1 Množiny a logika

1.1 Úvod do štúdia

Znalosť elementárnych matematických poznatkov sa ukázala prospešnou pre život človeka. Celá história rozvoja ľudskej spoločnosti je preto spätá s rozvojom matematiky. V minulosti rozvoj matematických poznatkov súvisel s rozvojom prírodných vied, preto sa matematika často zaraďuje medzi prírodné vedy. Podstata matematiky je však oveľa širšia ako len skúmanie vzťahov v živej, či neživej prírode. Matematika vytvorila na základe abstrakcií ideálne objekty, prostredníctvom, ktorých môže skúmať aj ekonomické procesy, jazykové zákonitosti, sociologický výskum atď. Dokonca sa dá povedať, že matematiku používajú všetky vedné oblasti ako vhodný jazyk, pomocou ktorého formulujú odhalené zákonitosti a úroveň a zrelosť príslušnej vednej disciplíny je do značnej miery závislá od miery používania matematického jazyka, metód a modelov.

V rámci predmetu Diskrétna matematika sa postupne zoznámite s dôležitými matematickými pojmami, ale najmä by ste si mali osvojiť matematický jazyk, ktorý sa od bežného jazyka líši nielen symbolmi, ale aj spôsobom tvorenia výrokov, ktorými sú v tomto jazyku špeciálne formuly. Dôvod pre používanie predmetového, matematického, jazyka je nielen to, že niektoré matematické poznatky by sa v bežnom jazyku vyjadrovali ťažkopádne, ale aj v tom, že bežný jazyk umožňuje utváranie rôznych paradoxov. Napríklad, ak uvažujeme o výrokoch

1. $2 + 2 = 4$.
2. $2 + 2 = 5$.
3. Práve jeden z týchto výrokov (t.j. 1.-3.) je pravdivý.

Ako je to s výrokom 3.? Ak by bol výrok 3 pravdivý, tak by to znamenalo, že výroky 1 a 2 musia byť nepravdivé, ale zrejme výrok 1 pravdivý je. Ak by naopak bol výrok 3 nepravdivý, potom by tam museli byť aj zvyšné dva výroky nepravdivé (to by bolo nula pravdivých výrokov), alebo by zvyšné dva výroky museli byť pravdivé. Ani jedna z týchto možností však nie je možná a preto sa jedná o tzv. paradox. Tento paradox vznikol preto, lebo výrok 3 hovorí o pravdivosti výrokov 1-3, teda sa jedná o tzv. sebavzťažné výroky a proti ich utváraniu už protestoval starogrécky logik Chrysippos. Ešte uvedieme ďalší známy paradox holiča, ktorý pochádza od B. Russela. Holič má nad vchodovými dverami reklamný nápis: „Holím všetkých občanov, ktorí sa neholia sami.“ Ako je to so samotným holičom? Ak sa holí sám, tak reklamný nápis je nepravdivý, ale nepravdivý je aj v tom prípade, ak sa sám neholí. Bude treba si zvyknúť aj na štruktúru matematických textov. Niektoré pojmy a objekty sa nedefinujú, sú to tzv. primitívne pojmy, ich význam je nám intuitívne známy, vychádza zo základných postulátov, axióm. V teórii množín je to pojem množina a byť prvkom množiny. Ostatné pojmy a objekty vymedzujeme v definíciách. Vlastnosti a vzťahy medzi objektami sú zvyčajne zhrnuté do matematických tvrdení, ktorých pravdivosť sa overuje, teda je potrebné ich dokázať. Definície a tvrdenia majú zaužívané formy.

Prajem príjemné čítanie a na povzbudenie jeden citát.
Winston Churchill:„*Chcete vyniknúť? Musíte pracovať, kým sa ostatní budú baviť.* “

1.2 Úvod do teórie množín

V úvodnej kapitole sa budeme venovať predovšetkým množinám, ktoré nás budú sprevádzať celým štúdiom matematiky. Pojem množina patrí medzi najzákladnejšie pojmy v matematike, dá sa povedať, že teória množín je vhodný základ pre všetky matematické disciplíny. Primitívnymi pojmami v teórii množín sú množina, prvok množiny, resp. byť prvkom množiny.

Rozsah týchto pojmov sa vymedzuje pomocou základných postulátov–axióm, ktoré o nich predpokladáme. Všetky ostatné pojmy teórie množín možno pomocou nich postupne definovať. Zrejme tieto základné pojmy sú už študentom známe z predchádzajúceho štúdia. Pod množinou teda intuitívne rozumieme súhrn (skupinu, súbor) nejakých navzájom odlišných objektov, ktoré podľa nejakého kritéria tvoria jeden celok.

Množina je určená vtedy, ak o každom objekte možno rozhodnúť, či je jej prvkom, alebo nie je jej prvkom. Ak prvok x je prvkom množiny A, tak píšeme $x \in A$, v opačnom prípade píšeme $x \notin A$. Ak napr. prvkami množiny A sú čísla $1, 2, 3$ a iné prvky množina A nemá, zapisujeme to takto $A = \{1, 2, 3\}$, ale rovnako správny zápis bude aj $A = \{2, 1, 3\}$, na poradí prvkov totiž nezáleží. V takomto prípade hovoríme, že množina je daná vymenovaním prvkov. Prázdnu množinu, teda množinu, ktorá nemá žiaden prvok, budeme označovať symbolom $\emptyset$, alebo takto $\{\}$. Študenti ju zvyknú nesprávne zapisovať takto $\{\emptyset\}$, toto je však jednoprvková množina, ktorej prvkom je prázdna množina.

Zo základnej a strednej školy určite poznáte číselné množiny, ktoré sa označujú nasledovne

- $\mathbb{N}$ – množina prirodzených čísel,
- $\mathbb{Z}$ – množina celých čísel,
- $\mathbb{Q}$ – množina racionálnych čísel,
- $\mathbb{R}$ – množina reálnych čísel,
- $\mathbb{C}$ – množina komplexných čísel.

Poznámka 1. *V literatúre sa niekedy aj číslo* 0 *považuje za prirodzené číslo. Aby nedochádzalo k nedorozumeniam, tak v týchto textoch bude vždy vyznačené, ak budeme s nulou pracovať ako s prirodzeným číslom (symbolicky ako* $\mathbb{N}_0$*, alebo slovne).*

Poznámka 2. *Už aj v tomto krátkom úvode sme si mohli všimnúť, že niektoré množiny majú konečne veľa prvkov a iné nekonečne veľa prvkov. Teda poznáme množiny konečné a nekonečné. Ak symbolom* M *označíme nejakú množinu, počet prvkov (jej mohutnosť, alebo kardinalitu) označujeme symbolom* $|M|$*. Pri konečných množinách je to jednoduché, napríklad* $|\emptyset| = 0, |\{1, \star, \circ\}| = 3, |\{1, \{\star, \circ\}\}| = 2$*. Nekonečné množiny rozlišujeme spočítateľné a nespočítateľné. Spôsobu, ako ich od seba odlíšiť, sa budeme venovať až v časti o zobrazeniach.*

Definícia 3. *Hovoríme, že množina* A *je podmnožinou množiny* B *a píšeme* $A \subseteq B$*, ak každý prvok množiny* A *je prvkom množiny* B*. Ak chceme zdôrazniť, že* $A \subseteq B$ *a* $A \neq B$*, tak píšeme* $A \subset B$ *a hovoríme, že* A *je vlastná podmnožina množiny* B*.*

Poznámka 4. *Pre každú množinu* A *platí:* $\emptyset \subseteq A,\ A \subseteq A$*.*

Dve množiny A, B sa rovnajú vtedy, keď obsahujú tie isté prvky. Tento vzťah sa dá vyjadriť pomocou práve definovaného pojmu podmnožina.

Definícia 5. *Hovoríme, že množiny* A, B *sa rovnajú, ak je splnené, že* $A \subseteq B$ *a zároveň aj* $B \subseteq A$*.*

Treba si dobre premyslieť rozdiel medzi $\in$ a $\subseteq$. Ak $A = \{1, 2, 3\}$, tak $1 \in A$ a $\{1\} \subseteq A$. Platí aj $\{1\} \in A$? Neplatí, lebo prvok $\{1\}$ sa nevyskytuje v množine $\{1, 2, 3\}$. Je totiž rozdiel, či napíšeme 1 alebo $\{1\}$, sú to dva rôzne prvky. Skúste vymyslieť dvojicu množín A, B tak, aby $A \subseteq B$ a zároveň $A \in B$.

Ak budeme chcieť pokračovať vo výklade ďalej, nutne budeme potrebovať logické pojmy, bez logických pojmov a logického usudzovania je matematika nemysliteľná. Preto si teraz postupne veľmi stručne zopakujeme výrokový a predikátový počet.

1.3 Výrokový počet

Primitívny pojem, ktorý vo výrokovom počte nedefinujeme, je pojem výrok. Pod výrokom rozumieme každý oznam, u ktorého má zmysel hovoriť, či je, alebo nie je pravdivý, pričom z týchto možností nastáva práve jedna. Vo výrokovom počte sa nebudeme zaoberať, či je nejaký výrok pravdivý, alebo nepravdivý. Budeme sa venovať najmä spôsobu vytvárania tzv. zložených výrokov. Tieto zložené výroky tvoríme pomocou logických spojok a tým sa teraz postupne budeme venovať.

Ak A je výrok, tak $\neg A$ je jeho negácia, teda výrok, pre ktorého pravdivostnú hodnotu platí: ak A je pravdivý, tak $\neg A$ je nepravdivý a naopak, ak A je nepravdivý, tak $\neg A$ je pravdivý. Ak je výrok A zapísaný v bežnom jazyku, tak jeho negáciu tvoríme napr. pomocou slovného spojenia „nie je pravda, že “, zámenou „je“ za „nie je“, prípadne pomocou predpony „ne“.

Napríklad, ak máme výrok: Číslo 2 je párne. Tak jeho negáciou je: Číslo 2 nie je párne (alebo: Číslo 2 je nepárne).

Ak A, B sú výroky zapísané v bežnom jazyku, tak „A a B“ je opäť výrok a nazývame ho konjunkciou výrokov A, B. Keď sú výroky A, B zapísané pomocou matematického jazyka, tak spojku „a“ nahradíme symbolom konjukcie $\wedge$. Konjunkcia výrokov A, B je pravdivá iba vtedy, keď výroky A, B sú pravdivé.

Výroky A, B môžeme spojiť aj spojkou „alebo“, symbolicky zapisujeme $A \vee B$ a vtedy hovoríme o disjunkcii. Disjunkcia výrokov A, B je pravdivá, pokiaľ aspoň jeden z výrokov A, B je pravdivý (teda aj oba výroky môžu byť zároveň pravdivé).

Najčastejšie sa v matematike stretávame so spojením „ak A, tak B“, toto spojenie symbolicky značíme $A \Rightarrow B$ a nazývame ho implikácia s predpokladom A a tvrdením B. Čítame to aj „z A vypýva B“, alebo „A implikuje B“, resp. „keď A, potom B“. Implikácia $A \Rightarrow B$ je nepravdivá jedine v tom prípade, ak A platí a B neplatí.

Posledným spojením výrokov A, B je „A práve vtedy, keď B“, toto spojenie symbolicky značíme $A \Leftrightarrow B$ a nazývame ho ekvivalencia výrokov A, B. Ekvivalencia $A \Leftrightarrow B$ je pravdivá ak výroky A, B majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

V matematike je daná závislosť pravdivosti zložených výrokov od pravdivosti ich zložiek nasledujúcou tabuľkou.

$ph(p)$	$ph(q)$	$ph(\neg p)$	$ph(p \wedge q)$	$ph(p \vee q)$	$ph(p \Rightarrow q)$	$ph(p \Leftrightarrow q)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tvorenie zložených výrokov nepodmieňujeme ani obsahovou, ani formálnou súvislosťou ich zložiek. Teda z pohľadu matematickej logiky je korektný aj výrok „ak $2 + 2 = 5$, tak existuje trojuholník, ktorého všetky vnútorné uhly sú pravé“, dokonca je to pravdivý výrok.

Premennú, ktorej oborom je množina výrokov, nazývame výroková premenná. Z výrokových premenných tvoríme pomocou logických spojok $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ výrokové formuly. Výroky typu $A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B$ nazývame zložené výroky. Výrok, ktorý nie je zloženým výrokom, nazývame atomárny výrok.

Definícia 6. *(Zápis výrokových formúl)*

1. *Každá výroková premenná je výroková formula.*

2. *Ak φ, ψ sú výrokové formuly, tak aj $\neg(\varphi), (\varphi) \wedge (\psi), (\varphi) \vee (\psi), (\varphi) \Rightarrow (\psi), (\varphi) \Leftrightarrow (\psi)$ sú výrokové formuly.*

Poznámka 7. *Predchádzajúca definícia nehovorí o tom, ktorý zápis nie je výroková formula, v takom prípade predpokladáme, že výrokovými formulami sú len tie zápisy, u ktorých to môžeme uvedenými kritériami (1. a 2.) zdôvodniť.*

Príklad 8. *Nech A, B, C sú výrokové premenné. Zistite, či*

$$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \big((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)\big)$$

je výroková formula.

Riešenie.

a) Podľa 1. sú A, B, C výrokové formuly.

b) Podľa a) a 2. sú aj $A \Leftrightarrow B, A \wedge C, B \wedge C$ výrokové formuly.

c) Z b) a 2. vyplýva, že aj $\big((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)\big)$ je výroková formula.

d) Z b), c) a 2. vyplýva, že aj $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \big((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)\big)$ je výroková formula.

Postupnosť $A, B, C, A \Leftrightarrow B, A \wedge C, B \wedge C, \big((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)\big), (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \big((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)\big)$ sa nazýva vytvárajúcou postupnosťou formuly $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \big((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)\big)$.

Pre každú výrokovú formulu môžeme vytvoriť tabuľku pravdivostných hodnôt podľa nasledujúceho návodu:

1. Do záhlavia napíšeme členy vytvárajúcej postupnosti formuly.
2. Pod premenné vypíšeme do riadkov všetky možné n–tice utvorené z pravdivostných hodnôt $0, 1$. Ak má formula n premenných, tak n–tíc je 2^n.
3. V zhode s tabuľkou pre pravdivostné hodnoty logických spojok vypĺňame stĺpce pod ostatnými členmi vytvárajúcej postupnosti.

Pre formulu $F = (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \big((A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)\big)$ vytvoríme nasledujúcu tabuľku.

A	B	C	$A \Leftrightarrow B$	$A \wedge C$	$B \wedge C$	$(A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)$	F
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1

V matematike sú osobitne dôležité také formuly, ktoré majú v poslednom stĺpci takejto tabuľky len hodnoty 1. Takéto výrokové formuly sú pravdivé po dosadení ľubovolných výrokov za premenné. Nazývame ich tautológie. Ak Ψ, Φ sú výrokové formuly a ak $\Psi \Leftrightarrow \Phi$ je tautológia, hovoríme, že formuly Ψ, Φ sú ekvivalentné, píšmeme $\Psi \equiv \Phi$. Ak $\Psi \Rightarrow \Phi$ je tautológia, hovoríme, že Φ je logickým dôsledkom Ψ.

