引理 0.0.1. 不存在满足以下条件的函数$\mu:\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$:

1. $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$为$\mathbb{R}^n$的一族不交子集，则$\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\mu(E_k)$

2. E和F在一个正交变换和平移变换下相同，则$\mu(E)=\mu(F)$

3. $\mu(Q)=1$，其中$Q=\{x\in\mathbb{R}^n:0\leq x_j<1,j=1,\ldots,n\}$

证明. 仅考虑$n=1$的情形

首先定义$[0,1)$上的的等价关系：$x\sim y$ 若 $x-y\in\mathbb{Q}$令$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$为

$[0,1)$上的等价类之集，由选择公理，$\exists\ f\in\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$，令$N=f(A)$，

于是N恰好包含每个等价类中的一个元素

令$R=\mathbb{N}\cap[0,1)$为一可数集，对每个$r\in R$，定义

$N_r=\{x+r:x\in N\cap[0,1-r)\}\cup\{x+r-1:x\in N\cap[1-r,1)\}$

于是$[0,1)=\bigcup_{r\in R}N_r$

右端包含于左端是明显的，下面证明左端包含于右端

$\forall x\in[0,1)$，令$y\in N,y\sim x$

$x\geq y$时，$x\in N_{x-y}$

$x<y$时，$x\in N_{1+x-y}$

总之，有$x\in\bigcup_{r\in R}N_r$ 即 $[0,1)\subset\bigcup_{r\in R}N_r$

现在我们证明: $r\neq s\Rightarrow N_r\cap N_s=\phi$

若$\exists x\in N_r\cap N_s$,设$y\in N,y\sim x$

则$y+r=x$，或$y+r-1=x$

同理$y+s=x$，或$y+s-1=x$

由y的唯一性知：$\begin{cases} y+r=x \\ y+s-1=x \end{cases}$ 或$\begin{cases} y+s=x \\ y+r-1=x \end{cases}$

即$1=s-r$或$1=r-s$，这又与$r,s\in N\cap[0,1)$矛盾

综上$N_r\cap N_s=\phi$

设μ为满足性质1.2.3.的一个函数，则：

$\mu(N)=\mu(N\cap[0,1-r))+\mu(N\cap[1-r,1))=\mu(N_r)$

$\mu([0,1))=\sum_{r\in R}\mu(N_r)=\sum_{r\in R}\mu(N)$

若$\mu(N)=0$，则$\mu([0,1))=0$
若$\mu(N)>0$，则$\mu([0,1))=\infty$
两者均与性质3.矛盾 $\square$

为了定义集合上的测度，并且仍然拥有良好的性质(1.2.3.)，我们只能缩小测度函数的定义域
方便起见，以下X均为一非空集合

定义 0.0.2. *称$\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$为$X$上的代数，若其满足以下性质：*
1. $\mathcal{A}\neq\phi$
2. $\forall n\in\mathbb{N},\ \{E_k\}_{k=1}^n\subset\mathcal{A}\Rightarrow\bigcup_{k=1}^n E_k\in\mathcal{A}$
3. $E\in\mathcal{A}\Rightarrow E^c\in\mathcal{A}$
称$\mathcal{A}$为σ-代数，若性质1.中的集族可以是可数无穷的

推论 0.0.3. *设$\mathcal{A}$为一个代数(σ-代数)，则$\mathcal{A}$关于有限(可数)交封闭*

证明. 注意到$\bigcap_{\alpha\in\Lambda}E_\alpha=(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}E_\alpha^c)^c$，其中$\Lambda$为有限或可数指标集 $\square$

推论 0.0.4. *设$\mathcal{A}$为X上的一个代数(σ-代数)，则$\phi,X\in\mathcal{A}$*

证明. 注意到$\phi=E\cap E^c\in\mathcal{A}$，对$E\in\mathcal{A}$成立，$X=\phi^c\in\mathcal{A}$ $\square$

