

# Analysis für Informatik

MA0902

Josef Schönberger

9. Februar 2021

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Mengenterminologie</b>	<b>5</b>
1.1	Teilmenge . . . . .	5
1.2	Injektiv / Surjektiv . . . . .	5
1.3	Auswahl-Axiom . . . . .	5
1.4	Exklusivität des Vergleichs der Kardinalität . . . . .	5
1.5	Cantor-Bernstein . . . . .	5
1.6	Abzählbarkeit . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Reelle Zahlen und Vektoren</b>	<b>6</b>
2.1	Körper und Anordnung . . . . .	6
2.2	Obere / Untere Schranke . . . . .	6
2.3	Maximum / Minimum . . . . .	6
2.4	Supremum / Infimum . . . . .	6
2.5	Definition Vollständigkeit . . . . .	7
2.6	Vollständigkeitsaxiom . . . . .	7
2.7	Rechenregeln . . . . .	7
2.8	Umgebung . . . . .	7
2.9	Offenheit einer Menge . . . . .	7
2.10	Abgeschlossenheit einer Menge . . . . .	7
2.11	Zeitgleich offen und abgeschlossen . . . . .	7
2.12	Cauchy-Schwarz-Ungleichung . . . . .	8
2.13	Dreiecksungleichung . . . . .	8
2.14	Ungleichung geom. und arithm. Mittel . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Folgen</b>	<b>10</b>
3.1	Definition Folge . . . . .	10
3.2	Definition (streng) monoton . . . . .	10
3.3	Definition Grenzwert einer Folge . . . . .	10

3.4	Eindeutigkeit eines Grenzwerts . . . . .	10
3.5	Beschränkung des Grenzwerts . . . . .	10
3.6	Einschließung . . . . .	10
3.7	Definition Beschränktheit . . . . .	10
3.8	Beschränktheit durch Grenzwert . . . . .	11
3.9	Rechenregeln . . . . .	11
3.10	Konvergenz gegen Supremum / Infimum . . . . .	11
3.11	Häufungspunkt . . . . .	11
3.12	Bolzano-Weierstrass . . . . .	11
3.13	Cauchys Kriterium für Konvergenz . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Reihen</b>	<b>13</b>
4.1	Definition Reihe . . . . .	13
4.2	Notwendige Bedingung für Konvergenz . . . . .	13
4.3	Konvergenz $\Leftrightarrow$ Beschränktheit bei positiven Gliedern . . . . .	13
	Vergleichskriterien für Konvergenz . . . . .	13
4.4	Definition Majorante / Minorante . . . . .	13
4.5	Majorantenkriterium / Minorantenkriterium . . . . .	13
4.6	Divergenz . . . . .	14
4.7	Quotientenkriterium . . . . .	14
	Alternierende Reihen . . . . .	14
4.8	Leibnitzkriterium . . . . .	14
4.9	Absolute Konvergenz . . . . .	14
4.10	Umordnungssatz . . . . .	14
4.11	Doppelreihensatz . . . . .	15
4.12	Exponentialfunktion . . . . .	15
4.13	Rechenregeln der Exponentialfunktion . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit</b>	<b>17</b>
5.1	Definition Isolierter Punkt . . . . .	17
5.2	Grenzwert einer Funktion . . . . .	17
5.3	Definition Stetigkeit . . . . .	17
5.4	Alternative Definition für Grenzwert . . . . .	17
5.5	Rechenregeln beim Grenzwert . . . . .	17
5.6	Stetigkeit von $\exp$ . . . . .	17
5.7	Komposition stetiger Funktionen . . . . .	18
5.8	Definition linksseitiger / rechtsseitiger Grenzwert / Stetigkeit . . . . .	18
	Fixpunktiteration . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Komplexe Zahlen und trigonometrische Funktionen</b>	<b>19</b>
6.1	Definition Sinus / Cosinus . . . . .	19
6.2	Sinus / Cosinus periodisch, Definition $\Pi$ . . . . .	19
	Rechenregeln für Sinus und Cosinus . . . . .	19
	Rechenregeln für komplexe Exponentialfunktion . . . . .	19

Definition Tangens / Kotangens . . . . .	20
6.3 Konvergenz bei Multiplikation . . . . .	20
Polarkoordinaten . . . . .	20
Nützliche Rechenregeln . . . . .	20
<b>7 Konsequenzen der Stetigkeit</b>	<b>21</b>
7.1 Unvollständigkeit des Ergebnisraums einer beliebigen Funktion . . . . .	21
7.2 Zwischenwertsatz . . . . .	21
7.3 Maximum / Minimum . . . . .	21
7.5 Maximum/Minimum einer stetigen Funktion . . . . .	21
7.6 Definition Konvergenz & Stetigkeit im mehrdimensionalen Raum . . . . .	21
mehrdimensionale Offenheit / Geschlossenheit . . . . .	21
7.7 Definition Kompaktheit . . . . .	22
7.8 stetig von Kompakter Menge abbilden $\rightarrow$ Maxi- und Minimum . . . . .	22
7.9 mehrdimensionale Beschränktheit . . . . .	22
7.10 komponentenweise Konvergenz . . . . .	22
7.11 Kompakt $\leftrightarrow$ abgeschlossen & beschränkt . . . . .	22
7.12 Kompaktheit steter Bilder kompakter Mengen . . . . .	22
7.13 Definition Umkehrabbildung & -funktion . . . . .	22
7.14 Umkehrfunktionen von stetigen, streng monoton wachsenden Funktionen .	23
7.15 Definition natürlicher Logarithmus . . . . .	23
Rechenregeln des Logarithmus . . . . .	23
7.16 Definition Potenzieren auf $\mathbb{R}$ , Wurzelrechnung . . . . .	23
Definition Logarithmus zu Basen . . . . .	23
Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen . . . . .	23
<b>8 Differentiation</b>	<b>25</b>
8.1 Definition $\mathcal{O}$ und $o$ . . . . .	25
8.3 Definition innerer Punkt . . . . .	25
8.4 Definition Differenzierbarkeit einer Stelle & Ableitung . . . . .	25
8.5 Definition Differenzierbarkeit einer Funktion . . . . .	25
8.8 Differenzierbarkeit $\rightarrow$ Stetigkeit . . . . .	25
8.10 Definition rechts- & linksseitige Ableitung . . . . .	26
8.15 Produktregel . . . . .	26
8.17 Quotientenregel . . . . .	26
8.19 Kettenregel . . . . .	27
8.20 Ableitung der Potenzierung . . . . .	27
8.23 Umkehrregel . . . . .	27
8.27 Definition Konvergenz von Funktionsfolgen . . . . .	27
8.28 Differenzierbarkeit & Ableitung von Funktionsfolgen . . . . .	27
<b>9 Anwendungen der Ableitung</b>	<b>28</b>
9.1 Definition Extrema einer Funktion . . . . .	28
9.2 Ableitung an Extrema . . . . .	28

