Analysis für Informatik

MA0902

Josef Schönberger

17. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenterminologie

1.1 Teilmenge

$B \subseteq A$ gdw. $\forall x \in B$ gilt auch, dass $x \in A$.

1.2 Injektiv / Surjektiv

$f : A \to B$ ist

- injektiv, falls $\forall x, y \in A$ mit $x \neq y$ gilt: $f(x) \neq f(y)$
- surjektiv, falls $\forall y \in B$ gilt: $\exists x \in A$, sodass $f(x) = y$
- bijektiv, falls sowohl injektiv und surjektiv

1.3 Auswahl-Axiom

$\exists$ Surjektion von A nach B gdw. $\exists$ Injektion von B nach A

1.4 Exklusivität des Vergleichs der Kardinalität

$\forall A, B$ Mengen: Entweder $|A| \leq |B|$ oder $|A| \geq |B|$

1.5 Cantor-Bernstein

Falls Injektionen $f : A \to B$ und $g : B \to A$ existieren, so gibt es eine Bijektion zwischen A und B.

1.6 Abzählbarkeit

Menge A heißt abzählbar, falls $|A| = |\mathbb{N}|$.
$\aleph_0 = |\mathbb{N}|$

2 Reelle Zahlen und Vektoren

2.1 Körper und Anordnung

Ein Körper $(F, +, \cdot)$ ist eine Menge F mit den Operationen $+$ und $\cdot$, wobei:

1. Addition assoziativ
2. Addition kommutativ
3. Es existiert ein zur Addition neutrales Element 0
4. Es existiert stets ein zur Addition inverses Element
5. Multiplikation assoziativ
6. Multiplikation kommutativ
7. Es existiert ein zur Multiplikation neutrales Element 1
8. Es existiert stets ein zur Multiplikation inverses Element
9. Es gilt das Distributionsgesetz

Ein Körper heißt angeordnet, falls eine Relation $<$ existiert, sodass $\forall x, y \in F$:

1. Entweder $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$
2. Falls $x, y > 0$, dann $x + y, x \cdot y > 0$
3. $x > y$ gdw. $x - y > 0$

2.2 Obere / Untere Schranke

$x \in \mathbb{R}$ ist eine obere Schranke von $M \subseteq \mathbb{R}$, falls $\forall y \in M$ gilt: $y \leq x$.
Falls ein solches x existiert, so heißt M nach oben beschränkt, sonst nach oben unbeschränkt.
Vergleichbar ist die untere Schranke.

2.3 Maximum / Minimum

$x \in \mathbb{R}$ ist das Maximum von $M \subseteq \mathbb{R}$, falls x obere Schranke von M und $x \in M$.
Vergleichbar ist das Minimum.

2.4 Supremum / Infimum

Das Supremum $\sup(M)$ ist die niedrigste obere Schranke von $M \subseteq \mathbb{R}$. Falls nicht existent, so schreiben wir $\sup(M) = \infty$.
Das Infimum $\inf(M)$ ist die höchste untere Schranke von $M \subseteq \mathbb{R}$. Falls nicht existent, so schreiben wir $\inf(M) = -\infty$.

2.5 Definition Vollständigkeit

Ein angeordneter Körper K ist vollständig, falls $\forall M \subseteq K$ nach oben beschränkte Teilmenge mit $M \neq \emptyset$ ein Supremum besitzt.

2.6 Vollständigkeitsaxiom

$\mathbb{R}$ ist vollständig.

2.7 Rechenregeln

Sein $A, B \in \mathbb{R}$ mit $\sup(A), \sup(B) \in \mathbb{R}$.

1. $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$[1]
2. $\forall \lambda \geq 0 : \sup(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \sup(A)$ [2]
3. Falls $A, B \subseteq [0, \infty)$: $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$ [3]
4. $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \sup(A) \leq \sup(B)$

Selbiges für das Infimum (wobei bei Punkt 4 das '$\leq$' durch ein '$\geq$' zu ersetzen ist)

2.8 Umgebung

Ein offenes Intervall (a, b) ist eine Umgebung von x, falls $x \in (a, b)$.

2.9 Offenheit einer Menge

$A \subseteq \mathbb{R}$ ist offen, falls $\forall x \in A$ gilt: $\exists I_x$ Umgebung von x, sodass $I_x \subseteq A$

2.10 Abgeschlossenheit einer Menge

$A \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, falls $\mathbb{R} \backslash A$ offen ist.

