

引文格式: WANG Bin, LI Jiancheng, GAO Jingxiang, et al. Newton-Gauss Algorithm of Robust Weighted Total Least Squares Model[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2015, 44(6): 602-608. (王彬, 李建成, 高井祥, 等. 抗差加权整体最小二乘模型的牛顿-高斯算法[J]. 测绘学报, 2015, 44(6): 602-608.) DOI: 10.11947/j.AGCS.2015.20130704

抗差加权整体最小二乘模型的牛顿-高斯算法

王彬¹, 李建成¹, 高井祥², 刘超³

1. 武汉大学测绘学院, 湖北 武汉 430079; 2. 中国矿业大学环境与测绘学院 江苏 徐州 221116; 3. 安徽理工大学测绘学院, 安徽 淮南 232001

Newton-Gauss Algorithm of Robust Weighted Total Least Squares Model

WANG Bin¹, LI Jiancheng¹, GAO Jingxiang², LIU Chao³

1. School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China; 2. School of Environment Science and Spatial Informatics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China; 3. School of Geodesy and Geomatics, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232001, China

Abstract: Based on the Newton-Gauss iterative algorithm of weighted total least squares (WTLS), a robust WTLS (RWTLS) model is presented. The model utilizes the standardized residuals to construct the weight factor function and the square root of the variance component estimator with robustness is obtained by introducing the median method. Therefore, the robustness in both the observation and structure spaces can be simultaneously achieved. To obtain standardized residuals, the linearly approximate cofactor propagation law is employed to derive the expression of the cofactor matrix of WTLS residuals. The iterative calculation steps for RWTLS are also described. The experiment indicates that the model proposed in this paper exhibits satisfactory robustness for gross errors handling problem of WTLS, the obtained parameters have no significant difference with the results of WTLS without gross errors. Therefore, it is superior to the robust weighted total least squares model directly constructed with residuals.

Key words: total least squares; robust estimation; Newton-Gauss method; standardized residuals; median

Foundation support: The National Basic Research Program of China (973 Program) (No. 2013CB733300); The National Natural Science Foundation of China (No. 41404004); The China Postdoctoral Science Foundation (No. 2014M551790)

摘要: 基于加权整体最小二乘的牛顿-高斯迭代算法, 提出了一种抗差加权整体最小二乘模型。利用标准化残差构造权因子函数, 并采用中位数法获得具有抗差性的单位权中误差估值, 能同时实现观测空间和结构空间抗差。为获得标准化残差, 利用线性近似的协因数传播律推导了加权整体最小二乘残差协因数阵的表达式, 并给出模型的迭代计算方法。试验结果表明: 对于加权整体最小二乘的粗差处理问题, 本文提出的方法具有良好的抗差性能, 参数估值与不含粗差时加权整体最小二乘的结果没有显著的差异, 性能优于直接由残差构造的稳健加权整体最小二乘模型。

关键词: 整体最小二乘; 抗差估计; 牛顿-高斯法; 标准化残差; 中位数

中图分类号: P207

文献标识码: A

文章编号: 1001-1595(2015)06-0602-07

基金项目: 国家 973 计划(2013CB733300); 国家自然科学基金青年基金(41404004); 中国博士后科学基金(2014M551790)

1 引言

整体最小二乘(TLS)方法可以有效解决系数矩阵含有误差的参数估计问题, 得到了国内外学

者的广泛关注, 并取得了较为理想的结果^[1-5]。近几年, 针对实践中观测值不等精度的问题, 国内外学者对于加权整体最小二乘(WTLS)的算法及应用进行了深入研究。文献[6]将不等精度条件下

的变量误差(EIV)模型的函数模型作为限制条件,通过构造拉格朗日函数的方式推导了WTLS的迭代算法,并应用到了线性回归中;文献[7]利用高斯-赫尔默特模型研究了WTLS的计算方法,并将其应用于平面坐标转换中;文献[8]引入非线性最小二乘的牛顿-高斯(Newton-Gauss)法,获得了WTLS的迭代算法;文献[9]也从非线性最小二乘的角度入手,研究了WTLS的解算方法并推广到了partial-EIV模型中,有效地减少了未知数的数量。

以上研究都是针对系数矩阵和观测向量中仅包含偶然误差的情况,当系数阵和观测向量受到粗差污染时,参数估值必将受到不利影响,有时甚至会严重失真。国内外对于经典最小二乘的粗差处理方法已经进行了深入研究,采用的方法大致可分为基于均值漂移的粗差探测^[10-11]和基于方差-协方差膨胀的抗差估计^[12-17]两大类。相对于粗差探测技术,抗差估计的实现通常更为简单,其关键是权因子函数的构造。一个合理的抗差方案应能同时顾及观测空间和结构空间抗差,为达到这一目的通常应采用标准化残差构造权因子函数^[13]。