Pomocou tabuliek pravdivostných hodnôt vieme pre výrokové premenné A, B, C odvodiť, že platí:

1. $A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$,

2. $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$, $\quad (A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$,
3. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$, $\quad (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$,
4. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, $\quad A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,
5. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$, $\quad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$,
6. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big)$,
7. $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$,
8. $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$.

Poznámka 9. *Tieto ekvivalencie si dokážeme na cvičeniach a neskôr ich budeme často používať najmä pri dôkazoch rovnosti množín. Posledná ekvivalencia je obzvlášť dôležitá, implikácia $\neg B \Rightarrow \neg A$ je známa ako obmenené tvrdenie k implikácii $A \Rightarrow B$. Táto ekvivalencia má aj špeciálny názov, jedná sa o princíp kontrapozície.*

1.4 Predikátový počet

Vo výrokovom počte sme sa zaoberali tvorbou zložených výrokov a závislosťou ich pravdivosti na pravdivosti jednotlivých zložiek. Štruktúre atomárnych výrokov sme sa nevenovali. Toto urobíme až v tejto časti, pričom sa zameriame na štruktúru takých typov výrokov, s ktorými sa v matematike stretávame najčastejšie. Najskôr spomenieme pomocné pojmy, ktoré budeme potrebovať pre pochopenie základných definícií predikátového počtu. Všetky tieto pojmy budeme počas semestra podrobne študovať, preto ich teraz objasníme zjednodušene. Už na strednej škole ste sa stretli s pojmom usporiadaná dvojica, resp. n–tica. Usporiadaná dvojica je matematický objekt, ktorý má pevne danú prvú a druhú zložku (teda na poradí záleží), napr. $[a, b]$, kde a je prvá zložka a b je druhá zložka. Podobne by sme mohli zaviesť usporiadanú n–ticu $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, kde a_k je jej k–ta zložka. S usporiadanými n–ticami súvisí pojem kartézsky súčin.

Definícia 10. *Nech A, B sú množiny. Pod kartézskym súčinom $A \times B$ množiny A a možiny B rozumieme množinu všetkých usporiadaných dvojíc, ktorých prvá zložka je z množiny A a druhá zložka je z množiny B. Ak $A = B$, tak namiesto $A \times A$, píšeme A^2.*

Podobne vieme definovať aj kartézsky súčin n–množín, ako množinu usporiadaných n–tíc, zapisujeme $A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$. Ak $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$, zapisujeme A^n. Podrobne sa budeme kartézskemu súčinu venovať pri množinových operáciách, tam bude definícia doplnená o formálny zápis. V matematike sa často zaoberáme skúmaním vzťahov medzi objektami, napríklad už na základnej škole ste porovnávali prirodzené čísla. Rozsah pojmu vzťah nie je vymedzený žiadnou definíciou ani skupinou postulátov (axióm) Preto zavedieme pojem binárna relácia, ktorý chápeme ako množinu usporiadaných dvojíc. Ak R je relácia a dvojica $[a, b]$ je jej prvkom, tak to zapisujeme $[a, b] \in R$, ale často aj takto aRb. Teda napríklad $<$ je relácia na množine prirodzených čísel, v geometrii ste sa stretli s reláciou kolmosť $\perp$, prípadne rovnobežnosť $\|$. Všeobecne by sme mohli uvažovať o n–árnej relácii, my sa však budeme venovať najmä binárnym reláciám, a preto ich budeme zjednodušene nazývať relácie. Čoskoro budeme reláciám venovať hodne času, zatial nám stačí táto stručná informácia. Posledný pojem, ktorý potrebujeme, je pojem operácie. S operáciami sa stretávate od začiatku školskej dochádzky, je to napríklad sčítanie, odčítanie, atď. Teda, ak hovoríme o binárnej operácii, tak k dvom operandom (napríklad k dvom číslam 3 a 5) je istým spôsobom jednoznačne priradený výsledok (napríklad $3 + 5 = 8$). Tento spôsob určuje práve operácia (v našom prípade to bolo sčítanie). Teraz sa už môžeme posunúť k prvej definícii predikátového počtu.

Definícia 11. *Nech A je množina. Term nad A je definovaný takto:*

1. *Každá premenná, ktorej oborom je množina A, je term nad A.*
2. *Symbol každého prvku z A je term nad A.*
3. *Ak f je n–árna operácia, o ktorej platí $D(f) \subseteq A^n, H(f) \subseteq A$ a ak $t_1, \cdots, t_n$ sú termy nad A, tak $f(t_1, \cdots, t_n)$ je term nad A.*

Príklad 12. *Napríklad ak budeme pracovať na množine reálnych čísel a x, y, z budú reálne premenné, potom $\big((x+y)\cdot z\big)\cdot(x-z)$ je term nad $\mathbb{R}$, lebo*

a) x, y, z sú termy podľa 1.

b) Podľa 3. sú aj $x+y, x-z$ termy.

c) Podľa b) a 3. je $(x+y)\cdot z$ term.

d) Podľa b), c) a 3. je potom aj $\big((x+y)\cdot z\big)\cdot(x-z)$ term.

Ale napríklad $x > 5$ nie je term nad $\mathbb{R}$, lebo $<$ nie je ani premenná, ani symbol z množiny $\mathbb{R}$, ani operácia.

Na základnej a strednej škole ste sa s termami bežne stretávali, každý korektne zapísaný algebraický výraz je term.

Definícia 13. *Nech A je množina. Ak t_1, t_2 sú termy, R je relácia definovaná na A, tak $t_1 R t_2$ je atomická formula predikátového počtu nad A. Každá atomická formula predikátového počtu nad A je formula predikátového počtu nad A. Ak φ, ψ sú formuly predikátového počtu nad A, tak aj $\neg(\varphi), (\varphi)\wedge(\psi), (\varphi)\vee(\psi), (\varphi)\Rightarrow(\psi), (\varphi)\Leftrightarrow(\psi)$, sú formuly predikátového počtu nad A. Ak x je premenná a $\varphi(x)$ je formula s premennou x, ktorá neobsahuje $\forall x$ ani $\exists x$, tak $\forall x, \varphi(x)$ aj $\exists x, \varphi(x)$ sú formuly predikátového počtu.*

Poznámka 14. *Príkladmi atomických formúl sú rovnice a nerovnice. Zápis $\exists x$ čítame „existuje x“, je to existenčný kvantifikátor. Použijeme ho vtedy, ak chceme povedať, že existuje aspoň jeden prvok z množiny, nad ktorou pracujeme, pre ktorý platí formula za kvantifikátorom. Zápis $\forall x$ čítame „pre každé x“, je to všeobecný kvantifikátor. Použijeme ho vtedy, ak chceme povedať, že pre všetky prvky z množiny, nad ktorou pracujeme, platí formula za kvantifikátorom.*
Ak x, y, z sú reálne premenné, tak potom

1. $x > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0$,
2. $\exists x\colon (x^2 - 1 = 0)$,
3. $\forall x\colon (x^2 \geq 0)$,

sú podľa predchádzajúcej definície formuly predikátového počtu nad $\mathbb{R}$. Zdôvodnenie si dobre premyslite.

Definícia 15. *Nech Ψ, Φ sú formuly predikátového počtu. Hovoríme, že Ψ je podformulou formuly Φ, ak formulu Ψ môžeme získať z formuly Φ vynechaním niekoľkých symbolov na začiatku a na konci (niekoľko môže znamenať aj 0).*

Príklad 16. *Ak x je reálna premenná, tak potom $(x+2<6) \Rightarrow (x^2+1>7)$ a $x+2<6$ sú formuly predikátového počtu nad $\mathbb{R}$ a podľa predchádzajúcej definície je $x+2<6$ podformulou formuly $(x+2<6) \Rightarrow (x^2+1>7)$.*

Definícia 17. *Ak* $\forall x\colon (V)$, *resp.* $\exists x\colon (V)$ *je podformula formuly* Ψ, *tak* V *nazývame dosahom príslušného výskytu kvantifikátora* $\forall x$, *resp.* $\exists x$ *vo formule* Ψ.

Príklad 18. *Napríklad vo formuli nad* $\mathbb{R}$

$$\big(\forall x\colon (\exists y\colon x \leq y)\big) \wedge \forall x\colon (x < 0 \Rightarrow x < x^2),$$

má prvý výskyt kvantifikátora $\forall x$ *dosah* $\exists y\colon x \leq y$, *druhý výskyt kvantifikátora* $\forall x$, *má dosah* $x < 0 \Rightarrow x < x^2$, *dosah kvantifikátora* $\exists y$, *je* $x \leq y$.

Definícia 19. *Výskyt premennej* x *vo formule sa nazýva*

- *viazaným, ak sa nachádza v dosahu kvantifikátora* $\forall x$ *alebo* $\exists x$.
- *voľným, ak nie je viazaný.*

Definícia 20. *Premenná sa nazýva voľnou vo formule* V, *ak má aspoň jeden voľný výskyt vo formule* V. *Premenná sa nazýva viazanou vo formule* V, *ak má všetky výskyty vo formule* V *viazané. Formulu predikátového počtu nazývame uzavretou formulou, ak všetky jej premenné sú viazané. Formulu predikátového počtu nazývame výrokovou formou, ak aspoň jedna jej premenná je voľná.*

Poznámka 21. *Typickým príkladom výrokovej formy sú rovnice, nerovnice. Ak vo výrokovej forme nad množinou* A *s voľnou premennou* x, *dosadíme za* x *(za všetky voľné výskyty premennej* x*) nejaký prvok* $a \in A$, *tak môžeme, ale aj nemusíme dostať výrok. Napríklad ak dosadíme do nasledujúcej výrokovej formy nad* $\mathbb{R}$

$$4 - x = \frac{3}{x}$$

za x *číslo* 1, *dostaneme pravdivý výrok, ak dosadíme číslo* 2, *dostaneme nepravdivý výrok. Ak ale dosadíme* 0, *tak na pravej strane rovnice dostaneme zápis* $\frac{3}{0}$, *ktorý nereprezentuje žiadne reálne číslo (aj keď Chuck Norris by mal možno iný názor). Množinu všetkých takých prvkov, po dosadení ktorých dostaneme pravdivý výrok, nazývame obor pravdivosti výrokovej formy. Pre nás bude v štúdiu množín práve toto dôležité, lebo množiny okrem vymenovania, môžeme zadávať aj ako obor pravdivosti výrokovej formy, čo zapisujeme takto*

$$M = \{x \in A\colon V(x)\}.$$

Znamená to, že množina M *obsahuje všetky prvky z množiny* A, *pre ktoré je výroková forma* V *s voľnou premennou* x *pravdivým výrokom. Napríklad interval* $\langle 1, 3)$ *môžeme zapísať aj nasledujúcim spôsobom*

$$M = \{x \in \mathbb{R}\colon 1 \leq x < 3\}.$$

Jedným z najdôležitejších výsledkov tohto semestra by malo byť to, že študenti budú vedieť s porozumením čítať matematické texty a budú vedieť matematickým jazykom (teda pomocou formúl predikátového počtu) správne zapisovať svoje postupy a výsledky. Toto treba trénovať. My si teraz aspoň na niekoľkých príkladoch ukážeme, ako trénovať. Ak máme napríklad takéto tvrdenie

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon x^2 \geq 0,$$

tak ho čítame: „Pre každé reálne číslo platí, že jeho druhá mocnina je väčšia alebo rovná nule.“ Alebo napr. aj takto: „Druhá mocnina reálneho čísla je nezáporná.“ Všimnite si, že v tom druhom vyjadrení „vypadol“ všeobecný kvantifikátor. Toto je bežné a aj to druhé vyjadrenie je v poriadku. Všimnime si ďalšie tvrdenie:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Toto môžeme čítať takto: „Pre ľubovolnú trojicu reálnych čísel platí asociatívny zákon pre operáciu sčítania“, ale úplne v poriadku bude aj „Operácia sčítania je asociatívna na množine reálnych čísel.“ Tvrdenie bude trochu náročnejšie, ak obsahuje existenčný aj všeobecný kvantifikátor. Budeme sa venovať tvrdeniu

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 1.$$

Prepis do bežného jazyka je napr. takýto: „Ku každému reálnemu číslu x vieme nájsť (existuje) aspoň jedno také reálne číslo y tak, že ich súčet je 1.“ Čo to znamená? Všeobecný kvantifikátor pre x nám hovorí, že „nepriateľ“ nám môže vybrať akékoľvek (ľubovolné) reálne číslo x. Napríklad by vybral číslo 13. Potom tam nasleduje existenčný kvatifikátor pre y a to znamená, že musíme nájsť aspoň jedno reálne y tak, aby $13 + y = 1$. Vieme také y nájsť? Samozrejme, $y = -12$. A takto by „nepriateľ“ mohol postupne vybrať všetky reálne x a my by sme pre každé hľadali y. V podstate si úlohu môžeme zjednodušiť, lebo už je asi zrejmé, že ak nám vyberie „nepriateľ“ číslo x, my vieme y nájsť ako rozdiel $1 - x$. Vzhľadom k tomu, že $1 - x$ je pre každé reálne x opäť reálne číslo, tak aj vieme, že toto tvrdenie je pravdivé.

Urobíme teraz malú zmenu, ktorá však bude mať veľké následky. Tvrdenie „jemne“ zmeníme a dostaneme

$$\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\colon x + y = 1.$$

Dostali sme rovnaké tvrdenie? Ani náhodou. Prepis do bežného jazyka mnohým rozdiel ukáže: „Existuje aspoň jedno reálne číslo y také, že potom pre ľubovolné reálne číslo x je $x + y = 1$.“ Čo toto znamená? To znamená, že by malo existovať (aspoň jedno) reálne číslo tak, že nech k nemu pripočítame akékoľvek číslo, dostaneme vždy výsledok 1. Čo by to znamenalo? Keby napr. platilo, že $y = 5$, tak potom by pre ľubovolné $x \in \mathbb{R}$ muselo platiť $x + 5 = 1$, ale z tejto jednoduchej rovnice dostaneme, že $x = -4$ a pre $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ to neplatí. Takže voľba $y = 5$ nebola dobrá. Otázka je, či vôbec v tomto prípade existuje vhodná voľba. Takéto y neexistuje, keby existovalo, tak by to znamenalo (a toto si dobre premyslite), že $1 - y$ bude pre to isté y dávať rôzne výsledky, čo je nezmysel. Teda toto tvrdenie pravdivé nie je, lebo také y neexistuje.

