这一节仍假定$(X,\mathcal{M},\mu)$是测度空间

定义 0.0.1. 设$f:X\to\mathbb{R}$是可测的，且$\int f^+$和$\int f^-$至少一个是有限的，则定义$\int f=\int f^+-\int f^-$

定义 0.0.2. 若$\int f^+$和$\int f^-$都是有限的，则称f是可积的，由于$|f|=f^++f^-$，f可积等价于$|f|$可积，等价于$\int|f|<+\infty$

命题 0.0.3. X上的所有实值可积函数构成实向量空间，且积分是其上的线性函数

证明. X上的所有实值函数构成实向量空间，故只需验证所有实可积函数是其子空间，只需验证对线性运算封闭。设f,g为实可积函数，则 $af+bg$是实可测的，且$|af+bg|\le|a||f|+|b||g|\Rightarrow\int|af+bg|\le|a|\int|f|+|b|\int|g|$是有限的，从而封闭性得证。
设$h=f+g$，$h^+-h^-=f^+-f^-+g^+-g^-$，
$h^++f^-+g^-=h^-+f^++g^+$
$\Rightarrow\int h^++\int f^-+\int g^-=\int h^-+\int f^++\int g^+$
$\Rightarrow\int h=\int h^+-\int h^-=\int f^+-\int f^-+\int g^+-\int g^-=\int f+\int g$
$a\ge0$时，$\int af=\int af^+-\int af^-=a\int f^+-a\int f^-=a(\int f^+-\int f^-)=a\int f$
$a<0$时类似可得
综上，积分是这个向量空间上的线性函数 □

定义 0.0.4. 若f是复值可测函数，若$\int|f|<+\infty$，则称f是可积的。更一般的，若$E\in\mathcal{M}$，$\int_E|f|<+\infty$，则称f在E上是可积的
由于$|f|\le|Re\,f|+|Im\,f|\le2|f|$，$f$可积当且仅当$Re\,f$和$Im\,f$均可积
于是我们可以定义$\int f=\int Re\,f+i\int Im\,f$
容易验证所有复值可积函数构成复向量空间，其上的积分是线性函数，我们将这个向量空间记作$L^1(\mu)$或$L^1(X,\mu)$或$L^1(X)$或L^1

命题 0.0.5. 若$f\in L^1$，那么$|\int f|\le\int|f|$

证明. f是实值函数时$|\int f| = |\int f^+ - \int f^-| \le \int f^+ + \int f^- = \int |f|$

f为复值函数时，不妨设$\int f \neq 0$，令$\alpha = \overline{sgn(\int f)}$，那么$|\int f| = \frac{|\int f|^2}{|\int f|} = \frac{\overline{\int f} * \int f}{|\int f|} = \alpha \int f = \int \alpha f$

$|\int f| = Re \int \alpha f = \int Re(\alpha f) \le \int |Re(\alpha f)| \le \int |\alpha f| = \int |f|$ □

命题 0.0.6. *a.* 若$f \in L^1$，则$\{x : f(x) \neq 0\}$是σ-有限的

b. 若$f, g \in L^1$，那么$\forall E \in \mathcal{M}, \int_E f = \int_E g$当且仅当$\int |f - g| = 0$当且仅当$f = g$ *a.e.*

证明. a. $\{x : f(x) \neq 0\} = f^{-1}([-\infty, 0)) \cup f^{-1}((0, +\infty])$

$= (f^+)^{-1}((0, +\infty]) \cup (-f^-)^{-1}([-\infty.0))$

由$f \in L^1$知$\int |f^+| < +\infty, \int |f^-| < +\infty$

由命题3.2.10.知$(f^+)^{-1}((0, +\infty])$和$(-f^-)^{-1}([-\infty, 0)) = (f^-)^{-1}((0, +\infty])$均为$\sigma$-有限的，从而$\{x : f(x) \neq 0\}$是$\sigma$-有限的

b. 由命题3.2.6.知$\int |f - g| = 0 \Leftrightarrow f = g$ a.e.

