

文章编号: 1005-3026(2004)01-0024-04

自主移动机器人三角定位的路标优化

张祥德¹, 牛纪祥¹, 董再励²

(1. 东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110004; 2. 中国科学院 机器人学开放研究实验室, 辽宁 沈阳 110015)

摘 要: 针对给出的机器人三角定位算法, 推导出路标设置对定位影响的几何精度标准, 证明了参与定位的路标数目为 3 个和 3 个以上的情况下, 如果路标与机器人的距离都相等, 那么当相邻路标与机器人所成夹角都相等时, 机器人的定位精度最高; 进而给出了最优路标选取算法。实验和实践结果也进一步证明所得结论的有效性。

关 键 词: 移动机器人; 三角定位; 定位精度; 最优路标; 循环群

中图分类号: TP 242. 6; O 221. 7 **文献标识码:** A

准确快速地确定自身当前位置是移动机器人的一项重要功能, 根据测量系统的不同机器人的定位问题可分相对定位和绝对定位两大类^[1]。相对定位由于长时间的积累误差, 不适合机器人精确定位^[2], 通常采用卡尔曼滤波的方法加以改进^[3,4]。在绝对定位中, 主要有三边定位和三角定位。三边定位中比较成熟的当属 GPS。相对而言, 三角定位精度稍低, 但花费小, 因而被广泛采用。为了提高定位精度, 先后出现几种三角定位算法^[5,6], 但是除了定位算法外, 路标的设置也是影响定位精度的一个重要因素; 而后者很少有文献讨论过。实验指出路标摆放位置的不同或定位时路标的选取对定位精度有很大的影响^[7,8], 但理论上没有做进一步研究。本文就所提出的定位算法^[9,10], 利用代数的方法, 证明了在机器人与周围路标等距离的情况下, 当相邻路标与机器人所形成的视角相等时, 机器人的定位精度达到最大值。进而给出了最优路标选取算法, 机器人移动时就可根据周围环境合理地选取路标, 使得定位精度达到最高。

1 机器人三角定位和几何精度标准

1.1 机器人三角定位

定位问题用数学语言可简单描述如下: 已知每个路标 s_i 的坐标为 (x_i, y_i) 以及路标相对于机器人当前所处方向的方位角 τ_i , 估计出机器人当前的位置 $R(x, y)$ 和方向角 $\theta(i=1, 2, \dots, n)$ 。

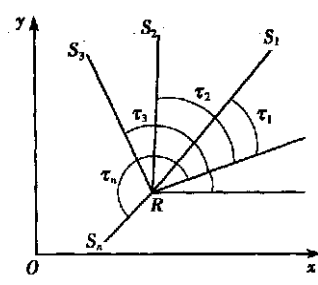


图 1 机器人定位示意图
Fig. 1 The schematic diagram of robot localization

假设定位中不存在误差, 那么 3 个路标便可以确定出机器人的位置和方向。定位实质上是求解如下的非线性观测方程:

$$f_i(x, y, \theta) = \tan(\tau_i + \theta) - \frac{y_i - y}{x_i - x} = 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

1.2 几何精度标准

对于被估计的参数向量 X , 进行线性观测, 观测向量为 Y , 其观测误差向量为 ε , 从而有观测方程

$$Y = BX + \varepsilon.$$

式中, B 是系数矩阵。假定 X 的估计量为 \tilde{X} , 记 $V = B\tilde{X} - Y$, 由最小二乘估计准则, 就是要求 \tilde{X} 使二次型 $\varphi(\tilde{X}) = V^T V = (B\tilde{X} - Y)^T (B\tilde{X} - Y) = \min$ 。仅当 $B^T B$ 为非奇异阵时可以求得

$$\tilde{X} = (B^T B)^{-1} B^T Y.$$

假定 $E(\varepsilon) = 0$, 最小二乘估计具有如下性质:

$$\Sigma_{\tilde{x}} = \sigma_0^2 Q_{\tilde{x}}, Q_{\tilde{x}} = (B^T B)^{-1}.$$

精度标准有两类, 其一是笛卡尔坐标的协方差矩阵的不变量, 其二是协方差矩阵的范数。所谓笛卡尔坐标的协方差矩阵的不变量是指在坐标平移变换和旋转变换下不发生改变的量。而 $\text{tr}(\Sigma_{\tilde{x}})$ 属于不变量的集合, 同时也是个矩阵范数, 因此可把 $\text{tr}(\Sigma_{\tilde{x}})$ 作为精度的量度。

