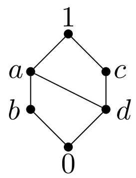
1 Zväzovo usporiadané množiny

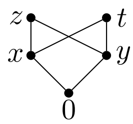
Skôr ako sa začítate do tejto časti, je potrebné zopakovať si relácie usporiadania, vrátane takých pojmov ako napr. infimum, supremum a hasseovské diagramy. Ak sa v týchto pojmoch už orientujete, môžete začať nasledujúcou definíciou, ktorá popisuje špeciálny typ usporiadaných množín.

Definícia 1. *Nech* $\preceq$ *je relácia usporiadania na množine* X. *Hovoríme, že* $(X, \preceq)$ *je* **zväzovo usporiadaná množina**, *ak pre každú svoju dvojprvkovú podmnožinu obsahuje množina* X *aj jej supremum a infimum.*

Definíciu si vysvetlíme na nasledujúcom príklade.

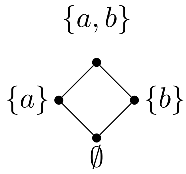
Príklad 2. *Pomocou hasseovských diagramov máme určené dve usporiadané množiny* $(X, \preceq), (Y, \preceq)$, *pričom* $X = \{0, 1, a, b, c, d\}, Y = \{0, x, y, z, t\}$:

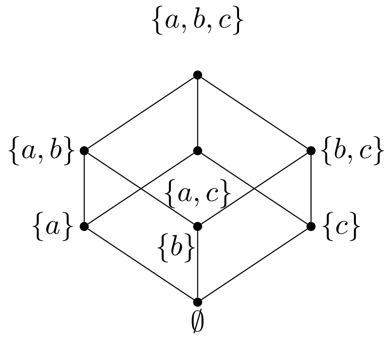




Všimnime si prvú z nich a vyberme napr. dvojprvkovú podmnožinu $\{b, d\}$. *Jej infimum je prvok* 0 *(pod obidvomi prvkami tejto podmnožiny je jedine prvok* 0*), supremum je prvok* a *(horným ohraničením tejto množiny je* $\{a, 1\}$ *a supremum je najmenšie horné ohraničenie, teda prvok* a*). Ak si vyberieme napr. podmnožinu* $\{b, c\}$, *tak infimum je prvok* 0, *supremum je prvok* 1. *Táto prvá množina je zväzovo usporiadaná, doporučujeme vyskúšať všetky ostatné dvojprvkové podmnožiny. Druhá množina nie je zväzovo usporiadaná, lebo napr. podmnožina* $\{x, y\}$ *nemá v* Y *supremum, horným ohraničením tejto množiny je* $\{z, t\}$, *ale prvky* z *a* t *sú neporovnateľné, preto neexistuje najmenšie horné ohraničenie (toto si dobre premyslite), podobne ani* $\{t, z\}$ *nemá v* Y *infimum.*

Pekným príkladom zväzovo usporiadanej množiny je $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, kde X je ľubovolná množina. Na nasledujúcich obrázkoch vidíme takéto množiny pre dvojprvkovú množinu $\{a, b\}$ a trojprvkovú $\{a, b, c\}$. Všimnite si, že infimum ľubovolnej dvojprvkovej podmnožiny množiny $\mathcal{P}(X)$ je prienik týchto dvoch prvkov (treba si uvedomiť, že prvkami takejto množiny sú množiny) a supremum je ich zjednotenie.





2 Zväzy, podzväzy a izomorfizmus

V rámci algebry sme sa stretli s algebraickými štruktúrami s jednou operáciou. Teraz sa spolu pozrieme na algebraické štruktúry s dvomi operáciami.

Definícia 3. *Nech X je množina, $\wedge, \vee$ sú operácie na X, pre ktoré platí:*

- $\forall x \in X\colon\ x \vee x = x,\ x \wedge x = x,$
  *(***idempotencia***)*
- $\forall x, y \in X\colon\ x \vee y = y \vee x,\ x \wedge y = y \wedge x,$
  *(***komutativita***)*
- $\forall x, y, z \in X\colon\ (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),\ (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z),$
  *(***asociativita***)*
- $\forall x, y \in X\colon\ x \wedge (x \vee y) = x,\ x \vee (x \wedge y) = x.$
  *(***absorbčné zákony***)*

Potom trojicu $(X, \vee, \wedge)$ nazývame **zväzom** *na X. Operáciu $\vee$ nazývame* **spojenie** *a operáciu $\wedge$ nazývame* **priesek**.

O vzťahu medzi zväzovo usporiadanými množinami a zväzmi hovorí nasledujúca veta:

Veta 4. *Nech $(X, \vee, \wedge)$ je zväz. Potom platí:*

1. *pre každé dva prvky $x, y \in X$ je $x \wedge y = x \iff x \vee y = y$,*
2. *ak na množine X definujeme reláciu $\preceq$ takto:*

$$\forall x, y \in X\colon x \preceq y \iff x \vee y = y,$$

   potom $(X, \preceq)$ je zväzovo usporiadaná množina.