$\int |f - g| = 0 \Rightarrow \forall E \in \mathcal{M}, \int_E f = \int_E g$

$|\int_E f - \int_E g| = |\int (f - g) * \mathcal{X}_E| \le \int |(f - g) * \mathcal{X}_E| \le \int |f - g| = 0$

从而$\int_E f = \int_E g$

$\forall E \in \mathcal{M}, \int_E f = \int_E g \Rightarrow f = g$ a.e.

设$u = Re(f - g), v = Im(f - g)$，若$f - g = u + iv = 0$ a.e. 不成立，不妨设$u = 0$ a.e.不成立，令$E^+ = (u^+)^{-1}((0, +\infty]), E^- = (u^-)^{-1}((0, +\infty])$，那么$E = \{x : u(x) \neq 0\} = E^+ \cup E^-$是不交的，且$\mu(E) > 0$，故不妨设$\mu(E^+) > 0, \forall x \in E^+, u^-(x) = 0, Re(\int_{E^+} f - \int_{E^+} g) = \int_{E^+} Re(f - g) = \int_{E^+} u^+ > 0$，这与题设矛盾

$\int_{E^+} u^+ > 0$是因为：

$E^+ = (u^+)^{-1}((0, +\infty]) = (u^+)^{-1}(\bigcup_1^\infty (\frac{1}{n}, +\infty]) = \bigcup_1^\infty (u^+)^{-1}((\frac{1}{n}, +\infty])$

$\mu(E^+) > 0 \Rightarrow \exists n : \mu((u^+)^{-1}((\frac{1}{n}, +\infty])) > 0, E_n := (u^+)^{-1}((\frac{1}{n}, +\infty])$

$\int_{E^+} u^+ \ge \int_{E_n} u^+ \ge \int_{E_n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} * \mu(E_n) > 0$ □

这个命题告诉我们，改变一个可积函数在一个零测集上的值不改变它的积分(假设该测度空间完全，改变函数在一个零测集上的值不改变其可测性)。若函数f只在$E \in \mathcal{M}$上有定义，且$\mu(E^c) = 0$，那么我们可以补充定义$x \in E^c, f(x) = 0$从而计算其积分(f是否可测?)。对于$\overline{\mathbb{R}}$值的可积函数f，也可以改变∞为有限值($f^{-1}(\infty)$零测)，而不改变其积分值。

容易验证$f = g$ a.e.为$L^1(\mu)$上的等价关系，且$f = g$ a.e.$\Rightarrow \int f = \int g$，于是我们可以重新定义$L^1(\mu)$为在这个等价关系下的商集，这样$L^1(\mu)$仍为复向量空间($\int |f_1 - f_2| = \int |g_1 - g_2| = 0 \Rightarrow \int |f_1 + g_1 - f_2 - g_2| \leq \int |f_1 - f_2| + \int |g_1 - g_2| = 0, \int |af_1 - af_2| = |a| \int |f_1 - f_2| = 0$，故加法和数乘有定义)。尽管$L^1(\mu)$已经被定义为商集，我们仍用$f \in L^1(\mu)$表示一个可积函数$f$

$L^1(\mu)$的新定义有两个好处：1.若$\overline{\mu}$是μ的完备化，命题3.1.17.给出了$L^1(\overline{\mu})$到$L^1(\mu)$的单射，因此可以认为这两个空间是相同的(?)；2.在度量$\rho(f,g) = \int |f-g|$下，$L^1(\mu)$构成度量空间(三角不等式和对称性是明显的，$\int |f-g| = 0 \Leftrightarrow f = g\ a.e.$)，我们将该度量空间中的收敛称为$L^1$中的收敛：$f_n \to f\ in\ L^1 \Leftrightarrow \int |f_n - f| \to 0$

定理 0.0.7. *The Dominated Convergence Theorem*
令$\{f_n\}$为L^1中的函数列满足：
a. $f_n \to f\ a.e.$
b. $\exists g \in L^1, g \geq 0 : |f_n| \leq g\ a.e., \forall n$
那么$f \in L^1$且$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$