2.11 Zeitgleich offen und abgeschlossen

Nur $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ sind offen und abgeschlossen.

---

[1] $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$
[2] $\lambda \cdot A = \{\lambda \cdot a \mid a \in A\}$
[3] $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$

Skalarprodukt

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\overline{x} \cdot \overline{y} \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Seien $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$
2. $(\alpha\overline{x}) \cdot \overline{y} = \overline{x} \cdot (\alpha\overline{y}) = \alpha(\overline{x} \cdot \overline{y})$
3. $(\overline{x} + \overline{y}) \cdot \overline{z} = \overline{x} \cdot \overline{z} + \overline{y} \cdot \overline{z}$
4. $\overline{x} \cdot \overline{x} \geq 0$

Euklidische Norm

$$||(x_1, \dots, x_n)|| := \sqrt{(x_1, \dots, x_n) \cdot (x_1, \dots, x_n)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

2.12 Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$|\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle| \leq ||\overline{x}|| \cdot ||\overline{y}||$$ [4]

Gleichheit gilt gdw. $\overline{x}$ und $\overline{y}$ linear abhängig sind.

2.13 Dreiecksungleichung

$\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$||\overline{x} + \overline{y}|| \leq ||\overline{x}|| + ||\overline{y}||$$

2.14 Ungleichung geom. und arithm. Mittel

Seien $x, y \geq 0$.

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

[4] $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ beschreibt das Skalarprodukt von $\overline{x}$ und $\overline{y}$

Komplexe Zahlen

$i := \sqrt{-1}$.
$\mathbb{C} := \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Seien $z_1 = x_1 + y_2 i, z_2 = x_2 + y_2 i \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen. Wir definieren:

- die Addition: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
- die Subtraktion: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$
- die Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$
- die Konjugierte: $\overline{z_1} = x_1 - y_1 i$
- den Betrag: $|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

3 Folgen und Stetigkeit

3.1 Definition Folge

Eine Folge mit Werten ist eine Abbildung $\mathbb{N}^+ \to M$, wobei M eine beliebige Menge.
Wir schreiben $x_1, x_2, ...$.
Alternativ kann eine Folge auch mit $\mathbb{N}_0$ definiert sein.

3.2 Definition (streng) monoton

Eine Folge $(x_n)_n$ heißt monoton wachsend, falls $\forall n : x_n \leq x_{n+1}$.
Eine Folge $(x_n)_n$ heißt streng monoton wachsend, falls $\forall n : x_n < x_{n+1}$.

Vergleichbar definiert ist (streng) monoton fallend.

3.3 Definition Grenzwert einer Folge

$x \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert / Limes einer Folge $(x_n)_n$, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 : \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \;\; \forall n \geq N : \;\; |x_n - x| < \varepsilon$$

Man schreibt:

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x \qquad \text{oder} \qquad x = \lim_{n \to \infty} x_n$$

x_n heißt konvergent gdw. ein Grenzwert existiert.

3.4 maximal ein Grenzwert

Jede reelle Folge hat max. einen Grenzwert. Wer lesen kann, ist klar im Vorteil. Und wer das hier jetzt noch immer liest, ist doof.

3.5 Beschränkung des Grenzwerts

Falls $(x_n)_n \to x$ und $(y_n)_n \to y$ beschränkte Folgen mit $\forall n : \; x_n \leq y_n$, so gilt $x \leq y$.

3.6 Einschließung

Falls $(x_n)_n \to x$ und $(y_n)_n \to x$ beschränkte Folgen mit $\forall n : \; x_n \leq y_n$. Für jede weitere Folge (w_n) mit $\forall n : \; x_n \leq w_n \leq y_n$ gilt dann: $w_n \to x$

3.7 Definition Beschränktheit

(x_n) geht gegen $+\infty$, falls

$$\forall C > 0 : \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \;\; \forall n \geq N : \;\; x_n \geq C$$

Vergleichbar geht (x_n) gegen $-\infty$.
(x_n) heißt hingegen beschränkt, falls $\exists K > 0$, sodass $\forall n : \;\; |x_n| \leq K$

3.8 Beschränktheit durch Grenzwert

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

3.9 Rechenregeln

Seien (x_n) und (y_n) Folgen mit $x_n \to a$ und $y_n \to b$. Dann gilt:

- $x_n + y_n \to a + b$
- $x_n - y_n \to a + b$
- $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$
- $x_n / y_n \to a/b$, falls $b \neq 0$

3.10 Konvergenz gegen Supremum / Infimum

Jede monoton wachsende, beschränkte Folge konvergiert gegen ihr Supremum:

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n = \sup{}_n(x_n) := \sup(M) \quad \text{mit } M := \{x_n \mid x \in \mathbb{N}\}$$

Ebenso konvergiert jede monoton fallende, beschränkte Folge gegen ihr Infimum.

