定义 0.0.1. 对于非空集X, Y

若存在单射$f : X \to Y$，则称$card(X) \leq card(Y)$

若存在满射$f : X \to Y$，则称$card(X) \geq card(Y)$

若存在双射$f : X \to Y$，则称$card(X) = card(Y)$

若$card(X) \leq card(Y)$但$card(X) = card(Y)$不成立，则记作$card(X) < card(Y)$

若$card(X) \geq card(Y)$但$card(X) = card(Y)$不成立，则记作$card(X) > card(Y)$

对所有$X \neq \phi$，约定$card(X) > card(\phi)$，$card(\phi) < card(X)$

推论 0.0.2. $card(X) \leq card(Y),\ card(Y) \leq card(Z) \Rightarrow card(X) \leq card(Z)$

证明. $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$为单射，则

$g \circ f : X \to Z$也是单射，故

$card(X) \leq card(Z)$ □

命题 0.0.3. $card(X) \leq card(Y) \Leftrightarrow card(Y) \geq card(X)$

证明. 设$f : X \to Y$为单射。取定$x_0 \in X$，由于f为单射，$\forall y \in f(X)$，

$\exists! x \in X, f(x) = y$，于是可定义$g : Y \to X$：

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{if } y \in f(X) \\ x_0 & \text{if } y \notin f(X) \end{cases}$$

从而$g : Y \to X$为满射

设$g : Y \to X$为满射，则$\forall x \in X, g^{-1}(\{x\}) \neq \phi$

且$x_1 \neq x_2 \Rightarrow g^{-1}(\{x_1\}) \cap g^{-1}(\{x_2\}) = \phi$

由选择公理，$f \in \prod_{x \in X} g^{-1}(\{x\})$即为$X \to Y$的单射 □

命题 0.0.4. 对任意集合X, Y，$card(X) \leq card(Y)$或$card(Y) \leq card(X)$成立

证明. 设$\mathcal{J}$为X的子集到Y的单射之集，即

$\mathcal{J} = \{f : X \supset E \to Y 为单射\}$

$\forall f\in\mathcal{J},f\subset X\times Y$，于是$(\mathcal{J},\subset)$为一偏序集

现在验证该偏序集适合Zorn's Lemma的条件

$\forall f\in\mathcal{J},f:X\supset D_f\to Y$为单射

设$\mathcal{I}$为$\mathcal{J}$的一个全序子集，$f_{\mathcal{I}}:=\bigcup_{f\in\mathcal{I}}f$

由于$\mathcal{I}$为全序集，$\{D_f:f\in\mathcal{I}\}$在包含关系下也为全序集

1.验证$f_{\mathcal{I}}\in\mathcal{J}$

$D_{\mathcal{I}}:=\bigcup_{f\in\mathcal{I}}D_f$，$\forall x\in D_{\mathcal{I}}$，$\exists f\in\mathcal{I},x\in D_f$

$\exists y\in Y,(x,y)\in f\subset f_{\mathcal{I}}$

若存在$x_1\neq x_2$，$f_{\mathcal{I}}(x_1)=f_{\mathcal{I}}(x_2)=y$

则$(x_1,y)\in f_1,(x_2,y)\in f_2$，不妨设$f_1\subset f_2$

于是有$x_1\neq x_2\to f_2(x_1)=f_2(x_2)$，这与$f_2\in\mathcal{J}$矛盾

综上，$f_{\mathcal{I}}\in\mathcal{J}$

2.验证$f_{\mathcal{I}}$为$\mathcal{I}$的上界，这由$f_{\mathcal{I}}$的定义是明显的

综上，$\mathcal{J}$适合Zorn'Lemma的条件，从而有极大元$f_{\mathcal{J}}$

设$f_{\mathcal{J}}:X\supset D_{\mathcal{J}}\to Y$，我们断言，$D_{\mathcal{J}}=X$或$f(D_{\mathcal{J}})=Y$成立

