尸变函数抄书笔记

——————主要参考Folland

Joker

2025 年 2 月 6 日

前言

这是笔记的前言部分.

Joker

2025 年 2 月 6 日

目录

第一章　前置知识

1.1　集合论

定义 1.1.1. 集合X的幂集$\mathcal{P}(X)$定义为X的所有子集的集合，即
$\mathcal{P}(X) := \{E : E \subset X\}$

若ε是一族集合：$\varepsilon = \{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$其中A是一指标集我们定义这族集合的交，并：

定义 1.1.2. $\bigcap_{E \subset \varepsilon} E = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha := \{x : x \in E_\alpha, \forall \alpha \in A\}$,
$\bigcup_{E \subset \varepsilon} E = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha := \{x : x \in E_\alpha, \exists \alpha \in A\}$
若$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow E_{\alpha_1} \cap E_{\alpha_2} = \phi$这族集合的并称为不交的

定义 1.1.3. 集合的差，对称差：
$E \setminus F := \{x : x \in E, x \notin F\}$，$E \triangle F := (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$

若所讨论的集合均为X的子集，我们定义集合E的补集：

定义 1.1.4. $E^c := X \setminus E$

当指标集为$\mathbb{N}$时，这族集合经常记作$\{E_n\}_{n=1}^\infty$或$\{E_n\}_1^\infty$，在这个约定下，我们定义集列$\{E_n\}_{n=1}^\infty$的上下极限：

定义 1.1.5. $\limsup E_n := \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=n}^\infty E_k$，$\liminf E_n := \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{k=n}^\infty E_k$

推论 1.1.6. $\limsup E_n = \{x : x \in E_n$对无穷个$n \in \mathbb{N}$成立$\}$，$\liminf E_n = \{x : x \in E_n$仅对有限个$n \in \mathbb{N}$不成立$\}$

证明. $x \in \limsup E_n$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geq n,\ x \in E_k$

$x \in \liminf E_n$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n,\ x \in E_k$ □

命题 1.1.7. *deMorgan's Laws:*

$(\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha^c,\ (\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha^c$

证明. $x \in (\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$

$\Leftrightarrow \forall \alpha \in A,\ x \notin E_\alpha$

$\Leftrightarrow \forall \alpha \in A,\ x \in E_\alpha^c$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha^c$

$x \in (\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$

$\Leftrightarrow \exists \alpha \in A,\ x \notin E_\alpha$

$\Leftrightarrow \exists \alpha \in A, x \in E_\alpha^c$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha^c$ □

定义 1.1.8. 集合X和Y的笛卡尔积定义为有序对(x, y)的集合*:*

$X \times Y := \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$

定义 1.1.9. 从X到Y的关系是$X \times Y$的一个子集R，$(X{=}Y$时称其为X上的关系$)$。若R为X到Y的关系，$(x, y) \in R$记作xRy

定义 1.1.10. X上等价关系是X上的满足以下性质的关系R:

$xRx, \forall x \in X$

$xRy \Leftrightarrow yRx$

$xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$

集合X上的等价关系经常记作$\sim$

若集合X上有等价关系$\sim$, $x \in X$,定义x的等价类为:$\bar{x} = \{y \in X : y \sim x\}$

定义 1.1.11. 映射$f : X \to Y$是一个从X到Y的关系R，满足:

$\forall x \in X,\ \exists ! y \in Y, xRy$

通常记作$y = f(x)$

$f : X \to Y,\ g : Y \to Z, f$与$g$的复合定义为:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in X$

定义 1.1.12. 若$f : X \to Y, D \subset X, E \subset Y$

$f(D) := \{f(x) : x \in D\}$ 称为D在f下的像

$f^{-1}(E) := \{x \in X : f(x) \in E\}$,称为E在f下的原像

$f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$定义了幂集上的映射

推论 1.1.13. $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$具有以下性质:

$f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in A} f^{-1}(E_\alpha)$

$f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} f^{-1}(E_\alpha)$

$f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c$

证明. $x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha$

$\Leftrightarrow \exists \alpha \in A,\ f(x) \in E_\alpha$

$\Leftrightarrow \exists \alpha \in A,\ x \in f^{-1}(E_\alpha)$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha\in A} f^{-1}(E_\alpha)$

$x \in f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha$

$\Leftrightarrow \forall \alpha \in A,\ f(x) \in E_\alpha$

$\Leftrightarrow \forall \alpha \in A,\ x \in f^{-1}(E_\alpha)$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha\in A} f^{-1}(E_\alpha)$

$x \in f^{-1}(E^c) \Leftrightarrow f(x) \in E^c$

$\Leftrightarrow f(x) \notin E$

$\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(E)$

$\Leftrightarrow x \in (f^{-1}(E))^c$ □

定义 1.1.14. $f: X \to Y$

若$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$则称$f$为单射

若$f(X) = Y$则称f为满射

若f既是单射又是满射，则称f为双射，此时

$\forall y \in Y, \exists! x \in X, f(x) = y$(其中满射保证了存在性，单射保证了唯一性)

于是可以定义$f^{-1}: Y \to X$满足 $f \circ f^{-1} = 1_Y$，$f^{-1} \circ f = 1_X$

$A \subset X$,定义f在A上的限制：$f_{|A}: A \to Y$，$f_{|A}(x) = f(x), \forall x \in A$

推论 1.1.15. $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$为单射，则$g \circ f: X \to Z$为单射

$f: X \to Y$，$g: Y \to Z$为满射，则$g \circ f: X \to Z$为满射

定义 1.1.16. A为指标集，一族集合$\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$的笛卡尔积$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$

定义为一族函数$f: A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$满足$f(\alpha) \in X_\alpha$

即$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha := \left\{ f: A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha | f(\alpha) \in X_\alpha, \forall \alpha \in A \right\}$

若所有集合$X_\alpha = Y$，$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$也记作$Y^A$

若$A = \{1, 2, \dots n\}$, Y^A也记作Y^n

1.2 序

定义 1.2.1. 非空集合X上的偏序关系是一个满足以下性质的关系R:

$xRy, yRz \Rightarrow xRz$

$xRy, yRx \Rightarrow x = y$

$xRx, \forall x \in X$

R通常记作 $\preceq$,

$x \preceq y$也记作$y \succeq x$,

若$x \preceq y$且$x \neq y$, 则记作$x \prec y$

若R还满足：
$\forall x,y\in X,\ xRy$或yRx
R也称作全序，此时$\preceq$也记作$\leq$

例 1.2.2. 对任一集合E，$\mathcal{P}(E)$的包含关系是一个偏序关系

定义 1.2.3. 偏序集X，Y被称作序同构的，若存在双射$f:X\to Y$满足：
$x_1\preceq_X x_2\Rightarrow f(x_1)\preceq_Y f(x_2)$

定义 1.2.4. 偏序集$(X,\preceq_X)$中，称$x\in X$为X的极大(极小)元，若不存在$y\neq x, y\succeq_X x(\preceq_X x)$
$E\subset X, x\in X$称为E的上界(下界)，若$\forall y\in E, y\preceq x(\succeq x)$
若$(X,\leq_X),\forall\phi\neq E\subset X, E$有极小元，则称$X$为良序集，$\leq_X$ 称为X上的一个良序

命题 1.2.5. *The Hausdorff Maximal Principal*
每个偏序集有一个极大(在包含关系下)的全序子集

命题 1.2.6. *Zorn's Lemma*
若偏序集X的每个全序子集有上界，那么X有极大元

命题 1.2.7. *The Well Ordering Principle*
每一个非空集合X可以配备一个良序

命题 1.2.8. *The Axionm of Choice*
若$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$是一族非空集，那么$\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$非空

定理 1.2.9. 上述*4*个命题等价

证明. 命题 1.2.5 $\Rightarrow$ 命题 1.2.6
X在包含关系下有一个极大的全序子集E，设x为E的上界，我们断言x也是X的极大元
否则，$\exists y\in X,\ y\succeq x$ 从而 $E\cup\{y\}$ 是X的全序子集，并且真包含E，这与E是极大的全序子集矛盾

命题 1.2.5 ，命题1.2.6 $\Rightarrow$ 命题 1.2.7

令$\mathcal{W}=\{\leq_E: E\subset X$为配备了良序$\leq_E$的子集$\}$ 我们按照以下法则定义$\mathcal{W}$上的偏序关系：

对于 $\leq_{E_1},\leq_{E_2}\in\mathcal{W}$

(i) $E_1\subset E_2$, 且 $\leq_{E_2}\cap(E_1\times E_1)=\leq_{E_1}$

(ii) $x\in E_2\setminus E_1\Rightarrow\forall y\in E_1,\ y\leq_{E_2}x$

则 $\leq_{E_1}\preceq\leq_{E_2}$

现在验证$(\mathcal{W},\preceq)$满足Zorn's Lemma的条件：

设ω为$\mathcal{W}$的全序子集

$\leq_\mu:=\bigcup_{\leq_E\in\omega}(\leq_E),\ \mu:=\bigcup_{\leq_E\in\omega}E$

1.验证 $\leq_\mu$ 为$\mu\subset X$上的良序，从而 $\leq_\mu\in\mathcal{W}$

由(i)知, $\beta:=\{E:\leq_E\in\omega\}$ 在包含关系下是一个全序集

$\forall x_1,x_2\in\mu,\exists E_1,E_2\in\beta:\ x_1\in E_1,x_2\in E_2$

不妨设$E_1\subset E_2$, 于是$x_1\leq_{E_2}x_2$或$x_2\leq_{E_2}x_1$成立

$\Leftrightarrow (x_1,x_2)\in\leq_{E_2}\subset\leq_\mu$ 或$(x_2,x_1)\in\leq_{E_2}\subset\leq_\mu$

$\Leftrightarrow x_1\leq_\mu x_2$或$x_2\leq_\mu x_1$

$x\leq_\mu y, y\leq_\mu x\ \Rightarrow(x,y),(y,z)\in\leq_\mu$

设$(x,y)\in\leq_{E_1},(y,z)\in\leq_{E_2}$ 并且$E_1\subset E_2$

从而$(x,y)\in\leq_{E_1}\subset\leq_{E_2}$, 于是$(x,z)\in\leq_{E_2}\subset\leq_\mu$

也即$x\leq_\mu z$

$x\leq_\mu y,y\leq_\mu x\Rightarrow(x,y),(y,x)\in\leq_\mu$

设$(x,y)\in\leq_{E_1},(y,x)\in\leq_{E_2}$ 并且$E_1\subset E_2$

从而$(x,y)\in\leq_{E_1}\subset\leq_{E_2}$

$\Rightarrow x\leq_{E_2}y,y\leq_{E_2}x$

$\Rightarrow x=y$

$\forall x\in\mu,\exists E\in\beta,x\in E,$

$x\leq_E x$

$\Rightarrow(x,x)\in\leq_E\subset\leq_\mu$

$\Rightarrow x \leq_\mu x$

$\forall\ \phi \neq F \subset \mu$若$F$无最小元，即

$\forall x \in F,\ \exists y \in F,\ y \neq x,\ y \leq_\mu x$

归纳可得F的一个递降子列：$x_1 >_\mu x_2 >_\mu \cdots >_\mu x_n >_\mu \ldots$

设$x_i \in E_i \in \beta$

若$\exists i > 1, x_i \notin E_1$

由于β在包含关系下为一全序集，故$E_1 \subset E_i$

由$(ii), x_i \in E_i \setminus E_1 \Rightarrow x_i \geq_{E_i} x_1 \Rightarrow (x_1, x_i) \in \leq_{E_i} \subset \leq_\mu$

即$x_1 \leq_\mu x_i$,矛盾

从而$\{x_i\}_{i=1}^n \subset E_1$并且$x_1 >_{E_1} x_2 >_{E_1} \cdots >_{E_1} x_n >_{E_1} \ldots$

由$E_1 \in \beta$知$\leq_{E_1}$为良序,从而不存在递降子列，矛盾

故F存在最小元

综上$\leq_\mu$为μ上的一个良序

2.验证$\leq_\mu$为ω的上界

$(i)\forall \leq_E \in \omega, E \in \beta \Rightarrow E \subset \bigcup_{E\in\beta} E = \mu$

且$\leq_\mu \cap (E \times E) = (\bigcup_{E_i\in\beta} \leq_{E_i}) \cap (E \times E)$

$= [(\bigcup_{E_i\in\beta, E_i\subset E} \leq_{E_i}) \bigcap (E \times E)] \bigcup [(\bigcup_{E_i\in\beta, E_i \supsetneq E} \leq_{E_i} \cap (E \times E)]$

$= [\leq_E \cap (E \times E)] \bigcup [(\bigcup_{E_i\in\beta, E_i \supsetneq E} \leq_E]$

$= \leq_E$

$(ii) x \in \mu \setminus E \Rightarrow \exists F \in \beta, F \supset E, x \in F \setminus E \Rightarrow \forall y \in E,\ y \leq_F x$

从而$(y, x) \in \leq_F \subset \leq_\mu$, 即 $\forall y \in E, y \leq_\mu x$

于是$\leq_E \preceq \leq_\mu$

综上，$\mathcal{W}$的任意全序子集ω有上界，Zorn's Lemma的条件满足，

从而$\mathcal{W}$有极大元$\leq_E$

我们断言，$\leq_E$就是X上的良序

否则,取$x_0 \in X \setminus E$

$E_0 := E \cup \{x_0\}$

$\leq_{E_0}:=\leq_E \cup \{(x,x_0): x\in E\}$
则 $\leq_{E_0}\in \mathcal{W}$且 $\leq_E \prec \leq_{E_0}$
这与$\leq_E$的取法矛盾

命题 1.2.7 $\Rightarrow$ 命题 1.2.8
令$X=\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha$，选取$X$上的一个良序$\leq$
对每个$\alpha\in A$，定义$f(\alpha)=X_\alpha$的最小元，则$f\in\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$

命题 1.2.8 $\Rightarrow$ 命题 1.2.6
?