Definition Limes superior und Limes inferior

Sei (x_n) <u>beschränkt</u>. Dann ist definiert:

$$\limsup_{n \to \infty} x_n := \lim_{n \to \infty} (\sup_{k \geq n} x_k)$$
$$\liminf_{n \to \infty} x_n := \lim_{n \to \infty} (\inf_{k`n} n_k)$$

Es folgt: $\liminf\limits_{n \to \infty} x_n \leq \limsup\limits_{n \to \infty} x_n$

3.11 Häufungspunkt

Sei (x_n) eine reellwertige Folge.
Seien $n_1 < n_2 < ... < n_k \in \mathbb{N}$ gegeben, so heißt (x_{n_k}) Teilfolge von (x_n).
$x \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt, falls es eine Teilfolge mit $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x$ gibt.

3.12 Bolzano-Weierstrass

Falls (x_n) und reellwertig:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ gdw. } \liminf_{n \to \infty} x_n = \limsup_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} x_n$$

Letztere Gleichung besagt, dass $\limsup\limits_{n \to \infty} x_n$ und $\liminf\limits_{n \to \infty} x_n$ zugleich maximaler und minimaler Häufungspunkt sind.

Diese Aussage ist äquivalent zu: Jede beschränkte Folge hat mindestens eine konvergente Teilfolge (da besagter Wert, auf den konvergiert wird, ein Häufungspunkt ist).

3.13 Cauchys Kriterium für Konvergenz

(x_n) konvergiert gdw.

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \exists N : \quad \forall m, n > N : \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$$

4 Reihen

4.1 Definition Reihe

Sei a_n eine (komplexe) Folge. Die Folge

$$s_n := a_0 + ... + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

heißt unendliche Reihe (kurz: Reihe) mit den Gliedern a_n und den Partialsummen s_n.

Falls s_n konvergent:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

s heißt die Summe oder der Wert der Reihe.
Falls s_n reell und geht gegen $+\infty$, so schreiben wir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$$

Gleiches gilt auch für $-\infty$.

4.2 Notwendige Bedingung für Konvergenz

Falls die Reihe $\sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergent, so gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

4.3 Konvergenz $\Leftrightarrow$ Beschränktheit bei positiven Gliedern

Eine reelle Reihe s_n mit positiven Gliedern ist beschränkt gdw. konvergent.

Vergleichskriterien für Konvergenz

4.4 Definition Majorante / Minorante

Sei s_n eine Reihe mit den komplexen Gliedern a_k. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{n} b_k$ heißt Majorante von s_n, wenn $|a_k| \leq b_k$. Sie heißt Minorante von s_n, wenn $b_k \leq |a_k|$.

4.5 Majorantenkriterium / Minorantenkriterium

Sei (s_n) eine Reihe mit den komplexen Gliedern a_k und einer konvergenten Majorante mit den Gliedern b_n. Dann ist (s_n) konvergent. Es gilt:

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Falls eine Reihe (s_n) hingegen eine divergente Minorante hat, so ist auch (s_n) divergent.

4.6 Divergenz

Eine Reihe heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist.

4.7 Quotientenkriterium

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert (absolut), falls

$$\exists q \in \mathbb{R} \text{ mit } q < 1: \quad \exists n_0 \geq 0: \quad \forall k \geq n_0: \quad \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q$$

Wobei q fest sein muss, also $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$ reicht nicht aus!

Alternierende Reihen

Eine Reihe mit den Gliedern a_k heißt alternierend, falls die Glieder abwechselnd verschiedene Vorzeichen haben. Wir schreiben: $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + ...$
Wir nehmen an: $a_0 > 0$.