否则，存在$x_0\in X\setminus D_{\mathcal{J}},y_0\in Y\setminus f(D_{\mathcal{J}})$

$\tilde{f}_{\mathcal{J}}:=f_{\mathcal{J}}\cup\{(x_0,y_0)\}$

容易验证$\tilde{f}_{\mathcal{J}}\in\mathcal{J}$且$f_{\mathcal{J}}\subsetneq\tilde{f}_{\mathcal{J}}$，这与$f_{\mathcal{J}}$是极大元矛盾

若$D_{\mathcal{J}}=X$则$f_{\mathcal{J}}:X\to Y$为单射，$card(X)\leq card(Y)$

若$f(D_{\mathcal{J}})=Y$，则$f_{\mathcal{J}}^{-1}:Y\to D_{\mathcal{J}}\subset X$为单射，$card(Y)\leq card(X)$ □

定理 0.0.5. *The Schöder − Bernstein Theorem*

$card(X)\leq card(Y),card(Y)\leq card(X)\Rightarrow card(X)=card(Y)$

证明. 设$f:X\to Y$, $g:Y\to X$均为单射

我们按照以下法则将X中的元素分为3类,

1.对$\forall n\geq 0$, $g^{-1}\circ(f^{-1}\circ g^{-1})^n(x)\in Y,(f^{-1}\circ g^{-1})^{n+1}(x)\in X$

则称$x\in X_\infty$

2.$\exists n\geq 0$, $g^{-1}\circ(f^{-1}\circ g^{-1})^n(x)\notin Y$即$(f^{-1}\circ g^{-1})^n(x)\in X\setminus g(Y)$

则称$x \in X_X$

3.$\exists n \geq 0,\ (f^{-1} \circ g^{-1})^{n+1}(x) \notin X$即$g^{-1} \circ (f^{-1} \circ g^{-1})^n(x) \in Y \setminus f(X)$

则称$x \in X_Y$

容易验证，X_∞, X_X, X_Y是不交的，类似的有Y_∞, Y_X, Y_Y：

1.对$\forall n \geq 0,\ f^{-1} \circ (g^{-1} \circ f^{-1})^n(y) \in X, (g^{-1} \circ f^{-1})^{n+1}(y) \in Y$

则称$y \in Y_\infty$

2.$\exists n \geq 0,\ f^{-1} \circ (g^{-1} \circ f^{-1})^n(y) \notin X$即$(g^{-1} \circ f^{-1})^n(y) \in Y \setminus f(X)$

则称$y \in Y_Y$

3.$\exists n \geq 0,\ (g^{-1} \circ f^{-1})^{n+1}(y) \notin Y$即$f^{-1} \circ (g^{-1} \circ f^{-1})^n(y) \in X \setminus g(Y)$

则称$y \in Y_X$

现在验证:$f(X_\infty) = Y_\infty,\ f(X_X) = Y_X,\ g(Y_Y) = X_Y$

$x \in X_\infty \Rightarrow \forall n \geq 0,\ g^{-1} \circ (f^{-1} \circ g^{-1})^n(x) \in Y, (f^{-1} \circ g^{-1})^{n+1}(x) \in X$

$\Rightarrow \forall n \geq 0,\ (g^{-1} \circ f^{-1})^{n+1}(f(x)) \in X, f^{-1} \circ (g^{-1} \circ f^{-1})^n(y) \in Y$

$\Rightarrow f(X) \subset Y_\infty$

$y \in Y_\infty \Rightarrow x = f^{-1}(y) \in X$

$\Rightarrow \forall n \geq 0,\ g^{-1} \circ (f^{-1} \circ g^{-1})^n(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})^{n+1}(y) \in Y,$

$(f^{-1} \circ g^{-1})^{n+1}(x) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ f^{-1})^{n+1}(x) \in X$