推论 0.0.5. *设$\mathcal{A}$为X上的一个代数，若其对可数不交并封闭，则$\mathcal{A}$也是σ-代数*

证明. 设$\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}$，往证 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\in\mathcal{A}$
令$F_n=E_n\setminus[\bigcup_{k=1}^{n-1}E_k]=E_n\cap\bigcap_{k=1}^{n-1}E_k^c\in\mathcal{A}$
$F_i\cap F_j=\phi$
故$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n\in\mathcal{A}$ $\square$

例 0.0.6. *1.* $\{\phi,X\}$*为σ-代数*
2. $\mathcal{P}(X)$*为σ-代数*
3. $\{E\in\mathcal{P}(X):E$为可数集或E^c为可数集$\}$*为σ-代数*
只证明3.

证明. $\phi \in \mathcal{A}$，故$\mathcal{A} \neq \phi$

设$\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = (\bigcup_{E_i\text{可数}} E_i) \bigcup (\bigcup_{E_j\text{不可数}} E_j)$

其中$\bigcup_{E_i\text{可数}} E_i$可数，故$\in \mathcal{A}$

$\bigcup_{E_j\text{不可数}} E_j = (\bigcap_{E_j\text{不可数}} E_j^c)^c \in \mathcal{A}$

综上，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$

$E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$由$\mathcal{A}$的定义是明显的 □

推论 0.0.7. $\{\mathcal{A}_A\}_{\alpha\in\Lambda}$为$X$的任意族$\sigma$-代数，则$\bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha$也是$X$上的$\sigma$-代数

证明. 1. $\phi \in \mathcal{A}_\alpha \Rightarrow \phi \in \bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha$，故$\bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha \neq \phi$

2. 设$\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha$，则$\forall \alpha \in A$, $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_\alpha$

于是$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}_\alpha, \forall \alpha \in A$，从而$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha$

3. $E \in \bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha \Rightarrow \forall \alpha \in A,\ E \in \mathcal{A}_\alpha \Rightarrow \forall \alpha \in A, E^c \in \mathcal{A}_\alpha$

$\Rightarrow E^c \in \bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{A}_\alpha$ □

定义 0.0.8. 设$\varepsilon \subset \mathcal{P}(X)$我们定义$\varepsilon$生成的$\sigma$-代数$\mathcal{M}(\varepsilon)$:

$\mathcal{M}(\varepsilon) = \bigcap_{\mathcal{A}\supset\varepsilon\text{为}\sigma\text{-代数}} \mathcal{A}$

由于这样的σ-代数至少有一个$\mathcal{P}(X)$，故该定义是良定义的

引理 0.0.9. $\varepsilon \subset \mathcal{M}(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{M}(\varepsilon) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$

证明. $\mathcal{M}(\varepsilon) = \bigcap_{\mathcal{A}\supset\varepsilon\text{为}\sigma\text{-代数}} \mathcal{A}$，而$\mathcal{M}(\mathcal{F})$为包含$\varepsilon$的$\sigma$-代数，由定义，

$\mathcal{M}(\varepsilon) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$ □

定义 0.0.10. 设X为一拓扑空间，ε为其开集族，则$\mathcal{M}(\varepsilon)$称为X上的$Borel$ σ-代数，记作$\mathcal{B}_X$，其中的元素也称为$Borel$集

$Borel$集中因此包含：所有开集，所有闭集，开集的可数交，闭集的可数并

其中开集的可数交称为G_δ集

闭集的可数并称为F_σ集

G_δ集的可数并称为$G_{\delta\sigma}$集

F_σ集的可数交称为$F_{\sigma\delta}$集

引理 0.0.11. $\mathbb{R}$上的非空开集可以写成可数个开区间的不交并

证明. 设U为$\mathbb{R}$上的非空开集，

$x \in U$, $\mathcal{J}_x := \{I \subset U : 为包含x的开区间\}$, $J_x := \bigcup_{I \in \mathcal{J}_x} I$