命题 1.2.6 $\Rightarrow$ 命题 1.2.5
设$(X,\preceq)$为一偏序集，则其全序子集$\mathcal{W}$在包含关系下构成偏序集
其任意全序子集ω有上界$\mu=\bigcup_{E\subset\omega}E$，$\mathcal{W}$满足 Zorn's Lemma 的条件
于是$\mathcal{W}$有极大元 □

1.3　集合的势

定义 1.3.1. *对于非空集X,Y*
若存在单射$f:X\to Y$，则称$card(X)\leq card(Y)$
若存在满射$f:X\to Y$，则称$card(X)\geq card(Y)$
若存在双射$f:X\to Y$，则称$card(X)=card(Y)$
若$card(X)\leq card(Y)$但$card(X)=card(Y)$不成立，则记作$card(X)<card(Y)$
若$card(X)\geq card(Y)$但$card(X)=card(Y)$不成立，则记作$card(X)>card(Y)$
对所有$X\neq\phi$，约定$card(X)>card(\phi)$，$card(\phi)<card(X)$

推论 1.3.2. $card(X)\leq card(Y),\ card(Y)\leq card(Z)\Rightarrow card(X)\leq card(Z)$

证明. $f:X\to Y,\ g:Y\to Z$为单射，则
$g\circ f:X\to Z$也是单射，故

$card(X) \leq card(Z)$ □

命题 1.3.3. $card(X) \leq card(Y) \Leftrightarrow card(Y) \geq card(X)$

证明. 设$f : X \to Y$为单射。取定$x_0 \in X$，由于f为单射，$\forall y \in f(X)$，
$\exists! x \in X, f(x) = y$，于是可定义$g : Y \to X$：

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{if } y \in f(X) \\ x_0 & \text{if } y \notin f(X) \end{cases}$$

从而$g : Y \to X$为满射

设$g : Y \to X$为满射，则$\forall x \in X, g^{-1}(\{x\}) \neq \phi$
且$x_1 \neq x_2 \Rightarrow g^{-1}(\{x_1\}) \cap g^{-1}(\{x_2\}) = \phi$
由选择公理，$f \in \prod_{x \in X} g^{-1}(\{x\})$即为$X \to Y$的单射 □

命题 1.3.4. 对任意集合X, Y，$card(X) \leq card(Y)$或$card(Y) \leq card(X)$成立

证明. 设$\mathcal{J}$为X的子集到Y的单射之集，即
$\mathcal{J} = \{f : X \supset E \to Y$为单射$\}$
$\forall f \in \mathcal{J}, f \subset X \times Y$，于是$(\mathcal{J}, \subset)$为一偏序集
现在验证该偏序集适合Zorn's Lemma的条件
$\forall f \in \mathcal{J}, f : X \supset D_f \to Y$为单射
设$\mathcal{I}$为$\mathcal{J}$的一个全序子集，$f_{\mathcal{I}} := \bigcup_{f \in \mathcal{I}} f$
由于$\mathcal{I}$为全序集，$\{D_f : f \in \mathcal{I}\}$在包含关系下也为全序集
1.验证$f_{\mathcal{I}} \in \mathcal{J}$
$D_{\mathcal{I}} := \bigcup_{f \in \mathcal{I}} D_f$，$\forall x \in D_{\mathcal{I}}$，$\exists f \in \mathcal{I}, x \in D_f$
$\exists y \in Y, (x, y) \in f \subset f_{\mathcal{I}}$
若存在$x_1 \neq x_2$，$f_{\mathcal{I}}(x_1) = f_{\mathcal{I}}(x_2) = y$
则$(x_1, y) \in f_1, (x_2, y) \in f_2$，不妨设$f_1 \subset f_2$
于是有$x_1 \neq x_2 \to f_2(x_1) = f_2(x_2)$，这与$f_2 \in \mathcal{J}$矛盾

综上，$f_{\mathcal{I}} \in \mathcal{J}$

2.验证$f_{\mathcal{I}}$为$\mathcal{I}$的上界，这由$f_{\mathcal{I}}$的定义是明显的

综上，$\mathcal{J}$适合Zorn'Lemma的条件，从而有极大元$f_{\mathcal{J}}$

设$f_{\mathcal{J}}: X \supset D_{\mathcal{J}} \to Y$，我们断言，$D_{\mathcal{J}} = X$或$f(D_{\mathcal{J}}) = Y$成立

否则，存在$x_0 \in X \setminus D_{\mathcal{J}}, y_0 \in Y \setminus f(D_{\mathcal{J}})$

$\tilde{f}_{\mathcal{J}} := f_{\mathcal{J}} \cup \{(x_0, y_0)\}$

容易验证$\tilde{f}_{\mathcal{J}} \in \mathcal{J}$且$f_{\mathcal{J}} \subsetneq \tilde{f}_{\mathcal{J}}$，这与$f_{\mathcal{J}}$是极大元矛盾

若$D_{\mathcal{J}} = X$则$f_{\mathcal{J}}: X \to Y$为单射，$card(X) \leq card(Y)$

若$f(D_{\mathcal{J}}) = Y$，则$f_{\mathcal{J}}^{-1}: Y \to D_{\mathcal{J}} \subset X$为单射，$card(Y) \leq card(X)$ □

定理 1.3.5. *The Schöder − Bernstein Theorem*

$card(X) \leq card(Y), card(Y) \leq card(X) \Rightarrow card(X) = card(Y)$

证明. 设$f: X \to Y$, $g: Y \to X$均为单射

我们按照以下法则将X中的元素分为3类，

1.对$\forall n \geq 0$, $g^{-1} \circ (f^{-1} \circ g^{-1})^n(x) \in Y, (f^{-1} \circ g^{-1})^{n+1}(x) \in X$

则称$x \in X_\infty$

2.$\exists n \geq 0$, $g^{-1} \circ (f^{-1} \circ g^{-1})^n(x) \notin Y$即$(f^{-1} \circ g^{-1})^n(x) \in X \setminus g(Y)$

则称$x \in X_X$

3.$\exists n \geq 0$, $(f^{-1} \circ g^{-1})^{n+1}(x) \notin X$即$g^{-1} \circ (f^{-1} \circ g^{-1})^n(x) \in Y \setminus f(X)$

则称$x \in X_Y$

容易验证，X_∞, X_X, X_Y是不交的，类似的有Y_∞, Y_X, Y_Y：

1.对$\forall n \geq 0$, $f^{-1} \circ (g^{-1} \circ f^{-1})^n(y) \in X, (g^{-1} \circ f^{-1})^{n+1}(y) \in Y$

则称$y \in Y_\infty$

2.$\exists n \geq 0$, $f^{-1} \circ (g^{-1} \circ f^{-1})^n(y) \notin X$即$(g^{-1} \circ f^{-1})^n(y) \in Y \setminus f(X)$

则称$y \in Y_Y$

3.$\exists n \geq 0$, $(g^{-1} \circ f^{-1})^{n+1}(y) \notin Y$即$f^{-1} \circ (g^{-1} \circ f^{-1})^n(y) \in X \setminus g(Y)$

则称$y \in Y_X$

现在验证:$f(X_\infty) = Y_\infty$, $f(X_X) = Y_X$, $g(Y_Y) = X_Y$

$x \in X_\infty \Rightarrow \forall n \geq 0,\ g^{-1} \circ (f^{-1} \circ g^{-1})^n(x) \in Y, (f^{-1} \circ g^{-1})^{n+1}(x) \in X$

$\Rightarrow \forall n \geq 0,\ (g^{-1} \circ f^{-1})^{n+1}(f(x)) \in X, f^{-1} \circ (g^{-1} \circ f^{-1})^n(y) \in Y$

$\Rightarrow f(X) \subset Y_\infty$

$y \in Y_\infty \Rightarrow x = f^{-1}(y) \in X$

$\Rightarrow \forall n \geq 0,\ g^{-1} \circ (f^{-1} \circ g^{-1})^n(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})^{n+1}(y) \in Y,$

$(f^{-1} \circ g^{-1})^{n+1}(x) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ f^{-1})^{n+1}(x) \in X$

$\Rightarrow \exists x \in X_\infty, f(x) = y$

$\Rightarrow f(X_\infty) \subset Y_\infty$

即$f(X_\infty) = Y_\infty$，

$x \in X_X \Rightarrow \exists n \geq 0,\ g^{-1} \circ (f^{-1} \circ g^{-1})^n(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})^{n+1}(f(x)) \notin Y$

$\Rightarrow f(x) \in Y_X$

$\Rightarrow f(X_X) \subset Y_X$

$y \in Y_X \Rightarrow \exists n \geq 0,\ (g^{-1} \circ f^{-1})^{n+1}(y) \notin Y, f^{-1}(y) = x \in X$

$\Rightarrow \exists n \geq 0,\ g^{-1} \circ (f^{-1} \circ g^{-1})^n(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})^{n+1}(y) \notin Y$

$\Rightarrow x = f^{-1}(y) \in X_X$

$\Rightarrow Y_X \subset f(X_X)$

即$f(X_X) = Y_X$

同理，有$g(Y_Y) = X_Y$

由于f, g均为单射,$f_{|X_\infty}, f_{|X_X}, g_{|Y_Y}$也是单射，从上面的讨论知，他们也是满射，从而为双射

定义$h : X \to Y$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in X_\infty \cup X_X \\ g^{-1}(x) & \text{if } x \in X_Y \end{cases}$$

于是h为X到Y的双射，即$card(X) = card(Y)$ □

推论 1.3.6. $card(X) = card(Y), card(Y) = card(Z) \Rightarrow card(X) = card(Z)$

证明. $card(X) \leq card(Y), card(Y) \leq card(Z) \Rightarrow card(X) \leq card(Z)$

同理$card(Z) \leq card(X)$

于是$card(X) = card(Z)$ □

命题 1.3.7. 对任意集合$X, card(X) < card(\mathcal{P}(X))$

证明. 首先，$f : x \mapsto \{x\}$是X到$\mathcal{P}(X)$的单射，故$card(X) \leq card(\mathcal{P}(X))$
设$g : X \to \mathcal{P}(X)$，我们来证明g不可能是满射,
令$Y = \{x \in X : x \notin g(x)\}$
若$Y \in g(X)$，即$\exists x_0 \in X, g(x_0) = Y$
那么$x_0 \in Y \Rightarrow x_0 \notin g(x_0) \Rightarrow x_0 \notin Y$，矛盾
$x_0 \notin Y \Rightarrow x_0 \in g(x_0) \Rightarrow x_0 \in Y$，矛盾
故不存在$x_0 \in X, g(x_0) = Y$
综上，$card(X) < card(\mathcal{P}(X))$ □

定义 1.3.8. 若$card(X) \leq card(\mathbb{N})$，则称$X$是可数的

命题 1.3.9. *a.*可数集合的有限笛卡尔积可数
*b.*可数集合的可数并可数
*c.*可数无穷集与自然数集等势

证明. a.设X, Y为可数集,$f : X \to \mathbb{N},\ g : Y \to \mathbb{N}$为单射
则$f \times g : (x, y) \mapsto (f(x), g(y))$为单射,从而$card(X \times Y) \leq card(\mathbb{N}^2)$
现在证明: $card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{N}^{\nleq})$
构造$\mathbb{N}^2$到$\mathbb{N}$的双射：$f : (i, j) \mapsto i + \sum_{n=1}^{i+j-2} n$

b.设$A, X_\alpha(\alpha \in A)$均为可数集，$\forall \alpha \in A$，存在 $f_\alpha : \mathbb{N} \to X_\alpha$为满射
于是$f : \mathbb{N} \times A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha,\ f(n, \alpha) = f_\alpha(n)$为满射
从而$card(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha) \leq card(A \times \mathbb{N}) \leq card(\mathbb{N})$

c.设X为无穷集合，且$card(X) \leq card(\mathbb{N})$
$f : X \to \mathbb{N}$为单射，则$f : X \to f(X) \subset \mathbb{N}$为双射
$card(X) = card(f(X)) \leq card(\mathbb{N})$

现在记$Y=f(X)$为$\mathbb{N}$的无穷子集

定义$g(1)=min\ Y$

递归定义$g(n)=min\ Y\setminus\{g(1),g(2),\dots g(n-1)\}$

于是$g:N\to Y$为双射

$card(Y)=card(\mathbb{N})$

从而$card(X)=card(\mathbb{N})$ □

推论 1.3.10. $card(\mathbb{Z})=card(\mathbb{Q})=card(\mathbb{N})$

定义 1.3.11. 若$card(X)=card(\mathbb{R})$，则记作$card(X)=\mathcal{C}$

命题 1.3.12. $card(X)=card(Y)\Rightarrow card(\mathcal{P}(X))=card(\mathcal{P}(Y))$