不妨设 $\theta = 0$, 对非线性观测方程 (1) 线性化得到

$$v_i + a_i \delta x + b_i \delta y = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

上式是在 (x, y) 的附近点 (x_0, y_0) 作 Taylor 展开的, 记为矩阵形式 $V + B\Delta = F$ 。其中,

$$a_i = \frac{y_0 - y_1}{s_{0i}^2}, b_i = \frac{x_0 - x_1}{s_{0i}^2},$$

$$f_i = \arctan \frac{y_i - y_0}{x_i - x_0} - \tau_i,$$

$$s_{0i} = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}.$$

根据最小二乘法:

$$\Delta = (\delta x, \delta y)^T = (B^T B)^{-1} B^T F.$$

Δ 可认为是估计值 \tilde{x} 的误差, 假设 $F \sim N(0, \sigma_0^2 I)$, 那么 $E(\Delta) = 0$ 。因此 $\Sigma_{\tilde{x}} = \Sigma_{\Delta}$ 。而 $\Sigma_{\tilde{x}} = \sigma_0^2 (B^T B)^{-1}$, 所以对于机器人三角定位有如下的精度标准:

$$J = \text{tr}((B^T B)^{-1}). \quad (2)$$

式中,

$$B^T B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{bmatrix},$$

σ_0 是测角的精度, 认为是不变值。所以对于机器人三角定位几何精度标准可以按式 (2) 计算。 J 值越小, 精度越高。

2 路标优化的两个定理

定理 1 已知 3 个路标到机器人的距离都相等, 那么当相邻路标与机器人所成夹角都相等时, 机器人的定位精度最高。

证明 如图 2 所示, 把 3 个路标点布置在定位点周围的一个圆周上, 设

$$x_0 - x_i = s_i \cos \alpha_{0i}, y_0 - y_i = s_i \sin \alpha_{0i}.$$

因此 $s_1 = s_2 = s_3 = s$,

$$\alpha_{01} = \alpha_{10} = \alpha,$$

$$\alpha_{02} = \alpha_{20} = \alpha_{01} + \alpha_{102} = \alpha + \gamma_1,$$

$$\alpha_{03} = \alpha_{30} = \alpha_{02} + \alpha_{203} = \alpha + \gamma_1 + \gamma_2,$$

$$[aa] = s^{-2} [\sin^2 \alpha + \sin^2(\alpha + \gamma_1) + \sin^2(\alpha + \gamma_1 + \gamma_2)],$$

$$[bb] = s^{-2} [\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha + \gamma_1) + \cos^2(\alpha + \gamma_1 + \gamma_2)],$$

$$[ab] = s^{-2} 2^{-1} [\sin 2\alpha + \sin 2(\alpha + \gamma_1) + \sin 2(\alpha + \gamma_1 + \gamma_2)].$$

式中, s 为半径, $\alpha_{102} = \gamma_1$, $\alpha_{203} = \gamma_2$, 是定位点上点 1 与点 2 之间、点 2 与点 3 之间的角度, α 是第 1 条边的方位角。按照误差精度标准式 (2), 当 $[aa] = [bb]$, $[ab] = 0$ 时, 精度最高。

令 $\alpha = 0$, 通过计算 J 的最小值可得以下的解:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{2}{3}\pi = 120^\circ.$$