容易验证J_x为包含x的最大的开区间，于是$x \neq y \Rightarrow J_x \cap J_y = \phi$或$J_x = J_y$

$\mathcal{J} := \{J_x : x \in U\}$对每个$J \in \mathcal{J}$，选取$f(J) \in \mathbb{Q}$

于是$f : \mathcal{J} \to \mathbb{Q}$为单射 ($\mathcal{J}$中的开区间是不交的)

从而$U = \bigcup_{x \in U} J_x = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J$为可数个开区间的不交并 □

命题 0.0.12. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$可由以下集族生成:

*a.*所有开区间$\varepsilon_1 = \{(a, b) : a < b\}$

*b.*所有闭区间$\varepsilon_2 = \{[a, b] : a < b\}$

*c.*所有半开半闭区间$\varepsilon_3 = \{(a, b] : a < b\}$或$\varepsilon_4 = \{[a, b) : a < b\}$

d.$\varepsilon_5 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$, $\varepsilon_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$

e.$\varepsilon_7 = \{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$, $\varepsilon_8 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$

证明. 除$j = 3, 4$外，ε_j均为$\mathbb{R}$中的开(闭)区间，而$(a, b] = \bigcap_1^\infty (a, b + \frac{1}{n})$为$G_\delta$集，同理$(a, b]$，由Lemma 2.1.9，$\mathcal{M}(\varepsilon_j) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

另一方面，由Lemma 2.1.11，所有开集均能写成开区间的可数并，故$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}(\varepsilon_1)$

于是$\mathcal{M}(\varepsilon_1) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

接下来证明$\mathcal{M}(\varepsilon_1) \subset \mathcal{M}(\varepsilon_j), j > 1$

$(a, b) = \bigcup_1^\infty [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$

$= \bigcup_1^\infty (a, b - \frac{1}{n}]$

$= \bigcup_1^\infty [a + \frac{1}{n}, b)$

$= (a, +\infty) \cap (\bigcup_1^\infty (b - \frac{1}{n}, +\infty)^c)$

$= (-\infty, b) \cap (\bigcup_1^\infty (-\infty, a - \frac{1}{n})^c)$

$= [b, +\infty)^c \cap (\bigcup_1^\infty [a + \frac{1}{n}, +\infty))$

$= (-\infty, a]^c \cap (\bigcup_1^\infty (-\infty, b - \frac{1}{n}])$

故$\varepsilon_1 \subset \mathcal{M}(\varepsilon_j), j > 1$

由Lemma 2.1.9，$\mathcal{M}(\varepsilon_1) \subset \mathcal{M}(\varepsilon_j), j > 1$ $\square$

定义 0.0.13. 设$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$为一族非空集，由选择公理知$X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$非空

设$\pi_\alpha : X \to X_\alpha$为投影映射，即$\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$

设$\mathcal{M}_\alpha$为X_α上的σ-代数，我们定义X上的乘积σ-代数为：

$\mathcal{M}(\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha, \alpha \in A\})$

记作$\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$，若$A = \{1, 2, \ldots, n\}$，也记作$\otimes_1^n\mathcal{M}_j$或$\mathcal{M}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_n$

命题 0.0.14. 若A可数，则$\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$可由$\left\{\prod_{\alpha\in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\right\}$生成

证明. 记$\varepsilon = \left\{\prod_{\alpha\in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\right\}$

首先$f \in \prod_{\alpha\in A} E_\alpha \Leftrightarrow \forall\alpha \in A, f(\alpha) \in E_\alpha$

$\Leftrightarrow \forall\alpha \in A, \pi_\alpha(f) = f(\alpha) \in E_\alpha$

$\Leftrightarrow \forall\alpha \in A, f \in \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$

$\Leftrightarrow f \in \bigcap_{\alpha\in A} \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$

即$\prod_{\alpha\in A} E_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$

由A为可数集，知$\prod_{\alpha\in A} E_\alpha \in \otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$

