定义 0.0.1. 设X为一个配备σ-代数$\mathcal{M}$的集合，$\mathcal{M}$上的测度是$\mathcal{M}\to[0,+\infty]$的满足以下性质的函数：

1. $\mu(\phi)=0$;

2. 若$\{E_j\}_1^\infty\subset\mathcal{M}$为不交的集和，那么$\mu(\bigcup_1^\infty E_j)=\sum_1^\infty\mu(E_j)$

$(X,\mathcal{M})$称为可测空间，$\mathcal{M}$中的集合称为可测集

若μ是$(X,\mathcal{M})$上的测度，$(X,\mathcal{M},\mu)$称为测度空间

设$(X,\mathcal{M},\mu)$为测度空间，

若$\mu(X)<+\infty(\Leftrightarrow\mu(E)<+\infty,\forall E\in\mathcal{M})$则称$\mu$为有限的，

若$X=\bigcup_1^\infty E_j$其中$E_j\in\mathcal{M}$且$\mu(E_j)<+\infty$则称μ是σ-有限的，

若$E=\bigcup_1^\infty E_j$其中$E_j\in\mathcal{M}$且$\mu(E_j)<+\infty$则称E是关于μ σ-有限的

若对于每个E，$\mu(E)=+\infty\Rightarrow\exists F\in\mathcal{M},F\subset E$，且$0<\mu(F)<+\infty$

则称μ是semifinite

例 0.0.2. 设X为一非空集合，$\mathcal{M}=\mathcal{P}(X)$，$f$为任意$X\to[0,+\infty]$的函数，则$f$可以诱导一个测度：$\mu(E)=\sum_{x\in E}f(x)$

其中$\sum_{x\in E}f(x):=\sup\left\{\sum_{x\in F}f(x):F\subset E,F\text{为有限集}\right\}$

μ为*semifinite*的当且仅当$f(x)<+\infty,\forall x\in X$

μ为σ-有限的当且仅当μ为*semifinite*并且$\{x:f(x)>0\}$是可数集

若$f(x)\equiv1$，μ称为计数测度

对某个$x_0\in X$，$f(x_0)=1,\forall x\neq x_0,f(x)=0$则$\mu$称为*point mass*或*Dirac measure at* x_0

例 0.0.3. 设X为一不可数集，$\mathcal{M}$为其可数或补集可数的子集构成的σ-代数，则μ定义为：$\mu(E)=\begin{cases}0 & if\ E\text{为可数集}\\ 1 & if\ E^c\text{为可数集}\end{cases}$是$(X,\mathcal{M})$上的测度

例 0.0.4. 令X为一无穷集，$\mathcal{M}=\mathcal{P}(X)$定义$\mu(E)=\begin{cases}0 & if\ E\text{为有限集}\\ +\infty & if\ E\text{为无穷集}\end{cases}$

则μ为有限可加的，但不是测度

定理 0.0.5. 令$(X,\mathcal{M},\mu)$为一测度空间

a.(Monotonicity) $E,F\in\mathcal{M},E\subset F\Rightarrow\mu(E)\leq\mu(F)$

b.(Subadditivity) $\{E_j\}_1^\infty\subset\mathcal{M}\Rightarrow\mu(\bigcup_1^\infty E_j)\leq\sum_1^\infty\mu(E_j)$

c.(Continuity from below) $\{E_j\}_1^\infty\subset\mathcal{M},E_1\subset E_2\subset\dots$

$\Rightarrow\mu(\bigcup_1^\infty E_j)=\lim_{j\to\infty}\mu(E_j)$

d.(Continuity from above) $\{E_j\}_1^\infty\subset\mathcal{M},E_1\supset E_2\supset\dots$且$\mu(E_1)<\infty$

则$\mu(\bigcap_1^\infty E_j)=\lim_{j\to\infty}\mu(E_j)$

证明. a. $\mu(F)=\mu(E)+\mu(F\setminus E)\geq\mu(E)$

b. 令$F_1=E_1,k>1,F_k=E_k\setminus(\bigcup_1^{k-1}E_j)$,

$\bigcup_1^\infty F_k=\bigcup_1^\infty E_k$且$F_k\in\mathcal{M}$是不交的

$F_k\subset E_k$，由a.知$\mu(F_k)\leq\mu(E_k)$

$\mu(\bigcup_1^\infty E_k)=\mu(\bigcup_1^\infty F_k)=\sum_1^\infty\mu(F_k)\leq\sum_1^\infty\mu(E_k)$

c. $\mu(\bigcup_1^\infty E_k)=\mu(\bigcup_1^\infty(E_k\setminus E_{k-1}))$其中$E_0=\phi$

$=\sum_1^\infty\mu(E_k\setminus E_{k-1})=\lim_{n\to\infty}\sum_1^n\mu(E_k\setminus E_{k-1})=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$

d. 令$F_k=E_1\setminus E_k$则$F_1\subset F_2\subset\dots$,

$\bigcap_1^\infty E_k=\bigcap_1^\infty(E_1\setminus F_k)=E_1\setminus\bigcup_1^\infty F_k$