Bestimmung von Extrema . . . . .	28
9.6 Satz von Rolle . . . . .	28
9.7 (erweiterter) Mittelwertsatz . . . . .	29
9.8 Monotonie und Ableitung . . . . .	29
9.11 Kriterium für Extrema . . . . .	29
9.12 Regel von l'Hospital . . . . .	29
Konvexität und Jensen'sche Ungleichung . . . . .	30
9.15 Definition zweimal und stetig differenzierbar . . . . .	30
9.19 Definition Konvexität . . . . .	30
9.18 monoton wachsende Ableitung $\leftrightarrow$ konvex . . . . .	30
9.20 zweite Ableitung $\rightarrow$ Konvexität . . . . .	30
9.21 Ungleichung auf Folge der Konvexität . . . . .	31
Jensen'sche Ungleichung . . . . .	31
<b>10 Integration</b>	<b>32</b>
10.2 Definition Integral . . . . .	32
10.3 Integrierbarkeit stetiger Funktionen . . . . .	32
10.4 Integrierbarkeit monotoner Funktionen . . . . .	32
10.5 Alternative Definition Integrierbarkeit . . . . .	32
10.6 gleichmäßige Stetigkeit . . . . .	33
10.7 Eigenschaften und Rechenregeln des Integrals . . . . .	33
10.8 Integral mit „verdrehem“ Intervall . . . . .	33

# 1 Mengenterminologie

## 1.1 Teilmenge

$B \subseteq A$  gdw.  $\forall x \in B$  gilt auch, dass  $x \in A$ .

## 1.2 Injektiv / Surjektiv

$f : A \rightarrow B$  ist

- injektiv, falls  $\forall x, y \in A$  mit  $x \neq y$  gilt:  $f(x) \neq f(y)$
- surjektiv, falls  $\forall y \in B$  gilt:  $\exists x \in A$ , sodass  $f(x) = y$
- bijektiv, falls sowohl injektiv und surjektiv

## 1.3 Auswahl-Axiom

$\exists$  Surjektion von  $A$  nach  $B$  gdw.  $\exists$  Injektion von  $B$  nach  $A$

## 1.4 Exklusivität des Vergleichs der Kardinalität

$\forall A, B$  Mengen: Entweder  $|A| \leq |B|$  oder  $|A| \geq |B|$

## 1.5 Cantor-Bernstein

Falls Injektionen  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow A$  existieren, so gibt es eine Bijektion zwischen  $A$  und  $B$ .

## 1.6 Abzählbarkeit

Menge  $A$  heißt abzählbar, falls  $|A| = |\mathbb{N}|$ .

$\aleph_0 = |\mathbb{N}|$

## 2 Reelle Zahlen und Vektoren

### 2.1 Körper und Anordnung

Ein Körper  $(F, +, \cdot)$  ist eine Menge  $F$  mit den Operationen  $+$  und  $\cdot$ , wobei:

1. Addition assoziativ
2. Addition kommutativ
3. Es existiert ein zur Addition neutrales Element 0
4. Es existiert stets ein zur Addition inverses Element
5. Multiplikation assoziativ
6. Multiplikation kommutativ
7. Es existiert ein zur Multiplikation neutrales Element 1
8. Es existiert stets ein zur Multiplikation inverses Element
9. Es gilt das Distributionsgesetz

Ein Körper heißt angeordnet, falls eine Relation  $<$  existiert, sodass  $\forall x, y \in F$ :

1. Entweder  $x < y$  oder  $x = y$  oder  $x > y$
2. Falls  $x, y > 0$ , dann  $x + y, x \cdot y > 0$
3.  $x > y$  gdw.  $x - y > 0$

### 2.2 Obere / Untere Schranke

$x \in \mathbb{R}$  ist eine obere Schranke von  $M \subseteq \mathbb{R}$ , falls  $\forall y \in M$  gilt:  $y \leq x$ .

Falls ein solches  $x$  existiert, so heißt  $M$  nach oben beschränkt, sonst nach oben unbeschränkt.

Vergleichbar ist die untere Schranke.

### 2.3 Maximum / Minimum

$x \in \mathbb{R}$  ist das Maximum von  $M \subseteq \mathbb{R}$ , falls  $x$  obere Schranke von  $M$  und  $x \in M$ .

Vergleichbar ist das Minimum.

### 2.4 Supremum / Infimum

Das Supremum  $\sup(M)$  ist die niedrigste obere Schranke von  $M \subseteq \mathbb{R}$ . Falls nicht existent, so schreiben wir  $\sup(M) = \infty$ .

Das Infimum  $\inf(M)$  ist die höchste untere Schranke von  $M \subseteq \mathbb{R}$ . Falls nicht existent, so schreiben wir  $\inf(M) = -\infty$ .

## 2.5 Definition Vollständigkeit

Ein angeordneter Körper  $K$  ist vollständig, falls  $\forall M \subseteq K$  nach oben beschränkte Teilmenge mit  $M \neq \emptyset$  ein Supremum besitzt.

## 2.6 Vollständigkeitsaxiom

$\mathbb{R}$  ist vollständig.

## 2.7 Rechenregeln

Seien  $A, B \in \mathbb{R}$  mit  $\sup(A), \sup(B) \in \mathbb{R}$ .

1.  $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ <sup>1</sup>
2.  $\forall \lambda \geq 0 : \sup(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \sup(A)$ <sup>2</sup>
3. Falls  $A, B \subseteq [0, \infty)$ :  $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$ <sup>3</sup>
4.  $A \subseteq B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$

Selbiges für das Infimum (wobei bei [Punkt 4](#) das ' $\leq$ ' durch ein ' $\geq$ ' zu ersetzen ist)

## 2.8 Umgebung

Ein offenes Intervall  $(a, b)$  ist eine Umgebung von  $x$ , falls  $x \in (a, b)$ .