$\Rightarrow \exists x \in X_\infty, f(x) = y$

$\Rightarrow f(X_\infty) \subset Y_\infty$

即$f(X_\infty) = Y_\infty$，

$x \in X_X \Rightarrow \exists n \geq 0,\ g^{-1} \circ (f^{-1} \circ g^{-1})^n(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})^{n+1}(f(x)) \notin Y$

$\Rightarrow f(x) \in Y_X$

$\Rightarrow f(X_X) \subset Y_X$

$y \in Y_X \Rightarrow \exists n \geq 0,\ (g^{-1} \circ f^{-1})^{n+1}(y) \notin Y, f^{-1}(y) = x \in X$

$\Rightarrow \exists n \geq 0,\ g^{-1} \circ (f^{-1} \circ g^{-1})^n(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})^{n+1}(y) \notin Y$

$\Rightarrow x = f^{-1}(y) \in X_X$

$\Rightarrow Y_X \subset f(X_X)$

即$f(X_X)=Y_X$

同理，有$g(Y_Y)=X_Y$

由于f,g均为单射,$f_{|X_\infty},f_{|X_X},g_{|Y_Y}$也是单射，从上面的讨论知，他们也是满射，从而为双射

定义$h:X\to Y:$

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{if } x\in X_\infty\cup X_X \\ g^{-1}(x) & \text{if } x\in X_Y \end{cases}$$

于是h为X到Y的双射，即$card(X)=card(Y)$ □

推论 0.0.6. $card(X)=card(Y),card(Y)=card(Z)\Rightarrow card(X)=card(Z)$

证明. $card(X)\le card(Y),card(Y)\le card(Z)\Rightarrow card(X)\le card(Z)$

同理$card(Z)\le card(X)$

于是$card(X)=card(Z)$ □

命题 0.0.7. 对任意集合$X,card(X)<card(\mathcal{P}(X))$

证明. 首先，$f:x\mapsto\{x\}$是X到$\mathcal{P}(X)$的单射，故$card(X)\le card(\mathcal{P}(X))$

设$g:X\to\mathcal{P}(X)$，我们来证明g不可能是满射,

令$Y=\{x\in X:x\notin g(x)\}$

若$Y\in g(X)$，即$\exists x_0\in X,g(x_0)=Y$

那么$x_0\in Y\Rightarrow x_0\notin g(x_0)\Rightarrow x_0\notin Y$，矛盾

$x_0\notin Y\Rightarrow x_0\in g(x_0)\Rightarrow x_0\in Y$，矛盾

故不存在$x_0\in X,g(x_0)=Y$

综上，$card(X)<card(\mathcal{P}(X))$ □

定义 0.0.8. 若$card(X)\le card(\mathbb{N})$，则称$X$是可数的

命题 0.0.9. $a.$可数集合的有限笛卡尔积可数

$b.$可数集合的可数并可数

$c.$可数无穷集与自然数集等势

证明. a.设X, Y为可数集,$f : X \to \mathbb{N},\ g : Y \to \mathbb{N}$为单射

则$f \times g : (x, y) \mapsto (f(x), g(y))$为单射,从而$card(X \times Y) \le card(\mathbb{N}^2)$

现在证明: $card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{N}^{\not=})$

构造$\mathbb{N}^2$到$\mathbb{N}$的双射：$f : (i, j) \mapsto i + \sum_{n=1}^{i+j-2} n$

b.设$A, X_\alpha(\alpha \in A)$均为可数集，$\forall \alpha \in A$，存在 $f_\alpha : \mathbb{N} \to X_\alpha$为满射

于是$f : \mathbb{N} \times A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha,\ f(n, \alpha) = f_\alpha(n)$为满射

