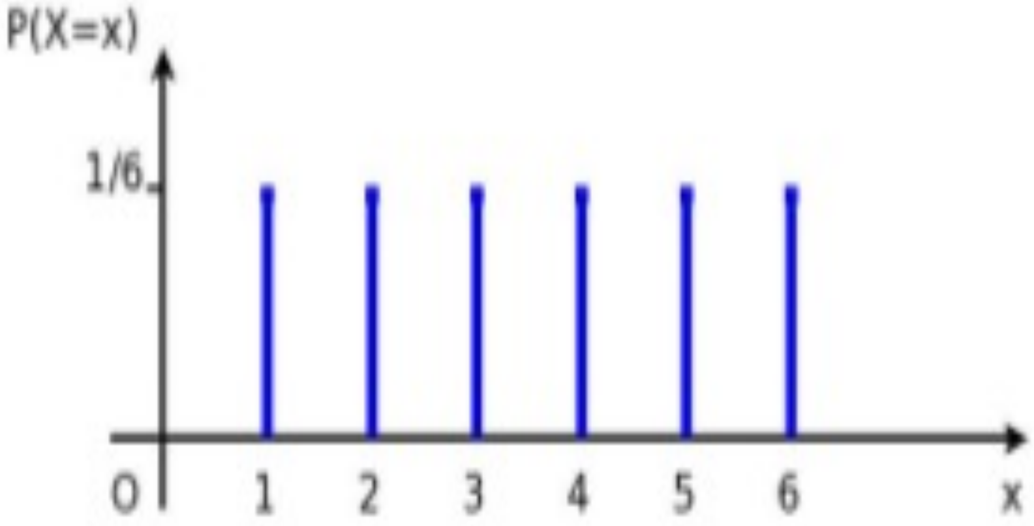
Propriétés

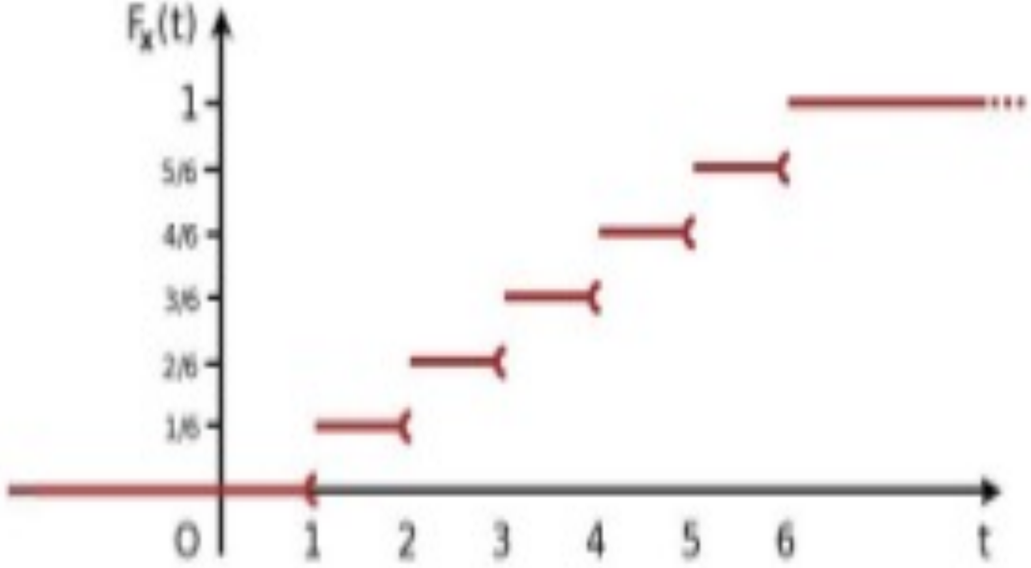
- F(x) est positive et non décroissante : $x_2 \geq x_1 \rightarrow F(x_2) \geq F(x_1)$
- $F(x) \longrightarrow 1$, lorsque $x \longrightarrow +\infty$
- $F(x) \longrightarrow 0$, lorsque $x \longrightarrow -\infty$
- $P(x_1 \leq x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
- $F(x) = P(X \leq x)$

I.2. Fonction de répartition

Exemple 2: X est le résultat du lancer d'un dé à 6 faces.