证明. 首先f在修改一个μ-零测集上的函数值后是μ-可测的，由命题3.1.16. 3.1.17，知，f在修改一个μ-零测集上的函数值后$\in L^1$(因为$|f_n| \leq g\ a.e. \Rightarrow |f| \leq g\ a.e.$，从而$f$是有限的)分别考虑$f_n, f$的实部和虚部，不妨假设它们都是实值函数，有$g + f_n \geq 0\ a.e., g - f_n \geq 0\ a.e.$即$\exists E \in \mathcal{M}, \mu(E^c) = 0, (g + f_n) * \mathcal{X}_E, (g - f_n) * \mathcal{X}_E \in L^+$,由Fatou's Lemma,
$\int f + \int g = \int (f+g) * \mathcal{X}_E = \int (f * \mathcal{X}_E + g * \mathcal{X}_E) = \int \liminf (f_n * \mathcal{X}_E + g * \mathcal{X}_E)$

$\leq \liminf \int (f_n * \mathcal{X} + g * \mathcal{X}_E) = \int g * \mathcal{X}_E + \liminf \int f_n * \mathcal{X}_E$
$= \int g + \liminf \int f_n$
$\int g - \int f = \int (g - f) = \int \liminf (g - f_n) * \mathcal{X}_E \leq \liminf \int (g * \mathcal{X}_E - f_n * \mathcal{X}_E)$
$= \int g - \limsup \int f_n$
综上，$\limsup \int f_n \leq \int f \leq \liminf \int f_n$，即$\lim \int f_n = \int f$ □

定理 0.0.8. 设$\{f_j\} \subset L^1$满足$\sum_1^\infty \int |f_j| < +\infty$，那么$\sum_1^\infty f_j$几乎处处收敛于$L^1$中的一个函数，且$\int \sum_1^\infty f_j = \sum_1^\infty \int f_j$

证明. 首先$\int \sum_1^\infty |f_j| = \sum_1^\infty \int |f_j| < +\infty, g = \sum_1^\infty |f_j| \in L^1$，且$g$是几乎处处有限的，从而$\sum_1^\infty f_j$几乎处处收敛，又$|\sum_1^\infty f_j| \leq g$，由控制收敛定理$\int \sum_1^\infty f_j = \sum_1^\infty \int f_j$ □

定理 0.0.9. 若$f \in L^1(\mu), \epsilon > 0$,那么∃可积简单函数$\phi = \sum a_j \mathcal{X}_{E_j}$使得$\int |f - \phi| \, d\mu < \epsilon$，若$\mu$是$\mathbb{R}$上的*Lebesgue-Stieltjes*测度，E_j可以是有限个开区间的并，还有一有界闭集外为*0*的连续函数$g : \int |f - g| \, d\mu < \epsilon$

证明. 由定理3.1.15.存在简单函数列ϕ_n逐点收敛于f，即$\lim |f - \phi_n| = 0, |f - \phi_n| \leq 2|f|$，由控制收敛定理，$\lim \int |f - \phi_n| = \int \lim |f - \phi_n| = 0$，于是存在充分大的$n$使得$\int |f - \phi_n| < \epsilon$，若$\mu$为$\mathbb{R}$上的Lebesgue-Stieltjes测度，
$\phi_n = \sum_1^N a_j \mathcal{X}_{E_j}, \mu(E_j) = a_j^{-1} \int_{E_j} \phi_n \leq a_j^{-1} \int |f| < +\infty$
由命题2.4.6.存在有限个1开区间的并A_j，使得$\mu(E_j \triangle A_j) < \epsilon$
$\mu(E \triangle F) = \mu(E \cup F) - \mu(F \cap E) = \int \max(\mathcal{X}_E, \mathcal{X}_F) - \int \min(\mathcal{X}_E, \mathcal{X}_F) = \int |\mathcal{X}_E - \mathcal{X}_F|$
令$\psi_n = \sum_1^N a_j \mathcal{X}_{A_j}, \int |f - \psi_n| \leq \int |f - \phi_n| + \int |\phi_n - \psi_n| < \epsilon + \sum_1^N |a_j| |\mathcal{X}_{E_j} - \mathcal{X}_{A_j}| < \epsilon + \sum_1^N |a_j| \mu(A_j \triangle E_j) < \epsilon (1 + \sum_1^N |a_j|)$