## 2.9 Offenheit einer Menge

$A \subseteq \mathbb{R}$  ist offen, falls  $\forall x \in A$  gilt:  $\exists I_x$  Umgebung von  $x$ , sodass  $I_x \subseteq A$

## 2.10 Abgeschlossenheit einer Menge

$A \subseteq \mathbb{R}$  ist abgeschlossen, falls  $\mathbb{R} \setminus A$  offen ist.

## 2.11 Zeitgleich offen und abgeschlossen

Nur  $\mathbb{R}$  und  $\emptyset$  sind offen und abgeschlossen.

---

<sup>1</sup> $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

<sup>2</sup> $\lambda \cdot A = \{\lambda \cdot a \mid a \in A\}$

<sup>3</sup> $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$

## Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \bar{x} \cdot \bar{y} &\mapsto \sum_{k=1}^n x_k y_k \end{aligned}$$

Seien  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

1.  $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$
2.  $(\alpha \bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot (\alpha \bar{y}) = \alpha(\bar{x} \cdot \bar{y})$
3.  $(\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{z} = \bar{x} \cdot \bar{z} + \bar{y} \cdot \bar{z}$
4.  $\bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0$

## Euklidische Norm

$$||(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)|| := \sqrt{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \cdot (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

### 2.12 Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ :

$$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq ||\bar{x}|| \cdot ||\bar{y}||^4$$

Gleichheit gilt gdw.  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  linear abhängig sind.

### 2.13 Dreiecksungleichung

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ :

$$||\bar{x} + \bar{y}|| \leq ||\bar{x}|| + ||\bar{y}||$$

### 2.14 Ungleichung geom. und arithm. Mittel

Seien  $x, y \geq 0$ .

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

---

<sup>4</sup> $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$  beschreibt das Skalarprodukt von  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$



## Komplexe Zahlen

$$i := \sqrt{-1}.$$

$$\mathbb{C} := \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Seien  $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i \in \mathbb{C}$  komplexe Zahlen. Wir definieren:

- die Addition:  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
- die Subtraktion:  $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$
- die Multiplikation:  $z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$
- die Konjugierte:  $\overline{z_1} = x_1 - y_1 i$
- den Betrag:  $|z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

## 3 Folgen

### 3.1 Definition Folge

Eine Folge mit Werten ist eine Abbildung  $\mathbb{N}^+ \rightarrow M$ , wobei  $M$  eine beliebige Menge.

Wir schreiben  $x_1, x_2, \dots$

Alternativ kann eine Folge auch mit  $\mathbb{N}_0$  definiert sein.

### 3.2 Definition (streng) monoton

Eine Folge  $(x_n)_n$  heißt monoton wachsend, falls  $\forall n : x_n \leq x_{n+1}$ .

Eine Folge  $(x_n)_n$  heißt streng monoton wachsend, falls  $\forall n : x_n < x_{n+1}$ .

Vergleichbar definiert ist (streng) monoton fallend.

### 3.3 Definition Grenzwert einer Folge

$x \in \mathbb{R}$  heißt Grenzwert / Limes einer Folge  $(x_n)_n$ , falls:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |x_n - x| < \varepsilon$$

Man schreibt:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \quad \text{oder} \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$x_n$  heißt konvergent gdw. ein Grenzwert existiert.

### 3.4 Eindeutigkeit eines Grenzwerts

Jede reelle Folge hat max. einen Grenzwert.

### 3.5 Beschränkung des Grenzwerts

Falls  $(x_n)_n \rightarrow x$  und  $(y_n)_n \rightarrow y$  beschränkte Folgen mit  $\forall n : x_n \leq y_n$ , so gilt  $x \leq y$ .

### 3.6 Einschließung

Falls  $(x_n)_n \rightarrow x$  und  $(y_n)_n \rightarrow x$  beschränkte Folgen mit  $\forall n : x_n \leq y_n$ . Für jede weitere Folge  $(w_n)$  mit  $\forall n : x_n \leq w_n \leq y_n$  gilt dann:  $w_n \rightarrow x$

### 3.7 Definition Beschränktheit

$(x_n)$  geht gegen  $+\infty$ , falls

$$\forall C > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_n \geq C$$

Vergleichbar geht  $(x_n)$  gegen  $-\infty$ .

$(x_n)$  heißt hingegen beschränkt, falls  $\exists K > 0$ , sodass  $\forall n : |x_n| \leq K$

### 3.8 Beschränktheit durch Grenzwert

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

### 3.9 Rechenregeln

Seien  $(x_n)$  und  $(y_n)$  Folgen mit  $x_n \rightarrow a$  und  $y_n \rightarrow b$ . Dann gilt:

- $x_n + y_n \rightarrow a + b$
- $x_n - y_n \rightarrow a - b$
- $x_n \cdot y_n \rightarrow a \cdot b$
- $x_n/y_n \rightarrow a/b$ , falls  $b \neq 0$

### 3.10 Konvergenz gegen Supremum / Infimum

Jede monoton wachsende, beschränkte Folge konvergiert gegen ihr Supremum:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_n(x_n) := \sup(M) \quad \text{mit } M := \{x_n \mid x \in \mathbb{N}\}$$

Ebenso konvergiert jede monoton fallende, beschränkte Folge gegen ihr Infimum.

### Definition Limes superior und Limes inferior

Sei  $(x_n)$  beschränkt. Dann ist definiert:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} x_k)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq n} x_k)$$

Es folgt:  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$

### 3.11 Häufungspunkt

Sei  $(x_n)$  eine reellwertige Folge.

Seien  $n_1 < n_2 < \dots < n_k \in \mathbb{N}$  gegeben, so heißt  $(x_{n_k})$  Teilfolge von  $(x_n)$ .

$x \in \mathbb{R}$  heißt Häufungspunkt, falls es eine Teilfolge mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$  gibt.

### 3.12 Bolzano-Weierstrass

Falls  $(x_n)$  und reellwertig:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ gdw. } \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Letztere Gleichung besagt, dass  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  zugleich maximaler und minimaler Häufungspunkt sind.

Diese Aussage ist äquivalent zu: Jede beschränkte Folge hat mindestens eine konvergente Teilfolge (da besagter Wert, auf den konvergiert wird, ein Häufungspunkt ist).

### 3.13 Cauchys Kriterium für Konvergenz

$(x_n)$  konvergiert gdw.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall m, n > N : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

## 4 Reihen

### 4.1 Definition Reihe

Sei  $a_n$  eine (komplexe) Folge. Die Folge

$$s_n := a_0 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

heißt unendliche Reihe (kurz: Reihe) mit den Gliedern  $a_n$  und den Partialsummen  $s_n$ .