Takže pokiaľ pracujeme s rôznymi kvantifikátormi, tak ich poradie nemôžeme ľubovolne zamieňať, lebo takéto zámeny menia zmysel tvrdení.

1.5 Množinové operácie

Už sme spomínali, že množina môže byť zadaná vymenovaním, alebo ako obor pravdivosti nejakej výrokovej formy. Uvedieme si preto aspoň pár jednoduchých príkladov.

Príklad 22. *Vypíšte všetky prvky množiny M, ktorá je zadaná nasledovne*

$$M = \{n \in \mathbb{N}\colon 5 \leq n < 10\}.$$

Riešenie. Zrejme pre každý prvok n z množiny M musí byť splnené $5 \leq n < 10$ a zároveň musíme dodržať to, že sa jedná len o prirodzené čísla. Preto

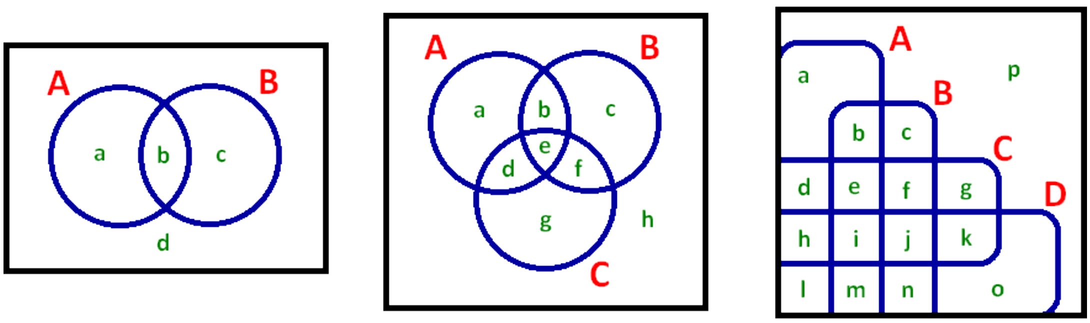
$$M = \{5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Bude užitočné, ak si tento spôsob zadávania množín precvičíme aj pri definovaní rôznych typov intervalov na množine reálnych čísel. Zrejme

- uzavretý interval je $\langle a, b\rangle = \{x; a \leq x \leq b\}$,
- otvorený interval je $(a, b) = \{x; a < x < b\}$,
- zľava otvorený a sprava uzavretý interval je $(a, b\rangle = \{x; a < x \leq b\}$,
- sprava otvorený a zľava uzavretý interval je $\langle a, b) = \{x; a \leq x < b\}$.

Dôležité upozornenie (priam výstraha) je, že vždy je $a < b$. To znamená, že napr. zápisy $\langle 5, -1\rangle, \langle 1, 1\rangle$ nebudeme tolerovať (budeme ich prísne trestať bodovými stratami).

Teraz sa budeme postupne venovať množinovým operáciám. Pre neformálne pochopenie je užitočné zobrazovať množinové operácie a vzťahy pomocou tzv. Vennových diagramov. Tieto znázorňujú všetky možné vzťahy niekoľkých množín. Pre dve, tri a štyri množiny máme takéto diagramy:



Princíp Vennových diagramov vysvetlíme pre dve množiny. Na obrázku máme množiny A a B a máme tam vyznačené štyri políčka a, b, c, d. V políčku a sa nachádzajú prvky, ktoré patria do množiny A, ale nepatria do množiny B. V políčku c sú prvky, ktoré patria do množiny B a nepatria do A. V políčku b sú prvky, ktoré majú množiny A, B spoločné a do políčka d patria prvky, ktoé nepatria ani do jednej z množín A, B. Analogicky to funguje aj pre viac množín.

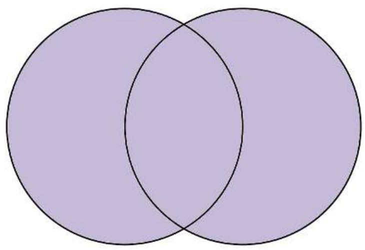
Ku každým dvom množinám A, B môžeme priradiť množinu

$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\},$$

ktorú nazývame zjednotenie množín A, B, pričom

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B.$$

Graficky to môžeme znázorniť takto:



Zrejme pre zjednotenie platia nasledujúce rovnosti:

- $A \cup \emptyset = A$,

- $A \cup A = A$,
- $A \cup B = B \cup A$,
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

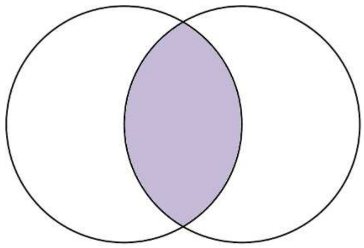
Ďalej každým dvom množinám A, B môžeme priradiť množinu

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\},$$

ktorú nazývame prienik množín A, B, pričom

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B.$$

Graficky to môžeme znázorniť takto:



Pre prienik platia nasledujúce rovnosti:

- $A \cap \emptyset = \emptyset$,
- $A \cap A = A$,
- $A \cap B = B \cap A$,
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

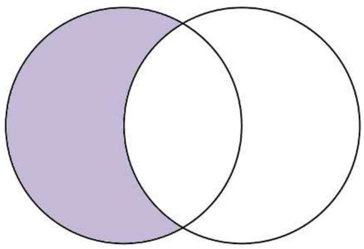
Ak o množinách A, B platí $A \cap B = \emptyset$, hovoríme, že množiny A, B sú disjunktné.
K ľubovolným dvom množinám A, B môžeme priradiť množinu

$$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\},$$

ktorú nazývame rozdiel množín A, B, pričom

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B.$$

Graficky to môžeme znázorniť takto:



Rozdiel množín má nasledujúce vlastnosti:

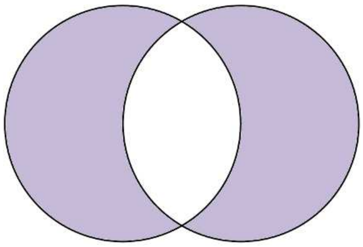
- $A \setminus \emptyset = A$,

- $A \setminus A = \emptyset$,
- $A \setminus B \neq B \setminus A$,
- $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$.

Ešte uvedieme poslednú množinovú operáciu, pre ľubovolné dve množiny A, B existuje množina

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

ktorú nazývame symetrický rozdiel množín A, B. Graficky to môžeme znázorniť takto:



Symetrický rozdiel množín má takéto vlastnosti:

- $A\Delta B = B\Delta A$,
- $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$,
- $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.

Pre lepšie pochopenie množinových operácií uvádzame nasledujúci príklad.

Príklad 23. *Nech* $A = \{1, 2, 3, 13\}, B = \{2, 4, 6, 13\}, C = \{1, 3, 6, 13\}$. *Určte*

$$A \cap B, B \cup C, C \setminus A, A\Delta B, A\Delta(B\Delta C).$$

Riešenie. Do množiny $A \cap B$ patria tie prvky, ktoré patria do A a zároveň do B. Teda

$$A \cap B = \{2, 13\}.$$

Pre množinu $B \cup C$ platí, že obsahuje všetky prvky, ktoré patria do B alebo do C, teda vypíšeme si najskôr prvky z množiny B a potom tam pridáme tie, ktoré patria do množiny C. Ak by sa nejaké prvky zopakovali, nebudeme ich tam písať dvakrát. Teda

$$B \cup C = \{2, 4, 6, 13, 1, 3\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 13\}.$$

Pri určovaní prvkov množiny $C \setminus A$ musíme z množiny C „vyhodiť“ všetky také prvky, ktoré patria do množiny A, potom

$$C \setminus A = \{6\},$$

museli sme vyhodiť z množiny C prvky $1, 3, 13$. Do symetrického rozdielu množín A, B patria tie prvky, ktoré tieto dve množiny nemajú spoločné, ich spoločné prvky sú len prvky $2, 13$, preto

$$A\Delta B = \{1, 3, 4, 6\}.$$

Posledná časť úlohy je trochu náročnejšia, ale tam využijeme to, že symetrický rozdiel je asociatívny (čo znamená, že $\forall A, B, C\colon A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$) a využijeme predchádzajúci výsledok. Teda

$$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C = \{1, 3, 4, 6\}\Delta\{1, 3, 6, 13\}.$$

Teraz už postupujeme ako pri určovaní $A\Delta B$. Potom

$$A\Delta(B\Delta C) = \{4, 13\}.$$

Poznámka 24. *Všimnite si, že množina $A\Delta(B\Delta C)$ obsahuje len také prvky, ktoré patria do všetkých troch množín (prvok 13) alebo také prvky, ktoré sa vyskytujú práve v jednej z uvedených troch množín (prvok 4). Toto nie je náhoda, takto to funguje pre ľubovolnú trojicu množín.*

Ak M je základná množina a $A \subseteq M$, potom

$$A'_M = M \setminus A$$

je doplnok množiny A vzhľadom k množine M, pričom

$$x \in A'_M \Leftrightarrow x \in M \wedge x \notin A.$$

Táto operácia je špeciálna v tom, že vždy musí byť určené k akej množine robíme doplnok. Ak $M = \{1,2,3\}, A = \{1,2\}$, tak $A'_M = \{3\}$. Ak bude množina $P = \{1,2,3,4\}$, tak $A'_P = \{3,4\}$. Pre doplnok platia nasledujúce rovnosti:

- $(A'_M)'_M = A$,
- $(A \cup B)'_M = A'_M \cap B'_M$,
- $(A \cap B)'_M = A'_M \cup B'_M$,
- $(A \setminus B)'_M = A'_M \cup B$.

Pre množinové operácie platia mnohé ďalšie pekné vzťahy, tie si postupne dokážete na cvičeniach.

Veľmi užitočným matematickým pojmom je usporiadaná dvojica, resp. vo všeobecnosti usporiadaná n–tica. Pre usporiadané dvojice je charakteristická nasledujúca vlastnosť:

$$[a,b] = [c,d] \ \Leftrightarrow \ a = c \wedge b = d.$$

Na záver ešte uvedieme definíciu dôležitého, nám už známeho, pojmu.

Definícia 25. *Nech A, B sú množiny. Pod kartézskym súčinom $A \times B$ množiny A a množiny B rozumieme množinu všetkých usporiadaných dvojíc, ktorých prvá zložka je prvkom množiny A a druhá je prvkom množiny B. Teda*

$$A \times B = \{[x,y]; x \in A \wedge y \in B\},$$

pričom

$$[x,y] \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B.$$

Príklad 26. *Nech $A = \{1,2,3\}, B = \{\circ, \star\}$. Určte $A \times B, B \times A$.*

Riešenie. Aplikovaním predchádzajúcej definície dostaneme

$$A \times B = \{[1,\circ],[1,\star],[2,\circ],[2,\star],[3,\circ],[3,\star]\},$$

$$B \times A = \{[\circ,1],[\star,1],[\circ,2],[\star,2],[\circ,3],[\star,3]\}.$$

Zrejme ste si už všimli, že $A \times B$ sa nemusí rovnať $B \times A$. Rovnosť nastáva len vtedy, ak $A = B$, alebo je niektorá z množín A, B prázdna. Často sa stretávame s tým, že $A = B$, vtedy namiesto zápisu $A \times A$ používame zápis A^2. Pri kartézskom súčine n množín $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, je výsledkom množina usporiadaných n–tíc, kde prvá zložka n–tice je z množiny A_1, druhá z množiny A_2 a tak ďalej, až n–tá je z množiny A_n. Ak platí $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$, potom namiesto $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, zapisujeme A^n.

2 Dôkazy

Matematika nie je „divácky šport“, pestovať ju treba aktívne, pričom riešenie problémov je účinný spôsob, ako objaviť krásy matematiky a zistiť, čo vlastne matematika je. Dôležitou súčasťou riešenia problémov je aj overovanie pravdivosti tvrdení a zovšeobecňovanie a preto sa teraz spoločne budeme venovať dôkazovým technikám. Dôkazom ľubovolného tvrdenia (vety) rozumieme postupnosť logických úvah, ktoré ukazujú, že platnosť tvrdenia logicky vyplýva z platnosti prijatých axióm a z tvrdení, ktoré už boli skôr dokázané. Základné typy dôkazov sú:

- priamy dôkaz,
- nepriamy dôkaz,
- dôkaz sporom,
- dôkaz matematickou indukciou.

My sa postupne v nasledujúcich kapitolách zoznámime so všetkými typmi dôkazov.

2.1 Dôkazy rovnosti množín

Vzhľadom k tomu, že sme sa doteraz venovali najmä množinám, tak ako prvý typ dôkazov, budú práve dôkazy rovnosti množín. Aké úlohy si máme pod týmto pojmom predstaviť? Zadanie môže byť napríklad takéto:

Dokážte, že platí:
$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$$

Zadanie je pomerne stručné, snáď aj jasné, teraz sa budeme venovať spôsobu jeho úspešného vyriešenia. Tento typ dôkazu nebol explicitne uvedený medzi základnými typmi dôkazov, je to totiž špeciálny prípad priamych dôkazov. Priamy dôkaz matematického tvrdenia spočíva v tom, že z už dokázaných tvrdení (viet) a axióm dokážeme toto tvrdenie po konečnom počte korektných úsudkov. Ako si toto predstaviť a čo to znamená, ak takýmto spôsobom budeme chcieť dokázať rovnosť množín? V prvom rade si treba uvedomiť, kedy sa dve množiny rovnajú. Z predchádzajúcich kapitol vieme, že $\big(A = B\big) \Leftrightarrow \big(A \subseteq B \wedge B \subseteq A\big)$. Teda takýto dôkaz bude mať dve časti, v prvej časti dokážeme platnosť inklúzie $A \subseteq B$ a v druhej časti platnosť inklúzie $B \subseteq A$. Ďalej si treba uvedomiť, čo znamená, že napr. $A \subseteq B$, to opäť vieme z predchádzajúcich kapitol a teda
$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\colon x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Preto ak chceme dokázať túto inklúziu, musíme o každom prvku z množiny A dokázať, že patrí aj do množiny B. Je zrejmé, ze pri nekonečných množinách nemôžeme postupovať tak, že to dokážeme o každom prvku, toľko času ani papiera nemáme. Preto si vyberieme jeden prvok z množiny A, napr. x, ktorý nebude ničím špeciálny, jediná informácia o ňom bude, že $x \in A$. Ak sa nám podarí ukázať, že $x \in B$, budeme dôkaz tejto inklúzie považovať za úspešne dokončený. A skôr ako sa pustíme do konkrétneho dôkazu, je nutné upozorniť, že bez znalostí základných vlastností a definícií množinových a logických operácií, bude pochopenie jednotlivých krokov náročné a zrejme aj nemožné.