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
P(X = x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
F(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$





I.3. Couple de variables aléatoires

Si X et Y sont 2 v.a. discrètes, on définit la **fonction de probabilité conjointe** de X et Y par :

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P_{ij} = f(x_i, y_j) \qquad X = (x_i)_{i \in I} \; et \; Y = (y_j)_{j \in J}$$

Lois marginales

$$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j \in J} P_{ij} = P_{i.}$$

$$P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i \in I} P_{ij} = P_{.j}$$

Loi conditionnelle

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{P_{ij}}{P_{.j}} = P_i^j$$

Indépendance

$$P(X = x_i / Y = y_j) = P(X = x_i).P(Y = y_j)$$

I.3. Couple de variables aléatoires

Tableau de contingence

Considérons deux familles complètes d'événements (A_1, A_2, …, A_n) et (B_1, B_2, …, B_n)

$$P(A_i \cap B_j) = P_{ij}$$

Tableau de contingence

$$P(A_i) = P_{i.} \ et \ P(B_j) = P_{.j}$$

Image du tableau

B / A	B_1	B_2	
A_1	P_{11}	P_{12}	$P_{1.}$
A_2	P_{21}	P_{22}	$P_{2.}$
A_3	P_{31}	P_{32}	$P_{3.}$
	$P_{.1}$	$P_{.2}$	1

Loi des probabilités totales

$$P(A_i) = \sum_j P(B_j) P(A_i / B_j)$$

A_i et B_j indépendants

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i) . P(B_j)$$

$$P_{ij} = P_{i.} P_{.j}$$

I.3. Couple de variables aléatoires

Tableau de probabilité conjointe

Exemple 3 : jet de deux dés équilibrés. On définit la v.a. X comme le nombre de points amenés par le premier dé et la v.a. Y la somme des points donnés par les deux dés.

Loi de probabilité

X \ Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Loi marginale de X
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0	0	1/6
2	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0	1/6
3	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	1/6
4	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	1/6
5	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	1/6
6	0	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
Loi marginale de Y	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36	**1**

I.4. Notion de moment, variance et écart-type

Théorie de la moyenne

Soit une fonction g(X), X = v.a. discrète. La moyenne de g(X) est définie par :

$$E[g(X)] = \sum_i P_i g(x_i)$$

Si g(X) est l'espérance mathématique, alors : $E[g(X)] = E(X)$

Moment d'ordre 1 $m_1 = E(X) = \sum_i P_i x_i$

La variable aléatoire est centrée si : $\bar{X} = E(X) = 0$

La variable aléatoire est centrée et réduite si : $\bar{X} = E(X) = 0$ et $\sigma(X)$

Moment d'ordre k $m_k = E\left(X^k\right) = \sum_i P_i x_i^k$

I.4. Notion de moment, variance et écart-type

Variance $$V(X) = \sigma_X^2 = E[(X - \bar{X})^2] = E[(X - E(X))^2]$$

$$\sigma_X^2 = \sum_i P_i(x_i - m_1)^2$$

Théorique : $$V(X) = \sigma_X^2 = E[(X^2 - 2XE(X) + E^2(X))] = E(X^2) - m_1^2 = m_2 - m_1^2$$

Changement de variable :

Translation $$\sigma_{X+a}^2 = E\left[\left(X + a - \overline{(X + a)}\right)\right]^2 = E(X - \bar{X})^2 = \sigma_X^2$$

Conclusion : il y a une invariance lorsque $X \to X + a$

Homothétie : $$\sigma_{aX}^2 = E\left[\left(aX - \overline{(aX)}\right)\right]^2 = a^2[E(X^2) - (E(X))^2] = a^2(m_2 - m_1^2) = a^2\sigma_X^2$$

Conclusion : $X \to aX$; $\sigma_{aX}^2 = a^2.\sigma_X^2$

Écart-type $$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

I.4. Notion de moment, variance et écart-type

Exemple 4 : Soit X une variable aléatoire discrète

X	1	2	3	…	n
X^2	1	4	9	…	n^2
P(X)	P	qp	q^2p	…	$q^{n-1}p$

Avec p + q = 1

a) Vérifier que la somme des probabilités est égale à 1

b) Déterminer l'espérance mathématique et l'écart-type de cette v.a.