Falls  $s_n$  konvergent:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

$s$  heißt die Summe oder der Wert der Reihe.

Falls  $s_n$  reell und geht gegen  $+\infty$ , so schreiben wir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$$

Gleiches gilt auch für  $-\infty$ .

### 4.2 Notwendige Bedingung für Konvergenz

Falls die Reihe  $\sum_{k=0}^n a_k$  konvergent, so gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

### 4.3 Konvergenz $\Leftrightarrow$ Beschränktheit bei positiven Gliedern

Eine reelle Reihe  $s_n$  mit positiven Gliedern ist beschränkt gdw. konvergent.

## Vergleichskriterien für Konvergenz

### 4.4 Definition Majorante / Minorante

Sei  $s_n$  eine Reihe mit den komplexen Gliedern  $a_k$ . Eine Reihe  $\sum_{k=0}^n b_k$  heißt Majorante von  $s_n$ , wenn  $|a_k| \leq b_k$ . Sie heißt Minorante von  $s_n$ , wenn  $b_k \leq |a_k|$ .

### 4.5 Majorantenkriterium / Minorantenkriterium

Sei  $(s_n)$  eine Reihe mit den komplexen Gliedern  $a_k$  und einer konvergenten Majorante mit den Gliedern  $b_n$ . Dann ist  $(s_n)$  konvergent. Es gilt:

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Falls eine Reihe  $(s_n)$  hingegen eine divergente Minorante hat, so ist auch  $(s_n)$  divergent.

## 4.6 Divergenz

Eine Reihe heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist.

## 4.7 Quotientenkriterium

Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergiert (absolut), falls

$$\exists q \in \mathbb{R} \text{ mit } q < 1 : \exists n_0 \geq 0 : \forall k \geq n_0 : \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q$$

Wobei  $q$  fest sein muss, also  $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$  reicht nicht aus!

## Alternierende Reihen

Eine Reihe mit den Gliedern  $a_k$  heißt alternierend, falls die Glieder abwechselnd verschiedene Vorzeichen haben. Wir schreiben:  $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \dots$

Wir nehmen an:  $a_0 > 0$ .

## 4.8 Leibnitzkriterium

Sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine monoton fallende Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  und sei  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ .

Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ .

Es gilt  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k - S_n \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$$

## 4.9 Absolute Konvergenz

$\sum_{k=0}^n a_k$  mit  $a_k \in \mathbb{C}$  heißt absolut konvergent, falls  $\sum_{k=0}^n |a_k|$  konvergent.

Eine Reihe, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, heißt bedingt konvergent.

## 4.10 Umordnungssatz

Sei  $a_k$  eine Folge mit  $a_k \in \mathbb{C}$ .

$$\sum_{k=1}^n a_k \text{ konvergiert gdw. } \forall \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

## Beliebigkeit der Ergebnisse bei Änderung der Summationsreihenfolge

Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  eine bedingt konvergente Reihe.

Dann existiert je eine Permutation  $\sigma$ , sodass

- $\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = x$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = -\infty$  oder  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \infty$
- $\limsup \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} \neq \liminf \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)}$

### 4.11 Doppelreihensatz

Seien  $a_{i,j} \in \mathbb{C}$  mit  $i, j \in \mathbb{N}$ . Falls  $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{i,j}| < \infty$ , dann konvergiert  $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$  und

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,(n-k)} \end{aligned}$$

Es folgt:

Seien  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  reelle Folgen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{\infty} b_j &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_k b_j \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k,j,k+j=m} a_k b_j \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m \end{aligned}$$

wobei  $c_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$  die Definition des Cauchy-Produkts.

### 4.12 Exponentialfunktion

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Dabei gilt:  $\exp(z) = e^z$  mit  $e$  die Eulersche Zahl  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

### 4.13 Rechenregeln der Exponentialfunktion

Seien  $z \in \mathbb{C}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gelten:

1.  $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$
2.  $\exp(z) \neq 0 + 0i$
3.  $\exp(x) > 0$
4.  $\overline{\exp(z)} = \exp \bar{z}$
5.  $\exp(x)$  ist monoton wachsend
6.  $|\exp(z)| \leq \exp(|z|)$

### Überblick über alle Kriterien

Kriterien:

- Majorantenkriterium
- Minoratenkriterium
- Quotientenkriterium
- Wurzelkriterium\*
- Nullfolgenkriterium\*
- Leibnizkriterium

\* Wurden nicht angesprochen



## 5 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Sämtliche Sätze gelten auch auf  $\mathbb{C}$ , auch wenn sie nur auf  $\mathbb{R}$  angegeben sind.

### 5.1 Definition Isolierter Punkt

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ .  $x_0$  heißt isoliert in  $D$  wenn:

$$\nexists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_n \in D \setminus \{x_0\} : \lim a_n = x_0$$

### 5.2 Grenzwert einer Funktion

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ .

$a$  heißt Grenzwert von  $f$  in  $x_0$  (Schreibweise:  $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ), falls

- a.  $x_0$  nicht isoliert und
- b.  $\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_n \in D \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \text{ gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = a$

### 5.3 Definition Stetigkeit

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ .

$f$  heißt stetig in  $x_0$ , falls  $x_0$  isoliert oder  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

$f$  heißt stetig in  $D$ , falls  $\forall x \in D$   $f$  stetig in  $x$ .

### 5.4 Alternative Definition für Grenzwert

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$  nicht isoliert.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \text{ gdw. } \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (D \setminus \{x_0\}) : |f(x) - a| < \varepsilon$$

### 5.5 Rechenregeln beim Grenzwert

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt:  $\forall x \in D$  mit  $f$  und  $g$  stetig in  $x$ :  $f + g, f - g, f \cdot g$  stetig in  $x$ . Zudem  $\frac{f}{g}$  stetig in  $x$ , falls  $g(x) \neq 0$ .

Damit sind endliche Polynome (und Brüche daraus) auf ihrem Definitionsbereich stetig.

### 5.6 Stetigkeit von $\exp$

Die Exponentialfunktion  $\exp$  ist stetig auf  $\mathbb{C}$ .

## 5.7 Komposition stetiger Funktionen

Seien  $f : D_f \rightarrow R$ ,  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f(D_f) \subseteq D_g$  <sup>5</sup>.

$\forall x \in D_f$ : Wenn  $f$  stetig in  $x$  und  $g$  stetig in  $f(x)$ , so ist auch  $g \circ f$  stetig in  $x$ .

