Definície

- **Binárnou reláciou** nazývame každú množinu usporiadaných dvojíc.

Definície

- **Binárnou reláciou** nazývame každú množinu usporiadaných dvojíc.
- ak R je relácia, píšeme aRb alebo $[a, b] \in R$, čítame: prvok a je v relácii R s prvkom b.

Definície

- **Binárnou reláciou** nazývame každú množinu usporiadaných dvojíc.
- ak R je relácia, píšeme aRb alebo $[a, b] \in R$, čítame: prvok a je v relácii R s prvkom b.
- Nech R je binárna relácia. **Definičným oborom** (prvým oborom) nazývame množinu $D(R)$, ktorá je daná takto: $a \in D(R) \iff \exists b; aRb$.

Definície

- **Binárnou reláciou** nazývame každú množinu usporiadaných dvojíc.
- ak R je relácia, píšeme aRb alebo $[a, b] \in R$, čítame: prvok a je v relácii R s prvkom b.
- Nech R je binárna relácia. **Definičným oborom** (prvým oborom) nazývame množinu $D(R)$, ktorá je daná takto: $a \in D(R) \iff \exists b; aRb$.
- **Obor hodnôt** (druhý obor) relácie R je množina $H(R)$ daná takto: $b \in H(R) \iff \exists a; aRb$.

Definície

- **Binárnou reláciou** nazývame každú množinu usporiadaných dvojíc.
- ak R je relácia, píšeme aRb alebo $[a, b] \in R$, čítame: prvok a je v relácii R s prvkom b.
- Nech R je binárna relácia. **Definičným oborom** (prvým oborom) nazývame množinu $D(R)$, ktorá je daná takto: $a \in D(R) \iff \exists b; aRb$.
- **Obor hodnôt** (druhý obor) relácie R je množina $H(R)$ daná takto: $b \in H(R) \iff \exists a; aRb$.
- Nech A, B sú množiny a R je binárna relácia. Ak $D(R) \subseteq A, H(R) \subseteq B$ hovoríme, že R je relácia **z** množiny A **do** množiny B.

Definície

- **Binárnou reláciou** nazývame každú množinu usporiadaných dvojíc.
- ak R je relácia, píšeme aRb alebo $[a,b] \in R$, čítame: prvok a je v relácii R s prvkom b.
- Nech R je binárna relácia. **Definičným oborom** (prvým oborom) nazývame množinu $D(R)$, ktorá je daná takto: $a \in D(R) \iff \exists b; aRb$.
- **Obor hodnôt** (druhý obor) relácie R je množina $H(R)$ daná takto: $b \in H(R) \iff \exists a; aRb$.
- Nech A, B sú množiny a R je binárna relácia. Ak $D(R) \subseteq A, H(R) \subseteq B$ hovoríme, že R je relácia **z** množiny A **do** množiny B.
- Nech $n \in N, n-$ árnou reláciou nazývame každú množinu usporiadaných $n-$tíc.

Typy relácií

- **Definícia.** Nech R je relácia na množine A, tak aj $\overline{R} = A^2 \setminus R$ je relácia na A. Hovoríme, že $\overline{R}$ je **doplnkovou** (komplementárnou) reláciou k relácii R na množine A.

Typy relácií

- **Definícia.** Nech R je relácia na množine A, tak aj $\overline{R} = A^2 \setminus R$ je relácia na A. Hovoríme, že $\overline{R}$ je **doplnkovou** (komplementárnou) reláciou k relácii R na množine A.
- **Definícia. Identickou** (diagonálnou) reláciou na množine A nazývame reláciu $\Delta_A = \{[a, a]; a \in A\}$.

Inverzná relácia

- **Definícia.** Nech R je relácia. Reláciu $R^{-1} = \{[a,b]; [b,a] \in R\}$ nazývame **inverzná** relácia k R.