目前,关于整体最小二乘的粗差处理方法的研究还较少。文献[18—19]基于高斯-赫尔默特模型和Huber权函数提出了三维坐标转换的稳健WTLS方法。文献[20]对稳健混合TLS方法进行了研究。文献[21]将文献[18—19]中的Huber权函数替换成了IGG函数,并通过试验验证了该方法的优点。然而,上述关于WTLS的粗差处理方法存在着共同的问题:直接采用残差构造权因子函数,无法顾及结构空间的抗差性,模型不够合理,特别在非等精度的情况下抗差效果并不理想。本文基于WTLS的Newton-Gauss迭代算法^[8],借鉴一般抗差估计的等价权原理,提出一种抗差加权整体最小二乘(RWTLS)模型,采用标准化残差构造权因子函数,并利用中位数法获得具有抗差性的单位权中误差估值。在模型构建过程中,对权因子的计算和等价权的更新、系数阵固定元素的处理等关键问题进行了研究。为获得标准化残差,利用线性近似的协因数传播律推导了WTLS残差协因数阵的表达式,并给出了迭代计算方法。该算法在观测空间和结构空间均具有良好的抗差能力。

2 基于Newton-Gauss法的WTLS迭代算法

EIV模型的函数模型为

$$\mathbf{L} - \mathbf{e}_L = (\mathbf{A} - \mathbf{E}_A) \mathbf{X} \quad (1)$$

式中, \mathbf{L} 为 $m \times 1$ 维的观测向量; \mathbf{A} 为 $m \times n$ 维的系数矩阵, $\text{rank}(\mathbf{A}) = n < m$; \mathbf{e}_L 是 \mathbf{L} 的随机误差向量; \mathbf{E}_A 为 \mathbf{A} 的随机误差矩阵; \mathbf{X} 为 $n \times 1$ 维的未知参数向量。

相应的随机模型为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_A \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_L & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_A \end{bmatrix} \right) \quad (2)$$

式中, $\mathbf{e}_A = \text{vec}(\mathbf{E}_A)$, vec 表示矩阵的列向量化算子,是将矩阵的每一列按从左到右的顺序堆叠; \mathbf{Q}_L 和 \mathbf{Q}_A 分别为 \mathbf{e}_L 和 \mathbf{e}_A 的协因数阵,其维数分别为 $m \times m$ 和 $mn \times mn$; σ_0 为单位权中误差。

设在第 i 次迭代计算后,获得的参数估值为 $\mathbf{X}_{(i)}$,预测残差矩阵为 $\mathbf{E}_{A(i)}$,将式(1)右端在 $(\mathbf{X}_{(i)}, \mathbf{E}_{A(i)})$ 处利用泰勒级数展开

$$\mathbf{L} - \mathbf{e}_L = \mathbf{A} \mathbf{X}_{(i)} + \mathbf{A}_{(i)} \delta \mathbf{X} - \mathbf{E}_A \mathbf{X}_{(i)} = \mathbf{A} \mathbf{X}_{(i)} + \mathbf{A}_{(i)} \delta \mathbf{X} - (\mathbf{X}_{(i)}^T \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{e}_A \quad (3)$$

式(3)省略了二阶以上的部分,仅保留一阶项。式中, $\delta \mathbf{X}$ 为 $\mathbf{X}_{(i)}$ 的微小改正值,且 $\mathbf{A}_{(i)} = \mathbf{A} - \mathbf{E}_{A(i)}$; \mathbf{I}_m 表示 m 阶单位阵。

结合EIV模型的参数估计准则,可构造出WTLS的拉格朗日目标函数^[8]

$$\Phi(\mathbf{e}_L, \mathbf{e}_A, \mathbf{X}, \mathbf{K}) = \mathbf{e}_L^T \mathbf{Q}_L^{-1} \mathbf{e}_L + \mathbf{e}_A^T \mathbf{Q}_A^{-1} \mathbf{e}_A + 2\mathbf{K}^T (\mathbf{L} - \mathbf{e}_L - \mathbf{A} \mathbf{X}_{(i)} - \mathbf{A}_{(i)} \delta \mathbf{X} + (\mathbf{X}_{(i)}^T \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{e}_A) \quad (4)$$