4.8 Leibnitzkriterium

Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ mit $a \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.
Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$.
Es gilt:

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n a_k - Sn \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$$

4.9 Absolute Konvergenz

$\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ heißt absolut konvergent, falls $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$ konvergent.
Eine Reihe, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, heißt bedingt konvergent.

4.10 Umordnungssatz

Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Permutation.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \text{ konvergiert gdw. } \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Beliebigkeit der Ergebnisse bei Änderung der Summationsreihenfolge

Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine bedingt konvergente Reihe und sei $x \in \mathbb{R}$. Dann $\exists \sigma$ Permutation, sodass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = x$.

Es gibt auch eine Permutation σ, sodass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ gegen $+\infty$ konvergiert, eine, sodass es gegen $-\infty$ konvergiert und eine, wo $\limsup \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \neq \liminf \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\sigma(n)}$.

4.11 Doppelreihensatz

Seien $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ mit $i, j \in \mathbb{N}$. Falls $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} |a_{i,j}| < \infty$, dann konvergiert $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$ und

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,(n-k)}
\end{aligned}$$

Es folgt:

Seien $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ reelle Folgen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{\infty} b_j &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_k b_j \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k,j,k+j=m}^{\infty} a_k b_j \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} c_m
\end{aligned}$$

wobei $c_m = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}$ die Definition des Cauchy-Produkts.

4.12 Exponentialfunktion

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Dabei gilt: $\exp(x) = e^x$ mit e die Eulersche Zahl $\forall x \in \mathbb{R}$.

4.13 Rechenregeln der Exponentialfunktion

Seien $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten:

1. $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$
2. $\exp(z) \neq 0 + 0i$
3. $\exp(x) > 0$
4. $\overline{\exp(z)} = \exp \overline{z}$
5. $\exp(x)$ ist monoton wachsend
6. $|\exp(z)| \leq \exp(|z|)$

Überblick über alle Kriterien

Kriterien:

- Majorantenkriterium
- Minoratenkriterium
- Quotientenkriterium
- Wurzelkriterium*
- Nullfolgenkriterium*
- Leibnizkriterium

* Wurden nicht angesprochen

5 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Sämtliche Sätze gelten auch auf $\mathbb{C}$, auch wenn sie nur auf $\mathbb{R}$ angegeben sind.

5.1 Definition Isolierter Punkt

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. x_0 heißt isoliert in D wenn:

$$\nexists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } a_n \in D\backslash\{x_0\}: \quad \lim a_n = x_0$$

5.2 Grenzwert einer Funktion

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.
a heißt Grenzwert von f in x_0 (Schreibweise: $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$), falls

a. x_0 nicht isoliert und

b. $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = a$

5.3 Definition Stetigkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.
f heißt stetig in x_0, falls x_0 isoliert oder $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
f heißt stetig in D, falls $\forall x \in D$ f stetig in x.

5.4 Alternative Definition für Grenzwert

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ nicht isoliert.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \text{ gdw. } \forall \varepsilon > 0: \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\cap(D\backslash\{x_0\}): \quad |f(x)-a| < \varepsilon$$

5.5 Rechenregeln beim Grenzwert

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$. Dann gilt: $\forall x \in D$ mit f und g stetig in x: $f+g, f-g, f\cdot g$ stetig in x. Zudem $\frac{f}{g}$ stetig in x, falls $g(x) \neq 0$.

Damit sind endliche Polynome (und Brüche daraus) auf ihrem Definitionsbereich stetig.

5.6 Stetigkeit von $\exp$

Die Exponentialfunktion exp ist stetig auf $\mathbb{C}$.

5.7 Komposition stetiger Funktionen

Seien $f : D_f \to R$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ und $f(D_f) \subseteq D_g$ [5].
$\forall x \in D_f$: Wenn f stetig in x nd g stetig in $f(x)$, so ist auch $g \circ f$ stetig in x.

5.8 Definition linksseitiger / rechtsseitiger Grenzwert / Stetigkeit

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$ nicht isoliert.
$c \in \mathbb{R}$ heißt linksseitiger Grenzwert von f im Punkt a (Schreibweise: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = c$)[6], falls $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < a$ und $x_n \to c$ gilt: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$.
f heißt linksseitig stetig in a, falls $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Analog ist der rechtsseitige Grenzwert definiert: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

Fixpunktiteration

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $x \in \mathbb{R}$ heißt Fixpunkt von f, falls $f(x) = x$.
Iterativer Lösungsansatz: $x_{n+1} = f(x_n)$. Dann gilt: Falls f stetig in D, $f(D) \subseteq D$ und $x_0 \in D$, so ist $\lim_{n \to \infty} x_n$ ein Fixpunkt.