Solution

a) $0 \leq p \leq 1$ et $0 \leq q \leq 1$

$$\sum_i P_i = p(1 + q + q^2 + \dots) = p\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Lorsque n-> $+\infty$ $\sum_i P_i = 1$

b) $E(X) = p + 2qp + 3q^2p + \dots = p(1 + 2q + 3q^2 + \dots)$

$$= p\frac{d}{dq}(q + q^2 + q^3 + \dots) = p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p\left(\frac{1-q+q}{(1-q)^2}\right) = p\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right) \rightarrow E(X) = \frac{1}{p} = m_1$$

I.4. Notion de moment, variance et écart-type

Exemple 4 : Soit X une variable aléatoire discrète

Solution (suite)

$$\mathrm{E}(X^2) = p(1 + q2^2 + q^2 3^2 + \ \dots) = p(1 + 4q + 9q^2 + \ \dots)$$

$$= \mathrm{p}\frac{d}{dq}(\mathrm{q} + 2q^2 + 3q^3 + \ \dots) = p\frac{d}{dq}\left(q\left(\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1 \ - q}\right)\right)\right)$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{p}\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{(1 \ - q)^2}\right) = p(\frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{p^2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \ \sigma_X^2 = \ m_2 \ - \ m_1^2 \ = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \ \sigma_X^2 = \frac{q}{p^2} \rightarrow \sigma_X = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

I.5. Covariance et Coefficient de corrélation linéaire

X et Y deux variables aléatoires $\mathrm{Var}(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

On pose par définition $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

Propriétés :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y+Z) = \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{Cov}(X,\lambda Y) = \lambda\mathrm{Cov}(Y,X)$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

Cas particulier : X et Y deux v.a. indépendantes $Cov(X,Y) = 0$, La réciproque est fausse.

Mesure de la dépendance entre deux v.a. :

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \qquad -1 \leq \rho \leq 1$$

ρ : coefficient de corrélation linéaire

I.5. Covariance et Coefficient de corrélation linéaire

Application

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$\rho = \mp 1 \; si \; |Cov(X,Y)| = \sigma_X \sigma_Y$

Donc $(X - E(X))$ et $(Y - E(Y))$ $sont$ $proportionnelles$

Soit $\mathrm{X} - \mathrm{E(X)} = a[Y - E(Y)])$

$\rho = \pm 1$ si $\exists$ une $relation$ $linéaire$ $entre$ X et Y

$\rho = 0$: pas de $relation$ $linéaire$ $mais$ $possibilité$ de $relation$ $fonctionnelle$ $(E_X, X$ et $X^2)$

X et Y non corrélées.

$\rho > 0$: X et Y positivement corrélées

$\rho < 0$: X et Y négativement corrélées

moment, variance et Corrélation

Exercice 1 : On vous propose le jeu suivant: pour jouer, il faut payer 50 F. Ensuite, on lance 3 fois de suite une pièce bien équilibrée. Chaque « pile (P) » rapporte 100 FCFA et chaque « face (F) » fait perdre 50 FCFA. On considère la variable aléatoire G égale au gain algébrique du joueur. Déterminer la loi de probabilité de G, puis calculer son espérance et son écart-type.

Exercice 2 : On lance un dé truqué à 6 faces numérotées de 1 à 6. Les faces de 1 à 5 ont la même probabilité de sortir. La probabilité de la face 6 est le double de la probabilité de la face 5. On note X la variable aléatoire égale au numéro sorti.

1) Déterminer la loi de probabilité de X
2) Déterminer E(X) et V(X).

Exercice 3 : Soient deux variables aléatoires X et Y dont la loi jointe est donnée par le tableau ci-dessous:

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Calculer E(X) et E(Y)
3. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que Y = 2.
4. Calculer Cov(X,Y), puis le coefficient de corrélation.

X \ Y	0	1	2	3
0	0,22	0,20	0,00	0,02
1	0,05	0,11	0,04	0,01
2	0,04	0,07	0,02	0,22

Plan

II

Variables aléatoires continues

II.1. Définitions

II.2. Couple de variables aléatoires

II.3. Notion de moment, variance et écart-type`

II.4. Fonctions caractéristiques d’une v.a.

II.1. Définitions

Si X a un nombre fini non dénombrable d'éléments, X est une v.a continue

Soit X une v.a qui peut prendre n'importe quelle valeur de l'ensemble de définition.

$$\exists\, f(x) \;\; / \;\; \begin{cases} 1)\; f(x) \geq 0 \\ 2)\; \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\,dx = 1 \end{cases}$$

f(x) est appelée fonction de distribution de probabilité ou fonction de densité de probabilité.