Inverzná relácia

- **Definícia.** Nech R je relácia. Reláciu $R^{-1} = \{[a,b]; [b,a] \in R\}$ nazývame **inverzná** relácia k R.
- **Veta.** Zrejme platí $(R^{-1})^{-1} =$

Inverzná relácia

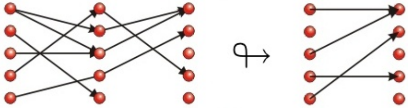
- **Definícia.** Nech R je relácia. Reláciu $R^{-1} = \{[a, b]; [b, a] \in R\}$ nazývame **inverzná** relácia k R.
- **Veta.** Zrejme platí $(R^{-1})^{-1} = R$

Operácie s reláciami

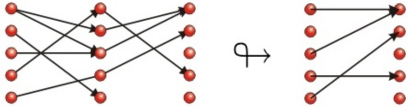
Nech R, S sú relácie na $A \times B$. Zrejme aj $R \cup S, R \cap S, R \setminus S$ sú relácie na $A \times B$.

Skladanie relácií

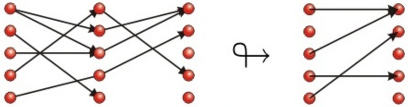
- **Definícia.** Nech R, S sú relácie. Reláciu $R \circ S = \{[a, c]; \exists b\ [a, b] \in S \wedge [b, c] \in R\}$ nazývame **zloženou** reláciou z relácie R a S.

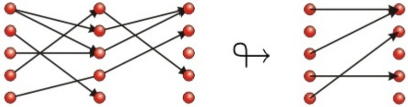
- **Definícia.** Nech R, S sú relácie. Reláciu $R \circ S = \{[a,c]; \exists b\ [a,b] \in S \wedge [b,c] \in R\}$ nazývame **zloženou** relációu z relácie R a S.
- 

Skladanie relácií

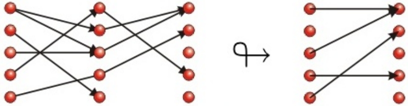
- **Definícia.** Nech R, S sú relácie. Reláciu $R \circ S = \{[a,c]; \exists b\ [a,b] \in S \wedge [b,c] \in R\}$ nazývame **zloženou** reláciou z relácie R a S.
- 
- **Veta.** Pre ľubovoľné relácie R, S, T platí $(R \circ S) \circ T =$

Skladanie relácií

- **Definícia.** Nech R, S sú relácie. Reláciu $R \circ S = \{[a,c]; \exists b\ [a,b] \in S \wedge [b,c] \in R\}$ nazývame **zloženou** reláciou z relácie R a S.
- 
- **Veta.** Pre ľubovoľné relácie R, S, T platí $(R \circ S) \circ T =$
- $(R \circ S)^{-1} =$

- **Definícia.** Nech R, S sú relácie. Reláciu $R \circ S = \{[a, c]; \exists b \; [a, b] \in S \wedge [b, c] \in R\}$ nazývame **zloženou** reláciou z relácie R a S.
- 
- **Veta.** Pre ľubovoľné relácie R, S, T platí $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
- $(R \circ S)^{-1} =$

Skladanie relácií

- **Definícia.** Nech R, S sú relácie. Reláciu $R \circ S = \{[a, c]; \exists b\ [a, b] \in S \wedge [b, c] \in R\}$ nazývame **zloženou** reláciou z relácie R a S.
- 
- **Veta.** Pre ľubovoľné relácie R, S, T platí $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

Špeciálne vlastnosti relácií

Definícia. Nech R je relácia na množine A. Hovoríme, že relácia R je

- **reflexívna** na množine A, ak $\forall a \in A; aRa$,

Špeciálne vlastnosti relácií

Definícia. Nech R je relácia na množine A. Hovoríme, že relácia R je

- **reflexívna** na množine A, ak $\forall a \in A; aRa$,
- **symetrická** na množine A, ak $\forall a, b \in A; aRb \Rightarrow bRa$,

Špeciálne vlastnosti relácií

Definícia. Nech R je relácia na množine A. Hovoríme, že relácia R je

- **reflexívna** na množine A, ak $\forall a \in A; aRa$,
- **symetrická** na množine A, ak $\forall a, b \in A; aRb \Rightarrow bRa$,
- **tranzitívna** na množine A, ak $\forall a, b, c \in A; aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$,