从而$card(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha) \le card(A \times \mathbb{N}) \le card(\mathbb{N})$

c.设X为无穷集合，且$card(X) \le card(\mathbb{N})$

$f : X \to \mathbb{N}$为单射，则$f : X \to f(X) \subset \mathbb{N}$为双射

$card(X) = card(f(X)) \le card(\mathbb{N})$

现在记$Y = f(X)$为$\mathbb{N}$的无穷子集

定义$g(1) = min\ Y$

递归定义$g(n) = min\ Y \setminus \{g(1), g(2), \dots g(n-1)\}$

于是$g : N \to Y$为双射

$card(Y) = card(\mathbb{N})$

从而$card(X) = card(\mathbb{N})$ □

推论 0.0.10. $card(\mathbb{Z}) = card(\mathbb{Q}) = card(\mathbb{N})$

定义 0.0.11. 若$card(X) = card(\mathbb{R})$，则记作$card(X) = \mathcal{C}$

命题 0.0.12. $card(X) = card(Y) \Rightarrow card(\mathcal{P}(X)) = card(\mathcal{P}(Y))$

证明. 设$f : X \to Y$为双射

$\tilde{f} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y),\ \tilde{f}(A) = f(A)$给出$\mathcal{P}(X)$到$\mathcal{P}(Y)$的双射 □

命题 0.0.13. $card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathcal{C}$

证明. 对于$A \in \mathcal{P}(N)$，定义$f(A) = \begin{cases} \sum_{n \in A} 2^{-n} & \text{if } \mathbb{N} \setminus A\text{是无穷集} \\ 1 + \sum_{n \in A} 2^{-n} & \text{if } \mathbb{N} \setminus A\text{是有限集} \end{cases}$

$f:\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathbb{R}$是单射(?)，故$card(\mathcal{P}(\mathbb{N}))\le card(\mathbb{R})$

定义$g:\mathcal{P}(\mathbb{Z})\to\mathbb{R},\ g(A)=\begin{cases} log(\sum_{n\in A}2^{-n}) & \text{if } A\text{有下界} \\ 0 & \text{if } A\text{无下界}\end{cases}$

$card(\mathcal{P}(\mathbb{N}))=card(\mathcal{P}(\mathbb{Z}))\ge card(\mathbb{R})$

综上，$card(\mathcal{P}(\mathbb{N}))=\mathcal{C}$ □

推论 0.0.14. 若$card(X)\ge\mathcal{C}$，则X是不可数的

证明. 若X可数，$\mathcal{C}=card(\mathcal{P}(\mathbb{N}))>card(\mathbb{N})\ge card(X)\ge\mathcal{C}$，矛盾 □

例 0.0.15. 连续统假设：$card(X)<\mathcal{C}$则X是可数的

命题 0.0.16. $a.card(X)\le\mathcal{C},\ card(Y)\le\mathcal{C}$，则$card(X\times Y)\le\mathcal{C}$

$b.card(A)\le\mathcal{C},card(X_\alpha)\le\mathcal{C}\Rightarrow card(\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha)\le\mathcal{C}$

证明. a.$\exists f:X\to\mathcal{P}(\mathbb{N}),\ g:Y\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$为单射

$f\times g:X\times Y\to(\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2,\ (f\times g)(x,y)=(f(x),g(y))$为单射

于是$card(X\times Y)\le card((\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2)$

现在证明$card((\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2)=card(\mathcal{P}(\mathbb{N})):$

定义$\phi,\psi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$\phi(n)=2n,\ \psi(n)=2n-1$

定义$f:(\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2\to\mathcal{P}(\mathbb{N}),\ f(A,B)=\phi(A)\cup\psi(B)$

则f为双射

综上$card(X\times Y)\le card((\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2)=\mathcal{C}$

b.$\forall\alpha\in A,\ \exists f_\alpha:\mathcal{P}(\mathbb{N})\to X_\alpha$为满射

定义$f:A\times\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha,\ f(\alpha,E)=f_\alpha(E)$为满射

故$card(\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha)\le card(A\times\mathcal{P}(N))\le\mathcal{C}$ □