Fonction de répartition :

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x).\,dx$$

$$P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x).\,dx$$

II.1. Définitions

Exemple 5 : Soit la fonction f(x) définie par :

$$f(x) = \begin{cases} c.x^2; \quad 0 < x < 3 \\ 0\ ;\ ailleurs. \end{cases}$$

a) Calculer la constante c en utilisant la définition de la fonction de densité de probabilité

b) Calculer $P(1 < x < 2)$

c) Déterminer la fonction de répartition F(x).

II.1. Définitions

a) Détermination de la valeur de c :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c.x^2.dx = 1 = \left[\frac{c.x^3}{3}\right]_0^3 = 9c \Longrightarrow c = \frac{1}{9}$$

b) Calcul de P(1 < x < 2) :

$$P(1 < x < 2) = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

C) Détermination de F(x) :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x).dx$$

1) x < 0 :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x).dx = 0$$

2) 0 ≤ x < 3 :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x).dx + \int_0^x f(x).dx = \int_0^x \frac{1}{9}x^2.dx = \frac{x^3}{27}$$

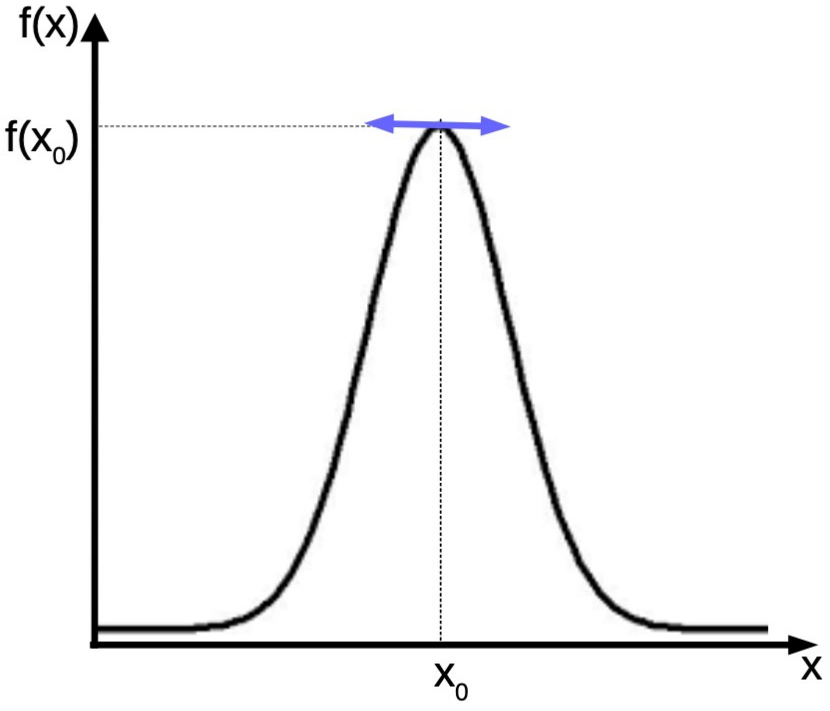
3) x ≥ 3 :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x).dx + \int_0^3 f(x).dx + \int_3^x f(x).dx = 1$$