利用Euler-Lagrange必要条件,对各变量求导并令导数为零可得

$$\delta \hat{\mathbf{X}}_{(i+1)} = (\mathbf{A}_{(i)}^T \mathbf{Q}_{c(i)}^{-1} \mathbf{A}_{(i)})^{-1} \mathbf{A}_{(i)}^T \mathbf{Q}_{c(i)}^{-1} (\mathbf{L} - \mathbf{A} \mathbf{X}_{(i)}) \quad (5a)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{(i+1)} = (\mathbf{A}_{(i)}^T \mathbf{Q}_{c(i)}^{-1} \mathbf{A}_{(i)})^{-1} \mathbf{A}_{(i)}^T \mathbf{Q}_{c(i)}^{-1} (\mathbf{L} - \mathbf{E}_{A(i)} \mathbf{X}_{(i)}) \quad (5b)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_{L(i+1)} = \mathbf{Q}_L \mathbf{Q}_{c(i)}^{-1} (\mathbf{L} - \mathbf{A} \mathbf{X}_{(i)} - \mathbf{A}_{(i)} \delta \hat{\mathbf{X}}_{(i+1)}) \quad (5c)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_{A(i+1)} = -\mathbf{Q}_A (\mathbf{X}_{(i)}^T \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{Q}_{c(i)}^{-1} (\mathbf{L} - \mathbf{A} \mathbf{X}_{(i)} - \mathbf{A}_{(i)} \delta \hat{\mathbf{X}}_{(i+1)}) \quad (5d)$$

式中

$$\mathbf{Q}_{c(i)} = \mathbf{Q}_L + (\mathbf{X}_{(i)}^T \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{Q}_A (\mathbf{X}_{(i)} \otimes \mathbf{I}_m) \quad (6)$$

将最小二乘的参数估值作为初值,按照式(5a)~式(5d)所描述的迭代过程进行计算,当满足 $\|\delta \hat{\mathbf{X}}_{(i+1)}\| < \epsilon_0$ (ϵ_0 是给定的小正数)时停止迭

代,即可获得参数的 WTLS 解。

3 基于 Newton-Gauss 法的 RWTLS 的基本原理和算法

3.1 RWTLS 的基本原理

将 EIV 模型的参数估计准则写成式(7)的形式

$$\mathbf{V}_e^T \mathbf{P}_e \mathbf{V}_e = \min \quad (7)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_e &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_A \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_e &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_L & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_L^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_A^{-1} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_e^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

这与经典最小二乘估计准则的形式相同,当观测向量 \mathbf{L} 和系数阵 \mathbf{A} 含有粗差时,难以获得准确的参数解。为此,本文借鉴一般抗差估计的等价权原理,提出 RWTLS 模型,以式(9)作为估计准则

$$\mathbf{V}_e^T \bar{\mathbf{P}}_e \mathbf{V}_e = \min \quad (9)$$

式中

$$\bar{\mathbf{P}}_e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_L & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{P}}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_L^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{Q}}_A^{-1} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{Q}}_e^{-1} \quad (10)$$

式中, $\bar{\mathbf{P}}_L$ 和 $\bar{\mathbf{P}}_A$ 分别是观测向量和系数阵的等价权阵; $\bar{\mathbf{Q}}_L$ 和 $\bar{\mathbf{Q}}_A$ 可称为观测向量和系数阵的等价协因数阵。以此构造以下的拉格朗日目标函数

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{e}_L, \mathbf{e}_A, \mathbf{X}, \mathbf{K}) &= \mathbf{e}_L^T \bar{\mathbf{Q}}_L^{-1} \mathbf{e}_L + \mathbf{e}_A^T \bar{\mathbf{Q}}_A^{-1} \mathbf{e}_A + \\ & 2\mathbf{K}^T (\mathbf{L} - \mathbf{e}_L - \mathbf{A}\mathbf{X}_{(i)} - \\ & \mathbf{A}_{(i)} \delta \mathbf{X} + (\mathbf{X}_{(i)}^T \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{e}_A) \end{aligned} \quad (11)$$

利用 Euler-Lagrange 必要条件可解出 $\delta \hat{\mathbf{X}}_{(i+1)}$ 、 $\mathbf{X}_{(i+1)}$ 、 $\tilde{\mathbf{e}}_{L(i+1)}$ 和 $\tilde{\mathbf{e}}_{A(i+1)}$, 形式与式(5a)~式(5d)完全相同,只需将 \mathbf{Q}_L 、 \mathbf{Q}_A 和 $\mathbf{Q}_{c(i)}$ 分别替换为 $\bar{\mathbf{Q}}_L$ 、 $\bar{\mathbf{Q}}_A$ 和 $\bar{\mathbf{Q}}_{c(i)}$, 其中

$$\bar{\mathbf{Q}}_{c(i)} = \bar{\mathbf{Q}}_L + (\mathbf{X}_{(i)}^T \otimes \mathbf{I}_m) \bar{\mathbf{Q}}_A (\mathbf{X}_{(i)} \otimes \mathbf{I}_m) \quad (12)$$

在 WTLS 方法的迭代计算过程中,先验协因数阵 \mathbf{Q}_L 和 \mathbf{Q}_A 始终保持不变。RWTLS 算法与之不同,为了达到抵抗粗差的效果,等价协因数阵 $\bar{\mathbf{Q}}_L$ 和 $\bar{\mathbf{Q}}_A$ 需要在迭代过程中不断更新。