Špeciálne vlastnosti relácií

Definícia. Nech R je relácia na množine A. Hovoríme, že relácia R je

- **reflexívna** na množine A, ak $\forall a \in A; aRa$,
- **symetrická** na množine A, ak $\forall a, b \in A; aRb \Rightarrow bRa$,
- **tranzitívna** na množine A, ak $\forall a, b, c \in A; aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$,

- **antisymetrická** na množine A, ak $\forall a, b \in A; aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$,

Definícia. Nech R je relácia na množine A. Hovoríme, že relácia R je

- **reflexívna** na množine A, ak $\forall a \in A; aRa$,
- **symetrická** na množine A, ak $\forall a, b \in A; aRb \Rightarrow bRa$,
- **tranzitívna** na množine A, ak $\forall a, b, c \in A; aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$,

- **antisymetrická** na množine A, ak $\forall a, b \in A; aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$,
- **ireflexívna** na množine A, ak $\forall a \in A; a\overline{R}a$,

Špeciálne vlastnosti relácií

Definícia. Nech R je relácia na množine A. Hovoríme, že relácia R je

- **reflexívna** na množine A, ak $\forall a \in A; aRa$,
- **symetrická** na množine A, ak $\forall a, b \in A; aRb \Rightarrow bRa$,
- **tranzitívna** na množine A, ak $\forall a, b, c \in A; aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$,

- **antisymetrická** na množine A, ak $\forall a, b \in A; aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$,
- **ireflexívna** na množine A, ak $\forall a \in A; a\overline{R}a$,
- **súvislá** na množine A, ak $\forall a, b \in A; a \neq b \Rightarrow aRb \vee bRa$,

Definícia. Nech R je relácia na množine A. Hovoríme, že relácia R je

- **reflexívna** na množine A, ak $\forall a \in A; aRa$,
- **symetrická** na množine A, ak $\forall a, b \in A; aRb \Rightarrow bRa$,
- **tranzitívna** na množine A, ak $\forall a, b, c \in A; aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$,

- **antisymetrická** na množine A, ak $\forall a, b \in A; aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$,
- **ireflexívna** na množine A, ak $\forall a \in A; a\overline{R}a$,
- **súvislá** na množine A, ak $\forall a, b \in A; a \neq b \Rightarrow aRb \vee bRa$,
- **trichotomická** na množine A, ak pre každé dva prvky $a, b \in A$ platí práve jeden zo vzťahov: $a = b, aRb, bRa$.

Definícia. Nech R je binárna relácia na M.

- **Reflexívny uzáver** R je relácia $R \cup \{(x, x) \mid x \in M\}$.
- **Symetrický uzáver** R je relácia $\overset{\leftrightarrow}{R} = \{(x, y) \mid (x, y) \in R \text{ nebo } (y, x) \in R\}$.
- **Tranzitívny uzáver** R je relácia $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}^i(R)$, kde $\mathcal{T}$ je funkcia, ktorá pre každú binárnu reláciu S vráti reláciu

$$\mathcal{T}(S) = S \cup \{(x, z) \mid \text{ existuje } y \text{ také, že } (x, y), (y, z) \in S\}$$

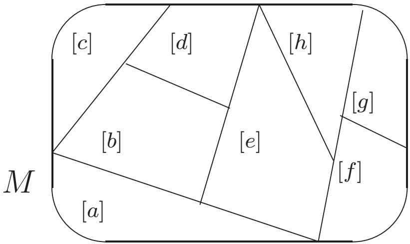
$\mathcal{T}^i = \underbrace{\mathcal{T} \circ \cdots \circ \mathcal{T}}_{i}$ je i-krát iterovaná aplikácia funkcie $\mathcal{T}$.