即定位路标点均匀分布时, 机器人定位精度最高。

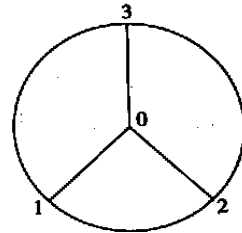


图 2 机器人与路标的相对位置

Fig. 2 The relative position of a robot and landmarks

定理 2 $n(n > 3)$ 时, 上述命题亦成立。

证明 路标数为 n 时, 对于 $J =$

$$\frac{[aa] + [bb]}{[aa][bb] - [ab]^2}$$
 做如上处理得到:

$$[aa] = s^{-2} [\sin^2 \alpha + \sin^2(\alpha + \gamma_1) + \sin^2(\alpha + \gamma_1 + \gamma_2) + \dots + \sin^2(\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1})],$$

$$[bb] = s^{-2} [\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha + \gamma_1) + \cos^2(\alpha + \gamma_1 + \gamma_2) + \dots + \cos^2(\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1})],$$

$$[ab] = s^{-2} 2^{-1} [\sin 2\alpha + \sin 2(\alpha + \gamma_1) + \sin 2(\alpha + \gamma_1 + \gamma_2) + \dots + \sin 2(\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1})].$$

由于 $[aa] + [bb] =$ 定值, 仅当 $[aa] = [bb]$, $[ab] = 0$ 时, 即满足

$$\cos 2\alpha + \cos 2(\alpha + \gamma_1) + \cos 2(\alpha + \gamma_1 + \gamma_2) + \dots + \cos 2(\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1}) = 0, \quad (3)$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2(\alpha + \gamma_1) + \sin 2(\alpha + \gamma_1 + \gamma_2) + \dots + \sin 2(\alpha + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n-1}) = 0 \quad (4)$$

的 $\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ 使 J 最小, 仍不妨设 $\alpha = 0$,

往证当 $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{n-1} = \frac{2\pi}{n}$ 时, 式(3)和式(4)成立. 记

$$\begin{aligned} z_0 &= 1, \\ z_1 &= \cos \gamma + i \sin \gamma, \\ z_2 &= \cos 2\gamma + i \sin 2\gamma, \\ &\vdots \\ z_{n-1} &= \cos (n-1)\gamma + i \sin (n-1)\gamma. \end{aligned}$$

于是 $G = \{z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\} = \{z \mid z^n = 1\}$ 在乘法下构成 n 阶循环群. z_1 是群 G 的生成元. 因此 G 又可写成 $G = \{z_1, z_1^2, \dots, z_1^n\}$ 的形式. 在此基础上, 有下面的结论.

引理 1 循环群的子群都是循环群.

引理 2 有限群 G 的一个子群 H 的阶是群 G 的阶的一个因子. 更确切地, 有

$$|G| = |H| [G:H].$$

推论 1 如果 $(k, n) = 1, |\langle z \rangle| = n$, 那么 $|\langle z^k \rangle| = n$.

证明 设 $|\langle z^k \rangle| =$. 根据引理 2, 有 $|n|$. 因为 $|\langle z \rangle| = n$, 所以 $n|k|$. 又因为 $(k, n) = 1$, 所以 $n|$, 故 $= n$.

有了推论 1, 很容易得到

推论 2 若群 G 的阶 n 为奇数, $\langle z_1^2 \rangle$ 的阶与 G 的阶相等, 都为 n .

若群 G 的阶 n 为偶数, 不妨设 $n = 2$, 则 $|\langle z_1^2 \rangle| =$.

在群 G 中用 z_1^2 替换 z_1 , 并且不合并相同项, 得到 $G' = \{z_1^2, (z_1^2)^2, \dots, (z_1^2)^n\}$. 根据推论 2 得到

推论 3 若 n 为奇数, G' 在乘法下成为群且与 G 相同.

若 n 为偶数($n = 2$), G' 前 项与后 项是相同的两个子群.

推论 4 循环群 $G = \{z \mid z^n = 1\}$ 的所有元素在加法下和为 0 .

由复数的性质可得到.

有了推论 2 及推论 3 和 4, 那么 G' 中所有元素之和为 0 . 即 $z_1^2 + (z_1^2)^2 + \dots + (z_1^2)^n = 0$. 因此, 式(3), 式(4)成立. 即 $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{n-1} = \frac{2\pi}{n}$ 时, J 最小. 显然, 定理 1 可以看做定理 2 的推论.