[5] $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$
[6] alternativ auch $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = c$ für linksseitigen und $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = c$ für rechtsseitigen Grenzwert

6 Komplexe Zahlen und trigonometrische Funktionen

Wir rechnen in Bogenmaßen. Der Einheitskreis ist definiert als $\{z \mid |z| = 1\}$.

6.1 Definition Sinus / Cosinus

$$\sin x := \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos x := \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Es folgt: $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$
Diese Definition ist im reellen Raum äquivalent zur geometrischen Definition am rechtwinkligen Dreieck.

6.2 Sinus / Cosinus periodisch, Definition Pi

sin und cos sind periodisch, d.h. $\exists \pi \in \mathbb{R} : \forall z \in \mathbb{C} : \sin z + 2\pi = \sin z, \cos z + 2\pi = \cos z$.
$\pi \approx 3,14159265412$.

Rechenregeln für Sinus und Cosinus

$$\begin{aligned} \sin -x &= -\sin x && \text{Punktsymmetrie} \\ \cos -x &= \cos x && \text{Achsensymmetrie} \\ \sin(x + \pi/2) &= \cos x && \text{Verschiebung} \\ \cos(x + \pi/2) &= -\sin x && \end{aligned}$$

Zudem folgt aus dem Satz des Pythagoras:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Rechenregeln für komplexe Exponentialfunktion

Sei $x \in \mathbb{R}$ und $z = \exp ix = e^{ix}$.

$$\begin{aligned} |e^{ix}| &= e^{ix}\overline{e^{ix}} \\ &= e^{ix} e^{\overline{ix}} \\ &= e^{ix} e^{-ix} \\ &= e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Also ist e^{ix} der Einheitskreis auf der komplexen Ebene:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Insbesondere gilt also:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \qquad\qquad e^{i\pi} = -1$$

Folgerung:

$$e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x$$

Definition Tangens / Kotangens

$$\begin{aligned} \tan x &:= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \cot x &:= \frac{\cos x}{\sin x} \underset{\sin x \neq 0}{=} \tan^{-1} x \end{aligned}$$

Hinweis: $\tan x$ und $\cot x$ sind periodisch (Periode π). $\tan \frac{\pi}{2}$ und $\cot 0$ sind nicht definiert.

6.3 Konvergenz bei Multiplikation

Seien $d \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$, $a \in D$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ und g auf D beschränkt sowie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. Dann folgt: $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Polarkoordinaten

Sei $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Dann gibt es $r, \phi \in \mathbb{R}$, sodass $r = |z|$ und $e^{i\phi} = \frac{z}{r}$ (da $|\frac{z}{r}| = 1$).
r und ϕ heißen Polarkoordinaten von ϕ: r ist der Abstand von z zum Nullpunkt, ϕ der Winkel zur reellen Achse. Die Abbildung Polarkoordinaten $\leftrightarrow$ Real- und Imaginärteil ist bijektiv.
Die Multiplikation in Polarkoordinaten[7]: $z_1 = r_1 \angle \phi_1$, $z_2 = r_2 \angle \phi_2$. Es folgt: $z_1 + z_2 = (r_1 \cdot r_2) \angle (\phi_1 + \phi_2)$

[7] Ich (Josef) schreibe: $r \angle \phi$ für $r \cdot e^{i\phi}$

7 Konsequenzen der Stetigkeit

7.1 „Vollständigkeit" des Ergebnisraums einer beliebigen Funktion

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Es muss $\forall y \in [f(a), f(b)]$ nicht unbedingt auch ein x mit $f(x) = y$ geben.

7.2 Zwischenwertsatz

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Wenn f stetig, so $\forall y \in [f(a), f(b)] : \exists x : f(x) = y$.

7.3 Maximum / Minimum

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$.
$x \in \mathbb{R}$ heißt Maximum von f, wenn $\forall z \in D : f(x) \geq f(z)$.
$x \in \mathbb{R}$ heißt Minimum von f, wenn $\forall z \in D : f(x) \leq f(z)$.