对于开区间(a,b)，定义连续函数$g^{\epsilon}_{(a,b)} = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [-\infty, a] \\ \epsilon^{-1}(x-a) & \text{if } x \in (a, a+\epsilon) \\ 1 & \text{if } x \in [a+\epsilon, b-\epsilon] \\ -\epsilon^{-1}(x-b) & \text{if } x \in (b-\epsilon, b) \\ 0 & \text{if } x \in [b, +\infty] \end{cases}$

$\int |g^{\epsilon}_{(a,b)} - \mathcal{X}_{(a,b)}| < \int \mathcal{X}_{[a,a+\epsilon]} + \mathcal{X}_{[b-\epsilon,b]} = 2\epsilon$

已知存在简单函数$\phi = \sum a_j \mathcal{X}_{I_j}, \int |f-\phi| < \epsilon$，其中$I_j$为开区间，取$g = \sum a_j g^{\epsilon}_{I_j}$为连续函数，$\int |f-g| \le \int |f-\phi| + \int |\phi - g| < \epsilon + \sum |a_j| \int |\mathcal{X}_{I_j} - g^{\epsilon}_{I_j}| < \epsilon(1+2\sum |a_j|)$ □

定理 0.0.10. 设$f : X \times [a,b] \to \mathbb{C}(a<b)$，且$\forall t \in [a,b], f(.,t) : X \to \mathbb{C}$可积

令$F(t) = \int_X f(x,t)\, d\mu(x)$，则

a. 若存在$g \in L^1(\mu) : \forall t \in [a,b], |f(x,t)| \le g(x), \forall x \in X, \lim_{t\to t_0} f(x,t) = f(x,t_0)$，那么$\lim_{t\to t_0} F(t) = F(t_0)$

b. 若$\frac{\partial f}{\partial t}$存在，$\exists g \in L^1(\mu) : |\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \le g(x), \forall x, t$，那么$F$可微，且$\frac{dF}{dt}(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) d\mu(x)$

证明. a. 由海涅定理，只需证明：$\forall \{t_n\} \subset [a,b], t_n \to t_0 : F(t_n) \to F(t_0)$

令$h_n(x) = f(x,t_n)$，于是h_n可测，逐点收敛于$f(x,t_0)$，且$|h_n| \le g$，由控制收敛定理，$F(t_n) = \int h_n d\mu \to \int f(x,t_0) d\mu = F(t_0)$

b. 只需证明$\forall t_0 \in [a,b], \forall \{t_n\} \subset [a,b] \setminus \{t_0\}, t_n \to t_0 : \frac{F(t_n)-F(t_0)}{t_n - t_0} \to \int_X \frac{\partial f}{\partial t} f(x,t_0) d\mu$，其中$\frac{F(t_n)-F(t_0)}{t_n-t_0} = \int_X \frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0} d\mu(x)$，令$h_n(x) = \frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}$

于是h_n可测，逐点收敛于$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$，且$|h_n(x)| = |\frac{\partial f}{\partial t}(x,\xi_n)| \le \sup_{t\in[a,b]} |\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \le g(x)$，由控制收敛定理，$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$可测，且$\frac{F(t_n)-F(t_0)}{t_n-t_0} = \int_X h_n d\mu \to \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) d\mu(x)$

□

定义 0.0.11. 令$[a,b]$为一有限闭区间，$P = \{t_j\}_0^n \subset [a,b] : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$称为$[a,b]$的分割，再设$f$为$[a,b]$上的有界实值函数，