## 5.8 Definition linksseitiger / rechtsseitiger Grenzwert / Stetigkeit

Seien  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a \in D$  nicht isoliert.

$c \in \mathbb{R}$  heißt linksseitiger Grenzwert von  $f$  im Punkt  $a$  (Schreibweise:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = c$ ) <sup>6</sup>,

falls  $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in D$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < a$  und  $x_n \rightarrow c$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ .

$f$  heißt linksseitig stetig in  $a$ , falls  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ .

Analog ist der rechtsseitige Grenzwert definiert:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

## Fixpunktiteration

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $x \in \mathbb{R}$  heißt Fixpunkt von  $f$ , falls  $f(x) = x$ .

Iterativer Lösungsansatz:  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Dann gilt: Falls  $f$  stetig in  $D$ ,  $f(D) \subseteq D$  und  $x_0 \in D$ , so ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  ein Fixpunkt.

---

<sup>5</sup>  $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$

<sup>6</sup> alternativ auch  $\lim_{x \nearrow a} f(x) = c$  für linksseitigen und  $\lim_{x \searrow a} f(x) = c$  für rechtsseitigen Grenzwert

## 6 Komplexe Zahlen und trigonometrische Funktionen

Wir rechnen in Bogenmaßen. Der Einheitskreis ist definiert als  $\{z \mid |z| = 1\}$ .

### 6.1 Definition Sinus / Cosinus

$$\sin x := \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos x := \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Es folgt:  $\sin 0 = 0$  und  $\cos 0 = 1$

Diese Definition ist im reellen Raum äquivalent zur geometrischen Definition am rechtwinkligen Dreieck.

### 6.2 Sinus / Cosinus periodisch, Definition Pi

$\sin$  und  $\cos$  sind periodisch, d.h.  $\exists \pi \in \mathbb{R} : \forall z \in \mathbb{C} : \sin z + 2\pi = \sin z, \cos z + 2\pi = \cos z$ .  
 $\pi \approx 3,14159265412$ .

### Rechenregeln für Sinus und Cosinus

$\sin -x = -\sin x$	Punktsymmetrie
$\cos -x = \cos x$	Achsensymmetrie
$\sin(x + \pi/2) = \cos x$	Verschiebung
$\cos(x + \pi/2) = -\sin x$	

Zudem folgt aus dem Satz des Pythagoras:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

### Rechenregeln für komplexe Exponentialfunktion

Sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $z = \exp ix = e^{ix}$ .

$$\begin{aligned}|e^{ix}| &= e^{ix} \overline{e^{ix}} \\&= e^{ix} e^{\overline{ix}} \\&= e^{ix} e^{-ix} \\&= e^0 \\&= 1\end{aligned}$$

Also ist  $e^{ix}$  der Einheitskreis auf der komplexen Ebene:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Insbesondere gilt also:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \qquad e^{i\pi} = -1$$

Folgerung:

$$e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x$$

### Definition Tangens / Kotangens

$$\begin{aligned} \tan x &:= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \cot x &:= \frac{\cos x}{\sin x} \quad \sin x \neq 0 = \tan^{-1} x \end{aligned}$$

Hinweis:  $\tan x$  und  $\cot x$  sind periodisch (Periode  $\pi$ ).  $\tan \frac{\pi}{2}$  und  $\cot 0$  sind nicht definiert.

## 6.3 Konvergenz bei Multiplikation

Seien  $d \in \mathbb{N}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $a \in D$  und  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g$  auf  $D$  beschränkt sowie  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ . Dann folgt:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$ .

### Polarkoordinaten

Sei  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Dann gibt es  $r, \phi \in \mathbb{R}$ , sodass  $r = |z|$  und  $e^{i\phi} = \frac{z}{r}$  (da  $|\frac{z}{r}| = 1$ ).  $r$  und  $\phi$  heißen Polarkoordinaten von  $z$ :  $r$  ist der Abstand von  $z$  zum Nullpunkt,  $\phi$  der Winkel zur reellen Achse. Die Abbildung Polarkoordinaten  $\leftrightarrow$  Real- und Imaginärteil ist bijektiv.

Die Multiplikation in Polarkoordinaten<sup>7</sup>:  $z_1 = r_1 \angle \phi_1$ ,  $z_2 = r_2 \angle \phi_2$ . Es folgt:  $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \angle (\phi_1 + \phi_2)$

### Nützliche Rechenregeln

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$   
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

---

<sup>7</sup>Ich (Josef) schreibe:  $r \angle \phi$  für  $r \cdot e^{i\phi}$

## 7 Konsequenzen der Stetigkeit

### 7.1 Unvollständigkeit des Ergebnisraums einer beliebigen Funktion

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Es muss  $\forall y \in [f(a), f(b)]$  nicht unbedingt auch ein  $x$  mit  $f(x) = y$  geben.

### 7.2 Zwischenwertsatz

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wenn  $f$  stetig, so  $\forall y \in [f(a), f(b)] : \exists x : f(x) = y$ .

### 7.3 Maximum / Minimum

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

$x \in \mathbb{R}$  heißt Maximum von  $f$ , wenn  $\forall z \in D : f(x) \geq f(z)$ .

$x \in \mathbb{R}$  heißt Minimum von  $f$ , wenn  $\forall z \in D : f(x) \leq f(z)$ .

Hinweis: Maximum und Minimum sind nicht unbedingt eindeutig. Nicht jede Funktion hat ein Maximum und/oder Minimum.

### 7.5 Maximum/Minimum einer stetigen Funktion

Jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  hat ein Maximum und ein Minimum.

### 7.6 Definition Konvergenz & Stetigkeit im mehrdimensionalen Raum

Sei  $d \in \mathbb{N}$ ,  $(x_n)_n \in \mathbb{N}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^d$  und  $x \in \mathbb{R}^d$ .

$x_n$  konvergiert gegen  $x$  falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ . (Schreibweise:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  oder  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ )

Alternativ komponentenweise:  $\forall i \in \{1, \dots, d\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_{ni} = x_i$ .

Sei  $d \in \mathbb{N}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $x \in D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $m \in \mathbb{N}$ .

$f$  heißt stetig in  $x \in D$ , falls  $\forall (x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ .

$f$  heißt stetig, falls  $\forall x \in D$  gilt:  $f$  stetig in  $x$ .

### mehrdimensionale Offenheit / (Ab-)Geschlossenheit

Eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt offen, wenn  $\forall x_0 \in A : \exists \varepsilon > 0 : \{x \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\} \subseteq A$ .