3 最优路标选取算法

如果机器人当前位置恰与若干路标之间的距离都相等, 那么就可以选择其中满足定理 1 和定理 2 条件的几个点进行计算, 得出的定位精度最高.

但事实是机器人周围不总是有均匀分布的路标, 机器人也不总是在均匀分布的路标中心. 因此, 机器人在移动过程中, 如何根据周围环境合理的选取路标使得定位精度最高成为必要. 既然已经得到了精度标准, 则对于 3 点定位选择路标问题, 可以找出所有有效识别点的全部 3 点组合, 按式(2)估计其精度, 然后比较选择一组最优的组合. 但是式(2)计算复杂, 并且选择 4 点或更多点定位, 计算将更加复杂. 因此需要一个好的精度度量标准使得不仅计算简便而且能与按式(2)计算的结果一致.

给出选点标准:

$$C_{ij} = S_{ij}^2 \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}{\sin^4 \gamma}.$$

如图 3 所示, S_{ij} 代表路标 i 点与 j 点的距离, γ 表示机器人与两个路标之间的视角, α, β 分别表示机器人与两路标形成的三角形边 ij 的夹角. 通过实验可以看出这一标准是合理的. 参与运算的路标为 4 个时, 定位效果较好^[8]. 因此, 针对 4 个路标, 有如下最优路标选取算法:

- ① 估计机器人的当前位置;

② 确定机器人视野内的路标, 并找出所有有效的两点组合;

③ 根据已知的 $\alpha, \beta, \gamma, S_{ij}$ 计算 C_{ij} ;

④ 比较所有的 C_{ij} , 选择下标完全不同的两组 C_{ij} 使其和最小, 即是所求.

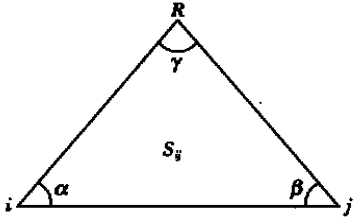


图 3 机器人相对于两个路标的位置
Fig. 3 The relative position between a robot and two landmarks

除了上述选点算法外, 还有一个选点准则: 路标尽量均匀的分布在定位点的周围.

4 实验结果

为了证明上述命题的正确性, 就实际算法进行了实验. 假设机器人的方向角为 0, 选取以 10 m 为半径的圆周, 机器人放置在圆心, 就 4 个路标均匀分布(CaseI) 和不均匀分布(CaseII) 在圆周上的两种情况进行仿真, 在路标的观测角度上加上 $\pm 1^\circ, \pm 2^\circ, \pm 5^\circ$ 的随机误差, 计算得到的统计实验结果如表 1 所示.

从表 1 可以看出, 路标均匀分布在机器人的周围时, 定位精度相对较高.

选含 5 个路标 $A、B、C、D、E$ 的组合, 分别从理论值 J 和定位算法误差值(LAEV) 以及最优路标选取算法值(OLCAV) 比较验证给出的算法。

表 1 两种情况下的定位算法结果

Table 1 Precision of localization algorithm in two cases

误 差	情况 1			情况 2		
	$\pm 1^\circ$	$\pm 2^\circ$	$\pm 3^\circ$	$\pm 1^\circ$	$\pm 2^\circ$	$\pm 3^\circ$
x/cm	4. 05	8. 41	20. 9	3. 87	7. 76	19. 5
y/cm	4. 19	8. 46	20. 6	5. 09	10. 1	25. 7
$\theta/(^\circ)$	0. 23	0. 48	1. 20	0. 28	0. 57	1. 43

从表 2 看出, 无论理论上还是实际中, 结果基本是一致的: 都是第 3 种组合精度最高, 第 5 种组合误差最大。对于第 1、4 组理论上(J) 后者较好。但实际(LAEV) 由于随机误差的因素, 使得第 1 组较第 4 组精度高。按本文的算法(OLCAV), 首先两者精度相同, 再进一步, 按照均匀性原则, 可以认为第 1 组误差小, 与实际符合。