根据等价权抗差原理,在迭代计算过程中需要利用权因子函数计算等价权阵 $\bar{\mathbf{P}}_e$, 而计算公式中需要的是等价协因数阵 $\bar{\mathbf{Q}}_e$ ($\bar{\mathbf{Q}}_L$ 和 $\bar{\mathbf{Q}}_A$), 为了方便计算,当观测值相互独立时,采用式(13)直接获得 $\bar{\mathbf{Q}}_e$ 。

$$\bar{q}_{e_i} = q_{e_i} R_{ii}, \quad q_{e_i} \neq 0 \quad (13a)$$

相关观测条件下,为保持观测值间的相关性不变,采用双因子模型^[15-16]的形式

$$\bar{q}_{e_{ij}} = q_{e_{ij}} \sqrt{R_{ii}} \sqrt{R_{jj}} \quad q_{e_i} \neq 0, \quad q_{e_j} \neq 0 \quad (13b)$$

式中,下标 i 和 j 表示观测值序号; $\bar{q}_{e_{ij}}$ 和 $q_{e_{ij}}$ 分别表示 $\bar{\mathbf{Q}}_e$ 和 \mathbf{Q}_e 中对应位置的元素; R_{ii} 和 R_{jj} 为相应权因子的倒数,这里称之为协因数因子。式(13a)~(13b)两边同时乘以单位权方差因子就是异常观测方差膨胀模型,这与直接计算等价权阵 $\bar{\mathbf{P}}_e$ 的方式是完全等价的^[15]。需要注意的是,这里应加入 i 和 j 的限制条件为对应的先验协因数不为零,如果系数阵中含有固定元素,则对应位置的先验协因数为零,在平差后不参与误差分配,就不存在更新权的问题。

对于 IGG III 的权因子函数,对其求倒数便可获得对应的协因数因子函数

$$R_{ii} = \begin{cases} 1.0 & |\tilde{v}_{e_i}| \leq k_0 \\ \frac{|\tilde{v}_{e_i}|}{k_0} \left(\frac{k_1 - k_0}{k_1 - |\tilde{v}_{e_i}|} \right)^2 & k_0 < |\tilde{v}_{e_i}| \leq k_1 \\ 10^{30} & k_1 < |\tilde{v}_{e_i}| \end{cases} \quad (14)$$

由于 IGG III 函数的第 3 段为 0,对应协因数因子的理论值应为无穷,为了方便实际计算,用一个数 (10^{30}) 代替,这样在数值计算上完全能够满足要求。 k_0 和 k_1 为常数,实际中通常可分别取 $k_0 = 2.0 \sim 3.0$, $k_1 = 4.0 \sim 8.0$ 。直接利用残差构造的权因子(或协因数因子)函数没有考虑结构空间的抗差性,难以保证良好的抗差性能,式(14)采用标准化残差 \tilde{v}_{e_i} 进行构造在理论上更加合理,而且不受先验单位权中误差取值的影响。 \tilde{v}_{e_i} 的计算公式为

$$\tilde{v}_{e_i} = v_{e_i} / (\sigma_0 \sqrt{Q v_{e_i}}) \quad q_{e_i} \neq 0 \quad (15)$$

式中, σ_0 为单位权中误差; v_{e_i} 表示残差向量 \mathbf{V}_e 的第 i 个元素,在迭代计算过程中不断更新。在一般的标准化残差抗差估计模型中,是利用各最小二乘残差的协因数来计算标准化残差的,而这里的 $Q v_{e_i}$ 代表第 i 个 WTLS 残差的协因数。由于传统的计算公式获得的 σ_0 估值受粗差的影响较大,本文引入一般抗差估计模型中采用的中位数法^[12]获得具有抗差性的单位权中误差估值,计算公式为

$$\hat{\sigma}_0 = 1.4826 \sqrt{\frac{m(n+1)}{i=1} \text{med}(|v_{e_i}/\sqrt{Qv_{e_i}}|)} \quad q_{e_i} \neq 0 \quad (16)$$

需要注意的是,式(15)和式(16)都应加入 i 的限制条件($q_{e_i} \neq 0$)。

3.2 WTLS 残差协因数阵的推导

在一般的抗差估计模型中,LS 残差的协因数阵很容易获得。然而由于 EIV 模型的非线性特性以及 WTLS 算法本身的复杂性,相应协因数阵的获得较为困难。针对此问题,本文利用线性的近似协因数传播律推导残差协因数阵的表达式。

根据式(5c)、式(5d),WTLS 方法在第 $i+1$ 次迭代计算后得到的残差向量 V_e 可表示为

$$V_e = \begin{bmatrix} \tilde{e}_{L(i+1)} \\ \tilde{e}_{A(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} R \quad (17)$$