Takže ak priesek (spojenie) prvkov x, y nahradíme infimom (supremom) dvojprvkovej množiny $\{x, y\}$, dostaneme zväzovo usporiadanú množinu z Definície 1.. V predchádzajúcej kapitole sme mohli vidieť, že vhodnými operáciami by mohli byť prienik a zjednotenie, neskôr si ukážeme ďalšie vhodné operácie. Odteraz už namiesto zväzovo usporiadanej množiny budeme používať termín zväz.

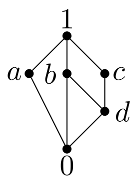
Podobne ako pri grupoidoch, aj pri zväzoch nás budú zaujímať podštruktúry, teda podmnožiny nosiča, na ktorých sú obe operácie uzavreté.

Definícia 5. *Hovoríme, že zväz* $(Y, \vee, \wedge)$ *je* **podzväz** *zväzu* $(X, \vee, \wedge)$*, ak platí:*

- $Y \subseteq X$,
- $\forall x, y \in Y\colon\ x \vee y \in Y,\ \ x \wedge y \in Y.$

Nasledujúci príklad nám pomôže objasniť pojem podzväzu.

Príklad 6. *Na množine* $X = \{0, 1, a, b, c, d\}$ *je daný zväz hasseovským diagramom takto:*



Nech $Y = \{0, 1, a, b\}$, $Z = \{0, 1, b, c\}$*. Zistite, či* $(Y, \vee, \wedge)$ *a* $(Z, \vee, \wedge)$ *sú podzväzy zväzu* $(X, \vee, \wedge)$*.*

Riešenie. Pri riešení tejto úlohy postupujeme podobne ako pri zisťovaní podgrupoidov, resp. podgrúp, teda pomocou operačných tabuliek. Rozdiel bude len v tom, že musíme skontrolovať operačné tabuľky pre dve operácie, pre operácie $\vee$ a $\wedge$. Pre množinu X dostávame:

$\vee$	0	1	a	b	c	d
0	0	1	a	b	c	d
1	1	1	1	1	1	1
a	a	1	a	1	1	1
b	b	1	1	b	1	b
c	c	1	1	1	c	c
d	d	1	1	b	c	d

$\wedge$	0	1	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	c	d
a	0	a	a	0	0	0
b	0	b	0	b	d	d
c	0	c	0	d	c	d
d	0	d	0	d	d	d

Najskôr sa budeme venovať množine Y. V tabuľkách sú farebne vyznačené riadky a stĺpce, ktoré prislúchajú prvkom množiny Y. Šikovný čitateľ si už isto všimol, že tieto farebne vyznačené políčka prislúchajú podgrupoidom $(Y, \vee)$ a $(Y, \wedge)$. Teda obe operácie sú na množine Y uzavreté. Zrejme sú aj zachované všetky vlastnosti oboch operácií, ktoré nám zaručujú, že $(Y, \vee, \wedge)$ je zväz, preto je $(Y, \vee, \wedge)$ podzväz zväzu $(X, \vee, \wedge)$.

Teraz si v tabuľkách farebne vyznačíme riadky a stĺpce prislúchajúce prvkom množiny Z.

$\vee$	0	1	a	b	c	d
0	0	1	a	b	c	d
1	1	1	1	1	1	1
a	a	1	a	1	1	1
b	b	1	1	b	1	b
c	c	1	1	1	c	c
d	d	1	1	b	c	d

$\wedge$	0	1	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	c	d
a	0	a	a	0	0	0
b	0	b	0	b	d	d
c	0	c	0	d	c	d
d	0	d	0	d	d	d

Zrejme $(Z, \vee)$ je podgrupoidom $(X, \vee)$, ale $(Z, \wedge)$ nie je podgrupoidom $(X, \wedge)$, problematické miesta sú v tabuľke vyznačené modrou farbou. Teda operácia $\wedge$ nie je na množine Z uzavretá a preto $(Z, \vee, \wedge)$ nie je podzväz zväzu $(X, \vee, \wedge)$. Skúsení zväzáci tieto informácie nemusia zisťovať pomocou tabuliek, ale vedia ich vyčítať priamo z diagramu.