Hinweis: Maximum und Minimum sind nicht unbedingt eindeutig. Nicht jede Funktion hat ein Maximum und/oder Minimum.

7.5 Maximum/Minimum einer stetigen Funktion

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat ein Maximum und ein Minimum.

7.6 Definition Konvergenz & Stetigkeit im mehrdimensionalen Raum

Sei $d \in \mathbb{N}$, $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$.
x_n konvergiert gegen x falls $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0$. (Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ oder $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$)
Alternativ komponentenweise: $\forall i \in \{1, ..., d\} : \lim\limits_{n\to\infty} x_{ni} = x_i$.

Sei $d \in \mathbb{N}$, $D \in \mathbb{R}^d$, $x \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$ mit $m \in \mathbb{N}$.
f heißt stetig in $x \in D$, falls $\forall (x_n)$ in D mit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} = f(x)$.
f heißt stetig, falls $\forall x \in D$ gilt: f stetig in x.

mehrdimensionale Offenheit / (Ab-)Geschlossenheit

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen, wenn $\forall x_0 \in A : \exists \varepsilon > 0 : \{x \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\} \subseteq A$.
A heißt geschlossen, wenn $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen.
A ist (ab-)geschlossen gdw. $\forall (a_n)$ mit $a_n \in A$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gilt: $a \in A$

Anmerkung: Nur $\mathbb{R}^n$ und $\emptyset$ sind zugleich offen und geschlossen.

7.7 Definition Kompaktheit

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \subseteq \mathbb{C}^n$.
A heißt kompakt, falls $\forall (a_n)$ mit $a_n \in A$ gilt: $\exists (a_{n_k})$ Teilfolge von (a_n), sodass $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} \in A$.

7.8 stetig von Kompakter Menge abbilden $\rightarrow$ Maxi- und Minimum

Sei A kompakt und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.
Wenn A stetig, so hat f sowohl ein Maximum als auch ein Minimum.

7.9 mehrdimensionale Beschränktheit

$M \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt beschränkt, wenn $\exists K \in \mathbb{R} : \forall x \in M : \|x\| < K$.
Eine Folge $(x_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn die Menge aller ihrer Glieder beschränkt ist. Wir schreiben die Glieder $\forall n : x_n = (x_{n,1}, ..., x_{n,d})$ mit $x_{n,k} \in \mathbb{R}$ und $1 \leq k \leq d$.

7.10 komponentenweise Konvergenz

Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}^d$ konvergiert gdw. alle ihre Komponenten konvergieren:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \qquad \text{gdw.} \qquad \forall k \in \{1, ..., d\} : \lim_{n \to \infty} x_{n,k} = x_k$$

7.11 Kompakt $\leftrightarrow$ abgeschlossen & beschränkt

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt gdw. A ist abgeschlossen und beschränkt.

7.12 Kompaktheit steter Bilder kompakter Mengen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig.
Dann ist $f(D)$ kompakt.[8]

7.13 Definition Umkehrabbildung & -funktion

Sei $f : A \rightarrow B$ bijektiv[9].
$\exists f^{-1} : B \rightarrow A$ Umkehrabbildung, sodass $\forall y \in B : f(f^{-1}(y)) = y$.

Wenn $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$, so heißt f^{-1} Umkehrfunktion.

Hinweis: f^{-1} ist bijektiv. Man erhält den Graphen von f^{-1} durch Spiegelung des Graphen von f an der Geraden $y = x$, wenn $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

---

[8] $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$

[9] bijektiv heißt injektiv und surjektiv:
Injektiv: auf jedes Element wird max. 1x abgebildet
Surjektiv: auf jedes Element wird min. 1x abgebildet

7.14 Umkehrfunktionen von stetigen, streng monoton wachsenden Funktionen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsen.
f ist bijektiv, f^{-1} ist auch stetig und streng monoton wachsend.

7.15 Definition natürlicher Logarithmus

$$\ln := \exp^{-1} \text{ mit } \exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$$

heißt (natürlicher) Logarithmus.

Rechenregeln des Logarithmus

Seien $x, y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \ln(1) &= 0 \\ \ln(e) &= 1 \\ \ln(x) + \ln(y) &= \ln(x \cdot y) \\ \ln(x^k) &= k \cdot \ln(x) \quad \text{falls } x > 0 \end{aligned}$$

7.16 Definition Potenzieren auf $\mathbb{R}$, Wurzelrechnung

Sei $x, a \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$.

$$x^a := \exp(a \cdot \ln(x))$$

Es gilt: $x^{a+b} = \exp\big((a+b) \cdot \ln(x)\big) = \exp\big(a \ln(x)\big) \cdot \exp\big(b \ln(x)\big) = x^a x^b$.