式中

$$M = Q_L Q_{c(i)}^{-1}, \quad N = -Q_A (X_{(i)} \otimes I_m) Q_{c(i)}^{-1} \quad (18a)$$

$$R = L - AX_{(i)} - A_{(i)} \delta \hat{X}_{(i+1)} \quad (18b)$$

在 Newton-Gauss 法的第 $i+1$ 次迭代计算过程中, $A_{(i)}$ 、 $X_{(i)}$ 是作为固定值处理的,因此仅认为系数阵 A 和观测向量 L 有误差。根据协因数传播律可得

$$Q_{V_e} = \begin{bmatrix} Q\tilde{e}_{L(i+1)} & Q\tilde{e}_{L(i+1)}\tilde{e}_{A(i+1)} \\ Q\tilde{e}_{A(i+1)}\tilde{e}_{L(i+1)} & Q\tilde{e}_{A(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MQ_R M^T & MQ_R N^T \\ NQ_R M^T & NQ_R N^T \end{bmatrix} \quad (19)$$

由式(19)可知求解 Q_{V_e} 要先获得 Q_R 。将式(5a)代入式(18b),可得

$$R = L - AX_{(i)} - A_{(i)} (A_{(i)}^T Q_{c(i)}^{-1} A_{(i)})^{-1} A_{(i)}^T Q_{c(i)}^{-1} (L - AX_{(i)}) = (I_m - F)U \quad (20)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} F &= A_{(i)} (A_{(i)}^T Q_{c(i)}^{-1} A_{(i)})^{-1} A_{(i)}^T Q_{c(i)}^{-1} \\ U &= L - AX_{(i)} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

对 U 作如下变换

$$U = L - (X_{(i)}^T \otimes I_m) \text{vec}(A) = [I_m - X_{(i)}^T \otimes I_m] \cdot \begin{bmatrix} L \\ \text{vec}(A) \end{bmatrix} \quad (22)$$

根据协因数传播律可得

$$Q_U = [I_m \quad -X_{(i)}^T \otimes I_m] \begin{bmatrix} Q_L & 0 \\ 0 & Q_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ -X_{(i)} \otimes I_m \end{bmatrix} = Q_L + (X_{(i)}^T \otimes I_m) Q_A (X_{(i)} \otimes I_m) = Q_{c(i)} \quad (23)$$

又由式(20)可知

$$Q_R = (I_m - F) Q_U (I_m - F)^T = Q_U - Q_U F^T - F Q_U + F Q_U F^T \quad (24)$$

将式(21)和式(23)代入式(24)并整理可得

$$Q_R = Q_{c(i)} - A_{(i)} (A_{(i)}^T Q_{c(i)}^{-1} A_{(i)})^{-1} A_{(i)}^T \quad (25)$$

将式(25)代入式(19)便可获得残差协因数阵 Q_{V_e} 。由于计算标准化残差时只需要各残差的协因数,因此只需分别计算出 $Q\hat{e}_{L(i+1)}$ 和 $Q\hat{e}_{A(i+1)}$ 并取其对角线上的元素。

在一般的抗差估计模型中,最小二乘残差的协因数阵只与系数矩阵和观测向量的先验权阵(或协因数阵)有关,因此其在迭代过程中保持不变。然而上述推导获得的 WTLS 残差协因数阵不仅取决于先验协因数阵 Q_L 和 Q_A ,还与本次计算所代入的参数和系数阵残差的初值 $X_{(i)}$ 和 $E_{A(i)}$ (由 $E_{A(i)}$ 计算所得)有关。因此 RWTLS 与一般抗差估计方法不同,在每迭代一次后计算标准化残差时,均应将先验协因数阵 Q_L 、 Q_A 以及本次迭代所代入的参数和系数阵残差的初值代入式(19)来更新 WTLS 方法对应的残差协因数阵。

3.3 RWTLS 的迭代计算步骤

将 WTLS 得到的参数估值和残差向量作为初值,按照以下步骤进行 RWTLS 迭代计算:

(1) 将第 k 次迭代中参数和系数阵残差的初值(第 $k-1$ 次迭代计算的结果)以及先验协因数阵 Q_L 和 Q_A 代入式(25)和式(19)以更新相应的 WTLS 残差协因数阵。

(2) 将残差向量和步骤(1)获得的 WTLS 残差协因数代入式(16)和式(15)获得第 k 次迭代的标准化残差。

(3) 利用式(13)和式(14)更新 \bar{Q}_L 和 \bar{Q}_A ,进而获得第 $k+1$ 次迭代的参数估值和残差向量。

反复进行步骤(1)—步骤(3),直到满足 $\|\delta \hat{X}_{(k+1)}\| < \epsilon_0$ (ϵ_0 是给定的小正数)时停止迭代计算,此时便能获得参数的 RWTLS 解。