证明. 设$f:X\to Y$为双射

$\tilde{f}:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(Y),\ \tilde{f}(A)=f(A)$给出$\mathcal{P}(X)$到$\mathcal{P}(Y)$的双射 □

命题 1.3.13. $card(\mathcal{P}(\mathbb{N}))=\mathcal{C}$

证明. 对于$A\in\mathcal{P}(N)$，定义$f(A)=\begin{cases}\sum_{n\in A}2^{-n} & \text{if } \mathbb{N}\setminus A\text{是无穷集}\\ 1+\sum_{n\in A}2^{-n} & \text{if } \mathbb{N}\setminus A\text{是有限集}\end{cases}$

$f:\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathbb{R}$是单射(?)，故$card(\mathcal{P}(\mathbb{N}))\leq card(\mathbb{R})$

定义$g:\mathcal{P}(\mathbb{Z})\to\mathbb{R},\ g(A)=\begin{cases}log(\sum_{n\in A}2^{-n}) & \text{if } A\text{有下界}\\ 0 & \text{if } A\text{无下界}\end{cases}$

$card(\mathcal{P}(\mathbb{N}))=card(\mathcal{P}(\mathbb{Z}))\geq card(\mathbb{R})$

综上，$card(\mathcal{P}(\mathbb{N}))=\mathcal{C}$ □

推论 1.3.14. 若$card(X)\geq\mathcal{C}$，则X是不可数的

证明. 若X可数，$\mathcal{C}=card(\mathcal{P}(\mathbb{N}))>card(\mathbb{N})\geq card(X)\geq\mathcal{C}$，矛盾 □

例 1.3.15. 连续统假设：$card(X)<\mathcal{C}$则X是可数的

命题 1.3.16. $a.card(X)\leq\mathcal{C},\ card(Y)\leq\mathcal{C}$，则$card(X\times Y)\leq\mathcal{C}$

$b.card(A)\leq\mathcal{C},card(X_\alpha)\leq\mathcal{C}\Rightarrow card(\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha)\leq\mathcal{C}$

证明. a.$\exists f: X \to \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ g: Y \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$为单射

$f \times g: X \times Y \to (\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2,\ (f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$为单射

于是$card(X \times Y) \le card((\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2)$

现在证明$card((\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2) = card(\mathcal{P}(\mathbb{N})):$

定义$\phi, \psi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\phi(n) = 2n,\ \psi(n) = 2n - 1$

定义$f: (\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ f(A, B) = \phi(A) \cup \psi(B)$

则f为双射

综上$card(X \times Y) \le card((\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2) = \mathcal{C}$

b.$\forall \alpha \in A,\ \exists f_\alpha: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to X_\alpha$为满射

定义$f: A \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha,\ f(\alpha, E) = f_\alpha(E)$为满射

故$card(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha) \le card(A \times \mathcal{P}(N)) \le \mathcal{C}$ □

第二章　测度

2.1　σ-代数

引理 2.1.1. 不存在满足以下条件的函数$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$:

1. $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$为$\mathbb{R}^n$的一族不交子集，则$\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_k)$

2.E和F在一个正交变换和平移变换下相同，则$\mu(E) = \mu(F)$

3.$\mu(Q) = 1$，其中$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j < 1, j = 1, \ldots, n\}$

证明. 仅考虑$n = 1$的情形

首先定义$[0, 1)$上的的等价关系：$x \sim y$ 若 $x - y \in \mathbb{Q}$令$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$为

$[0, 1)$上的等价类之集，由选择公理，$\exists\ f \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$，令$N = f(A)$，

于是N恰好包含每个等价类中的一个元素

令$R = \mathbb{N} \cap [0, 1)$为一可数集，对每个$r \in R$，定义

$N_r = \{x + r : x \in N \cap [0, 1 - r)\} \cup \{x + r - 1 : x \in N \cap [1 - r, 1)\}$

于是$[0, 1) = \bigcup_{r\in R} N_r$

右端包含于左端是明显的，下面证明左端包含于右端

$\forall x \in [0, 1)$，令$y \in N, y \sim x$

$x \geq y$时，$x \in N_{x-y}$

$x < y$时，$x \in N_{1+x-y}$

总之，有$x \in \bigcup_{r\in R} N_r$ 即 $[0, 1) \subset \bigcup_{r\in R} N_r$

现在我们证明: $r \neq s \Rightarrow N_r \cap N_s = \phi$

若$\exists x \in N_r \cap N_s$,设$y \in N, y \sim x$

则$y+r=x$，或$y+r-1=x$

同理$y+s=x$，或$y+s-1=x$

由y的唯一性知：$\begin{cases} y+r=x \\ y+s-1=x \end{cases}$或$\begin{cases} y+s=x \\ y+r-1=x \end{cases}$

即$1=s-r$或$1=r-s$，这又与$r,s\in N\cap[0,1)$矛盾

综上$N_r\cap N_s=\phi$

设μ为满足性质1.2.3.的一个函数，则：

$\mu(N)=\mu(N\cap[0,1-r))+\mu(N\cap[1-r,1))=\mu(N_r)$

$\mu([0,1))=\sum_{r\in R}\mu(N_r)=\sum_{r\in R}\mu(N)$

若$\mu(N)=0$，则$\mu([0,1))=0$

若$\mu(N)>0$，则$\mu([0,1))=\infty$

两者均与性质3.矛盾 □

为了定义集合上的测度，并且仍然拥有良好的性质(1.2.3.)，我们只能缩小测度函数的定义域

方便起见，以下X均为一非空集合

定义 2.1.2. *称$\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$为$X$上的代数，若其满足以下性质：*

1. $\mathcal{A}\neq\phi$

2. $\forall n\in\mathbb{N},\ \{E_k\}_{k=1}^n\subset\mathcal{A}\Rightarrow\bigcup_{k=1}^n E_k\in\mathcal{A}$

3. $E\in\mathcal{A}\Rightarrow E^c\in\mathcal{A}$

称$\mathcal{A}$为σ-代数，若性质1.中的集族可以是可数无穷的

推论 2.1.3. *设$\mathcal{A}$为一个代数(σ-代数)，则$\mathcal{A}$关于有限(可数)交封闭*

证明. 注意到$\bigcap_{\alpha\in\Lambda}E_\alpha=(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}E_\alpha^c)^c$，其中$\Lambda$为有限或可数指标集 □

推论 2.1.4. *设$\mathcal{A}$为X上的一个代数(σ-代数)，则$\phi,X\in\mathcal{A}$*

证明. 注意到$\phi=E\cap E^c\in\mathcal{A}$，对$E\in\mathcal{A}$成立，$X=\phi^c\in\mathcal{A}$ □

推论 2.1.5. *设$\mathcal{A}$为X上的一个代数，若其对可数不交并封闭，则$\mathcal{A}$也是σ-代数*

证明. 设$\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}$，往证 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\in\mathcal{A}$

令$F_n=E_n\setminus[\bigcup_{k=1}^{n-1}E_k]=E_n\cap\bigcap_{k=1}^{n-1}E_k^c\in\mathcal{A}$

$F_i\cap F_j=\phi$

故$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n\in\mathcal{A}$ □

例 2.1.6. *1.* $\{\phi,X\}$为σ-代数

2. $\mathcal{P}(X)$为σ-代数

3. $\{E\in\mathcal{P}(X):E$为可数集或E^c为可数集$\}$为σ-代数

只证明*3.*

证明. $\phi\in\mathcal{A}$，故$\mathcal{A}\neq\phi$

设$\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n=(\bigcup_{E_i\text{可数}}E_i)\bigcup(\bigcup_{E_j\text{不可数}}E_j)$

其中$\bigcup_{E_i\text{可数}}E_i$可数，故$\in\mathcal{A}$

$\bigcup_{E_j\text{不可数}}E_j=(\bigcap_{E_j\text{不可数}}E_j^c)^c\in\mathcal{A}$

综上，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\in\mathcal{A}$

$E\in\mathcal{A}\Rightarrow E^c\in\mathcal{A}$由$\mathcal{A}$的定义是明显的 □

推论 2.1.7. $\{\mathcal{A}_A\}_{\alpha\in\Lambda}$为$X$的任意族$\sigma$-代数，则$\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{A}_\alpha$也是$X$上的$\sigma$-代数

证明. 1. $\phi\in\mathcal{A}_\alpha\Rightarrow\phi\in\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{A}_\alpha$，故$\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{A}_\alpha\neq\phi$

2. 设$\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{A}_\alpha$，则$\forall\alpha\in A$, $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}_\alpha$

于是$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\in\mathcal{A}_\alpha,\forall\alpha\in A$，从而$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\in\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{A}_\alpha$

3. $E\in\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{A}_\alpha\Rightarrow\forall\alpha\in A$, $E\in\mathcal{A}_\alpha\Rightarrow\forall\alpha\in A,E^c\in\mathcal{A}_\alpha$

$\Rightarrow E^c\in\bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{A}_\alpha$ □

定义 2.1.8. 设$\varepsilon\subset\mathcal{P}(X)$我们定义$\varepsilon$生成的$\sigma$-代数$\mathcal{M}(\varepsilon)$:

$\mathcal{M}(\varepsilon)=\bigcap_{\mathcal{A}\supset\varepsilon\text{为}\sigma\text{-代数}}\mathcal{A}$

由于这样的σ-代数至少有一个$\mathcal{P}(X)$，故该定义是良定义的

引理 2.1.9. $\varepsilon\subset\mathcal{M}(\mathcal{F})\Rightarrow\mathcal{M}(\varepsilon)\subset\mathcal{M}(\mathcal{F})$

证明. $\mathcal{M}(\varepsilon)=\bigcap_{\mathcal{A}\supset\varepsilon\text{为}\sigma\text{-代数}}\mathcal{A}$，而$\mathcal{M}(\mathcal{F})$为包含$\varepsilon$的$\sigma$-代数，由定义，$\mathcal{M}(\varepsilon)\subset\mathcal{M}(\mathcal{F})$ □

定义 2.1.10. 设X为一拓扑空间，ε为其开集族，则$\mathcal{M}(\varepsilon)$称为X上的$Borel$ σ-代数，记作$\mathcal{B}_X$，其中的元素也称为$Borel$ 集
$Borel$ 集中因此包含：所有开集，所有闭集，开集的可数交，闭集的可数并
其中开集的可数交称为G_δ集
闭集的可数并称为F_σ集
G_δ集的可数并称为$G_{\delta\sigma}$集
F_σ集的可数交称为$F_{\sigma\delta}$集

引理 2.1.11. $\mathbb{R}$上的非空开集可以写成可数个开区间的不交并

证明. 设U为$\mathbb{R}$上的非空开集，
$x\in U,\ \mathcal{J}_x:=\{I\subset U:\text{为包含}x\text{的开区间}\},J_x:=\bigcup_{I\in\mathcal{J}_x}I$
容易验证J_x为包含x的最大的开区间，于是$x\neq y\Rightarrow J_x\cap J_y=\phi$或$J_x=J_y$
$\mathcal{J}:=\{J_x:x\in U\}$对每个$J\in\mathcal{J}$，选取$f(J)\in\mathbb{Q}$
于是$f:\mathcal{J}\to\mathbb{Q}$为单射 ($\mathcal{J}$中的开区间是不交的)
从而$U=\bigcup_{x\in U}J_x=\bigcup_{J\in\mathcal{J}}J$为可数个开区间的不交并 □

命题 2.1.12. $\mathcal{B}_\mathbb{R}$可由以下集族生成：
$a.$所有开区间$\varepsilon_1=\{(a,b):a<b\}$
$b.$所有闭区间$\varepsilon_2=\{[a,b]:a<b\}$
$c.$所有半开半闭区间$\varepsilon_3=\{(a,b]:a<b\}$或$\varepsilon_4=\{[a,b):a<b\}$
$d.\varepsilon_5=\{(a,+\infty):a\in\mathbb{R}\},\varepsilon_6=\{(-\infty,a):a\in\mathbb{R}\}$
$e.\varepsilon_7=\{[a,+\infty):a\in\mathbb{R}\},\varepsilon_8=\{(-\infty,a]:a\in\mathbb{R}\}$

证明. 除$j=3,4$外，ε_j均为$\mathbb{R}$中的开(闭)区间，而$(a,b]=\bigcap_1^\infty(a,b+\frac{1}{n})$为$G_\delta$集，同理$(a,b]$，由Lemma 2.1.9，$\mathcal{M}(\varepsilon_j)\subset\mathcal{B}_\mathbb{R}$
另一方面，由Lemma 2.1.11，所有开集均能写成开区间的可数并，故$\mathcal{B}_\mathbb{R}\subset$

$\mathcal{M}(\varepsilon_1)$

于是$\mathcal{M}(\varepsilon_1)=\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

接下来证明$\mathcal{M}(\varepsilon_1)\subset\mathcal{M}(\varepsilon_j),j>1$

$(a,b)=\bigcup_1^\infty[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}]$

$=\bigcup_1^\infty(a,b-\frac{1}{n}]$

$=\bigcup_1^\infty[a+\frac{1}{n},b)$

$=(a,+\infty)\cap(\bigcup_1^\infty(b-\frac{1}{n},+\infty)^c)$

$=(-\infty,b)\cap(\bigcup_1^\infty(-\infty,a-\frac{1}{n})^c)$

$=[b,+\infty)^c\cap(\bigcup_1^\infty[a+\frac{1}{n},+\infty))$

$=(-\infty,a]^c\cap(\bigcup_1^\infty(-\infty,b-\frac{1}{n}])$

故$\varepsilon_1\subset\mathcal{M}(\varepsilon_j),j>1$

由Lemma 2.1.9，$\mathcal{M}(\varepsilon_1)\subset\mathcal{M}(\varepsilon_j),j>1$ □

定义 2.1.13. 设$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$为一族非空集，由选择公理知$X=\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$非空