Rozklad množiny

- **Definícia.** Nech A je neprázdna množina. Systém S podmnožín množiny A sa nazýva **rozklad** množiny A, ak
  - $\emptyset \notin S$
  - $\forall B, C \in S; B \neq C \Rightarrow B \cap C = \emptyset$
  - $\bigcup S = A$

Rozklad množiny

- **Definícia.** Nech A je neprázdna množina. Systém S podmnožín množiny A sa nazýva **rozklad** množiny A, ak
  - $\emptyset \notin S$
  - $\forall B, C \in S; B \neq C \Rightarrow B \cap C = \emptyset$
  - $\bigcup S = A$



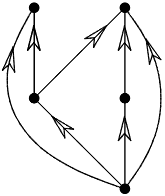
Relácia ekvivalencie a rozklad množiny

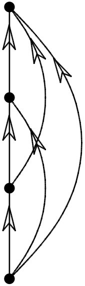
- **Definícia.** Nech R je relácia na množine A. Hovoríme, že R je relácia **ekvivalencie** na A, ak R je reflexívna na A, symetrická a tranzitívna.
- **Veta.** Nech R je relácia ekvivalencie na množine A. Pre ľubovoľný prvok $a \in A$ označíme $\overline{a} = \{x \in A; xRa\}$, potom $S = \{\overline{a}; a \in A\}$ je rozklad množiny A.
- **Definícia.** Nech R je relácia na množine A. Množinu $\overline{a} = \{x \in A; xRa\}$ nazývame trieda rozkladu množiny A podľa ekvivalencie R, daná prvkom a. Systém $\{\overline{a}; a \in A\}$ budeme označovať A/R a nazývať faktorová množina množiny A podľa R.

- **Definícia.** Relácia $R \subseteq M \times M$ je **čiastočné usporiadanie** práve keď R je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Tieto tri vlastnosti musia byť splnené a overené k dôkazu toho, že daná relácia R je usporiadaním.

Usporiadaná množina

- **Definícia. Usporiadaná množina** je dvojica $(M, \preceq)$, kde M je množina a $\preceq$ je (čiastočné) usporiadanie na M.



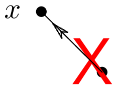


- **Definícia.** Usporiadanie $\preceq$ na M je **lineárne (úplné)**, ak každé dva prvky M sú v $\preceq$ porovnateľné.

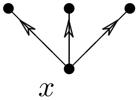
Ďalšie pojmy usporiadaných množín

Nech $(M, \preceq)$ je usporiadaná množina. Prvok $x \in M$ je:

- **minimálny** práve keď pre každé $y \in M$ platí, že ak $y \preceq x$, tak $x \preceq y$.



- **maximálny** práve keď pre každé $y \in M$ platí, že ak $x \preceq y$, tak $y \preceq x$.
- **najmenší** práve keď pre každé $y \in M$ platí, že $x \preceq y$.

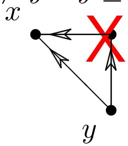


- **najväčší** práve keď pre každé $y \in M$ platí, že $y \preceq x$.

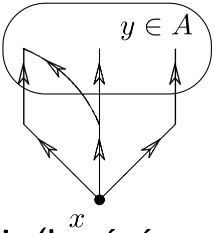
Ďalšie pojmy usporiadaných množín

Nech $(M, \preceq)$ je usporiadaná množina. Prvok $x \in M$:

- **pokrýva** $y \in M$ práve keď $x \neq y$, $y \preceq x$ a neexistuje žiadne $z \in M$ také, že $x \neq z \neq y$ a $y \preceq z \preceq x$.



- je **dolné ohraničenie (dolní závora, mez)** množiny $A \subseteq M$ práve keď $x \preceq y$ pre každé $y \in A$.

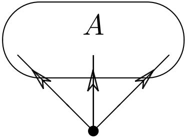


- je **horné ohraničenie (horní závora, mez)** množiny $A \subseteq M$ práve keď $y \preceq x$ pre každé $y \in A$.

Ďalšie pojmy usporiadaných množín

Nech $(M, \preceq)$ je usporiadaná množina. Prvok $x \in M$:

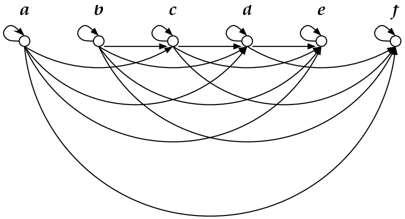
- je **infimum** množiny $A \subseteq M$ práve keď x je najväčšie dolné ohraničenie (dolní závora) množiny A.

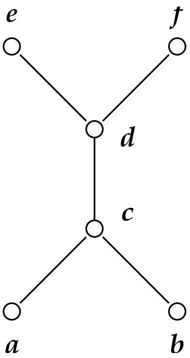


- je **supremum** množiny $A \subseteq M$, práve keď x je najmenšie horné ohraničenie (horní závora) množiny A.