4 算例分析

设一直线方程为 $y = 4x + 3$,设待估参数分别为截距 a 和斜率 b ,则对应的真值分别为 3 和 4。

在此直线上选取 26 个观测点,事先分别给定各点 x 和 y 坐标的标准差(非等精度),每次模拟均根据相应的标准差产生模拟随机误差并加入到各点的坐标真值中。

指定粗差的位置随机产生(可能同时出现在

某点的 x 和 y 坐标上),其绝对值介于 10~30 倍的标准差之间,分别在粗差个数为 1、2 和 3 个时进行 500 次模拟,每次均加入到含有随机误差的观测数据中。先验单位权中误差 $\sigma_0=0.2$,设计的计算方案如下:加入粗差前进行 WTLS 估计(方案①);加入粗差后,依次采用 WTLS 方法(方案②)、文献[21]的 RWTLS-IGG 方法(方案③)和本文提出的 RWTLS 方法处理(方案④)。

对各方案的计算结果进行统计分析,得到参数 a 和 b 的均方根误差及其与真值的最大偏差,见表 1。图 1—图 3 为上述不同粗差个数情况下方案③和方案④的试验序列对比图,纵轴 da 和 db 分别表示参数估值 a 和 b 与其真值的偏差量。

表 1 各方案的统计结果

Tab.1 Statistical results of each scheme					
粗差个数	计算方案	RMSE (a)	a 最大 偏差	RMSE (b)	b 最大 偏差
1	①	0.238 7	0.690 5	0.006 5	0.019 8
	②	0.752 2	2.974 2	0.019 5	0.088 3
	③	0.325 7	1.761 1	0.011 5	0.088 4
	④	0.253 0	0.669 7	0.007 2	0.032 7
2	①	0.238 6	0.854 2	0.006 4	0.023 6
	②	0.995 6	3.787 9	0.026 7	0.103 6
	③	0.404 0	1.993 2	0.016 2	0.095 7
	④	0.268 8	0.979 6	0.007 8	0.037 6
3	①	0.243 4	0.787 9	0.006 7	0.020 6
	②	1.145 1	3.819 7	0.031 4	0.124 6
	③	0.496 3	2.046 8	0.020 4	0.097 5
	④	0.275 8	1.022 4	0.008 4	0.036 3