表 2 不同路标组合下 3 种精度度量标准的比较

Table 2 The comparison of three precision criteria with different landmarks' combination

5 点组合	J	LAEV	OLCAV
$ABCD$	1. 46	7. 76	17. 9
$ABCE$	1. 58	8. 50	18. 1
$ABDE$	1. 11	6. 97	8. 24
$ACDE$	1. 34	10. 1	17. 9
$BCDE$	3. 16	11. 3	20. 9

5 结 论

(1) 机器人与路标等距离时, 只有相邻的参与运算的路标与机器人间夹角相等时, 精度最高。仿真实验也说明了这一点。

(2) 给出了最优路标选取算法, 机器人移动

时就可根据周围环境合理地选取路标, 使得定位精度达到最高。克服了仅凭经验选取路标的缺陷。

本文的结果已经应用于机器人的研制中, 效果比较理想。

参考文献:

[1] Borentein J, Everett H R, Feng L, *t al.* Mobile robot positioning sensors and techniques[J]. *Journal of Robotic Syst s*, 1997, 14(4): 231- 249.

[2] Olson C F. Probabilistic self localization for mobile robot[J]. *IEEE Transaction on Robot and Auto ation*, 2000, 16(1): 55- 66.

[3] Durrant-Whyte H F. An autonomous guided vehicle for cargo handling application[J]. *Int rnational Journal of Robotic R s arch*, 1996, 15(5): 407- 440.

[4] Hu H S, Gu D B. Landmark-based navigation of industrial mobile robots[J]. *Industrial Robot*, 2000, 27(6): 458- 467.

[5] Hu W C, Kuang J S. Proof of tienstra's formula by finite element method[J]. *Journal of Surv ying Engin ring*, 1997, 123(1): 1- 10.

[6] Betke M, Gurvits L. Mobile robot localization using landmarks[J]. *IEEE Tran Robot Auto at*, 1997, 13(2): 251- 263.

[7] Madsen C B, Andersen C S. Optimal landmark selection for triangulation of robot position[J]. *Int rnational Journal of Robotics and Autono ous Syst s*, 1998, 23(4): 1236- 1258.

[8] 郝颖明, 董再励, 朱枫, 等. 路标定位中的优化选择策略[J]. 高技术通讯, 2001, 8(1): 82- 85.
(Hao Y M, Dong Z L, Zhu F, *t al.* Landmarks optimal selecting for global location of mobile robot[J]. *High T chnology Co unication*, 2001, 8(1): 82- 85.)

[9] 张祥德, 牛纪祥, 董再励. 基于测角的自主移动机器人定位算法[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2002, 23(12): 1143- 1146.
(Zhang X D, Niu J X, Dong Z L. Localization algorithm of autonomous mobile robot based on measuring angle[J]. *Journal of Northeast rn Univ rsity (Natural Sci nc)*, 2002, 23(12): 1143- 1146.)

[10] Dong B, Zhang X D. Continuation method applied in kinematics of parallel robot[J]. *Appli d Math atics and M chanics(English Edition)*, 2001, 22(12): 1422- 1428.

Landmarks Optimization of Triangulation of Autonomous Mobile Robot

ZHANG Xiang-de¹, NIU Ji-xiang¹, DONG Zai-li²

(1. School of Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. Robotics Laboratory, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110015, China. Correspondent: ZHANG Xiang-de, professor, E-mail: yanh@neu.soft.com)

Abstract: A geometric precision criterion is deduced for robot triangulation, showing the effect of landmark set-up on robot localization. It is proved that the precision of robot localization will be the highest one if all the distances between the robot and every landmark are equal to each other and then both the angles included between two adjacent landmarks to the robot are also equal to each other in case the number of relevant landmarks is not less than three. An optimal selection algorithm of landmarks is thus given. Experimental results showed further the validity of the conclusion as above.

Key words: mobile robot; triangulation; localization precision; optimal landmark; cyclic group

(Received Jun 9, 2003)