于是$\mu(E_1)=\mu(\bigcup_1^\infty F_k)+\mu(\bigcap_1^\infty E_k)$

$=\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)+\mu(\bigcap_1^\infty E_k)$

$=\mu(E_1)-\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)+\mu(\bigcap_1^\infty E_k)$

其中$\mu(E_1)<+\infty$，故$\mu(\bigcap_1^\infty E_k)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$ □

注意$d.$中$\mu(E_1)<+\infty$可以改为对某个j成立$\mu(E_j)<+\infty$

设$(X,\mathcal{M},\mu)$为一测度空间，$E\in\mathcal{M}$满足$\mu(E)=0$，则称E为零测集，由 subadditivity，零测集的任意可数并为零测集，若一个关于x的命题在一个零测集外成立，则称其几乎处处成立(a.e.),更具体的，称为μ-零测集或μ-几乎处处

测度μ称为完全的，若其定义域包含所有零测集的子集

定理 0.0.6. 设$(X, \mathcal{M}, \mu)$为一测度空间，令$\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\}$，$\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{M}, F \subset N,$ 对某个$N \in \mathcal{N}\}$那么$\overline{\mathcal{M}}$是σ-代数，并且存在唯一的 $\overline{\mu}$是μ在$\overline{\mathcal{M}}$上的扩张，并且$\overline{\mu}$是完全的

证明. 首先证明$\overline{\mathcal{M}}$是σ-代数：
由于$\mathcal{M}$和$\mathcal{N}$均对可数并封闭，故$\overline{\mathcal{M}}$也对可数并封闭
对于$E \in \mathcal{M}$，$F \subset N \in \mathcal{N}$，$E \cup F \in \overline{M}$，不妨设$E \cap N = \phi$，否则可用$F \setminus E, N \setminus E$ 代替F, N，于是$(E \cup N) \cap (N^c \cup F) = (E \cap N^c) \cup (E \cap F) \cup (N \cap N^c) \cup (N \cap F) = E \cup (E \cap F) \cup \phi \cup F = E \cup F$
故$(E \cup F)^c = (E \cup N)^c \cup (N \setminus F)$其中$(E \cup F)^c \in \mathcal{M}$，$N \setminus F \subset N$
故$(E \cup F)^c \in \overline{\mathcal{M}}$，从而$\overline{\mathcal{M}}$是$\sigma$-代数
对于$E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$，定义$\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$
现在验证该定义是良定的：
$E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2 \Rightarrow E_1 \subset E_2 \cup F_2 \subset E_2 \cup N_2$
于是$\mu(E_1) \leq \mu(E_2) + \mu(N_2) = \mu(E_2)$
同理$\mu(E_2) \leq \mu(E_1)$
即$\overline{\mu}(E_1 \cup F_1) = \overline{\mu}(E_2 \cup F_2)$
现在验证$\overline{\mu}$是测度：
1. $\overline{\mu}(\phi) = \overline{\mu}(\phi \cup \phi) = \mu(\phi) = 0$
2. 设$\{E_j \cup F_j\}_1^\infty$为不交的集列，其中$E_j \in \mathcal{M}, F_j \subset N_j \in \mathcal{N}$
容易验证E_j是不交的，$\bigcup_1^\infty F_j \subset \bigcup_1^\infty N_j \in \mathcal{N}$
于是$\overline{\mu}(\bigcup_1^\infty (E_j \cup F_j)) = \overline{\mu}((\bigcup_1^\infty E_j) \bigcup (\bigcup_1^\infty F_j)) = \mu(\bigcup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \mu(E_j) = \sum_1^\infty \overline{\mu}(E_j \cup F_j)$
下面验证该测度是完全的：
设$E \in \mathcal{M}, F \subset N \in \mathcal{N}$
$\overline{\mu}(E \cup F) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{N}$ 于是$E \in \mathcal{N}, N \cup E \in \mathcal{N}$
$\forall U \subset E \cup F, U = \phi \cup U$，其中$U \subset E \cup F \subset E \cup N \in \mathcal{N}$
即$U \in \overline{\mathcal{M}}$

现在验证这样的扩张是唯一的：

设$\widetilde{\mu}$是另一个扩张，则其在$\mathcal{M}$上的限制应与μ相同

即$\forall E \in \mathcal{M}, \widetilde{\mu}(E) = \mu(E)$

于是对于$E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$，其中$E \in \mathcal{M}, F \subset N \in \mathcal{N}$

$\widetilde{\mu}(E \cup F) \leq \widetilde{\mu}(E) + \widetilde{\mu}(F) \leq \widetilde{\mu}(E) + \widetilde{\mu}(N) = \mu(E) + \mu(N) = \mu(E) = \overline{\mu}(E \cup F)$

$\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E) = \widetilde{\mu}(E) \leq \widetilde{\mu}(E \cup F)$

即$\overline{\mu} = \widetilde{\mu}$ $\square$