由Lemma 2.1.9 $\mathcal{M}(\varepsilon) \subset \otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$

另一方面$f \in \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) = \pi_\alpha(f) \in E_\alpha$

$\Leftrightarrow f \in \prod_{\beta\in A} F_\beta$，其中$F_\alpha = E_\alpha, \beta \neq$时$, F_\beta = X_\beta \in \mathcal{M}_\beta$

即$\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) \in \varepsilon$

$\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{M}(\varepsilon)$

综上，$\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}(\varepsilon)$ $\square$

命题 0.0.15. 设$\mathcal{M}_\alpha$由ε_α生成，则$\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$可由$\mathcal{F}$生成，其中

$\mathcal{F} = \{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \varepsilon_\alpha, \alpha \in A\}$

证明. 由命题 2.1.14. $\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) = \prod_{\beta\in A} F_\beta$，其中$\beta = \alpha$时$F_\beta = E_\alpha$

$\beta \neq \alpha$时，$F_\beta = X_\beta$，于是$\mathcal{M}(\mathcal{F}) \subset \otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$

对每个$\alpha \in A$, $\{E \subset X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F})\}$是包含$\varepsilon_\alpha$的$\sigma$-代数，从而也包含$\mathcal{M}_\alpha$ 于是$E \subset \mathcal{M}_\alpha \subset \{E \subset X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F})\} \Rightarrow \pi_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$

即$\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha, \alpha \in A\} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F})$

$\otimes_{\alpha \in A}\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}(\mathcal{F})$ □

命题 0.0.16. 令$X_1, X_2, \ldots X_n$为度量空间，$X = \prod_1^n X_j$

那么$\otimes_1^n \mathcal{B}_{X_j} \subset \mathcal{B}_X$

若X_j还是可分的(有一个可数的稠密子集)，则$\otimes_1^n \mathcal{B}_{X_j} = \mathcal{B}_X$

证明. 首先由命题 2.1.15 知$\otimes_1^n \mathcal{B}_{X_j}$可由$\pi_j^{-1}(U_j)$生成，其中$U_j$为$\mathcal{B}_j$中的开集而$\pi_j^{-1}(U_j)$也是$X$中的开集，故$\otimes_1^n \mathcal{B}_{X_j} \subset \mathcal{B}_X$

设C_j为X_j的一个可数稠密子集，即$\overline{C_j} = X_j$

令ε_j为所有以C_j中点为球心，正有理数为半径的开球的集合，ε_j仍为可数集

设U_j为X_j上的开集，

$\forall x \in U_j,\ x \in \overline{C_j}, \exists y \in C, \varepsilon_j \ni E_x = B(y, r_x) \ni x, E_x \subset U_j$

于是$U_j = \bigcup_{x \in U_j, E_x \in \varepsilon_j} E_x$为可数并，于是$\mathcal{B}_{X_j}$可由$\varepsilon_j$生成

设U为X中的开集，同上讨论，U可以表示为可数个$\prod_1^n E_j$的并，

其中$E_j \in \varepsilon_j$

$\prod_1^n E_j = \bigcap_1^n \pi_j^{-1}(E_j) \in \mathcal{M}(\{\pi_j^{-1}(E_j) : E_j \in \varepsilon_j, j = 1, \ldots, n\})$

由命题 2.1.15知$U \in \otimes_1^n \mathcal{B}_{X_j}$从而$\mathcal{B}_X = \otimes_1^n \mathcal{B}_{X_j}$ □

推论 0.0.17. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \otimes_1^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

定义 0.0.18. $\varepsilon \subset \mathcal{P}(X)$称为 *elementary family*，若:

1. $\phi \in \varepsilon$

2. $E, F \in \varepsilon \Rightarrow E \cap F \in \varepsilon$

3. $E \in \varepsilon \Rightarrow E^c$可以表示成$\varepsilon$中有限个元素的不交并

命题 0.0.19. 设ε是 *elementary family*,其中有限元素的不交并之集构成代数

证明. ? □