$A$  heißt geschlossen, wenn  $\mathbb{R}^n \setminus A$  offen.

$A$  ist (ab-)geschlossen gdw.  $\forall (a_n)$  mit  $a_n \in A$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  gilt:  $a \in A$

Anmerkung: Nur  $\mathbb{R}^n$  und  $\emptyset$  sind zugleich offen und geschlossen.

## 7.7 Definition Kompaktheit

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $A \subseteq \mathbb{C}^n$ .

$A$  heißt kompakt, falls  $\forall (a_n)$  mit  $a_n \in A$  gilt:  $\exists (a_{n_k})$  Teilfolge von  $(a_n)$ , sodass  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \in A$ .

## 7.8 stetig von Kompakter Menge abbilden $\rightarrow$ Maxi- und Minimum

Sei  $A$  kompakt und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wenn  $A$  stetig, so hat  $f$  sowohl ein Maximum als auch ein Minimum.

## 7.9 mehrdimensionale Beschränktheit

$M \subseteq \mathbb{R}^d$  heißt beschränkt, wenn  $\exists K \in \mathbb{R} : \forall x \in M : \|x\| < K$ .

Eine Folge  $(x_n) \in \mathbb{R}^n$  heißt beschränkt, wenn die Menge aller ihrer Glieder beschränkt ist. Wir schreiben die Glieder  $\forall n : x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,d})$  mit  $x_{n,k} \in \mathbb{R}$  und  $1 \leq k \leq d$ .

## 7.10 komponentenweise Konvergenz

Eine Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}^d$  konvergiert gdw. alle ihre Komponenten konvergieren:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{gdw.} \quad \forall k \in \{1, \dots, d\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,k} = x_k$$

## 7.11 Kompakt $\leftrightarrow$ abgeschlossen & beschränkt

$A \subseteq \mathbb{R}^n$  ist kompakt gdw.  $A$  ist abgeschlossen und beschränkt.

## 7.12 Kompaktheit steter Bilder kompakter Mengen

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  kompakt und  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig.

Dann ist  $f(D)$  kompakt.<sup>8</sup>

## 7.13 Definition Umkehrabbildung & -funktion

Sei  $f : A \rightarrow B$  bijektiv<sup>9</sup>.

$\exists f^{-1} : B \rightarrow A$  Umkehrabbildung, sodass  $\forall y \in B : f(f^{-1}(y)) = y$ .

Wenn  $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ , so heißt  $f^{-1}$  Umkehrfunktion.

Hinweis:  $f^{-1}$  ist bijektiv. Man erhält den Graphen von  $f^{-1}$  durch Spiegelung des Graphen von  $f$  an der Geraden  $y = x$ , wenn  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ .

---

<sup>8</sup> $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$

<sup>9</sup>bijektiv heißt injektiv und surjektiv:

Injektiv: auf jedes Element wird max. 1x abgebildet

Surjektiv: auf jedes Element wird min. 1x abgebildet

## 7.14 Umkehrfunktionen von stetigen, streng monoton wachsenden Funktionen

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton wachsend.  
 $f$  ist bijektiv,  $f^{-1}$  ist auch stetig und streng monoton wachsend.

## 7.15 Definition natürlicher Logarithmus

$$\ln := \exp^{-1} \text{ mit } \exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$$

heißt (natürlicher) Logarithmus.

## Rechenregeln des Logarithmus

Seien  $x, y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ .

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \cdot y)$$

$$\ln(x^k) = k \cdot \ln(x) \quad \text{falls } x > 0$$

## 7.16 Definition Potenzieren auf $\mathbb{R}$ , Wurzelrechnung

Sei  $x, a \in \mathbb{R}$  mit  $x > 0$ .

$$x^a := \exp(a \cdot \ln(x))$$

Es gilt:  $x^{a+b} = \exp((a+b) \cdot \ln(x)) = \exp(a \ln(x)) \cdot \exp(b \ln(x)) = x^a x^b$ .

Wir schreiben:  $\sqrt[n]{x} := x^{\frac{1}{n}}$ .

Hinweis: Potenzfunktionen sind im Allgemeinen nicht bijektiv, Wurzelfunktion sind daher oft keine vollständige Umkehrfunktion!

## Definition Logarithmus zu Basen

Sei  $x, b \in \mathbb{R}$  mit  $b > 1$ .

$$\log_b(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

ist die Umkehrfunktion von  $b^x$  und heißt Logarithmus zur Basis  $b$ .

## Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen sind im allgemein nur in einem gewissen Bereich umkehrbar, da sie im allgemeinen nicht bijektiv sind.

**Tangens**

Die Umkehrfunktion von  $\tan x$  für  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ :

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

heißt Arcustangens.

**Sinus**

Die Umkehrfunktion von  $\sin x$  für  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ :

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

heißt Arcussinus.

**Cosinus**

Die Umkehrfunktion von  $\cos x$  für  $x \in (0, \pi)$ :

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow (0, \pi)$$

heißt Arcuscosinus.



## 8 Differentiation

### 8.1 Definition $\mathcal{O}$ und $o$

Seien  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ .

Wir schreiben:  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$  für  $x \rightarrow a$  falls:

$$\exists c > 0 : \forall (x_n) \in \mathbb{C} \text{ mit } x_n \rightarrow a : |f(x_n)| \leq c \cdot |g(x_n)|$$

für alle bis auf endlich viele  $n$ .

Wir schreiben:  $f(x) = o(g(x))$  für  $x \rightarrow a$  falls

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Sprich: „ $f$  ist gegenüber  $g$  asymptotisch vernachlässigbar für  $x \rightarrow a$ .“

### 8.3 Definition innerer Punkt

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ .  $x_0 \in D$  heißt innerer Punkt von  $D$ , falls:

$$\exists \varepsilon > 0 : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq D$$

Hinweis:  $D$  ist offen falls alle  $x_0 \in D$  innere Punkte von  $D$  sind.

### 8.4 Definition Differenzierbarkeit einer Stelle & Ableitung

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0$  innerer Punkt in  $D$ .

$f$  heißt Differenzierbar in  $x_0$ , wenn:

$$\exists f'(x_0) : x \in D \text{ mit } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$f'(x)$  heißt die Ableitung von  $f$  und beschreibt die Steigung der Tangenten an  $f(x)$ .

Ausgeschrieben lautet die Definition:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

### 8.5 Definition Differenzierbarkeit einer Funktion

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

$f$  heißt differenzierbar in  $D$ , falls  $f$  differenzierbar in  $x$ ,  $\forall x \in D$ .