设$\pi_\alpha:X\to X_\alpha$为投影映射，即$\pi_\alpha(f)=f(\alpha)$

设$\mathcal{M}_\alpha$为X_α上的σ-代数，我们定义X上的乘积σ-代数为：

$\mathcal{M}(\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha):E_\alpha\in\mathcal{M}_\alpha,\alpha\in A\})$

记作$\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$，若$A=\{1,2,\ldots,n\}$，也记作$\otimes_1^n\mathcal{M}_j$或$\mathcal{M}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_n$

命题 2.1.14. 若A可数，则$\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$可由$\left\{\prod_{\alpha\in A}E_\alpha:E_\alpha\in\mathcal{M}_\alpha\right\}$生成

证明. 记$\varepsilon=\left\{\prod_{\alpha\in A}E_\alpha:E_\alpha\in\mathcal{M}_\alpha\right\}$

首先$f\in\prod_{\alpha\in A}E_\alpha\Leftrightarrow\forall\alpha\in A,f(\alpha)\in E_\alpha$

$\Leftrightarrow\forall\alpha\in A,\pi_\alpha(f)=f(\alpha)\in E_\alpha$

$\Leftrightarrow\forall\alpha\in A,f\in\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$

$\Leftrightarrow f\in\bigcap_{\alpha\in A}\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$

即$\prod_{\alpha\in A}E_\alpha=\bigcap_{\alpha\in A}\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$

由A为可数集，知$\prod_{\alpha\in A}E_\alpha\in\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$

由Lemma 2.1.9 $\mathcal{M}(\varepsilon)\subset\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$

另一方面$f\in\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)\Leftrightarrow f(\alpha)=\pi_\alpha(f)\in E_\alpha$

$\Leftrightarrow f\in\prod_{\beta\in A}F_\beta$，其中$F_\alpha=E_\alpha,\beta\neq$时$,F_\beta=X_\beta\in\mathcal{M}_\beta$

即$\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)\in\varepsilon$

$\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha\subset\mathcal{M}(\varepsilon)$

综上，$\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha=\mathcal{M}(\varepsilon)$ □

命题 2.1.15. 设$\mathcal{M}_\alpha$由ε_α生成，则$\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$可由$\mathcal{F}$生成，其中

$\mathcal{F}=\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha):E_\alpha\in\varepsilon_\alpha,\alpha\in A\}$

证明. 由命题 2.1.14. $\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)=\prod_{\beta\in A}F_\beta$，其中$\beta=\alpha$时$F_\beta=E_\alpha$

$\beta\neq\alpha$时，$F_\beta=X_\beta$，于是$\mathcal{M}(\mathcal{F})\subset\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha$

对每个$\alpha\in A,\{E\subset X_\alpha:\pi_\alpha^{-1}(E)\in\mathcal{M}(\mathcal{F})\}$是包含$\varepsilon_\alpha$的$\sigma$-代数，从而也包含$\mathcal{M}_\alpha$ 于是$E\subset\mathcal{M}_\alpha\subset\{E\subset X_\alpha:\pi_\alpha^{-1}(E)\in\mathcal{M}(\mathcal{F})\}\Rightarrow\pi_\alpha^{-1}(E)\in\mathcal{M}(\mathcal{F})$

即$\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha):E_\alpha\in\mathcal{M}_\alpha,\alpha\in A\}\subset\mathcal{M}(\mathcal{F})$

$\otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha=\mathcal{M}(\mathcal{F})$ □

命题 2.1.16. 令$X_1,X_2,\dots X_n$为度量空间，$X=\prod_1^n X_j$

那么$\otimes_1^n\mathcal{B}_{X_j}\subset\mathcal{B}_X$

若X_j还是可分的(有一个可数的稠密子集)，则$\otimes_1^n\mathcal{B}_{X_j}=\mathcal{B}_X$

证明. 首先由命题 2.1.15 知$\otimes_1^n\mathcal{B}_{X_j}$可由$\pi_j^{-1}(U_j)$生成，其中$U_j$为$\mathcal{B}_j$中的开集

而$\pi_j^{-1}(U_j)$也是X中的开集，故$\otimes_1^n\mathcal{B}_{X_j}\subset\mathcal{B}_X$

设C_j为X_j的一个可数稠密子集，即$\overline{C_j}=X_j$

令ε_j为所有以C_j中点为球心，正有理数为半径的开球的集合，ε_j仍为可数集

设U_j为X_j上的开集，

$\forall x\in U_j,\ x\in\overline{C_j},\exists y\in C,\varepsilon_j\ni E_x=B(y,r_x)\ni x,E_x\subset U_j$

于是$U_j=\bigcup_{x\in U_j,E_x\in\varepsilon_j}E_x$为可数并，于是$\mathcal{B}_{X_j}$可由$\varepsilon_j$生成

设U为X中的开集，同上讨论，U可以表示为可数个$\prod_1^n E_j$的并，

其中$E_j\in\varepsilon_j$

$\prod_1^n E_j = \bigcap_1^n \pi_j^{-1}(E_j) \in \mathcal{M}(\{\pi_j^{-1}(E_j) : E_j \in \varepsilon_j, j = 1, \ldots, n\})$
由命题 2.1.15知$U \in \otimes_1^n \mathcal{B}_{X_j}$从而$\mathcal{B}_X = \otimes_1^n \mathcal{B}_{X_j}$ □

推论 2.1.17. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \otimes_1^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

定义 2.1.18. $\varepsilon \subset \mathcal{P}(X)$称为 *elementary family*，若：
1. $\phi \in \varepsilon$
2. $E, F \in \varepsilon \Rightarrow E \cap F \in \varepsilon$
3. $E \in \varepsilon \Rightarrow E^c$可以表示成$\varepsilon$中有限个元素的不交并

命题 2.1.19. 设ε是 *elementary family,*其中有限元素的不交并之集$\mathcal{A}$构成代数

证明. 设$A, B \in \varepsilon, B^c = \bigcup_1^J C_j$，其中$C_j$不交，$A \setminus B = \bigcup_1^J (A \cap C_j)$
为ε中元素的不交并，$A \cup B = B \cup (A \setminus B)$这些集合是不交的，
故$A \cup B \in \mathcal{A}$现假设$\mathcal{A}$中元素对$n-1$次并集封闭，则$\bigcup_1^n A_j = A_n \cup (\bigcup_1^m B_j)$
$= A_n \cup (\bigcup_1^m B_j \setminus A_n)$，为不交并，其中$\bigcup_1^{n-1} A_j = \bigcup_1^m B_j$为$\varepsilon$中的不交并
设$A_n^c = \bigcup_1^J C_j$为ε中的不交并，则$B_j \setminus A_n = B_j \cap (\bigcup_1^J C_j) = \bigcup_1^J (B_j \cap C_j) \in \mathcal{A}$
，即$\mathcal{A}$对有限并封闭，下面证明$\mathcal{A}$对补集封闭
设$\{A_j\}_1^n \subset \varepsilon$为不交的，$A_m^c = \bigcup_{j=1}^{J_m} B_m^j$为$\varepsilon$中的不交并
则$(\bigcup_1^n A_m)^c = \bigcap_{m=1}^n (\bigcup_{j=1}^{J_m} B_m^j) = \bigcup \{B_1^{j_1} \cap \cdots \cap B_n^{j_n} : 1 \le j_m \le J_m, 1 \le m \le n\}$
是不交的 □

2.2　测度

定义 2.2.1. 设X为一个配备σ-代数$\mathcal{M}$的集合，$\mathcal{M}$上的测度是$\mathcal{M} \to [0, +\infty]$的满足以下性质的函数：
1. $\mu(\phi) = 0$;
2. 若$\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{M}$为不交的集和，那么$\mu(\bigcup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \mu(E_j)$

$(X,\mathcal{M})$称为可测空间，$\mathcal{M}$中的集合称为可测集
若μ是$(X,\mathcal{M})$上的测度，$(X,\mathcal{M},\mu)$称为测度空间

设$(X,\mathcal{M},\mu)$为测度空间，
若$\mu(X) < +\infty(\Leftrightarrow \mu(E) < +\infty, \forall E \in \mathcal{M})$则称$\mu$为有限的，
若$X = \bigcup_1^\infty E_j$其中$E_j \in \mathcal{M}$且$\mu(E_j) < +\infty$则称μ是σ-有限的，
若$E = \bigcup_1^\infty E_j$其中$E_j \in \mathcal{M}$且$\mu(E_j) < +\infty$则称E是关于μ σ-有限的
若对于每个E，$\mu(E) = +\infty \Rightarrow \exists F \in \mathcal{M}, F \subset E$，且$0 < \mu(F) < +\infty$
则称μ是semifinite

例 2.2.2. 设X为一非空集合，$\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$，$f$为任意$X \to [0,+\infty]$的函数，则$f$可以诱导一个测度：$\mu(E) = \sum_{x\in E} f(x)$
其中$\sum_{x\in E} f(x) := \sup\left\{\sum_{x\in F} f(x) : F \subset E, F\text{为有限集}\right\}$
μ为*semifinite*的当且仅当$f(x) < +\infty, \forall x \in X$
μ为σ-有限的当且仅当μ为*semifinite*并且$\{x : f(x) > 0\}$是可数集
若$f(x) \equiv 1$，μ称为计数测度
对某个$x_0 \in X$，$f(x_0) = 1, \forall x \neq x_0, f(x) = 0$则$\mu$称为*point mass*或*Dirac measure at* x_0

例 2.2.3. 设X为一不可数集，$\mathcal{M}$为其可数或补集可数的子集构成的σ-代数，则μ定义为：$\mu(E) = \begin{cases} 0 & if\ E\text{为可数集} \\ 1 & if\ E^c\text{为可数集} \end{cases}$是$(X,\mathcal{M})$上的测度

例 2.2.4. 令X为一无穷集，$\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$定义$\mu(E) = \begin{cases} 0 & if\ E\text{为有限集} \\ +\infty & if\ E\text{为无穷集} \end{cases}$
则μ为有限可加的，但不是测度

定理 2.2.5. 令$(X,\mathcal{M},\mu)$为一测度空间
a.(Monotonicity) $E, F \in \mathcal{M}, E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$
b.(Subadditivity) $\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{M} \Rightarrow \mu(\bigcup_1^\infty E_j) \leq \sum_1^\infty \mu(E_j)$

c.(Continuity from below) $\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{M}, E_1 \subset E_2 \subset \dots$

$\Rightarrow \mu(\bigcup_1^\infty E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$

d.(Continuity from above) $\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{M}, E_1 \supset E_2 \supset \dots$ 且$\mu(E_1) < \infty$

则$\mu(\bigcap_1^\infty E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$

证明. a. $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E)$

b. 令$F_1 = E_1, k > 1, F_k = E_k \setminus (\bigcup_1^{k-1} E_j)$,

$\bigcup_1^\infty F_k = \bigcup_1^\infty E_k$且$F_k \in \mathcal{M}$是不交的

$F_k \subset E_k$，由a.知$\mu(F_k) \leq \mu(E_k)$

$\mu(\bigcup_1^\infty E_k) = \mu(\bigcup_1^\infty F_k) = \sum_1^\infty \mu(F_k) \leq \sum_1^\infty \mu(E_k)$

c. $\mu(\bigcup_1^\infty E_k) = \mu(\bigcup_1^\infty (E_k \setminus E_{k-1}))$其中$E_0 = \phi$

$= \sum_1^\infty \mu(E_k \setminus E_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \mu(E_k \setminus E_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$

d. 令$F_k = E_1 \setminus E_k$则$F_1 \subset F_2 \subset \dots$，

$\bigcap_1^\infty E_k = \bigcap_1^\infty (E_1 \setminus F_k) = E_1 \setminus \bigcup_1^\infty F_k$

于是$\mu(E_1) = \mu(\bigcup_1^\infty F_k) + \mu(\bigcap_1^\infty E_k)$

$= \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) + \mu(\bigcap_1^\infty E_k)$

$= \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) + \mu(\bigcap_1^\infty E_k)$

其中$\mu(E_1) < +\infty$，故$\mu(\bigcap_1^\infty E_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$ □

注意$d.$中$\mu(E_1) < +\infty$可以改为对某个j成立$\mu(E_j) < +\infty$

设$(X, \mathcal{M}, \mu)$为一测度空间，$E \in \mathcal{M}$满足$\mu(E) = 0$，则称E为零测集，由 subadditivity，零测集的任意可数并为零测集，若一个关于x的命题在一个零测集外成立，则称其几乎处处成立(a.e.),更具体的，称为μ-零测集或μ-几乎处处

测度μ称为完全的，若其定义域包含所有零测集的子集

定理 2.2.6. 设$(X, \mathcal{M}, \mu)$为一测度空间，令$\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\}$, $\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{M}, F \subset N,$ 对某个$N \in \mathcal{N}\}$那么$\overline{\mathcal{M}}$是σ-代数，并且存在唯一的 $\overline{\mu}$是μ在$\overline{\mathcal{M}}$上的扩张，并且$\overline{\mu}$是完全的