Poznámka 7. *Všimnite si tabuľky v predchádzajúcom príklade. Pri štúdiu algebraických štruktúr s jednou operáciou sme sa naučili určovať niektoré vlastnosti z operačných tabuliek. Pri zväzoch nám pribudla ďalšia vlastnosť, idempotencia. Tú vieme v tabuľke odhaliť na hlavnej diagonále, keďže* $x \wedge x = x$, *resp.* $x \vee x = x$, *tak na diagonále sa nám postupne objavuje záhlavie tabuľky. Z tabuliek môžeme ďalej vyčítať, že najmenší prvok je neutrálnym prvkom pre operáciu* $\vee$ *a najväčší prvok je zase neutrálnym prvkom pre operáciu* $\wedge$. *Všimnite si pri operácii* $\wedge$ *riadok a stĺpec prislúchajúci prvku* 0 *a pri operácii* $\vee$ *riadok a stĺpec prislúchajúci prvku* 1. *Zrejme pre každý prvok* x *platí* $x \wedge 0 = 0 \wedge x = 0, x \vee 1 = 1 \vee x = 1$, *jedná sa o tzv. agresivitu nuly a agresivitu jedničky.*

Pri algebraických štruktúrach s jednou operáciou sme skúmali, či sú dve štruktúry v istom slova zmysle rovnaké. Venovali sme sa rôznym typom homomorfizmu. Pri zväzoch sa zameriame na izomorfizmus.

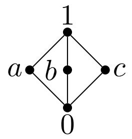
Definícia 8. *Nech* $(X, \vee_X, \wedge_X)$, $(Y, \vee_Y, \wedge_Y)$ *sú zväzy. Ak existuje bijekcia* $f : X \to Y$ *taká, že* $\forall x, y \in X$ *platí:*

$$f(x \vee_X y) = f(x) \vee_Y f(y) \quad \wedge \quad f(x \wedge_X y) = f(x) \wedge_Y f(y),$$

potom hovoríme, že $(X, \vee_X, \wedge_X)$, $(Y, \vee_Y, \wedge_Y)$ *sú* **izomorfné zväzy**.

Pre pochopenie tohto pojmu je samozrejme dôležité, aby sa čitateľ orientoval v problematike homomorfizmov na algebraických štruktúrach s jednou operáciou. Na jednoduchom príklade si tento pojem vysvetlíme aj pre zväzy.

Príklad 9. *Nech $X = \{0, 1, a, b, c\}$. Zrejme $(X, \vee, \wedge)$, ktorý je zadaný hasseovským diagramom, je zväz.*



Nech $Y = \{0, a, b, 1\}, Z = \{0, b, c, 1\}$. Ukážte, že podzväzy $(Y, \vee, \wedge), (Z, \vee, \wedge)$ sú izomorfné.

Riešenie. Pri riešení tejto úlohy by sme mohli postupovať tak, ako sme boli zvyknutí pri algebraických štruktúrach s jednou operáciou, teda by sme pracovali s operačnými tabuľkami, teraz by mala každá štruktúra dve tabuľky. Pri hľadaní vhodnej bijekcie by sme samozrejme zobrazili najmenší prvok jednej štruktúry na najmenší prvok druhej štruktúry a podobne by sme zobrazovali aj najväčší prvok. Pri zväzoch môžeme postupovať aj inak. Pre každý podzväz si zostrojíme hasseovský diagram.

Vidíme, že sa jedná o rovnaké štruktúry, teda podzväzy sú izomorfné a dokonca vieme nájsť hneď dve vhodné bijekcie: $f_1 = \{[1, 1], [0, 0], [a, b], [b, c]\}$ a $f_2 = \{[1, 1], [0, 0], [a, c], [b, b]\}$.

Na záver tejto kapitoly si vysvetlíme ešte jeden dôležitý pojem.

Definícia 10. *Usporiadaná množina, v ktorej pre každú podmnožinu existuje supremum i infimum, sa nazýva úplný zväz.*

Zrejme platí, že každý úplný zväz je zväz. Dá sa ukázať, že každý úplný zväz $(X, \wedge, \vee)$ má najmenší prvok (infimum množiny X vo zväze $(X, \wedge, \vee)$) a najväčší prvok (supremum množiny X vo zväze $(X, \wedge, \vee)$). Prirodzenou otázkou je, či existuje zväz, ktorý nemá najmenší, resp. najväčší prvok. S tým súvisí ďalšia otázka. Ako je to s najväčšími a najmenšími prvkami vo zväzoch na konečných a na nekonečných množinách? Dá sa ukázať, že zväz na konečnej množine je vždy úplný. Ako je to so zväzmi na nekonečných množinách, nám pomôže pochopiť nasledujúci príklad.

Príklad 11. *Pre ľubovolnú množinu (konečnú, alebo nekonečnú) X je $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ úplný zväz. Najmenším prvkom je prázdna množina, najväčším prvkom je množina X. Treba si uvedomiť, že prvkami takéhoto zväzu sú množiny, teda supremum ľubovoľnej podmnožiny, takýchto prvkov, je ich zjednotenie a infimum je ich prienik. Ak úlohu trochu zmeníme, dostaneme zväz, ktorý nie je úplný. Zmena spočíva v tom, že ak X je nekonečná množina, tak vytvoríme množinu jej všetkých konečných podmnožín a usporiadame ich inklúziou, potom dostaneme zväz, ktorý nie je úplným zväzom.*

3 Vlastnosti zväzov

V tejto kapitole sa zameriame na dôležité vlastnosti zväzov a vzťahy medzi týmito vlastnosťami.