### 8.8 Differenzierbarkeit $\rightarrow$ Stetigkeit

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0$ .

Dann ist  $f$  stetig in  $x_0$ .

Wichtig: Die Umkehrung gilt nicht, d.h. aus Stetigkeit lässt sich nicht auf Differenzierbarkeit schließen! Bsp:  $f(x) = |x|$  an  $x = 0$

### 8.10 Definition rechts- & linksseitige Ableitung

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0$  innerer Punkt in  $D$ .

$$f'_+(x_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

heißt rechtsseitige Ableitung von  $f$  in  $x_0$ .

$$f'_-(x_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

heißt linksseitige Ableitung von  $f$  in  $x_0$ .

### Notation der Ableitung

Die Schreibweise  $f'(x_0)$  für die Ableitung von  $f$  heißt Lagrange-Notation. Bekannt ist auch die Leibniz-Notation  $\frac{df}{dx}(x_0)$ .

### Definition Differentialoperator

Sei  $I$  ein offenes Intervall.

$D : f \mapsto f'$  ordnet jeder in  $I$  differenzierbaren Funktion  $f$  ihre Ableitung  $f'$  zu.

$D$  ist linear, d.h.  $(af)'(x) = a \cdot f'(x)$  und  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ .

### Ableitung der trigonometrischen Funktionen

$$\sin' = \cos$$

$$\cos' = -\sin$$

### 8.15 Produktregel

Sei  $x \in \mathbb{R}$  und seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x$ .

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Daraus folgt auch:  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ .

### 8.17 Quotientenregel

Sei  $x \in \mathbb{R}$  und seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x$ , wobei  $g(x) \neq 0$ .

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

### 8.19 Kettenregel

Seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(I) \subseteq J$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  innerer Punkt von  $I$  und  $f(x_0)$  innerer Punkt von  $J$ .

$g \circ f$  ist in  $x_0$  differenzierbar, wenn  $f$  in  $x_0$  und  $g$  in  $g(x_0)$  differenzierbar. Es gilt:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

### 8.20 Ableitung der Potenzierung

Sei  $a > 0$  und  $h(x) = a^x$  mit  $D = \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \cdot \ln(a)$$

### 8.23 Umkehrregel

Sei  $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$  bijektiv und sei  $y \in [a, b]$  in  $f$  differenzierbar (mit  $f'(y) \neq 0$ ).

Es folgt:  $f^{-1}$  ist in  $x = f(y)$  differenzierbar und:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

### 8.27 Definition Konvergenz von Funktionsfolgen

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f_k$  mit  $\forall k \in \mathbb{N} : f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir definieren den Grenzwert  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ :

**punktweise Konvergenz:**  $\forall \varepsilon > 0 : \forall x \in I : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

**gleichmäßige Konvergenz:**  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in I : \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Gleichmäßige Konvergenz impliziert damit punktweise Konvergenz. (Aber nicht anders herum, vgl.  $f_k(x) = x \geq k \cdot 1 : 0$  mit  $f(x) = 0$ )

Diese Konvergenzbegriffe lassen sich auch auf Reihen anwenden, dann ist  $f(x)$  der Grenzwert der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ .

### 8.28 Differenzierbarkeit & Ableitung von Funktionsfolgen

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  offen und  $f_k$  eine Funktionsfolge von  $I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wenn  $f_k$  punktweise und  $f'_k$  gleichmäßig konvergiert, so ist  $f'$  differenzierbar in  $I$  und  $f'(x) = \lim_{k=1} f'_k$ .

Für Reihen: Wenn  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  punktweise und  $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k$  gleichmäßig konvergieren, so ist  $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x)$ .

## 9 Anwendungen der Ableitung

### 9.1 Definition Extrema einer Funktion

Sei  $I = [a, b]$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### globale Extrema

Sofern existent, heißen das Maximum und Minimum von  $f$  auf  $I$  globale Extrema.

#### lokale Extrema

$f$  hat in  $x_0$  ein lokales Maximum, falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, sodass  $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap I$  gilt:  $f(x) \leq f(x_0)$ .

$f$  hat in  $x_0$  ein strikt lokales Maximum, falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, sodass  $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap I$  mit  $x \neq x_0$  gilt:  $f(x) < f(x_0)$ .

Analog das (strikt) lokale Minimum.

Jedes globale Extremum ist auch ein entsprechend lokales Extremum.

### 9.2 Ableitung an Extrema

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in  $(a, b)$  differenzierbar und  $x_0 \in (a, b)$  sei lokales Extremum in  $f$ .  
Dann gilt:  $f'(x_0) = 0$ .

Hinweis: Aus  $f'(x) = 0$  folgt nicht sofort ein lokales Extremum in  $x$ .

#### Bestimmung von Extrema

Voraussetzung: Bei allen (inneren) Extrema ist  $f(x)$  differenzierbar.

1. Bestimme Nullstellen von  $f'$  in  $(a, b)$
2. Filtere lokale Extrema heraus
3. Untersuche Verhalten von  $f$  in den Randpunkten
4. Bestimme größtes/kleinstes Extrema als jeweils globales Maximum/Minimum

### 9.6 Satz von Rolle

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar in  $(a, b)$ .

Falls  $f(a) = f(b)$ , so  $\exists z \in (a, b)$  mit  $f'(z) = 0$ .

## 9.7 (erweiterter) Mittelwertsatz

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $[a, b]$  und differenzierbar in  $(a, b)$ , wobei  $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$ .

Dann gilt:  $g(a) \neq g(b)$  und  $\exists z \in (a, b)$  mit  $g'(z) \cdot (f(b) - f(a)) = f'(z) \cdot (g(b) - g(a))$   
bzw.  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$ .

Spezialfall  $g(x) = x$ :  $\exists z \in (a, b)$  mit  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(z)$ .

## Zwischenwertsatz für Ableitungen

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar.

Dann gilt:  $\forall c \in [f(a), f(b)] : \exists x \in [a, b] : f'(x) = c$ .

## 9.8 Monotonie und Ableitung

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $(a, b)$ .