证明. 首先证明$\overline{\mathcal{M}}$是σ-代数：

由于$\mathcal{M}$和$\mathcal{N}$均对可数并封闭，故$\overline{\mathcal{M}}$也对可数并封闭

对于$E \in \mathcal{M}$，$F \subset N \in \mathcal{N}$，$E \cup F \in \overline{M}$，不妨设$E \cap N = \phi$，否则可用$F \setminus E, N \setminus E$ 代替F, N，于是$(E \cup N) \cap (N^c \cup F) = (E \cap N^c) \cup (E \cap F) \cup (N \cap N^c) \cup (N \cap F) = E \cup (E \cap F) \cup \phi \cup F = E \cup F$

故$(E \cup F)^c = (E \cup N)^c \cup (N \setminus F)$其中$(E \cup F)^c \in \mathcal{M}$，$N \setminus F \subset N$

故$(E \cup F)^c \in \overline{\mathcal{M}}$，从而$\overline{\mathcal{M}}$是$\sigma$-代数

对于$E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$，定义$\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$

现在验证该定义是良定的：

$E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2 \Rightarrow E_1 \subset E_2 \cup F_2 \subset E_2 \cup N_2$

于是$\mu(E_1) \leq \mu(E_2) + \mu(N_2) = \mu(E_2)$

同理$\mu(E_2) \leq \mu(E_1)$

即$\overline{\mu}(E_1 \cup F_1) = \overline{\mu}(E_2 \cup F_2)$

现在验证$\overline{\mu}$是测度：

1. $\overline{\mu}(\phi) = \overline{\mu}(\phi \cup \phi) = \mu(\phi) = 0$

2. 设$\{E_j \cup F_j\}_1^\infty$为不交的集列，其中$E_j \in \mathcal{M}, F_j \subset N_j \in \mathcal{N}$

容易验证E_j是不交的，$\bigcup_1^\infty F_j \subset \bigcup_1^\infty N_j \in \mathcal{N}$

于是$\overline{\mu}(\bigcup_1^\infty (E_j \cup F_j)) = \overline{\mu}((\bigcup_1^\infty E_j) \bigcup (\bigcup_1^\infty F_j)) = \mu(\bigcup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \mu(E_j) = \sum_1^\infty \overline{\mu}(E_j \cup F_j)$

下面验证该测度是完全的：

设$E \in \mathcal{M}, F \subset N \in \mathcal{N}$

$\overline{\mu}(E \cup F) = 0 \Rightarrow \mu(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{N}$ 于是$E \in \mathcal{N}, N \cup E \in \mathcal{N}$

$\forall U \subset E \cup F, U = \phi \cup U$，其中$U \subset E \cup F \subset E \cup N \in \mathcal{N}$

即$U \in \overline{\mathcal{M}}$

现在验证这样的扩张是唯一的：

设$\widetilde{\mu}$是另一个扩张，则其在$\mathcal{M}$上的限制应与μ相同

即$\forall E \in \mathcal{M}, \widetilde{\mu}(E) = \mu(E)$

于是对于$E\cup F\in\overline{\mathcal{M}}$，其中$E\in\mathcal{M},F\subset N\in\mathcal{N}$

$\widetilde{\mu}(E\cup F)\leq\widetilde{\mu}(E)+\widetilde{\mu}(F)\leq\widetilde{\mu}(E)+\widetilde{\mu}(N)=\mu(E)+\mu(N)=\mu(E)=\overline{\mu}(E\cup F)$

$\overline{\mu}(E\cup F)=\mu(E)=\widetilde{\mu}(E)\leq\widetilde{\mu}(E\cup F)$

即$\overline{\mu}=\widetilde{\mu}$ □

2.3　外测度

这一节建立了用来构造测度的工具

定义 2.3.1. 非空集合X上的外测度是函数$\mu^*:\mathcal{P}(X)\to[0,+\infty]$，并且满足以下条件：

1. $\mu^*(\phi)=0$

2. $A\subset B\Rightarrow\mu^*(A)\leq\mu^*(B)$

3. $\mu^*(\bigcup_1^\infty A_j)\leq\sum_1^\infty\mu^*(A_j)$

命题 2.3.2. 设$\varepsilon\subset\mathcal{P}(X),\rho:\varepsilon\to[0,+\infty]$满足：$\phi\in\varepsilon,X\in\varepsilon,\rho(\phi)=0$

对任意$A\in\mathcal{P}(X)$，定义：

$\mu^*(A)=\inf\{\sum_1^\infty\rho(E_j):E_j\in\varepsilon,A\subset\bigcup_1^\infty E_j\}$

则μ^*是一个外测度

证明. 首先，由于$X\in\varepsilon$，故$\forall A\in\mathcal{P}(X),A\subset X$，该定义是良定义的

1. $\phi\in\varepsilon,\mu^*(\phi)=\rho(\phi)=0$

2. $A\subset B$，$\forall\{E_j\}_1^\infty$覆盖B，也覆盖A，即$\mu^*(A)\leq\sum_1^\infty\rho(E_j)$

对任意$\{E_j\}_1^\infty$成立，于是$\mu^*(A)\leq\mu^*(B)$

3. $\forall\epsilon>0$对于$A_j\in\mathcal{P}(X),\exists\left\{E_j^k\right\}_{k=1}^\infty\subset\varepsilon:\sum_{k=1}^\infty\rho(E_j^k)<\mu^*(A_j)+\epsilon 2^{-j}$

令$A=\bigcup_1^\infty A_j\subset\bigcup_{j,k}E_j^k,\mu^*(A)\leq\sum_{j,k}\rho(E_j^k)\leq\sum_1^\infty\mu^*(A_j)+\epsilon$

由ϵ任意性，$\mu^*(\bigcup_1^\infty A_j)\leq\sum_1^\infty\mu^*(A_j)$ □

定义 2.3.3. 设μ^*为X上的一个外测度，$A\subset X$称为μ^*-可测的，若：

$\mu^*(E)=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)$对所有$E\subset X$成立

由于$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$平凡成立，故$A$是$\mu^*$-可测的，只需验证$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$对所有$E : \mu^*(E) < +\infty$成立

定理 2.3.4. *Caratheodory's Theorem*
若μ^*是X上的一个外测度，所有μ^*-可测集构成的集合$\mathcal{M}$是σ-代数，μ^*在$\mathcal{M}$上的限制是一个完全的测度

证明. 首先证明$\mathcal{M}$是σ-代数
由于μ^*-可测的定义关于A, A^c对称，故$\mathcal{M}$关于取补集封闭
设$A, B \in \mathcal{M}$，$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$
$= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c)$
$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$
$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c)$
从而$A \cup B$可测，$A \cup B \in \mathcal{M}$
若还有$A \cap B = \phi$，
$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$
即μ^*在$\mathcal{M}$上有限可加
现往证$\mathcal{M}$对于可数不交并封闭
设$\{A_j\}_1^\infty$为$\mathcal{M}$中一列不交集，令$B_n = \bigcup_1^n A_j, B = \bigcup_1^\infty A_j$
归纳可得$B_n \in \mathcal{M}$，$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c)$
$= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1})$
令$B_0 = \phi$，归纳可得$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_1^n \mu^*(E \cap A_j)$
$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_1^n \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c)$
令$n \to \infty$，$\mu^*(E) \geq \sum_1^\infty \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c)$
$\geq \mu^*(\bigcup_1^\infty (E \cap A_j)) + \mu^*(E \cap B^c) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c)$
于是$B = \bigcup_1^\infty A_j \in \mathcal{M}$
在上式中取$E = B$，得$\mu^*(\bigcup_1^\infty A_j) = \sum_1^\infty \mu^*(A_j)$
于是$\mu^*_{|\mathcal{M}}$是测度

$\mu^*(A)=0 \Rightarrow \mu^*(E) \leq \mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)=\mu^*(E\cap A^c) \leq \mu^*(E)$
从而$A\in\mathcal{M}$，即$\mu^*_{|\mathcal{M}}$是完全的 □

定义 2.3.5. 设$\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$是一个代数，$\mu_0:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$称为预测度，若其满足以下条件:
$\mu_0(\phi)=0$
设$\{A_j\}_1^\infty$是$\mathcal{A}$中的一列不交集，并且$\bigcup_1^\infty A_j\in\mathcal{A}$，则$\mu_0(\bigcup_1^\infty A_j)=\sum_1^\infty \mu_0(A_j)$
从而μ_0也是有限可加的

若μ_0是$\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$是一个预测度，则由命题2.3.2 μ_0可以诱导一个外测度：$\mu^*(E)=\inf\{\sum_1^\infty \mu_0(A_j):A_j\in\mathcal{A},E\subset\bigcup_1^\infty A_j\}$

命题 2.3.6. 设μ_0是$\mathcal{A}$上的一个预测度，μ^*是其诱导的外测度，那么:
a. $\mu^*_{|\mathcal{A}}=\mu_0$;
b. $\mathcal{A}$中的每个集合都是μ^*-可测的

证明. a. 设$E\in\mathcal{A}$，若$E\subset\bigcup_1^\infty A_j, A_j\in\mathcal{A}$，
令$B_n=E\cap(A_n\setminus(\bigcup_1^{n-1}A_j))\in\mathcal{A}$ 于是B_n是不交的，且$\bigcup_1^\infty B_n=E$
$\mu_0(E)=\sum_1^\infty \mu_0(B_n)\leq\sum_1^\infty \mu_0(A_n)$
由A_n的任意性，$\mu_0(E)\leq\mu^*(E)\leq\mu_0(E)$
其中第二个不等号是明显的，因为$E\subset E\in\mathcal{A}$
b. 设$A\in\mathcal{A},E\in\mathcal{P}(X),\forall\epsilon>0,\exists\{B_j\}_1^\infty\subset\mathcal{A}:$
$A\subset\bigcup_1^\infty B_j,\sum_1^\infty\mu_0(B_j)<\mu^*(E)+\epsilon$
于是$\mu^*(E)+\epsilon>\sum_1^\infty\mu_0(B_j)=\sum_1^\infty\mu_0((B_j\cap A)\cup(B_j\cap A^c))$
$=\sum_1^\infty\mu_0(B_j\cap A)+\sum_1^\infty\mu_0(B_j\cap A^c)$
$\geq\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)$
由ϵ的任意性，$\mu^*(E)\geq\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)$
从而A是μ^*-可测的 □

定理 2.3.7. 令$\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$是一个代数，$\mu_0$是$\mathcal{A}$上的预测度，$\mathcal{M}$是$\mathcal{A}$生成的$\sigma$-代数则存在$\mathcal{M}$上的测度$\mu$，其在$\mathcal{A}$上的限制等于$\mu_0$，且$\mu=\mu^*_{|\mathcal{M}}$，其

中μ^*是μ_0诱导的外测度，若ν是$\mathcal{M}$上的另一个μ_0由扩张的测度，则$\nu(E) \leq \mu(E)\, \forall E \in \mathcal{M}$其中等号在$\mu(E) < +\infty$时成立，若$\mu_0$是$\sigma$-有限的，则$\mu$是$\mu_0$在$\mathcal{M}$上唯一的扩张

证明. 首先由Caratheodory Theorem和命题2.3.6 μ_0可诱导X上的外测度μ^*，其所有μ^*-可测集构成包含$\mathcal{A}$的σ-代数，自然也包含$\mathcal{M}$，且μ^*在$\mathcal{M}$上的限制是测度，即$\mu = \mu^*_{|\mathcal{M}}$，$\mu_{|\mathcal{A}} = \mu^*_{\mathcal{A}} = \mu_0$

设$E \in \mathcal{M}$，$\{A_j\}_1^\infty$为任意$\mathcal{A}$中覆盖E的集列，则

$\nu(E) \leq \nu(\bigcup_1^\infty A_j) \leq \sum_1^\infty \nu(A_j) = \sum_1^\infty \mu_0(A_j)$

$\nu(E) \leq \mu^*_{|\mathcal{M}}(E) = \mu(E)$

若$\mu(E) < +\infty$，$\forall \epsilon > 0, \exists \{A_j\}_1^\infty \subset \mathcal{A}:$

$\mu(A) \leq \sum_1^\infty \mu(A_j) = \sum_1^\infty \mu_0(A_j) < \mu(E) + \epsilon$

$\mu(A \setminus E) = \mu(A) - \mu(E) < \epsilon$

$\mu(E) \leq \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_1^n A_j) = \lim_{n\to\infty} \nu(\bigcup_1^n A_j)$

$= \nu(A) = \nu(A \setminus E) + \nu(E) \leq \mu(A \setminus E) + \nu(E) < \epsilon + \nu(E)$

由ϵ任意性知$\nu(E) \leq \mu(E)$

设μ_0是σ-有限的，即$\exists \{A_j\}_1^\infty \subset \mathcal{A} : X = \bigcup_1^\infty A_j, \mu_0(A_j) < +\infty$

不妨设A_n是不交的，否则代之以$B_n = A_n \setminus (\bigcup_1^{n-1} A_j)$

$\forall E \in \mathcal{M}, \mu(E) = \mu(E \cap X) = \mu(E \cap (\bigcup_1^\infty A_j)) = \mu(\bigcup_1^\infty (E \cap A_j))$

$= \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_1^n (E \cap A_j)) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \mu(E \cap A_j)$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \nu(E \cap A_j) = \lim_{n\to\infty} \nu(\bigcup_1^n (E \cap A_j))$