Príklad 27. *Dokážte, že platí:* $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

Dôkaz. Dôkaz bude mať dve časti. V prvej časti dokážeme, že

$$A \setminus (A \setminus B) \subseteq A \cap B.$$

Postupne budeme pre prvok x (vieme o ňom len toľko, že patrí do množiny $A \setminus (A \setminus B)$) aplikovať definície množinových operácií. Dbáme na to, že operácie v zátvorkách majú prednosť.

$$\text{Nech } x \in A \setminus (A \setminus B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin A \setminus B.$$

V tomto kroku sme zátvorku $(A \setminus B)$ brali ako jednu množinu, teda prvok x patrí do rozdielu množiny A a množiny v zátvorke. Z definície rozdielu vieme, že do množiny A patrí a do množiny v zátvorke nepatrí. V zátvorke je opäť rozdiel množín. Ak by x do rozdielu $A \setminus B$ patrilo, potom by platilo, že $x \in A \wedge x \notin B$. Ak ale do tohto rozdielu nepatrí, tak musíme urobiť negáciu a teda pre x bude platiť

$$x \notin A \vee x \in B.$$

A takto budeme pokračovať a budeme sa snažiť postupne ukázať, že $x \in A \cap B$. Teda dôkaz tejto č asti bude nasledujúci:

$$\text{Nech } x \in A \setminus (A \setminus B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin A \setminus B. \Rightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \Rightarrow x \in A \cap B.$$

Teda platí

$$A \setminus (A \setminus B) \subseteq A \cap B.$$

Všimnite si, že sme využili distributivitu konjunkcie vzhľadom na disjunkciu, teda

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)\,.$$

V druhom kroku dokážeme opačnú inklúziu: $A \cap B \subseteq A \setminus (A \setminus B)$. Postupovať budeme podobne ako v prvom kroku, ale využijeme aj jeden umelý krok.

$$\text{Nech } x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow (x \in A \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \in B)\,,$$

poslednú implikáciu si dobre premyslite. Konjunkcia $(x \in A \wedge x \notin A)$ nie je nikdy pravdivá, teda pravdivostná hodnota celej disjunkcie bude závisieť len na pravdivostnej hodnote konjunkcie $(x \in A \wedge x \in B)$. Tento, zdanlivo zbytočný, umelý krok nám pomôže dokončiť dôkaz tejto časti. Stačí použiť distributivitu konjunkcie vzhľadom na disjunkciu a dostaneme

$$\Rightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B) \Rightarrow x \in A \wedge x \notin A \setminus B \Rightarrow x \in A \setminus (A \setminus B)\,.$$

Teda platí aj opačná inklúzia a preto platí rovnosť:

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$$

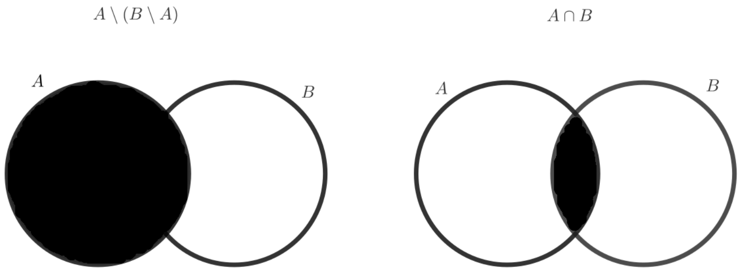
□

Nie vždy dopredu vieme, že rovnosť naozaj platí. Preto je dobré nakresliť si Vennove diagramy pre obe strany rovnosti. Nie je to síce dôkaz, ale pomôže nás to nasmerovať, aby sme vedeli, či danú rovnosť budeme dokazovať, alebo naopak budeme musieť nájsť protipríklad, teda konkrétne množiny, pre ktoré daná rovnosť neplatí.

Príklad 28. *Zistite, či pre ľubovolné množiny platí*

$$A \setminus (B \setminus A) = A \cap B.$$

Riešenie. Teraz nevieme, či rovnosť platí, tak je vhodné nakresliť si pre obe strany Vennove diagramy.



Z obrázku vidíme, že rovnosť nemusí platiť pre ľubovolné dve množiny. Zároveň sa dá vidieť, že rovnosť bude platiť pre také dve množiny A, B, pre ktoré platí $A = A \cap B$, teda také, že $A \subseteq B$. Preto odpoveďou je, že rovnosť neplatí pre ľubovolné dve množiny A, B a treba uviesť aj konkrétne dve množiny, ktoré rovnosť porušujú. Teda napríklad takéto

$$A = \{\star, \Delta\}, \quad B = \{\circ\}.$$

Potom

$$A \setminus (B \setminus A) = \{\star, \Delta\} \setminus \big(\{\circ\} \setminus \{\star, \Delta\}\big) = \{\star, \Delta\} \setminus \{\circ\} = \{\star, \Delta\}$$

a

$$A \cap B = \{\star, \Delta\} \cap \{\circ\} = \emptyset.$$

V tomto prípade je

$$A \setminus (B \setminus A) \neq A \cap B.$$

Premyslite si, či platí aspoň inklúzia $A \cap B \subseteq A \setminus (B \setminus A)$. Ak áno, tak tvrdenie dokážte, ak nie, nájdite vhodný kontrapríklad. Vhodnou nápovedou sú opäť Vennove diagramy. □

2.2 Priamy dôkaz implikácie

Väčšina matematických tvrdení je v tvare implikácie alebo ekvivalencie. Jedným z možných spôsobov, ako tvrdenie v tvare implikácie dokázať, je priamy dôkaz. Samozrejme, dá sa využiť aj pri dokazovaní ekvivalencie a to tak, že postupne dokážeme obe implikácie. Čo je to teda priamy dôkaz implikácie $A \Rightarrow B$? Podstata priameho dôkazu, spočíva vo vytvorení reťazca implikácií $A \Rightarrow B_1, B_1 \Rightarrow B_2, \ldots, B_k \Rightarrow B$, kde $B_1, B_2, B_3, \ldots, B$ sú axiómy alebo dokázané tvrdenia, a následného logického záveru: $A \Rightarrow B$. Čiže postupujeme od predpokladu k záveru, čo vyzerá byť taká prirodzená cesta, ale čoskoro aj sami zistíte, že nie je vždy najschodnejšia. Princíp priameho dôkazu ukážeme na jednoduchej úlohe.

Príklad 29. *Dokážte, že súčet dvoch nepárnych (lichých) čísel je číslo párne (sudé)*

Dôkaz. Tvrdenie si prepíšeme do tvaru implikácie:

Nech m, n sú nepárne čísla, potom súčet $m + n$ je párne číslo.

Budeme predpokladať, že predpoklad v danej implikácii platí, teda, že m a n sú nepárne čísla. Potom sa budeme sa snažit postupne odvodiť, že platí aj záver implikácie. Teda predpokladáme, že

$$\exists k, l \in \mathbb{Z} \colon m = 2 \cdot k + 1 \quad \wedge \quad n = 2 \cdot l + 1.$$

Pre ich súčet platí:

$$m + n = (2 \cdot k + 1) + (2 \cdot l + 1) = 2 \cdot k + 2 \cdot l + 2 = 2 \cdot (k + l + 1).$$

Zrejme súčet $k + l + 1$ je celé číslo a teda $2 \cdot (k + l + 1)$ je párne (sudé) číslo. Teda je splnený aj záver implikácie a tým je dôkaz úspešne skončený. □

Všimnite si, že tvrdenie v zadaní nie je formulované ako implikácia. Toto je pomerne častý jav a pred dokazovaním je preto vhodné tvrdenie preformulovať, aby bolo jasne určené, čo je predpoklad, a čo záver.

Príklad 30. *Dokážte, že druhá mocnina nepárneho (lichého) čísla je číslo nepárne.*

Dôkaz. Opäť je vhodné tvrdenie prepísať do tvaru implikácie:

Nech n je nepárne číslo, potom jeho druhá mocnina je nepárne číslo.

Budeme predpokladať, že predpoklad v danej implikácii platí, teda, že n je nepárne číslo. Potom

$$\exists k \in \mathbb{Z} \colon n = 2 \cdot k + 1.$$

Pre jeho druhú mocninu platí:

$$n^2 = (2 \cdot k + 1)^2 = 4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1 = 2 \cdot (2 \cdot k^2 + 2 \cdot k) + 1.$$

Zrejme súčet $2 \cdot k^2 + 2 \cdot k$ je celé číslo a teda n^2 je nepárne (liché) číslo. Teda je splnený aj záver implikácie, tým je dôkaz úspešne ukončený. □

Toto tvrdenie platí aj obrátene, teda platí, že

$$2 \not| n \Leftrightarrow 2 \not| n^2.$$

Ak chceme dokázať, že ekvivalencia je pravdivá, zvyčajne to dokazujeme v dvoch krokoch a to tak, že si ju rozdelíme na dve implikácie a tie postupne dokážeme. Nám sa podarilo ukázať zatial len jednu z týchto implikácií

$$2 \not| n \Rightarrow 2 \not| n^2.$$

Keby sme chceli priamo dokázať aj opačnú implikáciu ($2 \not| n^2 \Rightarrow 2 \not| n$), tak by sme si zbytočne skomplikovali život. V nasledujúcej kapitolke si ukážeme, ako jednoduchšie túto časť ekvivalencie dokázať.

2.3 Nepriamy dôkaz

Nepriamy dôkaz používame pri dôkazoch implikácie $A \Rightarrow B$. Z kapitoly o výrokovom počte vieme, že táto implikácia je ekvivalentná s obmenenou implikáciou $\neg B \Rightarrow \neg A$ (princíp kontrapozície), teda postupujeme tak, že najskôr vytvoríme obmenenú implikáciu a túto potom dokazujeme priamo. Menej formálne to môžeme povedať tak, že namiesto tvrdenia

„Ak platia predpoklady, tak platí záver“,

budeme dokazovať tvrdenie

„Ak neplatí záver, tak neplatí **aspoň** jeden z predpokladov.“

A teraz takýmto spôsobom dokážeme druhú časť ekvivalencie $2 \nmid n \Leftrightarrow 2 \nmid n^2$, z predchádzajúcej kapitoly.

Príklad 31. *Dokážte, že*

$$2 \nmid n^2 \Rightarrow 2 \nmid n.$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme nepriamo. Najskôr je potrebné vytvoriť k pôvodnej implikácii jej obmenu, teda

$$2|n \Rightarrow 2|n^2.$$

Túto implikáciu dokážeme priamo, čiže budeme predpokladať, že $2|n$ a dokážeme, že aj $2|n^2$. Nech $2|n$, potom zrejme platí, že $\exists k \in \mathbb{Z}\colon n = 2 \cdot k$. Pre druhú mocninu potom platí:

$$n^2 = (2 \cdot k)^2 = 4 \cdot k^2 = 2 \cdot (2 \cdot k^2).$$

Zrejme $2 \cdot k^2$ je celé číslo, preto n^2 je párne (sudé) číslo, teda $2|n^2$. Týmto sme dokázali pravdivosť obmenenej implikácie, tá má však vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu, ako pôvodná implikácia, preto je dôkaz úspešne ukončený. □

Príklad 32. *Dokážte, že ak p je prvočíslo väčšie ako 2, tak je nepárne (liché).*

Dôkaz. Aj toto tvrdenie dokážeme nepriamo. Jeho obmenou je

Ak je p párne (sudé), tak p nie je väčšie ako 2 alebo p nie je prvočíslo.

Všimnite si najmä negáciu predpokladov, teda budeme dokazovať, že aspoň jeden z predpokladov (v tejto úlohe boli dva) neplatí. Ďalej si treba uvedomiť, že pracujeme na množine prirodzených čísel, úloha je totiž o prvočíslach. Budeme teda predpokladať, že p je párne, potom

$$\exists k \in \mathbb{N}\colon p = 2 \cdot k.$$

Potom máme dve disjunktné možnosti

- $k \leq 1 \Rightarrow p = 2 \cdot k$ nie je väčšie ako 2,
- $k > 1 \Rightarrow p = 2 \cdot k$ nie je prvočíslo (každé prvočíslo p má práve dva rôzne delitele, 1 a p).

Tým je tento dôkaz hotový. □

2.4 Dôkaz sporom

Pri dokazovaní sporom nebudeme dokazovať priamo zadané tvrdenie, ale vyjdeme z jeho negácie, o ktorej dokážeme, že je nepravdivá. Z toho potom plynie, že pôvodné tvrdenie je pravdivé. Doteraz sme nepravdivosť tvrdenia „dokazovali" len hľadaním vhodných kontrapríkladov. Ako budeme teraz dokazovať, že daná negácia je nepravdivá? Ako jedna z možností ostáva stále nájdenie kontrapríkladu, ale nie vždy s ňou vystačíme. V takom prípade budeme predpokladať, že táto negácia platí, a odvodíme z nej spor, čiže tvrdenie, ktoré je buď v rozpore s týmto predpokladom, alebo je evidentne nepravdivé. Toto odvodenie urobíme podobne ako pri priamom dôkaze.

Jedným z najznámejších ukážok dôkazov sporov je dôkaz toho, že prvočísel je nekonečne veľa. Nemôžeme ho vynechať.

Príklad 33. *Dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa.*

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme sporom, teda budeme predpokladať, že platí opak, čiže, že prvočísel je konečne veľa. Ak ich je konečne veľa, tak, potom existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sú všetky možné prvočísla. Teraz urobíme umelý krok a vyrobíme číslo s, nasledujúcim spôsobom

$$s = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1.$$

Čo vieme o čísle s povedať? Určite platí, že

$$s > p_i, \text{ pričom } i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

ale zároveň platí aj

$$p_i \not| s, \text{ pričom } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Čo to znamená? Aké môže byť číslo s? Môžu nastať dva rôzne prípady.

- Číslo s môže byť prvočíslo, ale určite to nie je ani jedno z prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_n$, lebo od každého z nich je s väčšie. Ale my sme predpokladali, že $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sú všetky prvočísla a žiadne iné neexistujú. Takže táto možnosť je v spore s našim predpokladom.

- Ak by s bolo zložené číslo, tak potom nutne musí byť deliteľné nejakým prvočíslom, my sme však zistili, že nie je deliteľné ani jedným z $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ale podľa predpokladu toto mali byť všetky prvočísla. To opäť znamená, že máme tých prvočísel „málo", a teda aj táto možnosť je v spore s predpokladom.

Vzhľadom k tomu, že už žiadna iná možnosť neexistuje a obe predchádzajúce boli v spore s predpokladom, prvočísel nemôže byť konečne veľa. Pre lepšie pochopenie oboch možností sa skúste „pohrať" a nájsť také po sebe idúce prvočísla $p_1, p_2, \ldots, p_n$, aby $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$ nebolo prvočíslo. □

V literatúre sa dajú nájsť rôzne ďalšie dôkazy tohto tvrdenia, obzvlášť pekný je dôkaz, ktorý využíva vlastnosti členov Fibonacciho postupnosti.

Ďalším známym tvrdením, ktoré je vhodné dokazovať sporom, je tvrdenie, že $\sqrt{2}$ nie je racionálne číslo. Tentokát sa nebudeme držať tradície a dokážeme trochu iné tvrdenie.