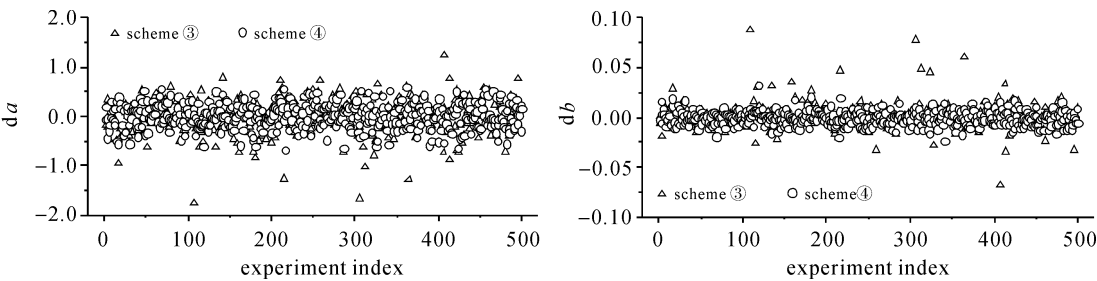


图 1 粗差个数为 1 时方案③和方案④的对比

Fig.1 Comparison between schemes③ and ④ when there exists one gross error

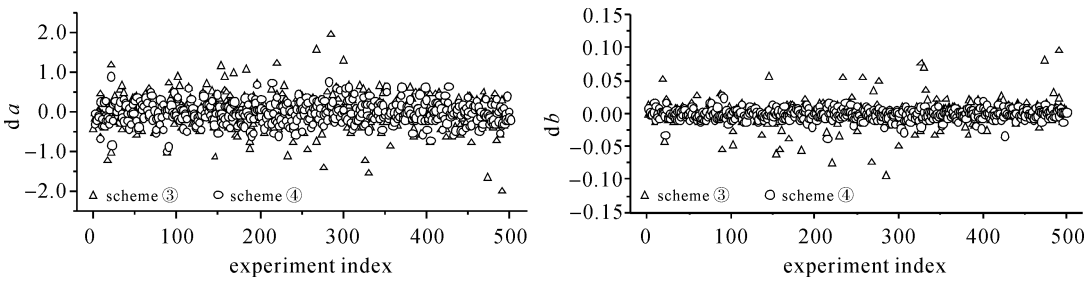


图 2 粗差个数为 2 时方案③和方案④的对比

Fig.2 Comparison between schemes ③ and ④ when there exist two gross errors

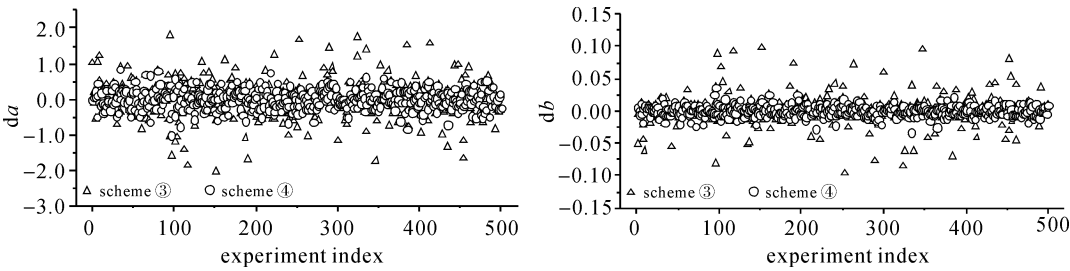


图 3 粗差个数为 3 时方案③和方案④的对比

Fig.3 Comparison between scheme ③ and ④ when there exist three gross errors

根据表 1 和图 1—图 3 的结果可以得到以下结论:

(1) 无粗差时 WTLS 方法(方案①)的估计结果在 4 种计算方案中是最优的。然而当观测数据受到粗差污染时,WTLS 方法(方案②)的参数估值受到了破坏性的影响,与真值产生了很大的偏差。

(2) 方案③和方案④的估计结果较方案②在整体上均有较大的改善,但方案④较方案③明显更优。当粗差个数分别为 1、2 和 3 个时,方案④所得参数 a 的均方根误差分别为方案③的 77.6%、66.5%和 55.6%,参数 b 的均方根误差分别为方案③的 62.6%、48.1%和 41.2%。不难发现,随着粗差个数的增多,方案③获得的各参数均方根误差显著增大,方案④较方案③的优势也更为明显。在 500 次的模拟过程中,方案③的参数估值多次与真值产生了较大的偏差,而方案④所获得的参数最大偏差值仍然较小。

(3) 方案④所得参数估值的准确度虽不及方案①,但总的来说差异并不显著,参数解仍然准确可靠。

得到上述结果的原因是:方案②的 WTLS 方法不具备抵抗粗差的能力;方案③的 RWTLS-IGG 方法虽然具有一定的抗差能力,但其直接采用残差构造的权因子函数无法顾及结构空间的抗差性,在理论上存在一定的缺陷;本文提出的 RWTLS 方法(方案④)采用标准化残差构造权因子函数,并由中位数法获得单位权中误差估值,在观测空间和结构空间均具有良好的抗差能力,在理论上较方案③更为合理。

表 2 粗差点的识别结果

Tab.2 Detection results of gross error points

粗差个数	计算方案	正确识别次数	正确率/(%)
1	③	114	22.8
	④	362	72.4
2	③	95	19.0
	④	315	63.0
3	③	73	14.6
	④	260	52.0

表 2 是 500 次模拟试验中方案③和方案④对粗差点的识别情况,分别统计了不同粗差个数条件下,粗差点识别正确(不存在漏判和误判)的次数和正确率。由表 2 的结果可知:随着粗差个数的增加,方案③和方案④的粗差点识别正确率均

有所降低,但在不同的粗差个数条件下,方案④的正确率始终显著高于方案③,从而进一步验证了方案④的优势。

综上所述,在受到粗差污染的加权整体最小二乘问题中,本文提出的 RWTLS 模型的抗差性能优于文献[21]中的 RWTLS-IGG 方法。

5 结 语

针对加权整体最小二乘的粗差处理问题,本文在 WTLS 的 Newton-Gauss 迭代法基础上,提出了一种抗差加权整体最小二乘模型。采用标准化残差构造权因子函数,并利用中位数法获得具有抗差性的单位权中误差估值。为获得标准化残差,利用线性近似的协因数传播律推导了 WTLS 残差协因数阵的表达式,并给出了迭代计算方法。得到结论:

(1) 由标准化残差构造的权因子函数同时实现了观测空间和结构空间抗差,利用中位数法获得的单位权中误差估值在迭代过程中具有更好的稳健性,较已有的稳健 WTLS 方法在理论上更加合理。

(2) 试验结果表明:当粗差个数分别为 1、2 和 3 个时,本文提出的 RWTLS 算法的粗差点识别正确率分别为文献[21]中 RWTLS-IGG 方法的 3.2 倍、3.3 倍和 3.6 倍;所得参数 a 的均方根误差分别为该方法的 77.6%、66.5%和 55.6%, b 的均方根误差分别为该方法的 62.6%、48.1%和 41.2%。粗差识别能力和参数估值的准确度均有显著改善。

参考文献:

[1] FELUS Y A. Application of Total Least Squares for Spatial Point Process Analysis[J]. Journal of Surveying Engineering, 2004, 130(3): 126-133.

[2] SCHAFFRIN B, LEE I, FELUS Y, et al. Total Least-squares (TLS) for Geodetic Straight-line and Plane Adjustment [J]. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 2006, 65(3): 141-168.