Wir schreiben: $\sqrt[n]{x} := x^{\frac{1}{n}}$.
Hinweis: Potenzfunktionen sind im Allgemeinen nicht bijektiv, Wurzelfunktion sind daher oft keine vollständige Umkehrfunktion!

Definition Logarithmus zu Basen

Sei $x, b \in \mathbb{R}$ mit $b > 1$.

$$\log_b(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(n)}$$

ist die Umkehrfunktion von b^x und heißt Logarithmus zur Basis b.

Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen sind im allgemein nur in einem gewissen Bereich umkehrbar, da sie im allgemeinen nicht bijektiv sind.

Tangens

Die Umkehrfunktion von $\tan x$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

heißt Arcustangens.

Sinus

Die Umkehrfunktion von $\sin x$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

heißt Arcussinus.

Cosinus

Die Umkehrfunktion von $\cos x$ für $x \in (0, \pi)$:

$$\arccos : [-1, 1] \to (0, \pi)$$

heißt Arcuscosinus.

8 Differentiation

8.1 Definition $\mathcal{O}$ und o

Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.
Wir schreiben: $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to a$ falls:

$$\exists c > 0 \ : \ \forall (x_n) \in \mathbb{C} \text{ mit } x_n \to a \ : \ |f(x_n)| \leq c \cdot |g(x_n)|$$

für alle bis auf endlich viele n.
Wir schreiben: $f(x) = o(g(x))$ für $x \to a$ falls

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Sprich: „f ist gegenüber g asymptotisch vernachlässigbar für $x \to a$."

8.3 Definition innerer Punkt

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. $x_0 \in D$ heißt innerer Punkt von D, falls:

$$\exists \varepsilon > 0 \ : \ (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq D$$

Hinweis: D ist offen falls alle $x_0 \in D$ innere Punkte von D sind.

8.4 Definition Differenzierbarkeit einer Stelle & Ableitung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 innerer Punkt in D.
f heißt Differenzierbar in x_0, wenn:

$$\exists f'(x_0) \ : \ \forall x \in D \text{ mit } x \to x_0 \ : \ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$f'(x)$ heißt die Ableitung von f und beschreibt die Steigung der Tangenten an $f(x)$.
Ausgeschrieben lautet die Definition:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

8.5 Definition Differenzierbarkeit einer Funktion

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$.
f heißt differenzierbar in D, falls f differenzierbar in x, $\forall x \in D$.

8.8 Differenzierbarkeit $\to$ Stetigkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0.
Dann ist f stetig in x_0.

Wichtig: Die Umkehrung gilt nicht, d.h. aus Differenzierbarkeit lässt nicht auf Stetigkeit schließen!

8.10 Definition rechts- & linksseitige Ableitung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 innerer Punkt in D.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

heißt rechtsseitige Ableitung von f in x_0.

$$f'_-(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

heißt linksseitige Ableitung von f in x_0.

Notation der Ableitung

Die Schreibweise $f'(x_0)$ für die Ableitung von f heißt Lagrange-Notation. Bekannt ist auch die Leibniz-Notation $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Definition Differentialoperator

Sei I ein offenes Intervall.
$D : f \mapsto f'$ ordnet jeder in I differenzierbaren Funktion f ihre Ableitung f' zu.

D ist linear, d.h. $(af)'(x) = a \cdot f'(x)$ und $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Ableitung der trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} \sin' &= \cos \\ \cos' &= -\sin \end{aligned}$$

8.15 Produktregel

Sei $x \in \mathbb{R}$ und seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x.

$$(f \cdot f)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Daraus folgt auch: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

8.17 Quotientenregel

Sei $x \in \mathbb{R}$ und seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x, wobei $g(x) \neq 0$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

8.19 Kettenregel

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(I) \subseteq J$, $g : J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ innerer Punkt von I und $f(x_0)$ innerer Punkt von J.
$g \circ f$ ist in x_0 differenzierbar, wenn f in x_0 und g in $g(x_0)$ differenzierbar. Es gilt:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$