$S_P f := \sum_1^n M_j(t_j - t_{j-1}), s_P := \sum_1^n m_j(t_j - t_{j-1})$，其中$M_j = \sup_{x\in[t_j,t_{j-1}]} f(x)$
$m_j = \inf_{x\in[t_j,t_{j-1}]} f(x)$
定义$\overline{I}_a^b(f) = \inf\limits_P S_P f, \underline{I}_a^b(f) = \sup\limits_P s_P f$
若$\overline{I}_a^b(f) = \underline{I}_a^b(f)$，则称$f$在$[a,b]$上黎曼可积，$\int_a^b f(x)dx := \overline{I}_a^b(f)$

定理 0.0.12. 设f为$[a,b]$上的有界实值函数
a. 若f黎曼可积，则f勒贝格可积，且$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f dm$
b. f黎曼可积当且仅当f的不连续点集为勒贝格零测集

证明. a.设f为$[a,b]$上的黎曼可积函数，$P = \{t_j\}_0^n, G_P = \sum_1^n M_j \mathcal{X}_{(t_{j-1},t_j]} g_P = \sum_1^n m_j \mathcal{X}_{(t_{j-1},t_j]}$，取$\{P_k\}_1^\infty : |P_k| = \sup(t_j - t_{j-1}) \to 0 (k \to \infty), P_k \subset P_{k+1}$，于是$G_{P_k}, g_{P_k}$分别为单调递减和单调递增函数,$\int_a^b G_{P_k} dx = \sum_1^n M_j(t_j - t_{j-1}) = \int_{(a,b]} G_{P_k} dm = \int_{[a,b]} G_{P_k} dm, \int_a^b g_{P_k} dx = \int_{[a,b]} g_{P_k} dm$
令$G = \lim_{k\to\infty} G_{P_k}, g = \lim_{k\to\infty} g_{P_k}$，于是$G, g$可测，且由单调收敛定理知：
$\int_{[a,b]} G dm = \lim \int_{[a,b]} G_{P_k} dm = \lim \int_a^b G_{P_k}(x) dx = \int_a^b f(x)dx$
同理$\int_{[a,b]} g dm = \int_a^b f(x)dx$
$G - g \geq 0, \int_{[a,b]} (G-g) dm = 0 \Rightarrow G = g\ a.e.$从而$G = f\ a.e.$由于$m$是完备的，知$f$可测，且$\int_{[a,b]} f dm = \int_{[a,b]} G dm = \int_a^b f(x)dx < +\infty$，于是$f$勒贝格可积
b. 先证明两个引理：

引理 0.0.13. *1.* 定义$H(x) = \lim\limits_{\delta\to 0} \sup\limits_{y\in[x-\delta,x+\delta]} f(y), h(x) = \lim\limits_{\delta\to 0} \inf\limits_{y\in[x-\delta,x+\delta]} f(y)$
则$H(x) = h(x)$当且仅当f于x点连续

证明. f于x点连续当且仅当$\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$，当且仅当$f$沿$y \to x$的附着点只有$f(x)$当且仅当$\bigcap_{\delta>0} \overline{f([x-\delta, x+\delta])} = \{f(x)\}$，右边包含于左边是明显的，于是等价于证明$\bigcap_{\delta>0} \overline{f([x-\delta, x+\delta])} \subset \{f(x)\}$当且仅当$H(x) = h(x)$现在证明$H(x) = \sup \bigcap_{\delta>0} \overline{f([x-\delta, x+\delta])}$：
取定x，记$d = H(x), \forall \epsilon > 0, \exists \delta_0 > 0 : \sup\limits_{y\in[x-\delta_0,x+\delta_0]} f(y) < d + \epsilon$
$\bigcap_{\delta>0} \overline{f([x-\delta, x+\delta])} \subset \overline{f([x-\delta_0, x+\delta_0])} \Rightarrow \sup \bigcap_{\delta>0} \overline{f([x-\delta, x+\delta])} \leq$

$\sup\overline{f([x-\delta_0,x+\delta_0])}=\sup\limits_{y\in[x-\delta_0,x+\delta_0]}f(y)<d+\epsilon$