Dann gilt:

1.  $f' > 0$  in  $(a, b) \Rightarrow f$  in  $(a, b)$  streng monoton wachsend
2.  $f' < 0$  in  $(a, b) \Rightarrow f$  in  $(a, b)$  streng monoton fallend
3.  $f' \geq 0$  in  $(a, b) \Rightarrow f$  in  $(a, b)$  monoton wachsend
4.  $f' \leq 0$  in  $(a, b) \Rightarrow f$  in  $(a, b)$  monoton fallend
5.  $f' = 0$  in  $(a, b) \Rightarrow f$  in  $(a, b)$  konstant

Falls  $f$  in  $a$  oder  $b$  stetig, so können diese Randpunkte jeweils hinzugenommen werden.

## 9.11 Kriterium für Extrema

Sei  $f$  differenzierbar in  $(a, b)$  und  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f'(x_0) = 0$ .

Dann gilt:

1.  $f' \geq 0$  in  $(a, x_0)$  und  $f' \leq 0$  in  $(x_0, b) \Rightarrow x_0$  lokales Maximum in  $f$
2.  $f' \leq 0$  in  $(a, x_0)$  und  $f' \geq 0$  in  $(x_0, b) \Rightarrow x_0$  lokales Minimum in  $f$

## 9.12 Regel von l'Hospital

Seien  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar (wobei  $a = -\infty$  und/oder  $b = \infty$  erlaubt) mit  $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$  und sei  $x_0 \in \{a, b\}$ .

Falls

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  oder

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ ,

und falls  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , so gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## Konvexität und Jensen'sche Ungleichung

### 9.15 Definition zweimal und stetig differenzierbar

Sei  $f$  eine Funktion. Wir sagen,  $f$  ist:

- *zweimal differenzierbar*, falls  $f$  und  $f'$  differenzierbar
- *stetig differenzierbar*, falls  $f$  differenzierbar und  $f'$  stetig
- *zweimal stetig differenzierbar*, falls  $f$  zweimal differenzierbar und  $f''$  stetig

### 9.19 Definition Konvexität

Sei  $I$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wenn  $\forall x, y \in I$  und  $\forall \alpha \in [0, 1]$  gilt:

- konvex, falls  $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$
- streng konvex, falls  $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$
- konkav, falls  $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$
- streng konkav, falls  $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$

### 9.18 monoton wachsende Ableitung $\leftrightarrow$ konvex

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  in  $(a, b)$  differenzierbar.

$f'$  ist in  $(a, b)$  monoton wachsend gdw.  $f$  konvex in  $(a, b)$ .

### 9.20 zweite Ableitung $\rightarrow$ Konvexität

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar. Dann folgt:

- $f''$  nicht negativ  $\rightarrow f$  ist konvex
- $f''$  positiv  $\rightarrow f$  ist streng konvex
- $f''$  nicht positiv  $\rightarrow f$  ist konkav
- $f''$  negativ  $\rightarrow f$  ist streng konkav

## 9.21 Ungleichung auf Folge der Konvexität

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  in  $(a, b)$  differenzierbar.

Dann gilt  $\forall x_0, x_1 \in (a, b)$ :

- Falls  $f$  konvex:

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) \leq f(x_1)$$

- Falls  $f$  konkav:

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) \geq f(x_1)$$

- Wenn  $f$  darüber hinaus streng konvex / streng konkav, so gilt:

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) = f(x_1) \text{ gdw. } x_0 = x_1$$

## Jensen'sche Ungleichung

Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ , seien  $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$  und seien  $p_1, \dots, p_n > 0$  mit  $\sum p_i = 1$ .  
Dann gilt:

- Falls  $f$  konvex:

$$f\left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right) \leq \sum_{j=1}^n p_k f(x_k)$$

- Falls  $f$  konkav:

$$f\left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right) \geq \sum_{j=1}^n p_k f(x_k)$$

- Wenn  $f$  streng konvex / streng konkav, so gilt:

$$f\left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right) = \sum_{j=1}^n p_k f(x_k) \text{ gdw. } x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

## Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

Seien  $x_1, \dots, x_n > 0$  und seien  $p_1, \dots, p_n > 0$  mit  $\sum p_i = 1$ . Dann gilt:

$$\prod_{k=1}^n (x_k)^{p_k} \leq \sum_{k=1}^n p_k x_k$$

## 10 Integration

### Definition Unter- und Oberintegral

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt.

Sei  $Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  mit den Grenzen  $x_i$ , wobei  $x_0 < \dots < x_n$ .

Sei  $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$  und  $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ .

Definition Untersumme  $U_Z(f)$  und Obersumme  $O_Z(f)$ :

$$U_Z(f) := \int_a^b \varphi(x) \, dx \quad \text{mit } \varphi(x) = m_i \text{ für } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

$$O_Z(f) := \int_a^b \psi(x) \, dx \quad \text{mit } \psi(x) = M_i \text{ für } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

Wobei hier das Integral stufenweise berechnet werden kann, indem für jeden Teil der Zerlegung der Flächeninhalt des Rechtecks betrachtet wird.

Definition Unterintegral  $U(f)$  und Oberintegral  $O(f)$ :

$$U(f) := \sup \{U_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a, b]\}$$

$$O(f) := \inf \{O_Z(f) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a, b]\}$$

### 10.2 Definition Integral

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt.

Falls  $U(f) = O(f)$ , so heißt  $f$  *integrierbar* und es wird definiert:

$$\int_a^b f(x) \, dx = U(f) = O(f)$$

### 10.3 Integrierbarkeit stetiger Funktionen

Jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar.

### 10.4 Integrierbarkeit monotoner Funktionen

Jede monotone Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar.

### 10.5 Alternative Definition Integrierbarkeit

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt.

$f$  ist integrierbar gdw.  $\forall \varepsilon > 0 : \exists Z$  Zerlegung, sodass:

$$O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon$$



## 10.6 gleichmäßige Stetigkeit

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Es gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in [a, b] \text{ mit } |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

## 10.7 Eigenschaften und Rechenregeln des Integrals

### 1. Linearität

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Dann ist auch  $\alpha f + \beta g$  integrierbar und

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx$$

### 2. Monotonie

Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar mit  $\forall x \text{ in } [a, b] : f(x) \leq g(x)$ .

Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

### 3. Zerlegbarkeit

Sei  $a < c < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$f$  ist integrierbar auf  $[a, b]$  gdw.  $f$  auf  $[a, c]$  und auf  $[c, b]$  integrierbar.

Es gilt dann:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

## 10.8 Integral mit „verdrehem“ Intervall

Sei  $a \leq b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann definieren wir:

$$\int_b^a f(x) \, dx := - \int_a^b f(x) \, dx$$

Damit gilt die Zerlegbarkeit auch für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Aus der Definition folgt:

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0$$