Príklad 34. *Dokážte, že $\sqrt[7]{7}$ nie je racionálne číslo.*

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme sporom, preto ho najskôr znegujeme. Po negácii dostaneme

$$\sqrt[7]{7} \text{ je racionálne číslo.}$$

Budeme predpokladať, že toto tvrdenie je pravdivé. To znamená, že sa $\sqrt[7]{7}$ dá zapísať v tvare zlomku $\frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ a p, q sú nesúdeliteľné. Teda

$$\sqrt[7]{7} = \frac{p}{q},$$

po umocnení dostaneme

$$7 = \frac{p^7}{q^7}.$$

Obe strany rovnice vynásobíme číslom q^7

$$7q^7 = p^7.$$

Zrejme ľavá strana rovnice je deliteľná 7 a preto aj pravá strana musí byť deliteľná 7. Potom teda platí $7|p^7$, ale 7 je prvočíslo a teda z toho vyplýva, že $7|p$ a teda $7^7|p^7$ (toto si dobre premyslite). Preto p^7 vieme zapísať ako $p^7 = 7^7.k$, pričom $k \in \mathbb{Z}$. Dosadíme do poslednej rovnice

$$7q^7 = 7^7.k,$$

po úprave dostaneme

$$q^7 = 7^6.k,$$

ale z poslednej rovnice vyplýva, že $7|q$ a keď si uvedomíme, že $7|p$, tak sa dostaneme k sporu s tým, že p, q sú nesúdeliteľné. Negované tvrdenie je evidentne nepravdivé, preto platí to pôvodné tvrdenie. Tým je dôkaz ukončený. $\square$

Na záver sa budeme ešte venovať dôkazu sporom takého tvrdenia, ktoré má tvar implikácie. Ak máme dokázať sporom tvrdenie, ktoré má tvar $A \Rightarrow B$, najskôr ho znegujeme (nezabudnite aj na kvantifikátory) a dostaneme tvrdenie $A \wedge \neg B$. Ďalej už postupujeme ako v predchádzajúcich úlohách.

Nasledujúce tvrdenie sme už dokázali nepriamym dôkazom, teraz ho dokážeme sporom.

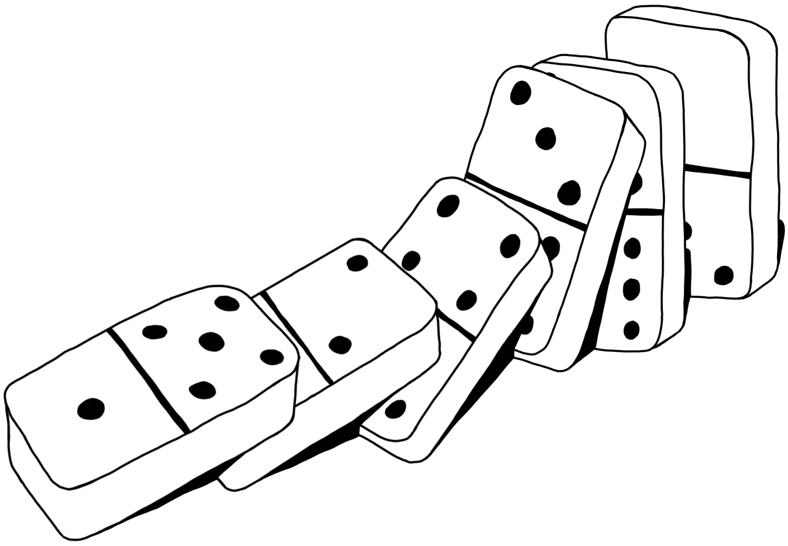
Príklad 35. *Dokážte, že ak p je prvočíslo väčšie ako 2, tak p je nepárne (liché).*

Dôkaz. Budeme dokazovať sporom, preto tvrdenie znegujeme. Teda dostaneme, že

$$p \text{ je prvočíslo väčšie ako 2 a zároveň je párne.}$$

Potom $p = 2 \cdot k$ pre nejaké prirodzené číslo $k > 1$. To ale znamená, že p nie je prvočíslo (tu si treba spomenúť na definíciu prvočísel), čo je v spore s predpokladom. Teda platí pôvodné tvrdenie, a tým je dôkaz skončený. $\square$

2.5 Matematická indukcia



Keby sme mali vyriešiť nasledujúcu úlohu, zrejme by to rôzni ľudia riešili rôzne.

Koľko je

$$1 + 2 + \cdots + 99 + 100?$$

Isto by sa našli trpezliví študenti, ktorí by to postupne sčítali. Traduje sa, že takúto úlohu zadal učiteľ malému Gaussovi, keď chcel mať od neho chvíľu pokoj. Ale Gauus bol už isto aj v detstve šikovný a všimol si, že

$$1 + 100 = 101,$$

$$2 + 99 = 101,$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$50 + 51 = 101,$$

teda s výsledkom bol hneď hotový, vyšlo mu $50 \cdot 101 = 5050$.

Tento postup sa dá zovšeobeniť pre ľubovolné prirodzené číslo n a potom dostaneme

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1).$$

Overiť správnosť tohto tvrdenia môžeme rôznymi spôsobmi, jedným z pomerne účinných nástrojov, na overenie takýchto tvrdení, je princíp matematickej indukcie. Tento princíp má nasledujúce dva kroky:

- Dokážeme, že tvrdenie platí pre n_0, kde n_0 je najmenšia hodnota, pre ktorú má platiť.
- Predpokladáme, že tvrdenie platí pre $k, k \geq n_0$, dokážeme, že platí aj pre $k + 1$.

Ak budeme úspešní v oboch krokoch, tak sme dokázali, že tvrdenie platí, pre všetky celé čísla väčšie ako n_0. Je dôležité si uvedomiť, že oba kroky sú nutné, teda ani jeden nie je možné vynechať. Pre názornosť je dobré si predstaviť za akých podmienok spadne domino. Je nutné, aby spadla prvá kocka (tvrdenie musí platiť pre n_0) a potom vždy $k-$ta kocka musí zhodiť nasledujúcu, $(k+1)-$vú kocku (teda z predpokladu platnosti tvrdenia pre k dokazujeme tvrdenie pre $k+1$).

Teraz postupne ukážeme aplikáciu tohto užitočného princípu v úlohách.

Príklad 36. *Dokážte, že pre* $n \in \mathbb{N}$, *platí*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1).$$

Dôkaz. Rovnosť dokážeme pomocou matematickej indukcie:

- V prvom kroku dokážeme, že rovnosť platí pre $n = 1$, teda pre najmenšie prirodzené číslo. Budeme používať označenie L.S. pre ľavú stranu, P.S. pre pravú stranu. Teda

$$L.S. = 1, P.S. = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1,$$

$$L.S. = P.S.$$

- V druhom kroku budeme predpokladať, že platí $V(k)$, teda, že je

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (k+1),$$

dokážeme, že platí $V(k+1)$, teda, že platí

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2} \cdot (k+1) \cdot ((k+1)+1),$$

resp.

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2} \cdot (k+1) \cdot (k+2).$$

Upravujeme ľavú stranu $V(k+1)$:

$$L.S. = 1 + 2 + \cdots + k + k + 1 = (1 + 2 + \cdots + k) + k + 1.$$

Zátvorku môžeme nahradiť pravou stranou $V(k)$ a dostaneme

$$L.S. = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (k+1) + k + 1.$$

Po úprave je

$$L.S. = (k+1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot k + 1\right) = \frac{1}{2} \cdot (k+1) \cdot (k+2) = P.S.$$

Vidíme, že sme sa dopracovali k pravej strane $V(k+1)$ a teda aj pre $V(k+1)$ platí, že sa pravá a ľavá strana rovnajú. Týmto je dôkaz skončený. □

Prvý krok matematickej indukcie sa nazýva *báza*, alebo *základ indukcie*, druhý krok v tomto type dôkazov sa nazýva *indukčný krok*. Predpoklad, že dokazované tvrdenie platí pre $k \geq n_0$ sa nazýva *indukčný predpoklad*.

Príklad 37. *Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}$, platí*

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (4n^2 - 1).$$

Dôkaz. Rovnosť opäť dokážeme pomocou matematickej indukcie. Budeme postupovať podobne ako v predchádzajúcom príklade.

- V prvom kroku dokážeme, že rovnosť platí pre $n = 1$.

$$L.S. = 1^2 = 1, P.S. = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (4.1^2 - 1) = 1,$$
$$L.S. = P.S.$$

- V druhom kroku predpokladáme, že platí:

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{1}{3} \cdot k \cdot (4k^2 - 1),$$

dokážeme, že platí

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 = \frac{1}{3} \cdot (k+1) \cdot (4(k+1)^2 - 1).$$

Upravujeme ľavú stranu $V(k+1)$:

$$L.S. = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 = [1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2] + (2k+1)^2.$$

Súčet v hranatej zátvorke je ľavá strana $V(k)$ a teda ho nahradíme pravou stranou $V(k)$ a upravíme. Potom

$$L.S. = \frac{1}{3} \cdot k \cdot (4k^2 - 1) + (2k+1)^2 =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot k \cdot (2k-1)(2k+1) + (2k+1)^2 =$$
$$= (2k+1)\left[\frac{1}{3} \cdot k \cdot (2k-1) + (2k+1)\right].$$

Upravujeme stále ľavú stranu

$$L.S. = (2k+1) \cdot \left(\frac{k(2k-1) + 6k + 3}{3}\right) =$$
$$= \frac{2k+1}{3} \cdot (2k^2 + 5k + 3) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot (2k+1) \cdot (2k+3) \cdot (k+1).$$

Ešte upravíme pravú stranu $V(k+1)$

$$P.S. = \frac{1}{3} \cdot (k+1) \cdot (4(k+1)^2 - 1) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot (k+1) \cdot (4k^2 + 8k + 3) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot (k+1) \cdot (2k+1) \cdot (2k+3).$$

Vidíme, že obe strany sa rovnajú, teda dôkaz je úspešne ukončený. $\square$

Príklad 38. *Dokážte, že pre* $n \in \mathbb{N}$, *platí*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2.$$

Dôkaz. Znovu budeme dokazovať pomocou matematickej indukcie.

- V prvom kroku dokážeme, že rovnosť platí pre $n = 1$.

$$L.S. = 1^3 = 1, P.S. = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot (1+1)^2 = 1,$$

$$L.S. = P.S.$$

- V druhom kroku predpokladáme, že platí:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2,$$

dokážeme, že platí

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{1}{4} \cdot (n+1)^2 \cdot ((n+1)+1)^2 .$$

Upravujeme ľavú stranu $V(k+1)$:

$$L.S. = [1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3] + (n+1)^3.$$

Súčet v hranatej zátvorke nahradíme pravou stranou $V(k)$ a upravíme. Potom

$$L.S. = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{1}{4} \cdot n^2 + n + 1 \right).$$

Upravujeme stále ľavú stranu

$$L.S. = (n+1)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(n^2 + 4n + 4\right) =$$

$$= (n+1)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (n+2)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)^2 = P.S.$$

Vidíme, že obe strany $V(n+1)$ sa rovnajú, teda sme dokázali, že uvedená rovnosť platí pre všetky prirodzené čísla.

□

Teraz skúsime vyriešiť trochu náročnejšiu úlohu, budeme dokazovať nerovnosť.

Príklad 39. *Dokážte, že pre* $n \in \mathbb{N}, n > 1$ *platí*

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Dôkaz. Opäť použijeme na dôkaz matematickú indukciu. Zmena bude už v prvom kroku, treba si uvedomiť, že sa jedná o nerovnosť, tá má navyše platiť pre $n > 1$.

- V prvom kroku dokážeme, že to platí pre $n = 2$.

$$L.S. = \frac{4^2}{2+1} = \frac{16}{3}, P.S. = \frac{(2.2)!}{(2!)^2} = \frac{4.3.2.1}{(2.1)^2} = 6,$$

$$L.S. < P.S$$

- V druhom kroku predpokladáme, že $\frac{4^k}{k+1} < \frac{(2k)!}{(k!)^2}$, dokážeme, že platí $\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2}$. Budeme upravovať pravú stranu $V(k+1)$ (úprava ľavej strany by nám nepomohla, kto neverí, môže si to vyskúšať):

$$P.S. = \frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2} = \frac{(2k+2)!}{((k+1)\cdot k!)^2} =$$

$$= \frac{(2k+2)\cdot(2k+1)\cdot(2k)!}{(k+1)^2\cdot(k!)^2} =$$

$$= \frac{(2k+2)\cdot(2k+1)}{(k+1)^2}\cdot\left[\frac{(2k)!}{(k!)^2}\right].$$

Výraz v hranatých zátvorkách je pravá strana $V(k)$, preto ho nahradíme ľavou stranou $V(k)$, ale nesmieme zabudnúť na to, že $V(k)$ je nerovnosť, preto po tejto náhrade sa celý výraz zmenší. Potom

$$P.S. = \frac{(2k+2)\cdot(2k+1)}{(k+1)^2}\cdot\left[\frac{(2k)!}{(k!)^2}\right] > \frac{(2k+2)\cdot(2k+1)}{(k+1)^2}\cdot\frac{4^k}{k+1}.$$

Ak sa nám o poslednom výraze podarí dokázať, že je väčší ako ľavá strana $V(k+1)$, tak bude dôkaz úspešne ukončený. Toto si dobre premyslite. Vychádzame z toho, že platí

$$[(x > y)\wedge(y > z)] \Rightarrow (x > z).$$

Teda potrebujeme ukázať, že platí

$$\frac{(2k+2)\cdot(2k+1)}{(k+1)^2}\cdot\frac{4^k}{k+1} > \frac{4^{k+1}}{k+2}.$$

Nerovnosť upravujeme a vzhľadom k tomu, že pracujeme s kladnými číslami, beztrestne delíme a násobíme obe strany nerovnosti.
Obe strany predelíme 4^k

$$\frac{(2k+2)\cdot(2k+1)}{(k+1)\cdot(k+1)^2} > \frac{4}{k+2},$$

zlomok na ľavej strane vykrátime:

$$\frac{2k+1}{(k+1)^2} > \frac{2}{k+2}.$$

Prenásobíme obe strany $(k+1)^2\cdot(k+2)$, dostaneme

$$(2k+1)\cdot(k+2) > 2\cdot(k+1)^2,$$

čo je ekvivalentné s

$$2k^2 + 5k + 2 > 2k^2 + 4k + 2,$$

a po jednoduchej úprave máme

$$k > 1,$$

čo je v našom prípade postačujúce (tvrdenie má platiť pre $n \in \mathbb{N}, n > 1$). Vzhľadom k tomu, že sme robili ekvivalentné úpravy, platí aj toto:

$$\frac{(2k+2)\cdot(2k+1)}{(k+1)^2} \cdot \frac{4^k}{k+1} > \frac{4^{k+1}}{k+2},$$

ak zhrnieme, čo sme doteraz zistili, dostaneme, že

$$P.S. > \frac{(2k+2)\cdot(2k+1)}{(k+1)^2} \cdot \frac{4^k}{k+1} > L.S.,$$

čo znamená, že platí

$$P.S. > L.S.$$

□

Nasledujúca úloha je náročnejšia nielen v tom, že sa opäť jedná o nerovnosť, ale navyše súčet na ľavej strane nemá pevný začiatok.