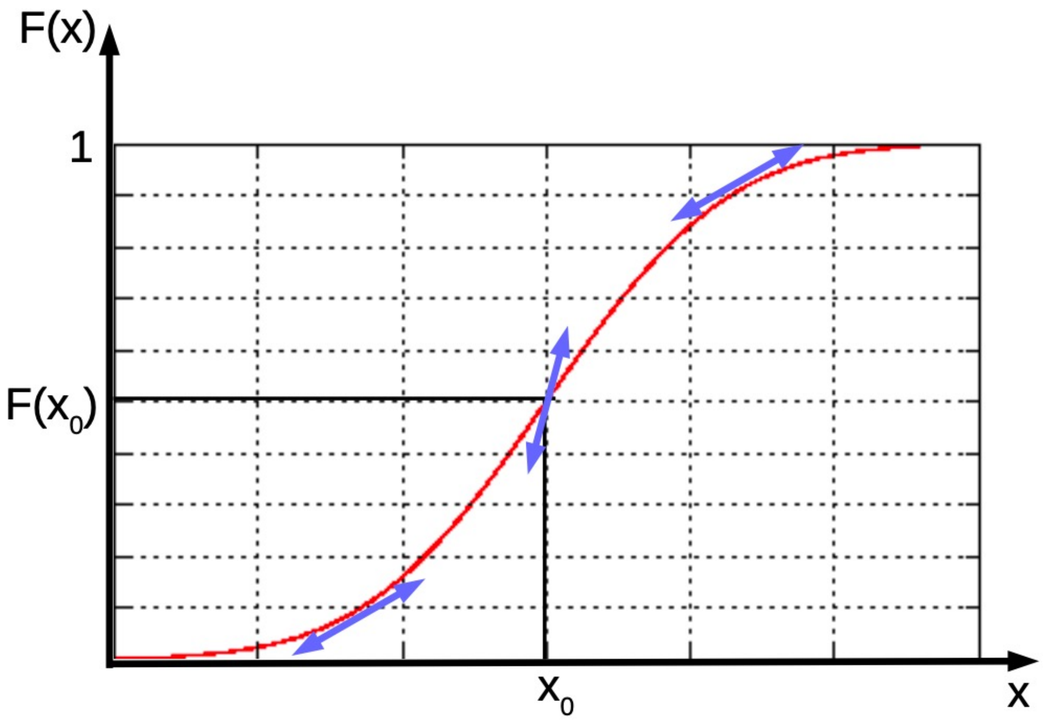
II.1. Définitions

Relation F(x) et la fonction densité de probabilité en x_0

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x).dx$$



$f'(x_0) = 0\ ;\ f''(x_0) < 0$



$F''(x_0) = 0\ ;\ F'''(x_0) < 0$

M_0 est appelé point d'inflexion

II.1. Définitions

Exemple 6 : Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en milliers de litres, est une variable aléatoire X de densité :

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)^4; & 0 \leq x \leq 1 \\ 0\ ;\ ailleurs. \end{cases}$$

a) Déterminer la constante c

b) Quelle est la fonction de répartition de X

c) La station est réapprovisionnée chaque lundi à 20h. Quelle doit être la capacité du réservoir d'essence pour que la probabilité d'épuiser ce réservoir soit inférieure à 10^{-5} ?

II.2. Couple de variables aléatoires

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y)$$

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x . \partial y}$$

Lois marginales

$$F_X(x) = P(X < x) = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P(Y < y) = F(+\infty, y)$$

Densités marginales

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y).dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y).dx$$

Lois Conditionnelles

$$f_X(x/Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y/X = x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

Indépendance

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

II.2. Couple de variables aléatoires

Fonction de distribution conjointe de X et Y est :

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)du.dv$$

Donc $$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

Fonction de distributions marginales

$$P(X \leq x) = F_1(x) = \int_{u=-\infty}^{x} \int_{v=-\infty}^{+\infty} f(u,v)du.dv$$

$$P(Y \leq y) = F_2(y) = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \int_{v=-\infty}^{y} f(u,v)du.dv$$

II.2. Couple de variables aléatoires

Exemple 7 : On considère un couple de variables aléatoires continues (X, Y) dont la densité conjointe est donnée par:

$$f(x,y) = \begin{cases} k\left(\dfrac{1}{x^2} + y^2\right); & 1 \leq x \leq 5; -1 \leq y \leq 1 \\ 0\;; & sinon \end{cases}$$

a) Pour quelle valeur de k la fonction est-elle bien une densité ?

b) Calculer les densités marginales de X et de Y.

c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Déterminer la densité marginale de X sachant de Y = 0.

e) Calculer la covariance de X et de Y.

II.3 Notion de moment et Variance

Théorie de la moyenne

Soit une fonction g(X), X = v.a. continue. La moyenne de g(X) est définie par:

$$E[g(X)] = \int_D f(x)g(x)dx$$

Moment d'ordre 1

$$m_1 = E(X) = \int_D xf(x)dx$$

Moment d'ordre k

$$m_k = E(X^k) = \int_D x^k f(x)dx$$

II.3 Notion de moment et Variance

Variance $V(X) = \sigma_X^2 = E[(X - \bar{X})^2] = E[(X - E(X))^2]$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^2 f(x).dx$$

Théorique : $V(X) = m_2 - m_1^2$

Écart-type $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

II.4 Fonction caractéristique d'une v.a.