Hasseovské diagramy

Motiváciou zavedenia tzv. **Hasseovských diagramov** usporiadaných množín sú prehľadnejšie obrázky ako u grafov relácií.





Hasseovský diagram konečnej usporiadanej množiny $(M, \preceq)$ je (jednoznačné) grafické znázornenie, ktoré vznikne takto:

- Do prvej "horizontálnej vrstvy" zakreslíme body odpovedajúce minimálnym prvkom $(M, \preceq)$.
- Ak už máme "vrstvu" i, tak do "vrstvy" $i+1$ (ktorá je "nad" vrstvou i) zakreslíme všetky nezakreslené prvky, ktoré pokrývajú iba prvky "vrstiev" $\leq i$. Ak prvok x "vrstvy" $i+1$ pokrýva prvok y "vrstvy" $\leq i$, spojíme x a y neorientovanou hranou (tj. "čiarou").

Ďalšie typy usporiadaní

- **kvázi-usporiadanie**-R je reflexívna a tranzitívna
- **dobré usporiadanie** - každá podmnožina obsahuje najmenší prvok

Definícia.

- Binárnu reláciu f nazývame **zobrazením** vtedy, keď o nej platí:
$$[a,b] \in f \wedge [a,c] \in f \Rightarrow b = c.$$

Definícia.

- Binárnu reláciu f nazývame **zobrazením** vtedy, keď o nej platí:
$$[a, b] \in f \wedge [a, c] \in f \Rightarrow b = c.$$
- **Obraz množiny**:
$$f(M) = \{b; \exists a \in M \quad f(a) = b\}.$$

Definícia.

- Binárnu reláciu f nazývame **zobrazením** vtedy, keď o nej platí:
$$[a, b] \in f \wedge [a, c] \in f \Rightarrow b = c.$$

- **Obraz množiny**:
$$f(M) = \{b; \exists a \in M \quad f(a) = b\}.$$

- **Úplný vzor množiny**:
$$f^{-1}(P) = \{a; \exists b \in P \quad f(a) = b\}.$$

Definícia.

- Binárnu reláciu f nazývame **zobrazením** vtedy, keď o nej platí:
$$[a,b] \in f \wedge [a,c] \in f \Rightarrow b = c.$$

- **Obraz množiny**:
$$f(M) = \{b; \exists a \in M \quad f(a) = b\}.$$

- **Úplný vzor množiny**:
$$f^{-1}(P) = \{a; \exists b \in P \quad f(a) = b\}.$$

- **Definičný obor** $D(f)$

Definícia.

- Binárnu reláciu f nazývame **zobrazením** vtedy, keď o nej platí:
$$[a, b] \in f \wedge [a, c] \in f \Rightarrow b = c.$$

- **Obraz množiny**:
$$f(M) = \{b; \exists a \in M \quad f(a) = b\}.$$

- **Úplný vzor množiny**:
$$f^{-1}(P) = \{a; \exists b \in P \quad f(a) = b\}.$$

- **Definičný obor** $D(f)$
- **Obor hodnôt** $H(f)$

Definícia.

- Ak o zobrazení f platí

$$\forall a, b \in D(f); a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b),$$

hovoríme, že je **prosté**, alebo **injekcia**.

Definícia.

- Ak o zobrazení f platí
$$\forall a, b \in D(f); a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b),$$
hovoríme, že je **prosté**, alebo **injekcia**.
- Nech $f : A \to B$. Ak platí, že $H(f) = B$ hovoríme, že f je zobrazenie **z** množiny A **na** (**surjekcia**) množinu B. Ak $D(f) = A$ hovoríme, že f je zobrazenie množiny A **do** množiny B. Ak platí, že $D(f) = A, H(f) = B$ hovoríme, že f je zobrazenie množiny A **na** (**surjekcia**) množinu B.

Definícia.