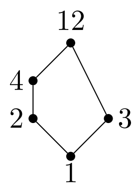
Definícia 12. *Nech* $(X, \vee, \wedge)$ *je zväz. Hovoríme, že* $(X, \vee, \wedge)$ *je*

- **modulárny**, *ak* $\forall x, y, z \in X$ *platí*
$$x \preceq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z,$$
- **distributívny**, *ak* $\forall x, y, z \in X$ *platí*
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$
- **komplementárny**, *ak v* X *existuje najmenší prvok* 0 *a najväčší prvok* 1 *a ku každému* $x \in X$ *existuje* $\overline{x} \in X$ *taký, že:*
$$x \wedge \overline{x} = 0, x \vee \overline{x} = 1.$$
Prvok $\overline{x}$ *nazývame* **komplementom** *(doplnkom) prvku* x.

Tieto pekné vlastnosti si objasníme na nasledujúcich príkladoch.

Príklad 13. *Nech* $X = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ *je množina usporiadaná reláciou* $|$, *ktorá je definovaná nasledovne*
$$\forall m, n \in X\colon\ (m|n \iff \exists p \in X\colon n = p \cdot m)\,.$$
Zistite, či sa jedná o zväz a v prípade kladnej odpovede určte jeho vlastnosti.

Riešenie. Najskôr si túto usporiadanú množinu znázorníme pomocou hasseovského diagramu:



Usporiadanie reláciou $|$ v podstate znamená, že nad každým prvkom sa nachádzajú jeho násobky. Teda najmenším prvkom je 1, lebo každý prvok z množiny X je jej násobkom. Tesne nad 1 sú všetky prvočísla a takto sa postupne dostávame k najväčšiemu prvku, ktorým je 12, tento prvok je násobkom všetkých prvkov množiny X. Z obrázku vidíme, že sa jedná o zväz. Treba si ešte ujasniť, aké budú operácie $\vee$ a $\wedge$ v tomto prípade. Zrejme $x \vee y$ je najmenší spoločný násobok prvkov x, y, $x \wedge y$ je najväčší spoločný deliteľ prvkov x, y. Vzhľadom k tomu, že množina X obsahuje len päť prvkov, tak veľmi ľahko overíme, že zväz je komplementárny. Prvok 4 má komplement prvok 3 (a naopak, prvok 3 má komplement prvok 4, tieto dva prvky sú komplementárne), podobne aj prvok 2 má komplement prvok 3, prvok 3 má teda dva komplementy a prvky 1 a 12 sú navzájom komplementárne. Tento zväz nie je modulárny, lebo

$$2 \preceq 4 \text{ a } 2 \vee (3 \wedge 4) = 2, \text{ ale } (2 \vee 3) \wedge 4 = 4.$$

Nie je ani distributívny, lebo

$$2 \vee (3 \wedge 4) = 2, \text{ ale } (2 \vee 3) \wedge (2 \vee 4) = 4.$$

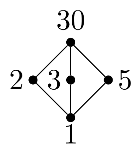
Poznámka 14. *Zväz z príkladu 13. sa nazýva* **pentagon***, často zjednodušene označovaný ako* N_5.

Príklad 15. *Nech* $X = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ *je množina usporiadaná reláciou* $|$*, ktorá je definovaná nasledovne*

$$\forall m, n \in X\colon\ (m|n \iff \exists p \in X : n = p \cdot m)\,.$$

Zistite, či sa jedná o zväz a v prípade kladnej odpovede určte jeho vlastnosti.

Riešenie. Túto úlohu budeme riešiť podobne ako predchádzajúcu, teda opäť si najskôr nakreslíme hasseovský diagram:



Z obrázku vidíme, že sa jedná o zväz. Ľahko sa overí, že je komplementárny, prvok 2 má komplementy 3 a 5, podobne aj prvok 3 má komplementy 2 a 5, prvok 5 má tiež dva komplementy 2 a 3 a prvky 1 a 30 sú si navzájom komplementárne. Vyskúšajte si overiť, že tento zväz je modulárny. Pokúste sa o efektívne riešenie. Nie je však distributívny, lebo napr.

$$2 \vee (3 \wedge 5) = 2, \text{ ale } (2 \vee 3) \wedge (2 \vee 5) = 30.$$

Poznámka 16. *Zväz z príkladu 15. sa nazýva* **diamant***, často zjednodušene označovaný ako* M_5.