$= \nu(\bigcup_1^\infty (E \cap A_j)) = \nu(E \cap X) = \nu(E)$

于是$\mu = \nu$ □

2.4 $\mathbb{R}$上的Borel测度

这节主要构建了$\mathbb{R}$上的Borel测度，即定义域为$\mathcal{B}_\mathbb{R}$的测度

设μ为$\mathbb{R}$上的有限Borel测度，令$F(x) = \mu((-\infty, x])$，则$F(x)$是$\mathbb{R}$上的递增右

连续函数 ($(-\infty,x]=\bigcap_1^\infty(-\infty,x_n], x_n$严格单调下降趋于$x, F(x)=\mu((-\infty,x])=\mu(\bigcap_1^\infty(-\infty,x_n])=\lim_{n\to\infty}\mu((-\infty,x_n])=\lim_{n\to\infty}F(x_n)$, 由海涅定理知$F$右连续)
于是我们可以通过$\mathbb{R}$上的递增右连续函数来构造Borel测度
以下形如$(a,b]$的区间简称为h-区间
容易验证，所有h-区间构成elementry family，故所有h-区间的不交并构成代数$\mathcal{A}$，且其生成的σ-代数为$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

命题 2.4.1. *设$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为单调递增右连续函数，若$(a_j,b_j](j=1,\dots n)$为不交的$h$-区间令*
$\mu_0(\bigcup_1^n(a_j,b_j])=\sum_1^n[F(b_j)-F(a_j)], \mu_0(\phi)=0$
则μ_0为$\mathcal{A}$上的预测度

证明. 首先验证μ_0是良定义的
若$\{(a_j,b_j]\}_1^n$为不交的，且$\bigcup_1^n(a_j,b_j]=(a,b]$
不妨设$a=a_1<b_1=a_2<\dots<b_n=b$，故$\sum_1^n[F(b_j)-F(a_j)]=F(b)-F(a)$
更一般的，设$\{I_i\}_1^n,\{J_j\}_1^m$为有限不交h-区间，$\bigcup_1^n I_i=\bigcup_1^m J_j$
$\sum_i\mu_0(I_i)=\sum_{i,j}\mu_0(I_i\cap J_j)=\sum_j\mu_0(J_j)$
故μ_0是良定义的
由于F单调递增，$F(+\infty),F(-\infty)$在$\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$上有定义
由定义知μ_0是有限可加的
设$\{I_i\}_1^\infty\subset\mathcal{A}$是不交的，$\bigcup_1^\infty I_i=\bigcup_1^m J_j\in\mathcal{A}$，其中$J_j$是不交的
$\bigcup_1^\infty I_i=\bigcup_{j=1}^m(J_j\cap\bigcup_{i=1}^\infty I_i)=\bigcup_{j=1}^m\bigcup_{i=1}^\infty J_j\cap I_i$
$\mu_0(\bigcup_1^\infty I_i)=\sum_{j=1}^m\mu_0(\bigcup_{i=1}^\infty J_j\cap I_i)$
$\mu_0(\bigcup_1^m J_j)=\sum_1^m\mu_0(J_j)$
往证$\mu_0(\bigcup_1^\infty I_i)=\mu_0(\bigcup_1^m J_j)$，只需证$\mu_0(\bigcup_{i=1}^\infty J_j\cap I_i)=\mu_0(J_j), j=1,\dots m$
于是不妨设$\bigcup_1^\infty I_i=J$为h-区间
$\mu_0(J)=\mu_0(\bigcup_1^n I_i)+\mu_0(J\setminus\bigcup_1^n I_i)\geq\mu_0(\bigcup_1^n I_i)=\sum_1^n\mu_0(I_i)$
$n\to\infty, \mu_0(J)\geq\sum_1^\infty\mu_0(I_i)$

为证明$\mu_0(J) \le \sum_1^\infty \mu_0(I_i)$

首先假设$J=(a,b], -\infty < a < b < +\infty$

$\forall \epsilon > 0$，由F右连续，$\exists \delta, \delta_i > 0, F(a+\delta)-F(a) < \epsilon,$

$F(b_i+\delta_i)-F(b_i) < \epsilon 2^{-i}$，$\{(a_i, b_i+\delta_i)\}_1^\infty$覆盖$[a+\delta, b]$，于是存在有限子覆盖 $\{(a_j, b_j+\delta_j)\}_1^N$可设$b_j+\delta_j \in (a_{j+1}, b_{j+1}+\delta_{j+1})$?且诸开区间无包含关系

$\mu_0(J) = F(b)-F(a) < F(b)-F(a+\delta)+\epsilon$

$\le F(b_N+\delta_N)-F(a_1)+\epsilon$

$= F(b_N+\delta_N)-F(a_N)+\sum_1^{N-1}[F(a_{j+1})-F(a_j)]+\epsilon$

$< \sum_1^N [F(b_j)+\epsilon 2^{-j}-F(a_j)]+\epsilon$

$< \sum_1^\infty [F(b_j)-F(a_j)]+2\epsilon$

$= \sum_1^\infty \mu_0(I_j)+2\epsilon$ 由ϵ的任意性知$\mu_0(J) \le \sum_1^\infty \mu_0(I_i)$

$a=-\infty$时，任意$M<+\infty$，对$(-M.b]$进行上述过程，有：

$F(b)-F(-M) \le \sum_1^\infty \mu_0(I_i)+\epsilon$

$\epsilon \to 0, M \to +\infty$，$\mu_0(J) \le \sum_1^\infty \mu_0(I_i)$

$b=+\infty$时，任意$M<+\infty$,对$(a,M]$进行上述过程，

同理可得$F(M)-F(a) \le \sum_1^\infty \mu_0(I_i)+2\epsilon$

$\epsilon \to 0, M \to +\infty$，即得$\mu_0(J) \le \sum_1^\infty \mu_0(I_i)$

□

定理 2.4.2. 若$F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$是任意递增右连续函数，则存在唯一$\mathbb{R}$上的$Borel$测度$\mu_F$ 使得$\mu_F((a,b]) = F(b)-F(a)$，若G是另一递增右连续函数，$\mu_F = \mu_G$当且仅当$F-G$为常数，若μ是$\mathbb{R}$上的$Borel$测度，且于任意有界$Boerl$集上有限，定义$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & if\ x>0 \\ 0 & if\ x=0 \\ -\mu((x,0]) & if\ x<0 \end{cases}$，则$F$为递增右连续函数，且$\mu = \mu_F$

证明. 首先由命题2.4.1，F可诱导$\mathcal{A}$上的一个预测度，且F和G诱导同一个预测度当且仅当$F-G$为常数,且这些预测度是σ-有限的，$\mathbb{R} = \bigcup_1^{+\infty}(j, j+$

1] 由命题2.3.7知前两个断言的正确性。最后一个断言F明显是递增的，任取x_n递减趋于x，$x \geq 0$时，$(0,x] = \bigcap_1^\infty (0,x_n]$，$x < 0$时，$(x,0] = \bigcup_1^\infty (x_n,0]$由海涅定理可得$F$的右连续性。$\mu = \mu_F$在$\mathcal{A}$上成立，于是由命题2.3.7知其在$\mathcal{B}_\mathbb{R}$上成立 □

若F是$\mathbb{R}$上的递增右连续函数，则F可以诱导一个定义域包含$\mathcal{B}_\mathbb{R}$的完全的测度，记作μ_F，称作F诱导的Lebesgue-Stieltjes测度。之后μ_F简记为μ，其定义域记为$\mathcal{M}_\mu$，$\forall E \in \mathcal{M}_\mu$

$\mu(E) = \inf \{\sum_1^\infty [F(b_j) - F(a_j)] : E \subset \bigcup_1^\infty (a_j, b_j]\}$
$= \inf \{\sum_1^\infty \mu((a_j, b_j]) : E \subset \bigcup_1^\infty (a_j, b_j]\}$

引理 2.4.3. $\forall E \in \mathcal{M}_\mu$,
$\mu(E) = \inf \{\sum_1^\infty \mu((a_j, b_j)) : E \in \bigcup_1^\infty (a_j, b_j)\}$

证明. 等式右边的式子记作$\nu(E)$，设$E \subset \bigcup_1^\infty (a_j, b_j), (a_j, b_j) = \bigcup_{k=1}^\infty I_j^k$, 其中$I_j^k = (c_j^k, c_j^{k+1}], c_j^1 = a_j, k \to \infty, c_j^k$严格单调递增趋于$b_j$，于是
$\sum_1^\infty \mu((a_j, b_j)) = \sum_{j,k=1}^\infty \mu(I_j^K) \geq \mu(E)$，从而$\nu(E) \geq \mu(E)$
另一方面，$\forall \epsilon > 0, \exists \{(a_j, b_j]\}_1^\infty : E \subset \bigcup_1^\infty (a_j, b_j], \sum_1^\infty \mu((a_j, b_j]) \leq \mu(E) + \epsilon$，
对每个j,$\exists \delta_j > 0, F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < \epsilon 2^{-j}, E \subset \bigcup_1^\infty (a_j, b_j + \delta_j)$
$\sum_1^\infty \mu((a_j, b_j + \delta_j)) \leq \sum_1^\infty \mu((a_j, b_j + \delta_j]) \leq \sum_1^\infty \mu((a_j, b_j]) + \epsilon \leq \mu(E) + 2\epsilon$
故$\nu(E) \leq \mu(E)$ □

定理 2.4.4. *若$E \in \mathcal{M}_\mu$，则*
$\mu(E) = \inf \{\mu(U) : U \supset E, U\text{是开集}\}$
$= \sup \{\mu(K) : K \subset E, K\text{是紧集}\}$

证明. 由引理2.4.3，$\forall \epsilon > 0, \exists (a_j, b_j) : E \subset \bigcup_1^\infty (a_j, b_j), \sum_1^\infty \mu((a_j, b_j)) < \mu(E) + \epsilon$，令$U = \bigcup_1^\infty (a_j, b_j)$，$U$是开集，$\mu(U) \leq \sum_1^\infty \mu((a_j, b_j)) < \mu(E) + \epsilon$，另一方面$E \subset U \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(U)$，故第一个等式成立

现证第二个等式

首先设E有界，若E是闭集，则也是紧集，等式自然成立，否则，$\forall\epsilon>0,\exists$开集$U:U\supset\overline{E}\setminus E,\mu(U)<\mu(\overline{E}\setminus E)+\epsilon$($\overline{E}$是闭集，故$\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\subset\mathcal{M}_\mu$，从而$\overline{E}\setminus E\in\mathcal{M}_\mu$)令$K=\overline{E}\setminus U=E\setminus U$，则$K\subset E$为紧集，

$\mu(K)=\mu(E)-\mu(E\cap U)=\mu(E)-[\mu(U)-\mu(U\setminus E)]$

$=\mu(E)-\mu(U)+\mu(U\setminus E)\geq\mu(E)-\mu(\overline{E}\setminus E)+\mu(U\setminus E)-\epsilon\geq\mu(E)-\epsilon$

若E无界，令$E_j=E\cap(j,j+1]$，对任意$\epsilon>0,\exists K_j\subset E_j$为紧集，$\mu(K_j)\geq\mu(E_j)-\epsilon 2^{-|j|}$，令$H_n=\bigcup_{-n}^n K_j$，则$H_n\subset E$为紧集，$\mu(H_n)=\sum_{-n}^n\mu(K_j)\geq\sum_{-n}^n\mu(E_j)-3\epsilon\geq\mu(\bigcup_{-n}^n E_j)-3\epsilon$

$\mu(E)=\lim_{n\to\infty}\mu(\bigcup_{-n}^n E_j),\exists N:\mu(\bigcup_{-n}^n E_j)>\mu(E)-\epsilon$对所有$n\geq N$成立，于是$\mu(H_N)\geq\mu(E)-4\epsilon$ □

定理 2.4.5. *若$E\subset\mathbb{R}$，那么以下命题等价：*

a. $E\in\mathcal{M}_\mu$

b. $E=V\setminus N_1$，*其中V是G_δ集，*$\mu(N_1)=0$

c. $E=H\cup N_2$，*其中H为F_σ集，*$\mu(N_2)=0$

证明. 由于μ在$\mathcal{M}_\mu$上是完全的，故b.c.$\Rightarrow$a.是明显的

若$\mu(E)<+\infty$，

由定理2.4.4,对$j\in\mathbb{N}$，$\exists$开集$U_j\supset E$，紧集$K_j\subset E$

$\mu(U_j)-2^{-j}\leq\mu(E)\leq\mu(K_j)+2^{-j}$

令$V=\bigcap_1^\infty U_j,H=\bigcup_1^\infty K_j$，则$H\subset E\subset V$

$\mu(V)-2^{-j}\leq\mu(U_j)-2^{-j}\leq\mu(E)\leq\mu(K_j)+2^{-j}\leq\mu(H)+2^{-j}$

$j\to\infty,\mu(V)=\mu(E)=\mu(H)<+\infty$

故$\mu(V\setminus E)=\mu(E\setminus H)=0$

若$\mu(E)=+\infty$，

? □

命题 2.4.6. *若$E\in\mathcal{M}_\mu,\mu(E)<+\infty$，则$\forall\epsilon>0,\exists A$为有限个开区间的并，*