- Ak o zobrazení f platí
$$\forall a, b \in D(f); a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b),$$
hovoríme, že je **prosté**, alebo **injekcia**.
- Nech $f : A \to B$. Ak platí, že $H(f) = B$ hovoríme, že f je zobrazenie **z** množiny A **na** (**surjekcia**) množinu B. Ak $D(f) = A$ hovoríme, že f je zobrazenie množiny A **do** množiny B. Ak platí, že $D(f) = A, H(f) = B$ hovoríme, že f je zobrazenie množiny A **na** (**surjekcia**) množinu B.
- Prosté zobrazenie množiny A **na** množinu B nazývame **vzájomne jednoznačným zobrazením** A **na** B alebo **bijekciou** A **na** B.

Vlastnosti zobrazení

Definícia.

- Ak o zobrazení f platí
$$\forall a, b \in D(f); a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b),$$
hovoríme, že je **prosté**, alebo **injekcia**.
- Nech $f : A \to B$. Ak platí, že $H(f) = B$ hovoríme, že f je zobrazenie **z** množiny A **na** (**surjekcia**) množinu B. Ak $D(f) = A$ hovoríme, že f je zobrazenie množiny A **do** množiny B. Ak platí, že $D(f) = A, H(f) = B$ hovoríme, že f je zobrazenie množiny A **na** (**surjekcia**) množinu B.
- Prosté zobrazenie množiny A **na** množinu B nazývame **vzájomne jednoznačným zobrazením** A **na** B alebo **bijekciou** A **na** B.
- Každé prosté zobrazenie je bijekciou svojho definičného oboru **na** svoj obor hodnôt.

Vlastnosti zobrazení

- **Definícia.** Ak existuje bijekcia množiny A na množinu B hovoríme, že množina A je **ekvivalentná** s množinou B a píšeme $A \sim B$.

Vlastnosti zobrazení

- **Definícia.** Ak existuje bijekcia množiny A na množinu B hovoríme, že množina A je **ekvivalentná** s množinou B a píšeme $A \sim B$.
- **Veta.** Pre ľubovoľné množiny A, B, C platí
  - $A \sim A$
  - $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
  - $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

Vlastnosti zobrazení

- **Definícia.** Ak existuje bijekcia množiny A na množinu B hovoríme, že množina A je **ekvivalentná** s množinou B a píšeme $A \sim B$.
- **Veta.** Pre ľubovoľné množiny A, B, C platí
  - $A \sim A$
  - $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
  - $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$
- **Definícia.** Nech je dané zobrazenie $f : A \to B$; na množine A definujeme reláciu $\sim$ podmienkou:

$$a \sim b \iff f(a) = f(b).$$

Relácia $\sim$ je ekvivalencia na A a faktorová množina $A/\sim$ je ekvivalentná s oborom hodnôt $H(f)$.

Mohutnosti množín

- konečné množiny

Mohutnosti množín

- konečné množiny
- nekonečné množiny

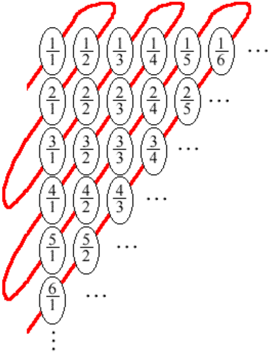
Mohutnosti množín

- konečné množiny
- nekonečné množiny
    - spočítateľné (existuje bijekcia s množinou prir. čísel)

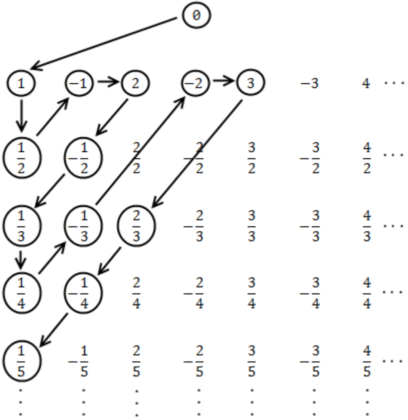
Mohutnosti množín

- konečné množiny
- nekonečné množiny
  - spočítateľné (existuje bijekcia s množinou prir. čísel)
  - nespočítateľné (neexistuje bijekcia s množinou prir. čísel)

Mohutnosti množín-racionálne čísla



Mohutnosti množín-racionálne čísla



Mohutnosti množín-reálne čísla