Príklad 40. *Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}; n > 1$ platí*

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} \geq 1.$$

Dôkaz. Dokážeme pomocou matematickej indukcie:

- V prvom kroku dokážeme, že to platí pre $n = 2$. Tu si treba dobre premyslieť, aký bude prvý a posledný sčítanec na ľavej strane. Vzhľadom k tomu, že $n = 2$, prvý sčítanec bude $\frac{1}{2}$ a posledný $\frac{1}{3\cdot 2-2} = \frac{1}{4}$, preto

$$L.S. = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}, P.S. = 1,$$

$$L.S. \geq P.S$$

- V druhom kroku budeme predpokladať, že platí:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} \geq 1.$$

dokážeme, že platí

$$\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} \geq 1.$$

Opäť si treba dobre premyslieť, aký bude prvý a posledný sčítanec na ľavej strane $V(n+1)$. Po úspešnom zostavení $V(n+1)$ sa zameriame na hľadanie ľavej strany $V(n)$ v ľavej strane $V(n+1)$. Urobíme trik, ktorý sa používa dosť často. K ľavej strane $V(n+1)$ pričítame a odčítame to isté (ale vhodne zvolené) číslo. V našom prípade to bude $\frac{1}{n}$.

Prepíšeme ľavú stranu (všimnite si, že už sme pričítali a odčítali $\frac{1}{n}$).

$$L.S. = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{n} =$$

$$= \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2}\right] + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{n},$$

všimnite si súčet v hranatých zátvorkách, zrejme je to ľavá strana $V(n)$. My potrebujeme dokázať, že ľavá strana $V(n+1)$ je väčšia ako 1 a z $V(n)$ vieme, že súčet v hranatej zátvorke je väčší ako 1, teda stačí (a toto si dobre premyslite), aby

$$\frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{n} \geq 0,$$

potom už bude aj celá ľavá strana $V(n+1)$ isto väčšia ako 1. Teraz sa pozrime, či je naozaj

$$\frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{n} \geq 0.$$

Nerovnosť upravujeme, ako keby platila a budeme robiť len ekvivalentné úpravy. Upravíme na spoločného menovateľa:

$$\frac{3n(3n+1) + (3n+1)(3n-1) + 3n(3n-1) - 3(3n-1)(3n+1)}{3n(3n-1)(3n+1)} \geq 0.$$

Keďže porovnávame zlomok s nulou a menovateľ je isto kladný (premyslite si to), tak stačí, aby aj čitateľ bol kladný, preto stačí overiť, či platí:

$$3n(3n+1) + (3n+1)(3n-1) + 3n(3n-1) - 3(3n-1)(3n+1) \geq 0.$$

Roznásobením dostaneme:

$$9n^2 + 3n + 9n^2 - 1 + 9n^2 - 3n - 27n^2 + 3 \geq 0.$$

Po úprave

$$2 \geq 0.$$

Dopracovali sme sa k pravdivému tvrdeniu a kedže sme robili iba ekvivalentné úpravy, platí aj nerovnosť

$$3n(3n+1) + (3n+1)(3n-1) + 3n(3n-1) - 3(3n-1)(3n+1) \geq 0.$$

A následne potom je splnené aj

$$\frac{3n(3n+1) + (3n+1)(3n-1) + 3n(3n-1) - 3(3n-1)(3n+1)}{3n(3n-1)(3n+1)} \geq 0.$$

Preto aj

$$\frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{n} \geq 0,$$

a teda ľavá strana $V(n+1)$ je väčšia ako 1, dôkaz je úspešne skončený.

$\square$

Na záver ešte pridávam jeden príklad, kde postupy, ktoré sme si doteraz ukázali nebudú fungovať. Netreba však upadať na duchu, poradíme si aj s tým.

Príklad 41. *Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2.$$

Dôkaz. Prvý pokus bude kopírovať doteraz naučené postupy a opäť použijeme matematickú indukciu:

- V prvom kroku dokážeme, že to platí pre $n = 1$ a pre väčší úspech aj pre $n = 2$.

$$n = 1 \Rightarrow L.S. = 1, P.S. = 2 \Rightarrow L.S. \leq P.S,$$

$$n = 2 \Rightarrow L.S. = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, P.S. = 2 \Rightarrow L.S. \leq P.S.$$

  Takže zatiaľ sme žiaden problém nezaznamenali, môžeme ísť na ďalší krok.

- V druhom kroku predpokladáme, že platí:

$$1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k^2} \leq 2,$$

  dokážeme, že platí

$$1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2.$$

  Ak by sme teraz postupovali ako v predchádzajúcich úlohách, tak by sme zistili, že neuspejeme, lebo vo $V(k+1)$ je súčet na ľavej strane o $\frac{1}{(k+1)^2}$ väčší ako vo $V(k)$, takže horné ohraničenie $V(k)$ nám nemôže pomôcť. Toto si dobre premyslite. Pomohlo by nám, keby sa n vyskytovalo aj na pravej strane. Preto skúsime dokázať "silnejšie"tvrdenie, silnejšie v tom, že budeme na horné ohraničenie súčtu na ľavej strane prísnejší, teda ho o nejakú hodnotu zmenšíme. Skúsime dokazovať nasledujúce tvrdenie

$$\forall n \in \mathbb{N}; 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

- V prvom kroku dokážeme, že to platí pre $n = 1$.

$$n = 1 \Rightarrow L.S. = 1, P.S. = 2 - \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow L.S. \leq P.S.$$

- V druhom kroku predpokladáme, že platí:

$$1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{k},$$

  dokážeme, že platí

$$1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}.$$

  Ďalej už postupujeme presne tak, ako v predchádzajúcich úlohách. Upravujeme ľavú stranu $V(k+1)$:

$$L.S. = \left[1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k^2}\right] + \frac{1}{(k+1)^2}.$$

  Súčet v hranatej zátvorke je ľavá strana $V(k)$ a tá je zhora ohraničená $2 - \frac{1}{k}$, preto

$$L.S. = [1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k^2}] + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}.$$

  Ešte potrebujeme dokázať, že je splnené

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1} = P.S.$$

Poslednú nerovnosť budeme upravovať, pričom postup bude podobný ako v predošlých príkladoch:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2} &\le -\frac{1}{k+1},\\
\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)} &\le \frac{1}{k},\\
\frac{k+2}{(k+1)^2} &\le \frac{1}{k},\\
k(k+2) &\le (k+1)^2,\\
k^2+2k &\le k^2+2k+1,\\
0 &\le 1.
\end{aligned}
$$

Dopracovali sme sa k pravdivému tvrdeniu a kedže sme robili iba ekvivalentné úpravy, platí aj pôvodná nerovnosť, teda

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\le 2-\frac{1}{k+1},$$

preto

$$L.S. = [1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k^2}]+\frac{1}{(k+1)^2}\le 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\le 2-\frac{1}{k+1}=P.S.$$

Čo znamená, že

$$L.S. \le P.S.$$

Vzhľadom k tomu, že $\forall n\in\mathbb{N}$ je $2-\frac{1}{n}<2$, tak:

$$1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n}<2.$$

Teraz určite mnohým vŕta v hlave, ako sme sa dopracovali k tomu silnejšiemu tvrdeniu. Univerzálny návod zrejme neexistuje, chce to tréning a trpezlivé skúšanie rôznych nápadov. □

3 Potenčná množina

Teraz sa budeme venovať novému pojmu, tzv. **potenčnej množine**.

Definícia 42. *Nech X je ľubovolná množina univerza. Potom množinu, ktorá obsahuje ako svoje prvky všetky podmnožiny množiny X, nazývame* **potenčnou množinou množiny X.** *Označujeme ju zvyčajne $\mathcal{P}(X)$, alebo 2^X. Teda*

$$\mathcal{P}(X)=\{B\colon B\subseteq X\}.$$

Z definície je zrejmé, že pre ľubovolnú množinu X platí

$$\emptyset\in\mathcal{P}(X)\quad\wedge\quad X\in\mathcal{P}(X).$$

Tento pojem si objasníme na jednoduchom príklade.

Príklad 43. *Nech $A=\{1\},B=\{1,2\},C=\{1,2,3\}$, určte $\mathcal{P}(A),\mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(C)$.*

Riešenie. Budeme postupovať podľa definície a teda si musíme uvedomiť, aké podmnožiny môže mať napr. množina A. Je to jednoprvková množina, teda jej podmnožiny môžu byť maximálne jednoprvkové, preto

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\} = \{\emptyset, A\}.$$

Podobne určíme aj $\mathcal{P}(B)$, teraz okrem prázdnej množiny a množiny B budeme uvažovať aj všetky možné jednoprvkové podmnožiny, teda

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, B\}.$$

Na záver ešte určíme $\mathcal{P}(C)$, teraz okrem prázdnej množiny a množiny C budeme uvažovať aj všetky možné jednoprvkové a dvojprvkové podmnožiny, teda

$$\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, C\}.$$

Verím, že vďaka tomuto jednoduchému príkladu je konštrukcia potenčnej množiny objasnená, zároveň si možno pozorný čitateľ všimol istú zákonitosť, týkajúcu sa počtu prvkov potenčnej množiny. Ak je $|X| = n$, tak $\mathcal{P}(X) = 2^n$, teda označenie 2^X pre potenčnú množinu je logické. Tento vzťah vieme rôznymi spôsobmi dokázať. Keďže $\mathcal{P}(X)$ je množina všetkých podmnožín množiny X, tak sa pokúsime nájsť počet všetkých takýchto podmnožín. Ak $|X| = n$, tak budeme zisťovať, koľko je prázdnych, jednoprvkových, dvojprvkových, $\dots$, $n-$prvkových podmnožín. Nakoľko sa jedná o množiny, tak na poradí ich prvkov nezáleží, prvky sa neopakujú a teda vlastne zisťujeme počet kombinácií bez opakovania $k-$tej triedy z $n-$ prvkov, kde $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Teda

$$|\mathcal{P}(X)| = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}.$$

Tento súčet by mal byť študentom dôverne známy, lebo z binomickej vety dostaneme

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n},$$

čo je presne 2^n. □

Tento vzťah sme mohli dokázať aj iným spôsobom a kľúčovú úlohu teraz zohrá práve predchádzajúci príklad. Všimnime si $\mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(C)$. Ako sme už zistili, platí

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}\}, \{2\}, \{1,2\}\}\}.$$

Ak do množiny B pridáme prvok 3, dostaneme množinu C a teraz pri vymenovaní prvkov množiny $\mathcal{P}(C)$ každý výskyt prvku 3 vyznačíme farebne a poradie podmnožín jemne upravíme:

$$\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} =$$

$$= \mathcal{P}(B) \cup \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Všimnite si, že počet množín, ktoré obsahujú prvok 3 je taký istý, ako počet tých, ktoré ho neobsahujú, navyše, ak by sme v množine $\{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ všetky červené trojky vymazali, dostali by sme $\mathcal{P}(B)$. Teda pridaním jedného prvku do množiny X sa zdvojnásobí počet prvkov potenčnej množiny.

Dôkaz založený na tejto myšlienke je jednoduchá aplikácia matematickej indukcie. Vyskúšajte si to.

Teraz už nebude prolém vyriešiť nasledujúci príklad.

Príklad 44. *Nech A, B sú konečné množiny, nech A má n prvkov a B má m prvkov. Koľko prvkov majú množiny $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \times B)$?*

Riešenie. Nech $|A| = n, |B| = m$, potom už vieme, že $|\mathcal{P}(A)| = 2^n, |\mathcal{P}(B)| = 2^m$. Množina $A \times B$ je množina usporiadaných dvojíc, kde prvá zložka je z množiny A, druhá z množiny B. Teda prvé zložky vyberáme z n prvkov a druhé z m prvkov, teda máme $m \cdot n$ dvojíc, preto $|A \times B| = m \cdot n$. Podobnou úvahou zistíme, že

$$|\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)| = 2^n \cdot 2^m = 2^{n+m},$$

$$|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{n \cdot m}.$$

Príklad 45. *Dokážte, že platí: $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.*

Dôkaz. Nakoľko treba dokázať rovnosť množín, dôkaz bude mať dve časti. Najskôr dokážeme, že platí $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. To znamená, že musíme pre ľubovolný prvok z množiny $\mathcal{P}(A \cap B)$ ukázať, že patrí aj do množiny $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Musíme myslieť na to, že prvkami potenčnej množiny sú množiny. Ďalej si treba uvedomiť, že ak $M \in \mathcal{P}(A)$, tak $M \subseteq A$. Teraz už môžeme napísať dôkaz:

$$\text{Nech } M \in \mathcal{P}(A \cap B) \Rightarrow M \subseteq A \cap B \Rightarrow M \subseteq A \wedge M \subseteq B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \in \mathcal{P}(A) \wedge M \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow M \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

V tejto časti bolo dôležité si uvedomiť, že ak nejaký prvok patrí do prieniku dvoch množín, tak musí nutne patriť do každej z nich. Ďalej doporučujem dobre si všímať kedy je použitý znak $\in$ a kedy $\subseteq$, to sa totiž nesmie zamieňať.

V druhom kroku dokážeme inklúziu: $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$. Postupujeme podobne ako v prvom kroku.

$$\text{Nech} \quad M \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Rightarrow M \in \mathcal{P}(A) \wedge M \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \subseteq A \wedge M \subseteq B \Rightarrow M \subseteq A \cap B \Rightarrow M \in \mathcal{P}(A \cap B).$$

Teda $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. □

Príklad 46. *Zistite, či platí:*

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Riešenie. Budeme postupovať podobne ako v predchádzajúcej úlohe. Najskôr dokážeme, že platí $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

$$\text{Nech} \quad M \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \Rightarrow M \in \mathcal{P}(A) \vee M \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \subseteq A \vee M \subseteq B \Rightarrow M \subseteq A \cup B \Rightarrow M \in \mathcal{P}(A \cup B).$$

V druhom kroku sa budeme snažiť dokázať opačnú inklúziu, teda $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

$$\text{Nech} \quad M \in \mathcal{P}(A \cup B) \Rightarrow M \subseteq A \cup B \Rightarrow$$

ale ďalej sa už v dôkaze pokračovať nedá, tak ako v predošlej úlohe. Nedá sa totiž vo všeobecnosti napísať, že

$$M \subseteq A \cup B \Rightarrow M \subseteq A \vee M \subseteq B.$$

Objasniť tento problém nám pomôže nasledujúci kontrapríklad. Samozrejme, každý študent si môže vymyslieť vlastný kontrapríklad.