Poznámka 17. *Ak množiny z predchádzajúcich príkladov rozšírime na celú množinu prirodzených čísel, dostaneme zväz* $(N, |)$*, ktorý nie je úplný (toto si poriadne premyslite). Doplnením nuly (ktorá sa stane jeho najväčším prvkom, lebo* 0 *je násobkom každého prirodzeného čísla) dostaneme úplný zväz* $(N \cup \{0\}, |)$.

Predchádzajúce príklady nám objasnili nielen vlastnosti zväzov, ale šikovný čitateľ si po ich vyriešení asi uvedomil aj vzťahy medzi týmito vlastnosťami. My si postupne uvedieme tvrdenia, ktoré nám zjednodušia klasifikáciu zväzov.

Veta 18. *Každý distributívny zväz je modulárny.*

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme priamo. Treba si uvedomiť, že sa jedná o implikáciu: Ak je zväz distributívny, potom je tento zväz modulárny. Teda predpokladáme, že zväz je distributívny a zároveň $x \preceq z$. Potrebujeme dokázať, že $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. Postupne použijeme distributívny zákon a fakt, že zo vzťahu $x \preceq z$ vyplýva, že $x \vee z = z$. Potom

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge z.$$

Dôkaz bol naozaj veľmi jednoduchý. Dôležitejšie je však vedieť správne toto tvrdenie aplikovať. Ak o zväze vieme, že je distributívny, vieme isto, že je aj modulárny. Ak zväz nie je modulárny, nie je ani distributívny. Ak vieme, že je modulárny, tak môže ale nemusí nutne byť aj distributívny, pekným príkladom je zväz M_5. Veta tiež nič nehovorí o prípade, ak zväz nie je distributívny. O distributivite nám pomôže rozhodnúť nasledujúce tvrdenie.

Veta 19. *Nech $(X, \vee, \wedge)$ je distributívny zväz. Potom každý prvok v X má najviac jeden komplement.*

Poznámka 20. *Dôkaz Vety 19. prenechávame študentom ako jednoduché cvičenie. Doporučujeme dokazovať sporom. Študenti toto tvrdenie často nesprávne používajú. Treba si uvedomiť, že sa jedná o implikáciu. Ak zistíme, že zväz obsahuje prvok, ktorý má viac ako jeden komplement, je isté, že zväz nemôže byť distributívny. Ak ale majú všetky prvky zväzu maximálne jeden komplement, tak to neznamená, že zväz je distributívny. V rozhodovaní o distributivite a modularite nám pomôže nasledujúce tvrdenie. Pripomíname, že zväzom N_5, M_5 sme sa podrobne venovali v príkladoch 13., 15., tieto príklady sú zároveň dôkazom nasledujúcich ekvivalencií v smere „$\Rightarrow$“.*

Veta 21. *Zväz $(X, \vee, \wedge)$ je*

- *modulárny $\iff$ neobsahuje podzväz izomorfný s N_5.*
- *distributívny $\iff$ neobsahuje podzväz izomorfný s M_5 ani N_5.*

Poznámka 22. *Príjemné je, že sa jedná o ekvivalencie a teda pri rozhodovaní napr. o distributivite, nám stačí zistiť, či zväz obsahuje ako podzväz N_5 alebo M_5. Ak obsahuje aspoň jeden z nich, tak nie je distrubutívny. Ak neobsahuje ani jeden z nich (pozor, to, že ich tam nenájde napr. študent X, ešte neznamená, že sa to nemusí podariť študentovi Y), tak zväz je distributívny.*

4 Booleove algebry

V matematickej logike sme pracovali nad dvojprvkovou množinou $\{0,1\}$, definovali sme si logické spojky konjunkciu, disjunkciu a negáciu. Tieto logické spojky môžeme chápať ako operácie na množine $\{0,1\}$. Teda dostávame algebraickú štruktúru s dvomi binárnymi a jednou unárnou operáciou, tzv. Booleovu algebru. Pripomíname, že n–árna operácia na množine X je zobrazenie z X^n do X. Pre $n = 0$ je operácia nulárna. Formálne ide o predpis, ktorý bez vstupu vráti nejakú hodnotu. Niekedy je výhodné pracovať s konštantami ako s nulárnymi operáciami. S dvomi nulárnymi operáciami sa zoznámime v Definícii 23.. V prípade $n = 1$ takúto operáciu nazývame unárna, v prípade $n = 2$ hovoríme o binárnej operácii. Často používaná unárna operácia je napríklad odmocnina, alebo už spomínaná negácia. Pojem Booleovej algebry je všeobecnejší, teda uvedená štruktúra je len jej špeciálny prípad.

Rozsah a dôležitosť tejto analógie objasnil ako prvý britský matematik George Boole (1815-1864), ktorý položil základy algebraickej teórie množín. V tejto kapitole ukážeme ako Booleove algebry súvisia so zväzmi.