由ϵ任意性，$\sup\bigcap_{\delta>0}\overline{f([x-\delta,x+\delta])}\le d$

记$\sup\overline{f([x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}])}=y_n,\lim_{n\to\infty}y_n=d$由于$y_n\in\overline{f([x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}])}$

$\exists x_n\in[x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}],|f(x_n)-y_n|<\frac{1}{n}$，于是$\lim_{n\to\infty}x_n=x,\lim_{n\to\infty}f(x_n)=d,\forall\delta>0$,往证$d\in\overline{f([x-\delta,x+\delta])}$，即证$\forall\epsilon>0,(d-\epsilon,d+\epsilon)\cap f([x-\delta,x+\delta])\neq\varnothing$，对上述$\epsilon,\delta,\exists N:x_N\in[x-\delta,x+\delta],f(x_N)\in(x-\epsilon,x+\epsilon)$这就证明了$d\in\bigcap_{\delta>0}\overline{f([x-\delta,x+\delta])}$，从而$d\le\sup\bigcap_{\delta>0}\overline{f([x-\delta,x+\delta])}$

综上，$H(x)=\sup\bigcap_{\delta>0}\overline{f([x-\delta,x+\delta])}$，同理$h(x)=\inf\bigcap_{\delta>0}\overline{f([x-\delta,x+\delta])}$

f于x连续当且仅当$H(x)=h(x)$ □

引理 0.0.14. *2. 沿用定理3.3.12.a的记号，$H=G\ a.e.,h=g\ a.e.$因此H,G均勒贝格可测，且$\int_{[a,b]}Hdm=\overline{I}_a^b(f),\int_{[a,b]}hdm=\underline{I}_a^b(f)$*

证明. P_k的选取同定理3.3.12.a，令$N=\bigcup_1^\infty P_k$为勒贝格零测集

$\forall x\in[a,b]\setminus N,\forall k,\exists j:x\in(t_{j-1}^k,t_j^k),\exists\delta_0>0:(t_{j-1}^k,t_j^k)\supset[x-\delta_0,x+\delta_0],G_{P_k}(x)=\sup\limits_{y\in(t_{j-1}^k,t_j)}f(y)\ge\sup\limits_{y\in[x-\delta_0,x+\delta_0]}f(y)\ge\inf\limits_{\delta>0}\sup\limits_{y\in[x-\delta,x+\delta]}f(y)=H(x)$

$k\to\infty,G(x)\ge H(x)$

$\forall x\in[a,b]\setminus N$

$\forall\epsilon>0,\exists\delta_0>0:\sup\limits_{y\in[x-\delta_0,x+\delta_0]}f(y)<H(x)+\epsilon$

对上述x,δ_0，又存在$k,j:(t_{j-1}^k,t_j^k)\subset[x-\delta_0,x+\delta_0]$

$G(x)\le G_{P_k}(x)=\sup\limits_{y\in(t_{j-1}^k,t_j^k)}f(y)\le\sup\limits_{y\in[x-\delta_0,x+\delta_0]}f(y)<H(x)+\epsilon$

由ϵ任意性，$G(x)\le H(x)$

即$\forall x\in[a,b]\setminus N,G(x)=H(x)$

同理可得$g(x)=h(x)\ a.e.$

$\int_{[a,b]}Hdm=\int_{[a,b]}Gdm=\lim\int_{[a,b]}G_{P_k}dm=\lim S_{P_k}(f)=\overline{I}_a^b(f)$

$\int_{[a,b]}hdm=\int_{[a,b]}gdm=\lim\int_{[a,b]}g_{P_k}dm=\lim s_{P_k}(f)=\underline{I}_a^b(f)$ □

现在可以完成b.的证明:

f黎曼可积当且仅当$\overline{I}_a^b(f) = \underline{I}_a^b(f)$当且仅当$\int_{[a,b]} Hdm = \int_{[a,b]} hdm$当且仅当$H = h$ $a.e.$当且仅当f连续 a.e. $\square$