Kontrapríklad. Nech $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}$. Potom $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ a teda

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\},$$

ale

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \cup \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}.$$

Evidentne $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ **nie je** splnené.

Z uvedeného vyplýva, že $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ (prvá časť dôkazu), ale opačná inklúzia vo všeobecnosti neplatí (pozor, dajú sa nájsť príklady, kedy platí, odporúčam pohľadať), teda rovnosť $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ vo všeobecnosti **neplatí**.

Tento príklad by mal byť odstrašujúci pre tých, ktorí opačnú inklúziu „dokazujú“ len mechanickým prepisom. $\square$

4 Princíp inklúzie a exklúzie

Do slovenčiny by sme názov tejto časti mohli preložiť ako princíp zahrnutia a vylúčenia, ale zrejme ani tento preklad čitateľovi nevyjasní podstatu tohto princípu. Preto si na úvod vyriešime jeden veľmi jednoduchý príklad.

Príklad 47. *Koľko je prirodzených čísel menších ako 100, ktoré sú deliteľné dvomi alebo tromi?*

Riešenie. Označme postupne A_2 množinu čísel menších ako 100, ktoré sú deliteľné dvomi, A_3 množinu čísel menších ako 100, ktoré sú deliteľné tromi. Potom $|A_2| = 49, |A_3| = 33$ (násobky dvoch sú $2, 4, \ldots, 98$, pričom $2 = 2.1, 4 = 2.2, \ldots, 98 = 2.49$, podobne násobky troch sú $3, 6, \ldots, 99$, pričom $3 = 3.1, 6 = 3.2, \ldots, 99 = 3.33$). Zrejme počet prirodzených čísel menších ako 100, ktoré sú deliteľné dvomi alebo tromi nie je $49 + 33$, lebo v tomto súčte sú dvakrát započítané čísla, ktoré sú deliteľné dvomi aj tromi, teda deliteľné šiestimi. Ak A_6 je množina čísel menších ako 100, ktoré sú deliteľné šiestimi, tak $|A_6| = 16$. Preto

$$|A_2 \cup A_3| = |A_2| + |A_3| - |A_6| = 49 + 33 - 16 = 66.$$

Ak si uvedomíme, že A_6 je množina tých čísel, ktoré sú deliteľné dvomi a tromi zároveň, teda sú to čísla, ktoré patria do prieniku $A_2 \cap A_3$, potom uvedený výsledok môžeme prepísať

$$|A_2 \cup A_3| = |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3|.$$

Toto isto nikoho neprekvapilo a princíp inklúzie a exklúzie pre dve množiny môžeme zapísať aj všeobecne

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Princíp inklúzie a exklúzie pre tri množiny nám pomôže objasniť nasledujúci príklad.

Príklad 48. *Koľko je prirodzených čísel menších ako 100, ktoré nie sú deliteľné ani dvomi, ani tromi, ani piatimi?*

Riešenie. Úlohu najskôr pozmeníme a budeme zisťovať počet prirodzených čísel menších ako 100, ktoré sú deliteľné dvomi alebo tromi alebo piatimi, čo je presný opak zadania, teda na záver bude stačiť tento výsledok odčítať od 99. Označme: $A_2, A_3, A_5, A_6, A_{10}, A_{15}, A_{30}$, postupne množiny čísel menších ako 100, ktoré sú deliteľné $2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$. Podobne ako v predchádzajúcej úlohe zistíme, že: $|A_2| = 49, |A_3| = 33, |A_5| = 19, |A_6| = 16, |A_{10}| = 9, |A_{15}| = 6, |A_{30}| = 3$. Potom podobnou úvahou ako v predchádzajúcej úlohe dostaneme:

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_6| - |A_{10}| - |A_{15}| + |A_{30}| =$$

$$= 49 + 33 + 19 - 16 - 9 - 6 + 3 = 73.$$

Treba si uvedomiť, že

$$A_6 = A_2 \cap A_3, A_{10} = A_2 \cap A_5, A_{15} = A_3 \cap A_5, A_{30} = A_2 \cap A_3 \cap A_5,$$

ďalej musíme myslieť na to, že vďaka súčtu $|A_2| + |A_3| + |A_5|$ tam boli prvky množiny A_{30} započítané trikát, ale odčítaním mohutností množín A_6, A_{10}, A_{15}, boli trikrát odčítané, teda ich tam musíme na záver pripočítať. Pre lepšiu názornosť je vhodné si k tomu nakresliť obrázok.

My ale zisťujeme počet prirodzených čísel menších ako 100, ktoré **nie sú** deliteľné dvomi **ani** tromi **ani** piatimi, teda doplnok k zjednoteniu $A_2 \cup A_3 \cup A_5$. Preto hľadaný počet je: $99 - 73 = 26$.

Princíp inklúzie a exklúzie pre tri množiny môžeme zapísať aj všeobecne

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

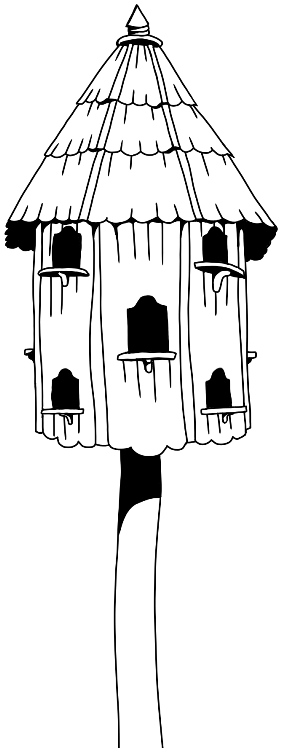
Princíp inklúzie a exklúzie pre $n-$ množín je

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j;i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k;i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| -$$

$$+ \dots (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n|.$$

V literatúre sa dajú nájsť rôzne dôkazy tejto rovnosti, záujemcom doporučujem najskôr urobiť vlastné pokusy.

5 Dirichletov princíp



Ak je dostatočne veľký počet objektov rozdelený do dostatočne malého počtu tried, tak aspoň jedna trieda obsahuje istý minimálny počet objektov. Presnejšie je to sformulované v nasledujúcom tvrdení:

Dirichletov princíp: Ak máme utriediť $kn+1$ $(k \geq 1)$ objektov do n tried, potom existuje aspoň jedna taká trieda, v ktorej je aspoň $k+1$ objektov.

Tento princíp predstavuje veľmi silný nástroj na dôkazy existenčných viet. Na to, aby sme rozlíšili, kde a ako ho treba použiť, potrebujeme istú skúsenosť, teda dostatočný tréning. Treba si však uvedomiť, že tento princíp nám neposkytuje žiadnu informáciu o tom, ako danú triedu nájsť, hovorí len o jej existencii. Dirichletov princíp je známy aj pod inými menami, napr. holubníkový, alebo šuflíkový. Pre lepšie pochopenie premenných k, n uvedieme najskôr veľmi jednoduchý príklad. Ak máme 17 holubov a máme štyri holubníky, tak nutne musí byť aspoň v jednom holubníku aspoň päť holubov. V opačnom prípade by sme mali v každom holubníku najviac štyri holuby a teda by ich mohlo byť len 16. V tomto prípade je $n = 4$ (to sú holubníky, teda triedy) a objektov máme 17, teda $17 = k \cdot n + 1 = k \cdot 4 + 1$, teda $k = 4$ a $k + 1 = 5$.

Na ilustráciu uvádzame jeden pekný príklad.

Príklad 49. *Ukážte, že v každej skupine ľudí sú vždy aspoň dvaja takí, ktorí majú v rámci tejto skupiny rovnaký počet známych.*

Dôkaz. Predstavme si množinu n ľudí. Sú dve možnosti: buď medzi nimi neexistuje osoba, ktorá má nula známych, alebo existuje aspoň jedna taká osoba. Je zrejmé, že tieto dve možnosti nemôžu nastať naraz. Postupne rozoberieme obe možnosti:

- Nech teda neexistuje osoba, ktorá má 0 známych. Potom z tých n ľudí môže mať každý 1 až $(n-1)$ známych (prečo nemôže mať n známych?) A teda môžeme aplikovať Dirichletov princíp, lebo máme n ľudí a len $n-1$ možností. Teda aspoň dvaja z nich musia mať rovnaký počet známych.

- Ak existuje aspoň jedna osoba, ktorá má 0 známych, tak potom si budeme všímať zvyšných $n-1$ osôb. Medzi nimi môže byť niekto ďalší, ktorý má tiež 0 známych, v takom prípade už vieme o dvoch, ktorí majú 0 známych. Alebo tam už nikto taký nie je. Teda ostáva $n-1$ osôb, všetci majú aspoň jedného známeho. Koľko môžu mať maximálne známych? Treba si to premysliet, ale je to max. $n-2$ známych a teda znovu môžeme aplikovať Dirichletov princíp, lebo máme $n-1$ osôb a len $n-2$ možností.

□

6 Úlohy na precvičenie

6.1 Úvod do teórie množín

1. Dané sú množiny $A = \{1, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 4, 6, 7\}$, $C = \{2, 5, 6\}$. Určte $A \cup B$, $A \cap C$, $C \setminus B$, $A \setminus (C \setminus B)$, $A \cap (B \setminus C)$, $A \triangle B$, $A \times B$, $(A \times C) \setminus B$.

   Výsledky: $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap C = \{5, 6\}$, $C \setminus B = \{2, 5\}$, $A \setminus (C \setminus B) = \{1, 4, 6\}$, $A \cap (B \setminus C) = \{4\}$, $A \triangle B = \{1, 3, 5, 7\}$, $A \times B = \{[1, 3], [1, 4], [1, 6], [1, 7], [4, 3], \dots, [6, 6], [6, 7]\}$, $(A \times C) \setminus B = A \times C$.

2. Dané sú množiny (intervaly) $A = (1, 3\rangle$, $B = \langle 2, 5)$. Určte $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$, $A \setminus (A \setminus B)$, $B \setminus (B \setminus A)$, $A \setminus (B \setminus A)$, $B \setminus (A \setminus B)$, $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$, $A \triangle B$.

   Výsledky: $A \cup B = (1, 5)$, $A \cap B = \langle 2, 3\rangle$, $B \setminus A = (3, 5)$, $A \setminus (A \setminus B) = \langle 2, 3\rangle$, $B \setminus (B \setminus A) = \langle 2, 3\rangle$, $A \setminus (B \setminus A) = (1, 3\rangle$, $B \setminus (A \setminus B) = \langle 2, 5)$, $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$, $A \triangle B = (1, 2) \cup (3, 5)$.

3. V triede je 22 chlapcov a všetci sa venujú nejakému športu: 19 futbalu, 5 karate a 10 hokeju. Pritom všetci karatisti sú aj futbalisti a 3 hokejisti sú aj karatisti. Koľko chlapcov hrá iba hokej, ak 10 chlapcov hrá iba futbal?

   Výsledky: 3.

4. Pre ktoré reálne čísla x majú intervaly $\langle \frac{x-1}{2}, 3\rangle$ a $(-\infty, x+2\rangle$ neprázdny prienik?

   Výsledky: $x \in \langle -5, 7)$.

5. Pre ktoré reálne čísla x majú intervaly $\left\langle \frac{4x}{3}, \infty\right)$ a $\langle -11, \frac{6x-2}{4}\rangle$ prázdny prienik?

   Výsledky: $x \in (-7, 3)$.

6. Pre ktoré reálne čísla x nie sú intervaly $(-\infty, 2+x)$ a $\langle \frac{2x-1}{3}, 3\rangle$ disjunktné?

   Výsledky: $x \in (-7, 5)$.

7. Pre ktoré reálne čísla x je interval $\left(-3, \frac{x-1}{2}\right)$ podmnožinou intervalu $(-\infty, \frac{1}{x}\rangle$?

   Výsledky: $x \in (-5, -1\rangle \cup (0, 2\rangle$.

8. Určte množiny X, Y tak, aby platilo: $X \cap Y = \emptyset, X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, ku každému $a \in X$ existuje $b \in Y$ tak, že $b = a + 4$.

   Výsledky: $X_1 = \emptyset, Y_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, X_2 = \{1\}, Y_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}, X_3 = \{2\}, Y_3 = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}, X_4 = \{3\}, Y_2 = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}, X_5 = \{1, 2\}, Y_5 = \{3, 4, 5, 6, 7\}, X_6 = \{1, 3\}, Y_6 = \{2, 4, 5, 6, 7\}, X_7 = \{2, 3\}, Y_7 = \{1, 4, 5, 6, 7\}, X_8 = \{1, 2, 3\}, Y_8 = \{4, 5, 6, 7\}$.

9. Určte podmnožiny X, Y množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, pre ktoré platí: $X = \{2, 6, x, y\}, Y = \{2, x, z, u\}, X \cap Y' = \{5, 6\}, X' \cap Y = \{1, 4\}$.

   Výsledky: $X = \{2, 6, 3, 5\}, Y = \{2, 3, 1, 4\}$.

10. Uveďte príklad množín A, B, pre ktoré platí $A \in B$ a zároveň $A \subseteq B$.

    Výsledky: Napr. $A = \{2\}, B = \{2, \{2\}\}$.

11. Zakreslite si ľavú a pravú stranu rovností Vennovými diagramami. Nájdite konkrétne množiny A, B pre ktoré uvedená rovnosť platí a ak je to možné nájdite i množiny A, B, pre ktoré uvedená rovnosť neplatí.

    (a) $A \cap (A \cup B) = A$,
    (b) $A \cup (A \cap B) = A$,
    (c) $A \setminus B = (A \cup B) \cap B$,
    (d) $A \setminus (A \setminus B) = A \cup B$,
    (e) $A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$,
    (f) $A \setminus (B \setminus A) = A \cap B$,
    (g) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

    Výsledky: a) platí pre ľubovolné dve množiny, b) platí pre ľubovolné dve množiny, c) platí napr. pre $A = B = \emptyset$, neplatí napr. pre $A = B = \{\star\}$, d) platí napr. pre $A = B = \{\star\}$, neplatí napr. pre $A = \{2\}, B = \{\star\}$, e) platí pre ľubovolné dve množiny, f) platí napr. pre $A = B = \{\star\}$, neplatí napr. pre $A = \{2\}, B = \{\star\}$, g) platí pre ľubovolné dve množiny.

12. Zakreslite si ľavú a pravú stranu rovností Vennovými diagramami. Nájdite konkrétne množiny A, B, C pre ktoré uvedená rovnosť platí a ak je to možné nájdite i množiny A, B, C, pre ktoré uvedená rovnosť neplatí.