且$\mu(E\triangle A)<\epsilon$

证明. 首先$\mu(E)=\inf\{\mu(U):E\subset U,U$为开集$\}$,$\exists U\supset E,U$为开集,$\mu(U)-\mu(E)<\epsilon,\mu(E\triangle U)=\mu(U)-\mu(E)<\epsilon$，由引理2.1.11.$U$可写成可数给开区间的不交并，即$U=\bigcup_1^\infty I_j,I_i\cap I_j=\varnothing,\mu(U)=\sum_1^\infty\mu(I_j)$,于是$\exists N,\mu(U)-\sum_1^N\mu(I_j)<\epsilon$,令$A=\bigcup_1^N I_j\subset U,\mu(E\triangle A)=\mu(A\setminus E)+\mu(E\setminus A)=2\mu(A\cup E)-\mu(A)-\mu(E)=2\mu(A\cup E)-2\mu(U)+2\mu(U)-\mu(A)-\mu(E)<2\mu(A\cup E)-2\mu(U)+2\epsilon\leq 2\epsilon$ □

定义 2.4.7. $F(x)=x$诱导的完全的测度μ_F称为勒贝格测度，记作m，m定义域中的集合称为勒贝格可测集，记作$\mathcal{L}$

定义 2.4.8. $E\subset\mathbb{R},r,s\in\mathbb{R}$

$E+s:=\{x+s:x\in E\},rE:=\{rx:x\in E\}$

定理 2.4.9. 若$E\in\mathcal{L}$，则$E+s\in\mathcal{L},rE\in\mathcal{L},\forall r,s\in\mathbb{R}$，且$m(E+s)=m(E),m(rE)=|r|m(E)$

证明. 首先变换$E\mapsto E+s,E\mapsto rE$是保持$\mathcal{A}$的双射($r=0$时明显保持Borel集，故不妨设$r\neq 0$)，从而也是保持$\mathcal{B}_\mathbb{R}$的?，其中$\mathcal{A}$为h-区间有限不交并的集合，E为h-区间时，$m(E)=m(E+s),m(rE)=|r|m(E)$是明显的，又$m$是$\sigma$-有限的，由定理2.3.7知:

$m(E+s)=m(E),m(rE)=|r|m(E)$在$\mathcal{B}_\mathbb{R}$上恒成立

于是$E\in\mathcal{L},m(E)=0\Rightarrow\exists U_j\supset E$为开集,$m(U_j)<2^{-j}$,

$U_j+s\supset E+s,rU_j\supset rE$,

$m(E+s)\leq m(U_j+s)<2^{-j}$

$m(rE)\leq m(rU_j)<2^{-j}$

从而$m(E+s)=m(rE)=0$

$E\in\mathcal{L}$可写成Borel集和勒贝格零测集的并:$E=H\cup N$，于是$E+s=(H+s)\cup(N+s)\in\mathcal{L},rE=(rH)\cup(rN)\in\mathcal{L}$，且$m(E+s)=m(E),m(rE)=|r|m(E)$成立 □

?

证明. 记m^*为$F(x) = x$诱导的$\mathbb{R}$上的外测度，$r = 0$时是明显的，故不妨设$r \neq 0$,容易验证:

$(A+s)\cap(B+s) = (A\cap B)+s$

$(A+s)\cup(B+s) = (A\cup B)+s$

$(A+s)^c = A^c+s$

$(rA)\cap(rB) = r(A\cap B)$

$(rA)\cup(rB) = r(A\cup B)$

$(rA)^c = r(A^c)$

$E\in\mathcal{A}\Rightarrow E+s, rE\in\mathcal{A}$

首先验证，$\forall E\subset\mathbb{R}, m^*(E+s) = m^*(E), m^*(rE) = |r|m^*(E):$

对于h-区间E,$\mu_F(E+s) = \mu_F(E), \mu_F(rE) = |r|\mu_F(E)$是明显的

$\forall E\subset\mathbb{R}, m^*(E+s) = \inf\{\sum_1^\infty \mu_F(I_j) : I_j\in\mathcal{A}, E+s\subset\bigcup_1^\infty I_j\}$

$> \sum_1^\infty \mu_F(I_j)-\epsilon = \sum_1^\infty \mu_F(I_j-s)-\epsilon$，其中$I_j-s\in\mathcal{A}, E\subset\bigcup_1^\infty(I_j-s)$

即$m^*(E+s)\geq m^*(E)-\epsilon$对$\forall\epsilon>0$成立，故$m^*(E+s)\geq m^*(E)$

同理$m^*(E+s)\leq m^*(E)$

由于$rE\subset\bigcup_1^\infty I_j\Rightarrow E\subset\bigcup_1^\infty(r^{-1}I_j), r^{-1}I_j\in\mathcal{A}$

同上讨论知$m^*(rE) = |r|m^*(E)$

设$E\in\mathcal{L}$

$E+s\in\mathcal{L}\Leftrightarrow m^*(A) = m^*(A\cap(E+s))+m^*(A\cap(E+s)^c), \forall A\subset\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m^*(A) = m^*((A-s)\cap E+s)+m^*((A-s)\cap(E^c)+s)$

$\Leftrightarrow m^*(A) = m^*((A-s)\cap E)+m^*((A-s)\cap E^c)$

$\Leftrightarrow m^*(A) = m^*(A-s)$成立

同理可得$m^*(A) = m^*(A\cap(rE))+m^*(A\cap(rE)^c)$

从而$E+s, rE\in\mathcal{L}$

对于$E\in\mathcal{L}$

由于$m(E) = \inf\{\sum_1^\infty \mu_F(a_j,b_j) : E\subset\bigcup_1^\infty(a_j,b_j)\}$

同上讨论可知$m(E+s)=m(E),m(rE)=|r|m(E)$ $\square$

[0,1]上的p进位表数法

$x\in[0,1]$，我们按以下方式将x唯一的写做$\sum_1^\infty a_jp^{-j}$，其中$a_j=0,\dots,p-1$

p为大于1的整数

若$x=0,x=\sum_1^\infty 0*p^{-j}$

若$x\in(0,1]$

区间$(kp^{-j},(k+1)p^{-j}]$记作I_j^k，其中$k=0,1,\dots,p-1,j=1,\dots$

第1步：

$I_0^0=\bigcup_0^{p-1}I_1^k$是不交并，于是$\exists!k:x\in I_1^k,a_1:=k$

第2步：

$a_1p^{-1}+I_1^0=\bigcup_0^{p-1}(a_1p^{-1}+I_2^k)$是不交并，于是$\exists!k,x\in a_1p^{-1}+I_2^k,a_2:=k$

$\dots$

第j步：

设已经取出$a_1,a_2,\dots a_{j-1}$

$x\in\sum_{i=1}^{j-1}a_ip^{-i}+I_{j-1}^0=\bigcup_{k=1}^{p-1}(\sum_{i=1}^{j-1}a_ip^{-i}+I_j^k)$为不交并，

于是$\exists!k:x\in\sum_{i=1}^{j-1}a_ip^{-i}+I_j^k,a_j:=k$

$\dots$

我们得到唯一的$\{a_j\}_1^\infty$满足：

$a_j=0,1,\dots,p-1$

$\sum_{i=1}^{j}a_1p^{-i}<x\le\sum_{i=1}^{j}a_ip^{-i}+p^{-j},j=1,2,\dots$

$\forall j>0,\exists k\ge j,a_k\neq 0$

否则，设$\exists j>0,\forall k\ge j,a_k=0$

于是$\sum_{i=1}^{j-1}a_1p^{-i}<x\le\sum_{i=1}^{j-1}a_ip^{-i}+p^{-k},k=j-1,j,j+1,\dots$

$k\to\infty$ 得$\sum_{i=1}^{j-1}a_1p^{-i}<x\le\sum_{i=1}^{j-1}a_ip^{-i}$矛盾

于是$x=\sum_1^\infty a_ip^{-i}$，记作$0.a_1a_2\dots a_j\dots$为无穷小数

下面的讨论中，x的p进小数总采用以上取法

定义 2.4.10. *Cantor* 集$C := \{x \in [0,1] : x$的*3*进小数$0.a_1a_2\dots$中$a_j \neq 1,$
或$\exists N > 0, a_N = 1, a_j \neq 1 (j < N), a_j = 2 (j > N), j = 1, \dots\}$
注意*Cantor*集等价于$[0,1]$去掉形如$(0.a_1\dots a_j1,\ 0.a_1\dots a_j2)$的开区间，其中$a_i \neq 1, i = 1, \dots j$

命题 2.4.11. 设C为*Cantor*集
a. C是紧的，无处稠密的，完全不连通的*(*连通部分为单点集*)*，没有孤立点的
b. $m(C) = 0$
c. $card(C) = \mathcal{C}$

证明. b. 记$F = \bigcup\{(0.a_1\dots a_j1,\ 0.a_1\dots a_j2) : a_i \neq 1, i = 1, \dots j\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$
则$[0,1] = C \cup F$是不交并，$C = [0,1] \cap F^c \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,$m([0,1]) = m(C) + m(F)$
$m(F) = \sum_0^\infty \frac{2^j}{3^{j+1}} = \frac{1}{3} * \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$
于是$m(C) = 1 - m(F) = 0$
c. 设$x \in C$，$x = 0.x_1x_2\dots$，若x满足:
$\exists N > 0, x_N = 1, x_j \neq 1 (j < N), x_j = 2 (j > N), j = 1, \dots$
则将x改写为$0.x_1\dots x_{N-1}2$
于是$C = \{x \in [0,1] :$在上述改写后，x的3进小数中没有1$\}$
做映射$f : 0.x_1x_2, \dots \mapsto \sum_0^\infty \frac{x_j}{2} * 2^{-j}$
右端为$[0,1]$的2进小数，于是f为C到[0,1]的满射，$card(C) \geq \mathcal{C}$
又$C \subset [0,1]$，故$card(C) \leq \mathcal{C}$
综上，$card(C) = \mathcal{C}$
a.首先$C = [0,1] \cap F^c$为有界闭集，故是紧集
C无处稠密$\Leftrightarrow \overline{C}^\circ = \phi \Leftrightarrow C^\circ = \phi$
否则设$x \in C^\circ$，$\exists N \in \mathbb{N}, (x - 3^{-N}, x + 3^{-N}) \subset C, \exists k = 0, 1, \dots, 3^N - 1$
$(k3^{-N} + 3^{-(N+1)}, k3^{-N} + 2 * 3^{-(N+1)}) \subset (k3^{-N}, (k+1)3^{-N})$
$\subset (x - 3^{-N}, x + 3^{-N})$从而$C \cap F \neq \phi$矛盾

若C有连通部分是区间，则同上讨论知$C \cap F \neq \phi$矛盾

设$x \in C$，则$x = 0.x_1x_2\ldots$，其中$x_j = 0, 2$

$\overline{x}_N := 0.x_1x_2\ldots x_N$于是$\overline{x}_N \in C$且$|x - \overline{x}_N| \leq 2 * 3^{-N}$

这说明了$\forall x \in C$是C的聚点，也即C无孤立点 $\square$

第三章　积分

3.1　可测函数

$f : X \to Y$可诱导$f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X), f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\}$且$f^{-1}$与并，交，补可换序。从而，$\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(Y)$为$\sigma$-代数$\Rightarrow \{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{N}\}$为$X$上的$\sigma$-代数

定义 3.1.1. *设$(X, \mathcal{M}), (Y, \mathcal{N})$为可测空间，$f : X \to Y$称为$(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-可测的，或可测的，若$\forall E \in \mathcal{N}, f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$*

可测函数的复合明显是可测的，$f : X \to Y$是$(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-可测的，$g : Y \to Z$是$(\mathcal{N}, \mathcal{O})$-可测的，则$E \in \mathcal{O} \Rightarrow g^{-1}(E) \in \mathcal{N} \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(E)) \in \mathcal{M}$即$(g \circ f)^{-1}(E) \in \mathcal{M}$，从而$g \circ f$是$(\mathcal{M}, \mathcal{O})$-可测的

命题 3.1.2. *若$\mathcal{N}$是ε生成的σ-代数，则$f : X \to Y$是$(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-可测的充要条件是$\forall E \in \varepsilon, f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$*

证明. 由于$\varepsilon \subset \mathcal{N}$，必要性是明显的。充分性：$\{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$是包含$\varepsilon$的$\sigma$-代数，从而包含$\mathcal{N}$ □

推论 3.1.3. *若X, Y是度量(拓扑)空间，所有连续映射$f : X \to Y$是$(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$-可测的*

证明. f是连续的$\Leftrightarrow \forall U \subset Y$为开集，$f^{-1}(U) \in \mathcal{B}_X$，而$\mathcal{B}_Y$由$Y$中的开集生成 □

设$(X,\mathcal{M})$是可测空间，若X上的实值或复值函数f是$(\mathcal{M},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$或$(\mathcal{M},\mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-可测的，则称$f$为$\mathcal{M}$-可测的或可测的。

若$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$是$(\mathcal{L},\mathcal{B}_{\mathbb{C}})$(或$(\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\mathcal{B}_{\mathbb{C}})$)-可测的，则称为Lebesgue(Borel)-可测的，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$同理

$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是Lebesgue-可测的无法得出$f\circ g$是Lebesgue-可测的，因为$E\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\Rightarrow f^{-1}(E)\in\mathcal{L}$，却不一定$\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$，若$f$是Borel-可测的，则$f\circ g$是Lebesgue-可测的