Definícia 23. *Nech* $(X, \oplus, \otimes, ', 0, 1)$ *je algebra s dvoma binárnymi operáciami* $\oplus, \otimes$ *unárnou operáciou* $'$ *a dvoma nulárnymi operáciami* $0, 1$. *Potom* $(X, \oplus, \otimes, ', 0, 1)$ *je Booleova algebra, práve vtedy, keď sú pre všetky* $x, y, z \in X$ *splnené tieto podmienky:*

- $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z), \quad (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z),$
  *(***asociativita***)*
- $x \oplus y = y \oplus x, \quad x \otimes y = y \otimes x,$
  *(***komutativita***)*
- $x \oplus (y \otimes z) = (x \oplus y) \otimes (x \oplus z),$
  $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z),$
  *(***distributivita***)*
- $x \oplus 0 = x, \quad x \otimes 1 = x,$
- $x \oplus x' = 1, \quad x \otimes x' = 0.$

Z vlastností, ktoré sú uvedené v Definícii 23., sa dajú odvodiť mnohé ďalšie. Dvom z nich sa venujeme v nasledujúcom príklade. Dôkazom ďalších sa budete venovať na cvičení. Spomenieme aspoň známe De Morganove zákony: $(x \otimes y)' = x' \oplus y'$, $(x \oplus y)' = x' \otimes y'$.

Príklad 24. *Dokážte, že v každej Booleovej algebre platí:*

1. $x \otimes 0 = 0,$
2. $(x \otimes y)' = x' \oplus y'.$

Riešenie.

1. Zrejme platí, že $x \otimes x' = 0$, potom $x \otimes 0 = x \otimes (x \otimes x')$. Vzhľadom k tomu, ze $\otimes$ je asociatívna operácia, tak $x \otimes (x \otimes x') = (x \otimes x) \otimes x'$ a na záver stačí aplikovať idempotenciu

$$x \otimes 0 = x \otimes (x \otimes x') = (x \otimes x) \otimes x' = x \otimes x' = 0.$$

2. Treba si uvedomiť, že v podstate máme ukázať, že doplnok k $x \otimes y$ je $x' \oplus y'$, teda by malo platiť toto:

$$(x \otimes y) \otimes (x' \oplus y') = 0,$$

a

$$(x \otimes y) \oplus (x' \oplus y') = 1.$$

Dokážeme prvú rovnosť a tú druhú prenechávame študentom na precvičenie. Upravíme výraz $(x \otimes y) \otimes (x' \oplus y')$, najskôr „roznásobíme zátvorky“:

$$(x \otimes y) \otimes (x' \oplus y') = (x \otimes y \otimes x') \oplus (x \otimes y \otimes y').$$

Využijeme komutatívnosť a rovnosť $x \otimes x' = 0$ a dostaneme:

$$(x \otimes y \otimes x') \oplus (x \otimes y \otimes y') = (x \otimes x' \otimes y) \oplus (x \otimes y \otimes y') = (0 \otimes y) \oplus (x \otimes 0).$$

Teraz už len aplikujeme rovnosť z prvej časti úlohy a dostaneme vytúžený výsledok:

$$(0 \otimes y) \oplus (x \otimes 0) = 0 \oplus 0 = 0.$$

Definícia 25. *Nech $(X, \vee, \wedge)$ je distributívny a komplementárny zväz s najmenším prvkom $0 \in X$ a najväčším prvkom $1 \in X$. Potom $(X, \vee, \wedge)$ nazývame* **Booleovým zväzom.**

Poznámka 26. *Dá sa ukázať, že ak $(X, \vee, \wedge)$ je Booleov zväz, tak usporiadaná šestica $(X, \vee, \wedge, ', 0, 1)$, kde $' : X \to X$ je operácia komplementu na X, je Booleovou algebrou na X. A naopak, dá sa ukázať, že každá Booleova algebra je Booleov zväz. Teda tieto dva pojmy sú ekvivalentné a poskytujú nám dva rôzne pohľady na tú istú štruktúru.*

Pre lepšie pochopenie Booleových zväzov si v nasledujúcich príkladoch ukážeme, aký vplyv na štruktúru zväzu ma komplementarita a distributivita. Ešte predtým definujeme pojem atómu zväzu, ktorý je kľúčový pri klasifikácii konečných Booleových algebier.

Definícia 27. *Nech $(X, \vee, \wedge)$ je Booleov zväz s najmenším prvkom $0 \in X$. Hovoríme, že $a \in X$ je* **atóm** *zväzu X, ak pokrýva najmenší prvok 0.*

Príklad 28. *Nájdite všetky neizomorfné Booleove zväzy na n–prvkovej množine, pričom $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.*

Riešenie. Úlohu budeme riešiť postupne pre jednotlivé n.