    (a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
    (b) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
    (c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
    (d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
    (e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \setminus B$
    (f) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
    (g) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
    (h) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (B \cap D) \cup (A \cap C)$

    Výsledky: a) platí pre ľubovolné tri množiny, b) platí pre ľubovolné tri množiny, c) platí pre ľubovolné tri množiny, d) platí pre ľubovolné tri množiny, e) platí pre ľubovolné tri množiny, f) platí pre ľubovolné tri množiny, g) platí pre ľubovolné tri množiny, h) platí napr. pre $A = B = C = D\{\star\}$, neplatí napr. pre $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}, C = \{\star\}, D = \{\star, \Delta\}$.

6.2 Výrokový počet

1. Zistite, či nasledujúce formuly sú tautológie:

   (i) $(A \Leftrightarrow C) \implies \big((B \Leftrightarrow C) \implies (A \Leftrightarrow B)\big)$

   (ii) $(A \Leftrightarrow B) \implies \big(A \wedge C \Leftrightarrow C \wedge B\big)$

   (iii) $(A \Leftrightarrow B) \implies (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$

   (iv) $(A \Leftrightarrow B) \implies (B \implies A)$

   (v) $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$

   (vi) $(A \implies B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

   (vii) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)\big)$

   (viii) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

   (ix) $A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$

   (x) $(A \wedge \neg A) \wedge B \Leftrightarrow A \wedge \neg A$

   (xi) $(A \wedge \neg A) \vee B \Leftrightarrow A$

   (xii) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

   Výsledky:Tautológie sú: (i), (ii), (iii), (iv), (vi), (viii), (ix), (x).

2. V dielni sú tri stroje, ktoré pracujú podľa týchto podmienok: Ak pracuje prvý stroj, pracuje i druhý stroj. Ak nepracuje prvý stroj, nepracuje ani tretí stroj. Aké sú možnosti pre prácu tejto trojice strojov?

   Výsledky: Buď pracujú všetky tri stroje, alebo ani jeden z nich, alebo iba 2. stroj, alebo 1. a 2. stroj zároveň.

3. Pred sudcom stáli traja obžalovaní. Vyšetrovaním sa zistilo, že:

   a) Ak je A nevinný alebo B vinný, tak C je vinný.

   b) Ak A je nevinný, tak nevinný je aj C.

   Koho z nich má sudca odsúdiť?

   Výsledky: Sudca môže obviniť A.

4. Detektív Sherlock Holmes zistil:

   a) Ak A je vinný a B je nevinný, tak C je vinný.

   b) C nikdy nie je v akcii sám.

   c) A nikdy nespolupracuje s C.

   d) Mimo A, B, C nie sú do prípadu zapletené ďalšie osoby.

   Koho obvinil Sherlock Holmes? Koho môže s istotou prepustiť?

   Výsledky: Sudca môže obviniť B, prepustiť nemôže nikoho.

6.3 Predikátový počet

1. Nech x, y, z sú reálne premenné. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich zápisov sú termy, ktoré výroková forma a ktoré výrok nad množinou $\mathbb{R}$.

   (a) 3,
   (b) $3x$,
   (c) $3x - y$,
   (d) $3x > y$,
   (e) $\sqrt{|x+z|} - 3x$,
   (f) $\forall x \forall y\colon (x \cdot z = y \cdot z) \Rightarrow x = y$,
   (g) $\forall x\colon x - y < y$,
   (h) $\exists x \forall y\colon x + y = 0$,
   (i) $\forall x \exists y\colon x + y = 0$.

   Výsledky: Termy sú a), b), c), e); výrokové formy sú d), f), g); výroky sú h), i).

2. Formulami predikátového počtu zapíšte:

   (a) Rovnica $x^2 + 1 = 0$ nemá na množine reálnych čísel riešenie.
   (b) Rovnica $x^3 - 6x + 4 + 1 = 0$ má na množine reálnych čísel aspoň jedno riešenie.
   (c) Pre niektoré reálne čísla platí $(a + b)^3 = a^3 + b^3$.
   (d) Pre sčítanie reálnych čísel platí komutatívny zákon.
   (e) Pre sčítanie reálnych čísel platí asociatívny zákon.
   (f) Množina prirodzených čísel nie je zhora ohraničená.
   (g) Neexistuje najväčšie reálne číslo.
   (h) Prirodzené číslo je deliteľné šiestimi, práve vtedy, keď je deliteľné dvomi a tromi.

   Výsledky: a) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x^2 + 1 \neq 0$, b) $\exists x \in \mathbb{R}\colon x^3 - 6x + 4 + 1 = 0$, c) $\exists a, b \in \mathbb{R}\colon (a + b)^3 = a^3 + b^3$, d) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$, e) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, f) $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}\colon m > n$, g) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}\colon y > x$, h) $\forall n \in \mathbb{N}\colon 6|n \iff 2|n \wedge 3|n$.

6.4 Dôkazy

V týchto úlohách je výsledkom dôkaz alebo kontrapríklad, inšpirovať sa môžete v kapitole 2.1.

1. Zistite, či pre ľubovolné množiny A, B platia nasledujúce rovnosti. V prípade, že rovnosť platí, dokážte ju (obrázok nie je dôkaz). V opačnom prípade nájdite vhodný protipríklad.

   (a) $A \cap (A \cup B) = A$,
   (b) $A \cup (A \cap B) = A$,
   (c) $A \setminus B = (A \cup B) \cap B$,
   (d) $A \setminus (A \setminus B) = A \cup B$,
   (e) $A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$,
   (f) $A \setminus (B \setminus A) = A \cap B$,
   (g) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

   Výsledky: a) platí, b) platí, c) neplatí, d) neplatí, e) platí, f) neplatí, g) platí.

2. Zistite, či pre ľubovolné množiny A, B, C platia nasledujúce rovnosti. V prípade, že rovnosť platí, dokážte ju (obrázok nie je dôkaz). V opačnom prípade nájdite vhodný protipríklad.

   (a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
   (b) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
   (c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
   (d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
   (e) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \setminus B$
   (f) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
   (g) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
   (h) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
   (i) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
   (j) $A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$
   (k) $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D)$
   (l) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \times C) \cup (B \times D)$

   Výsledky: a) platí, b) platí, c) platí, d) platí, e) platí, f) platí, g) platí, h) platí, i) platí, j) platí, k) neplatí, l) neplatí.

3. * Určte $\bigcup\limits_{t \in T} A_t$ a $\bigcap\limits_{t \in T} A_t$, ak

   (a) $T = (0, \infty)$, $A_t = \langle -t, t \rangle$,
   (b) $T = (0, 1)$, $A_t = (t, t + 1)$,
   (c) $T = \mathbb{R}^+$, $A_t = (1 - \frac{1}{t}, 2 + \frac{3}{t})$,
   (d) $T = (0, 2\rangle$, $A_t = (1 - \frac{1}{t}, 2 + \frac{3}{t})$,
   (e) $T = (0, 1)$, $A_t = \left(1 - \frac{1}{1-t}, 2 + \frac{1}{t}\right)$,
   (f) $T = (0, 1)$, $A_t = \langle -\frac{1}{t}, \frac{1}{t} \rangle$,
   (g) $T = (0, 1)$, $A_t = \left(2 - \frac{1}{t}, 4 + \frac{2}{t}\right)$.

6.5 Matematická Indukcia

V týchto úlohách je výsledkom dôkaz, všetky tvrdenia sú pravdivé, inšpirovať sa môžete v kapitole 2.5.

1. Dokážte, že pre každé nenulové prirodzené číslo n platí:

   (i) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$
   (ii) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$
   (iii) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$
   (iv) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$
   (v) $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{1}{30}n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)$
   (vi) $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$
   (vii) $1^3 + 3^3 + \cdots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

(viii) $2^3 + 4^3 + \cdots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$

(ix) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}n(n+1)$

(x) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(xi) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

(xii) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (3n-1) = n^2(n+1)$

(xiii) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + (2n-1) \cdot (2n+1) = \frac{1}{3}n(4n^2 + 6n - 1)$

(xiv) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n \cdot (3n+1) = n(n+1)^2$

(xv) $(n+1) \cdot (n+2) \cdot \cdots \cdot (n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)$

(xvi) $1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

(xvii) $2 + 7 + 14 + \cdots + (n^2 + 2n - 1) = \frac{1}{6}n(2n^2 + 9n + 1)$

(xviii) $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + n(n+1)^2 = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$

(xix) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(xx) $\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{n}{4(n+4)}$

(xxi) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$

(xxii) $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

(xxiii) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

(xxiv) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$

(xxv) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$

(xxvi) $1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \cdots + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2^{1-n} + 2(n-1)$

(xxvii) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

(xxviii) $\left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) \cdot \ldots \left(1 + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{3(2n+1)}{2n+3}$

(xxix) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

(xxx) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

(xxxi) $\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{4^2 - 1} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}$

2. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n > 1$ platí:

(i) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

(ii) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$

(iii) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} > 1$

(iv) $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n$

(v) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

(vi) $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

(vii) $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}$

3. Dokážte, že platí:

   (i) $2^n > n^2\,, \quad n \geq 5$

   (ii) $2^n \geq n + 1\,, \quad n \geq 0$

   (iii) $3^n \geq 2(n + 1)^2\,, \quad n \geq 4$

   (iv) $5^n \geq 5n^3 + 2\,, \quad n \geq 4$

   (v) $2^{n+2} > 2n + 5\,, \quad n \geq 1$

   (vi) $\sqrt{(2n)!} < 2^n \cdot n!\,, \quad n \geq 1$

4. * Dokážte, že pre každé reálne číslo $a \geq -1$ a pre každé nenulové prirodzené číslo n platí:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

5. * Dokážte, že pre rôzne kladné reálne čísla a, b a pre prirodzené číslo $n > 1$ platí:

$$2^{n-1}\,(a^n + b^n) > (a + b)^n$$

6. Ak pre nezáporná reálne čísla $x_1, x_2, \cdots, x_n$ platí $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \frac{1}{2}$, tak

$$(1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdots (1 - x_n) \geq \frac{1}{2}.$$

   Dokážte.

7. Dokážte, že pre prirodzená čísla platí:

$$1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2.$$

8. Dokážte, že pre každé nepárne (liché) prirodzené číslo n je súčet $n^4 + 2n^2 + 2013$ deliteľný číslom 96.

9. * Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré má číslo $2^n + n^2$ na mieste jednotiek číslicu 7. Svoju hypotézu potvrďte dôkazom.

6.6 Potenčná množina a princíp inklúzie a exklúzie

1. Vymenujte prvky množín:
   a) $\mathcal{P}(\{1\})$, b) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, c) $\mathcal{P}(\{\{\star\}, \{1, 2\}, \Delta\})$.

   Výsledky: a) $\{\emptyset, \{1\}\}$, b) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, c) $\{\emptyset, \{\{\star\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\Delta\}, \{\{\star\}, \{1, 2\}\}, \{\{\star\}, \Delta\}, \{\{1, 2\}, \Delta\}, \{\{\star\}, \{1, 2\}, \Delta\}\}$.

2. Koľko prvkov má množina $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$?

   Výsledky: $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))| = 4$.

3. Zistite, či pre ľubovolné množiny A, B platí nasledujúca rovnosť, prípadne, či sa rovnosť dá nahradiť inklúziou.
$$\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B).$$
Výsledky: Rovnosť neplatí, neplatí ani jedna z inkúzií, všimnite si napr. takéto množiny $A = \{1, 2\}, B = \{2\}$.

4. Koľko čísel zostane z čísel $1, 2, \ldots, 1000$ po vyškrtaní všetkých násobkov čísel
   (a) $2, 6, 18$?
   (b) $4, 6, 32$?
   (c) $5, 18, 30$?
   (d) $2, 6, 15$?
   (e) $2, 3, 5, 7$?

   Výsledky: a) 500, b) 667,, c) 756,, d) 467, e) 228.

5. Určte počet prirodzených čísel $n < 100$, ktoré nie sú deliteľné druhou mocninou žiadneho prirodzeného čísla väčšieho ako 1.
   Výsledky: 61.

6. Určte počet prirodzených čísel $n < 100$, ktoré nie sú deliteľné treťou mocninou žiadneho prirodzeného čísla väčšieho ako 1.
   Výsledky: 84.

7. Koľko existuje poradí písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, z ktorých vypustením niektorých písmen nie je možné dostať ani jedno zo slov DEN, NOC?
   Výsledky: $16! - 2 \cdot \frac{16!}{3!} + \frac{16!}{5!}$.

8. Koľko existuje poradí písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, z ktorých vypustením niektorých písmen nie je možné dostať ani jedno zo slov HOP, PONK?
   Výsledky: $16! - \frac{16!}{3!} - \frac{16!}{4!}$.

9. Koľko existuje poradí písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, z ktorých vypustením niektorých písmen nie je možné dostať ani jedno zo slov BOK, MONK?
   Výsledky: $16! - \frac{16!}{3!} - \frac{16!}{4!} + 2 \cdot \frac{16!}{5!}$.

10. Koľko existuje poradí písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, z ktorých vypustením niektorých písmen nie je možné dostať ani jedno zo slov HLOD, HOP?
    Výsledky: $16! - \frac{16!}{3!} - \frac{16!}{4!} + 2 \cdot \frac{16!}{5!}$.

11. * (Problém šatnárky) K šatnárke prichádzajú hostia (je ich n) a dávajú jej klobúky, každý hosť má práve jeden klobúk a dobre si ho pozná. Pre šatnárku sú klobúky však nerozlíšiteľné. Keď hostia odchádzajú, šatnárka im podáva klobúky podľa toho, ktorý jej práve príde pod ruku. Aká je pravdepodobnosť, že žiaden hosť nedostane svoj klobúk?

6.7 Dirichletov princíp

V týchto úlohách je výsledkom dôkaz, inšpirovať sa môžete v kapitole 5.

1. Daná je množina obsahujúca 10 prirodzených čísel medzi 1 a 99 (vrátane). Dokážte, že existujú dve disjunktné neprázdne podmnožiny tejto množiny s rovnakým súčtom svojich prvkov.

2. Nech A je množina 19 navzájom rôznych prirodzených čísel, vybraných z aritmetickej postupnosti $1, 4, 7, \ldots, 100$. Dokážte, že A musí obsahovať dve rôzne čísla, ktorých súčet je 104.

3. Nech A je množina obsahujúca 100 prirozených čísel. Je možné vždy vybrať niekoľko prvkov z množiny A tak, aby ich súčet bol delitelný číslom 100?

4. Je daných 33 prirodzených čísel. Dokážte, že medzi nimi existujú aspoň 2 také čísla, ktorých rozdiel je deliteľný číslom 32.

5. Majme množinu prirodzených čísel od 1 do 20. Dokážte, že ľubovolná jej podmnožina s aspoň 11 prvkami obsahuje dve čísla, z ktorých jedno delí druhé.

6. Z každých 52 celých čísel vieme vybrať dve také, že ich rozdiel alebo súčet je deliteľný 100. Dokážte.