Définition générale

Si X est une v.a. et g(X) une fonction de cette variable $$E\big(g(X)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx$$

On peut choisir g(x) par la fonction e^{jtx} avec **t** paramètre réel non aléatoire :

$$e^{jtx} = cos(tx) + jsin(tx)$$

φ la fonction caractéristique : $$X \rightarrow \phi(t) = E\big(e^{jtx}\big)$$

1ère FC $$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} f(x) dx$$

2ème FC $$ln\big(\phi(t)\big) = \psi(t)$$

II.4 Fonction caractéristique d'une v.a.

Propriétés

a) La fonction caractéristique Φ(t) est une fonction continue

b) $\phi(0) = 1$

c) $|\phi(t)| \leq 1$

d) $\phi(t) = 1 + jtm_1 + \frac{(jt)^2}{2!}m_2 + \ldots + \frac{(jt)^k}{k!}m_k + \ldots\ldots$

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jt)^k}{k!} m_k$$

Avec $m_k = \frac{1}{j^k} \cdot \frac{d^k \phi(t)}{dt^k}$

pour t=0

e) La continuité de Φ(t) permet de passer d'une loi discrète à une loi continue

II.4 Fonction caractéristique d'une v.a.

Les coefficients du développement de Φ(t) correspondent aux divers moments de la v.a. X

On démontre que : $\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jt)^k}{k!} m_k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(jt)^k}{k!} m_k$ Avec $m_0 = 1$

Les m_k sont déterminés par identification

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jt)^k}{k!} x^k \right) f(x) dx$$

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jt)^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$$

On a bien

$$\boxed{\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jt)^k}{k!} m_k}$$

II.4 Fonction caractéristique d'une v.a.

Exemple 7 : $x \geq 0 \quad f(x) = e^{-x}$ la fonction densité de probabilité de x

Déterminer sa Φ(t) ? En déduire les moments d'ordre 1, 2, 3 et l'écart-type.

$$\phi(t) = \int_0^\infty e^{-x}\, e^{jtx} dx = \int_0^\infty e^{-(1-jt)x}\, dx$$

$$= -\frac{1}{1-jt}\left[e^{-(1-jt)x}\right]_0^\infty = \frac{1}{1-jt}$$

Dérivé en série de $\dfrac{1}{1-jt}$

$$\phi(t) = 1 + jt + (jt)^2 + \dots + (jt)^n + \dots = 1 + jt + 2!\frac{(jt)^2}{2!} + \dots + n!\frac{(jt)^n}{n!} + \dots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n!\,\frac{(jt)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(jt)^n}{n!} m_n$$

Donc $\quad m_1 = 1 \quad m_2 = 2! \quad m_3 = 3! \quad avec\ m_n = n!$

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = 2 - 1 = 1 \rightarrow \sigma = 1$$

II.4 Fonction caractéristique d'une v.a.

Propriétés des dérivées de Φ(t)

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} f(x)dx$$

$$\phi'(t) = j\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} xf(x)dx \qquad \phi'(0) = j\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

$$\phi''(t) = j^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} x^2 f(x)dx \qquad \phi''(0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = -\overline{x^2}$$

Donc $\phi(0) = 1 \quad \phi'(0) = jE(x) \quad \phi''(0) = -E(x^2)$

II.4 Fonction caractéristique d'une v.a.

Exemple 8 : X une v.a.

$$f(x) = \begin{cases} 1\,;0 \le x \le 1 \\ 0\,;\ sinon. \end{cases}$$

$$\phi(t) = \int_0^1 e^{jtx}\,dx = \frac{e^{jt}-1}{jt}$$

$$\phi(t) = \frac{1}{jt}\left[\left(1 + jt + \frac{(jt)^2}{2!} + \ldots..\right) - 1\right] = 1 + \frac{(jt)}{2!} + \frac{(jt)^2}{3!} + \ldots.. + \frac{(jt)^k}{(k+1)!} + \ldots..$$

$$= 1 + \frac{(jt)^1}{1!}\cdot\frac{1}{2} + \frac{(jt)^2}{2!}\cdot\frac{1}{3} + \ldots.. + \frac{(jt)^k}{k!}\cdot\frac{1}{k+1} + \ldots..$$

$$\boxed{m_k = \frac{1}{k+1}}$$

Chapitre II : V.A. discrètes et continues