1. Ak $n = 1$, tak máme jedinú možnosť ako zostrojiť zväz a tú vidíme na obrázku:

   Prvok a je zároveň najmenší, aj najväčší prvok, sám sebe je komplementom. Pre porušenie distributivity by zväz musel obsahovať buď pentagon alebo diamant ako svoj podzväz, čiže by musel mať aspoň päť prvkov. Preto platí aj distributívny zákon, teda sa jedná o Booleov zväz. Všimnite si, že v tomto prípade máme nula atómov, lebo prvok a nepokrýva žiaden prvok.

2. Podobne pre $n = 2$ máme len jednu možnosť ako zostrojiť zväz:

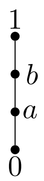
   Prvok 0 je najmenší, prvok 1 je najväčší a sú navzájom komplementárne, distributívny zákon je opäť splnený a teda aj toto je Booleov zväz. V tomto prípade má zväz jeden atóm a tým je prvok 1.

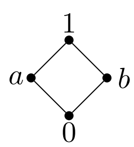
3. Pre $n = 3$ máme opäť jedinú možnosť ako zostrojiť zväz:

   V tomto prípade sa však nejedná o Booleov zväz, lebo k prvku a neexistuje komplement. Teda trojprvkový Booleov zväz neexistuje.

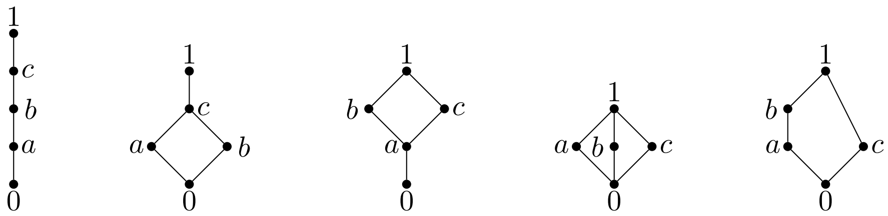
4. Ak $n = 4$, dostávame nasledujúce dva zväzy:

   Prvý z nich (podobne ako zväz pre $n = 3$) nie je komplementárny, preto nemôže byť Booleov. Druhý zväz má aj najmenší prvok, je ním prvok 0 a aj najväčší prvok, je ním prvok 1, je aj komplementárny, aj distributívny. Distributivita plynie z toho, že zväz neobsahuje ako podzväz ani diamant, ani pentagon. Komplementarita sa v tomto prípade jednoducho overí, prvky $0, 1$ sú navzájom komplementárne a prvky a, b tvoria ďalšiu komplementárnu dvojicu, teda je to Booleov zväz. V tomto prípade má dva atómy.

5. Pre $n = 5$ dostávame až päť neizomorfných zväzov:

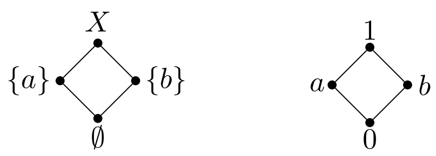


Prvé tri z nich nie sú komplementárne a ďalšie dva nie sú distributívne. Teda ani jedna z týchto piatich možností nevyhovuje zadaniu, čo znamená, že neexistuje päťprvkový Booleov zväz.

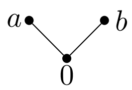
V nasledujúcom príklade využijeme vedomosti získané v Príklade 28. a ukážeme, ako spolu súvisia zväzy nad potenčnými množinami a konečné Booleove algebry.

Príklad 29. *Nech $X = \{a, b\}$. Zistite, či zväz $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ a Booleov zväz, ktorý má dva atómy sú izomorfné.*

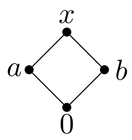
Riešenie. V Príklade 28. sme našli iba jeden Booleov zväz s dvomi atómami a tým bol štvorprvkový zväz, označme si ho $(L, \vee, \wedge)$, kde $L = \{0, 1, a, b\}$. Nakreslíme hasseovské diagramy zväzov $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$, $(L, \vee, \wedge)$:



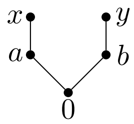
V tomto prípade sa evidentne jedná o izomorfné zväzy. Otázkou ostáva, či $(L, \vee, \wedge)$ je jediný Booleov zväz s dvomi atómami. Teda musíme vyriešiť otázku, akú štruktúru by mohol mať zväz, ktorého hasseovský diagram má prvé dve úrovne takéto:

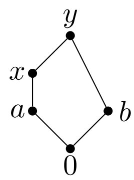


Teda ako by sme pokračovali v kreslení vyšších úrovní diagramu, aby sme neporušili komplementaritu, ani distributivitu a samozrejme, aby mal zväz aj najväčší prvok. Jedna z možností je, že prvky a, b bude pokrývať spoločný prvok x:



Ak $x \neq 1$, tak evidentne porušíme komplementaritu, ak $x = 1$, tak dostaneme znovu zväz $(L, \vee, \wedge)$. Pokračovať by sme však mohli aj tak, že prvky a, b nebude pokrývať spoločný prvok:





Takéto pokračovanie vedie k tomu, že niektoré prvky budú mať viac ako jeden komplement, teda k porušeniu distributivity. To znamená, že existuje jediný Booleov zväz s dvomi atómami a ten je izomorfný so zväzom $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$.