[3] MARKOVSKY I, VAN HUFFEL S. Overview of Total Least Squares Methods[J]. Signal Processing, 2007, 87 (10): 2283-2302.

[4] SCHAFFRIN B, FELUS Y A. On the Multivariate Total Least-squares Approach to Empirical Coordinate Transformations: Three Algorithms [J]. Journal of Geodesy, 2008, 82(6): 373-383.

- [5] CHEN Yi, LU Jue, ZHENG Bo. Application of Total Least Squares to Space Resection[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2008, 33(12): 1271-1274. (陈义, 陆珏, 郑波. 总体最小二乘方法在空间后方交会中的应用[J]. 武汉大学学报: 信息科学版, 2008, 33(12): 1271-1274.)
- [6] SCHAFFRIN B, WIESER A. On Weighted Total Least-squares Adjustment for Linear Regression[J]. Journal of Geodesy, 2008, 82(7): 415-421.
- [7] NEITZEL F. Generalization of Total Least-squares on Example of Unweighted and Weighted 2D Similarity Transformation[J]. Journal of Geodesy, 2010, 84(12): 751-762.
- [8] SHEN Y Z, LI B F, CHEN Y. An Iterative Solution of Weighted Total Least Squares Adjustment[J]. Journal of Geodesy, 2011, 85(4): 229-238.
- [9] XU P L, LIU J N, SHI C. Total Least Squares Adjustment in Partial Errors-in-variables Models: Algorithm and Statistical Analysis[J]. Journal of Geodesy, 2012, 86(8): 661-675.
- [10] BAARDA W. A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks [J]. Netherlands Geodetic Commission Publication on Geodesy: New Series, 1968, 2(5): 45-53.
- [11] OU Jikun. A New Method to Detect Gross Errors—Quasi-accurate Detection Method[J]. Chinese Science Bulletin, 1999, 44(16): 1777-1781. (欧吉坤. 一种检测粗差的新方法——拟准检定法[J]. 科学通报, 1999, 44(16): 1777-1781.)
- [12] ROUSSEEUW P J, LEROY A M. Robust Regression and Outlier Detection[M]. New York: John Wiley and Sons, 1987.
- [13] ZHOU Jiangwen, HUANG Youcai, YANG Yuanxi, et al. Robust Least Squares Method[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1997. (周江文, 黄幼才, 杨元喜, 等. 抗差最小二乘法[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1997.)
- [14] YANG Y. Robust Estimation of Geodetic Datum Transformation[J]. Journal of Geodesy, 1999, 73(5): 268-274.
- [15] YANG Yuanxi, SONG Lijie, XU Tianhe. Robust Parameter Estimation for Geodetic Correlated Observations[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2002, 31(2): 95-99. (杨元喜, 宋力杰, 徐天河. 大地测量相关观测抗差估计理论[J]. 测绘学报, 2002, 31(2): 95-99.)
- [16] YANG Y X, SONG L J, XU T H. Robust Estimator for Correlated Observations Based on Bifactor Equivalent Weights[J]. Journal of Geodesy, 2002, 76(6-7): 353-358.
- [17] XU P L. Sign-constrained Robust Least Squares, Subjective Breakdown Point and the Effect of Weights of Observations on Robustness[J]. Journal of Geodesy, 2005, 79(1-3): 146-159.
- [18] CHEN Yi, LU Jue. Performing 3D Similarity Transformation by Robust Total Least Squares[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2012, 41(5): 715-722. (陈义, 陆珏. 以三维坐标转换为例解算稳健总体最小二乘方法[J]. 测绘学报, 2012, 41(5): 715-722.)
- [19] LU J, CHEN Y, LI B F, et al. Robust Total Least Squares with Reweighting Iteration for Three-dimensional Similarity Transformation[J]. Survey Review, 46(334): 28-36.
- [20] GONG Xunqiang, LI Zhilin. A Robust Mixed LS-TLS Based on IGGII Scheme[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2014, 39(4): 462-466. (龚循强, 李志林. 一种利用 IGG II 方案的稳健混合总体最小二乘方法[J]. 武汉大学学报: 信息科学版, 2014, 39(4): 462-466.)
- [21] GONG Xunqiang, LI Zhilin. A Robust Weighted Total Least Squares Method[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2014, 43(9): 888-894. (龚循强, 李志林. 稳健加权总体最小二乘法[J]. 测绘学报, 2014, 43(9): 888-894.)

(责任编辑: 丛树平)

收稿日期: 2013-12-12

修回日期: 2014-11-19

第一作者简介: 王彬(1988—), 男, 博士生, 研究方向为测量数据处理与 GPS 坐标时间序列分析。

First author: WANG Bin (1988—), male, PhD candidate, majors in surveying data processing and GPS coordinate time series analysis.

E-mail: rainingwang881107@163.com