Ak si zhrnieme výsledky týchto príkladov, tak vidíme, že počet prvkov Booleovho zväzu nemôže byť ľubovolné prirodzené číslo. Zistili sme, že Booleove zväzy mali $1, 2$ a 4 prvky, pričom mali postupne $0, 1$ a 2 atómy. To nás privádza k myšlienke, že počet prvkov každej Booleovej algebry je 2^n, kde n je počet jej atómov. Okrem toho sa dá dokázať, že dve Booleove algebry s rovnakým počtom prvkov sú izomorfné.

Po predchádzajúcich príkladoch asi nikoho neprekvapí záverečné tvrdenie, ktoré charakterizuje štruktúru konečných Booleových zväzov.

Veta 30. *Nech $(X, \vee, \wedge)$ je konečný Booleov zväz. Potom $(X, \vee, \wedge)$ je izomorfný so zväzom $(\mathcal{P}(Y), \cup, \cap)$, kde Y je množina všetkých atómov zväzu $(X, \vee, \wedge)$.*

5 Úlohy na precvičenie

1. Na množine $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ sú dané relácie $R_i \colon i \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ nasledovne:

   (a) $R_1 = \{(a, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, f), (d, f), (e, f)\}$,
   (b) $R_2 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, f), (c, f), (d, f), (e, f)\}$,
   (c) $R_3 = \{(a, b), (a, c), (c, d), (b, e), (e, f), (d, f)\}$,
   (d) $R_4 = \{(a, b), (a, c), (c, d), (b, e), (b, d), (e, f), (d, f)\}$,
   (e) $R_5 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, e), (d, e), (e, f)\}$,
   (f) $R_6 = \{(a, b), (a, c), (c, d), (c, e), (b, d), (b, e), (d, f), (e, f)\}$,
   (g) $R_7 = \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, e), (d, e), (e, f)\}$.

   Ku každej z nich napíšte najmenšiu (vzhľadom na inklúziu) reláciu R_i^*, pre ktorú platí:

   - $R_i \subseteq R_i^*$,
   - R_i^* je reflexívna a tranzitívna.

   Pre každú reláciu R_i^* zistite, či (M, R_i^*) je zväz. V prípade kladnej odpovede zistite, či (M, R_i^*) je distributívny alebo komplementárny zväz.

2. Vypíšte všetky podzväzy zväzov z predchádzajúcej úlohy.

3. Nájdite všetky neizomorfné zväzy na n–prvkovej množine, pričom $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4. Nájdite všetky neizomorfné distributívne zväzy na 5–prvkovej množine.

5. Nech $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ je množina usporiadaná reláciou $|$, ktorá je definovaná nasledovne

   $$\forall m, n \in X \colon\ (m|n \iff \exists p \in X \colon n = p \cdot m)\,.$$

   Zistite, či sa jedná o zväz a v prípade kladnej odpovede určte jeho vlastnosti.

6. Na množine $M = \{a, b, c, 2, 4, 8\}$ je daná relácia $|$, ktorá je definovaná nasledovne

   $$\forall m, n \in \mathbb{N} \colon\ (m|n \iff \exists p \in \mathbb{N} \colon n = p \cdot m)\,.$$

   Určte $a, b, c \in \mathbb{N}$ tak, aby $(M, |)$ bol zväz. Nájdite aspoň dve rôzne riešenia.

7. Nech $M = \{a, b, c, d\}$. Nakreslite hasseovský diagram pre $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, zistite, či je to zväz. V prípade kladnej odpovede určte jeho vlastnosti.

8. Na množine $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ zostrojte zväz, ktorý
   (a) bude komplementárny, ale nebude distributívny,
   (b) bude distributívny a komplementárny zároveň.
   (c) bude distributívny ale nebude komplementárny.
   (d) nebude distributívny ani komplementárny.

9. V Booleovej algebre $(X, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ zjednodušte výrazy:
   (a) $\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$,
   (b) $(x \vee y) \vee (z \vee x) \vee (y \vee z)$,
   (c) $(x \wedge y) \vee (z \wedge x) \vee (\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}})$.

10. V Booleovej algebre $(X, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ dokážte:
    (a) $x \vee 1 = 1$,
    (b) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$,
    (c) $y \leq \overline{x} \iff x \wedge y = 0$.