命题 3.1.4. 若$(X,\mathcal{M})$是可测空间，$f:X\to\mathbb{R}$，以下命题等价

a. f是$\mathcal{M}$-可测的

b. $f^{-1}((a,+\infty))\in\mathcal{M},\forall a\in\mathbb{R}$

c. $f^{-1}([a,+\infty))\in\mathcal{M},\forall a\in\mathbb{R}$

d. $f^{-1}((-\infty,a))\in\mathcal{M},\forall a\in\mathbb{R}$

e. $f^{-1}((-\infty,a])\in\mathcal{M},\forall a\in\mathbb{R}$

证明. 由命题2.1.12. 命题3.1.2 可得 □

定义 3.1.5. 设$(X,\mathcal{M})$是可测空间，$f:X\to\mathbb{R}$，$E\in\mathcal{M}$，我们称f是E上可测的，如果$\forall B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}},E\cap f^{-1}(B)\in\mathcal{M}$

$\Leftrightarrow\forall B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}},f_{|E}^{-1}(B)\in\mathcal{M}_E:=\{F\cap E:F\in\mathcal{M}\}$

给定集合X，若$\{(Y_\alpha,\mathcal{N}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$是一族可测空间，$f_\alpha:X\to Y_\alpha,\alpha\in A$则$X$上存在唯一一个最小的$\sigma$-代数，使得每个$f_\alpha$是可测的，这个$\sigma$-代数由$f_\alpha^{-1}(E_\alpha)$生成，其中$E_\alpha\in\mathcal{N}_\alpha,\alpha\in A$，称为由$\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$生成的$\sigma$-代数，特别的，$X=\prod_{\alpha\in A}Y_\alpha$时，$X$上的乘积$\sigma$-代数是投影映射$\{\pi_\alpha\}_{\alpha\in A}$生成的

命题 3.1.6. 设$(X,\mathcal{M})$和$(Y_\alpha,\mathcal{N}_\alpha),\alpha\in A$是可测空间，$Y=\prod_{\alpha\in A}Y_\alpha$，
$\mathcal{N}=\bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{N}_\alpha$，$\pi_\alpha:Y\to Y_\alpha$是投影映射，那么$f:X\to Y$是可测的当且仅当$f_\alpha=\pi_\alpha\circ f$是$(\mathcal{M},\mathcal{N}_\alpha)$-可测的

证明. 从上面的讨论知投影映射$\pi_\alpha : Y \to Y_\alpha$是$(\bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{N}_\alpha,\mathcal{N}_\alpha)$-可测的，
若f是$(\mathcal{M},\mathcal{N})$可测的，那么$f_\alpha=\pi_\alpha\circ f$是$(\mathcal{M},\mathcal{N}_\alpha)$-可测的，必要性成立
若f_α是$(\mathcal{M},\mathcal{N}_\alpha)$-可测的，$\forall E_\alpha\in\mathcal{N}_\alpha, f_\alpha^{-1}(E_\alpha)=f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha))\in\mathcal{M}$
由于$\mathcal{N}=\bigotimes_{\alpha\in A}\mathcal{N}_\alpha=\mathcal{M}(\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha):E_\alpha\in\mathcal{N}_\alpha,\alpha\in A\})$
由命题3.1.2知f是$(\mathcal{M},\mathcal{N})$-可测的 □

推论 3.1.7. $f:X\to\mathbb{C}$是$\mathcal{M}$-可测的当且仅当$Re(f),Im(f)$是$\mathcal{M}$-可测的

扩展实数系$\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$，定义$\overline{\mathbb{R}}$上的Borel集$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}=\left\{E\subset\overline{\mathbb{R}}:E\cap\mathbb{R}\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\right\}$
$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$可由$(a,+\infty],[-\infty,a)$生成。$f:X\to\overline{\mathbb{R}}$如果是$(\mathcal{M},\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-可测的，则称为是$\mathcal{M}$-可测的

命题 3.1.8. 若$f,g:X\to\mathbb{C}$是$\mathcal{M}$-可测的，那么$f+g,fg$也是$\mathcal{M}$-可测的

证明. 定义$F:X\to\mathbb{C}\times\mathbb{C},\ \phi,\psi:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$
$F(x)=(f(x),g(x)),\phi(z,w)=z+w,\psi(z,w)=zw$
$\mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}}=\mathcal{B}_{\mathbb{C}}\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$，由命题3.1.6知$F$是$(\mathcal{M},\mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}})$-可测的，$\phi,\psi$均为连续的，从而可测，$f+g=\phi\circ F,fg=\psi\circ F$也是可测的 □

命题 3.1.9. 若$\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$是一列$(X,\mathcal{M})$上的扩展实值可测函数，那么

$$g_1(x)=\sup_j f_j(x),\qquad g_3(x)=\limsup_{j\to\infty}f_j(x)$$
$$g_2(x)=\inf_j f_j(x),\qquad g_4(x)=\liminf_{j\to\infty}f_j(x)$$

均为可测的

证明. 首先验证$g_1^{-1}((a,+\infty])=\bigcup_1^\infty f_j^{-1}((a,+\infty])$:
$x\in g_1^{-1}((a,+\infty])\Leftrightarrow a<g_1(x)\le+\infty$
$\Leftrightarrow\exists j:a<f_j(x)\le+\infty$
否则$\forall j:f_j(x)\le a\Rightarrow g_1(x)=\sup_j f_j(x)\le a$，矛盾
于是$\Leftrightarrow x\in\bigcup_1^\infty f_j^{-1}((a,+\infty])$
同理$g_2^{-1}([-\infty,a))=\bigcup_1^\infty f_j^{-1}([-\infty,a))$

于是g_1, g_2可测

$g_3(x) = \limsup_{j\to\infty} f_j(x) = \inf_k(\sup_{j>k} f_j(x))$是可测函数，$g_4$同理 □

推论 3.1.10. 若$f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$是可测的，那么$max(f,g), min(f,g)$也是可测的

推论 3.1.11. 若$\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$是一列复值可测函数，且$f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$存在，则$f$也是可测函数

定义 3.1.12. 设$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$，我们定义$f$的正部和负部：

$f^+(x) = max(f(x), 0), \quad f^-(x) = max(-f(x), 0)$

则$f = f^+ - f^-$若f是可测的，那么f^+, f^-也是可测的

若$f : X \to \mathbb{C}$ 我们有极分解：

$f = (sgn f)|f|$，其中$sgn(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & if\ z \neq 0 \\ 0 & if\ z = 0 \end{cases}$

若f是可测的，那么$z \mapsto |z|$是连续的，从而$|f|$可测，$z \mapsto sgn(z)$在除原点外连续，$U \subset \mathbb{C}$为开集，则$sgn^{-1}(U) = V \cup \{0\}$或开集，于是$sgn(z)$是可测的，即$sgn(f) = sgn \circ f$是可测的

定义 3.1.13. 设$(X, \mathcal{M})$为可测空间，$E \subset X$，我们定义E的特征函数*:*

$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1 & if\ x \in E \\ 0 & if\ x \notin E \end{cases}$

容易验证$\mathcal{X}_E$可测当且仅当$E \in \mathcal{M}$

定义 3.1.14. X上的简单函数是一些可测特征函数在复系数下的线性组合，我们不允许简单函数取值无穷。等价的有：$f : X \to \mathbb{C}$是简单函数当且仅当 f是可测的，且f的像集为$\mathbb{C}$的有限点集，此时有*:*

$f = \sum_1^n z_j \mathcal{X}_{E_j}$，其中$E_j = f^{-1}(\{z_j\})$，$range(f) = \{z_1, \ldots, z_n\}$

称为f的标准表示，其中各E_j是不交的，$\bigcup_1^n E_j = X$*(*某个$z_j = 0$*)*

若f,g为简单函数，则$f+g,fg$也是，因为$f+g,fg$仍为可测函数且像集为有限点集

下面讨论可测函数由简单函数逼近

定理 3.1.15. 设$(X,\mathcal{M})$为可测空间

a. 若$f:X\to[0,+\infty]$是可测的，存在一列简单函数$\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$满足：
$0\le\phi_1\le\phi_2\le\cdots\le f,\phi_n$逐点收敛于$f$，且在任意$f$有界的子集上，是一致收敛的

b. 若$f:X\to\mathbb{C}$是可测的，存在一列简单函数$\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$满足：
$0\le|\phi_1|\le|\phi_2|\le\cdots\le|f|,\phi_n$逐点收敛于$f$，且在任意$f$有界的子集上，是一致收敛的

证明. a. 对于$n=0,1,2,\ldots,0\le k\le 2^{2n}-1$

令$E_n^k=f^{-1}((k2^{-n},(k+1)2^{-n}]),F_n=f^{-1}((2^n,+\infty])$

令$\phi_n=\sum_{k=0}^{2^{2n}-1}k2^{-n}\mathcal{X}_{E_n^k}+2^n\mathcal{X}_{F_n}$

首先验证单调性:

$x\in[0,+\infty]$

1. $f(x)=0,\phi_n(x)=\phi_{n+1}(x)=0$

2. $x\in E_n^k,\phi_n(x)=k2^{-n},$

$f(x)\in(k2^{-n},(k+1)2^{-n}]=(2k2^{-(n+1)},2(k+1)2^{-(n+1)}]$

$\exists l=2k,2k+1,\ldots,2(k+1),x\in E_{n+1}^k,$

$\phi_{n+1}(x)=l2^{-(n+1)}\ge 2k2^{-(n+1)}=\phi_n(x)$

3. $x\in F_n,f(x)\in(2^n,+\infty]=(2^n,2*2^n]\cup(2^{n+1},+\infty]$

$=(2^{2n+1}*2^{-(n+1)},2^{2n+2}*2^{-(n+1)}]\cup(2^{n+1},+\infty]$

于是$\phi_{n+1}(x)=2^{n+1}$或$l2^{-(n+1)}\ge 2^{2n+1}*2^{-(n+1)}=2^n=\phi_n(x)$

总之有$\phi_{n+1}\ge\phi_n$

现在验证收敛性:

设f在E上有上界$2^N,\forall n>N,\forall x\in E,$

$\phi(x)=k2^{-n}<f(x)\le(k+1)2^{-n}=\phi_n(x)+2^{-n}$

即$0 < f(x) - \phi_n(x) \le 2^{-n}, \forall x \in E$

于是ϕ_n在E上一致收敛于f

$\forall x \in X$，若$f(x) < +\infty$，ϕ_n在x点的收敛以得证，若$f(x) = +\infty$

$\forall n, x \in F_n, \phi_n(x) = 2^n \to +\infty = f(x)$，于是$\phi_n$于$x$收敛

b. 设$f = g + ih$，对g^+, g^-, h^+, h^-使用a.，

得到$\psi_n^+, \psi_n^-, \zeta_n^+, \zeta_n^-$

令$\phi_n = \psi_n^+ - \psi_n^- + i(\zeta_n^+ - \zeta_n^-)$

对于$x \in X$，g^+, g^-, h^+, h^-分别至少有一个为0，

不妨设$g^-(x) = h^-(x) = 0$，于是$\psi_n^-(x) = \zeta_n^-(x) = 0$,

$|f(x)| = \sqrt{g^+(x)^2 + h^+(x)^2} \ge \sqrt{\psi_{n+1}^+(x)^2 + \zeta_{n+1}^+(x)^2}$

$\ge \sqrt{\psi_n^+(x)^2 + \zeta_n^+(x)^2}$

即$|f(x)| \ge |\phi_{n+1}(x)| \ge |\phi_n(x)|$

收敛性的部分是明显的 □

命题 3.1.16. 设$(X, \mathcal{M}, \mu)$是测度空间，下面推断是有效的，当且仅当测度μ是完全的

a. f是可测的且$f = g$是μ-几乎处处成立$\Rightarrow$ g是可测的

b. f_n是可测的，且$f_n \to f$是μ-几乎处处成立的$\Rightarrow$ f是可测的

证明. 首先设μ是完全的

a. 令$h = g - f$，则$\exists E \in \mathcal{M}, \mu(E) = 0 : \forall x \notin E, h(x) = 0$

往证$g = f + h$可测，只需证h可测，只需证$\forall a \in \mathbb{R}, h^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{M}$

1. $a \ge 0, h(x) > a \ge 0 \Rightarrow x \in E$，即$h^{-1}((a, +\infty]) \subset E$

由于μ是完全的，知$h^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{M}$

2. $a < 0, h^{-1}((a, +\infty]) = h^{-1}((a, 0)) \cup h^{-1}(\{0\}) \cup h^{-1}((0, +\infty])$

$= F_1 \cup E^c \cup F_2 \in \mathcal{M}$，其中$F_1, F_2$为$E$的子集$\in \mathcal{M}$，$E^c \in \mathcal{M}$

b. 令$h = \limsup_{n\to\infty} f_n, h = f$是$\mu$-几乎处处成立的，由于$h$是可测的，由a.知$f$是可测的

若μ不是完全的，对于μ-0测集E，$\exists F \subset E, F \notin \mathcal{M}$

$\mathcal{X}_X = \mathcal{X}_F$是$\mu$-几乎处处成立的，但$\mathcal{X}_X$可测，$\mathcal{X}_F$不可测，即推断a.不成立 □

命题 3.1.17. 设$(X, \mathcal{M}, \mu)$是一测度空间，$(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$是其完备化若$f$是$X$上的$\overline{\mathcal{M}}$-可测函数，则存在$\mathcal{M}$-可测函数$g$满足$f = g$是$\overline{\mu}$-几乎处处成立的

证明. 设$E \in \overline{\mathcal{M}}, \exists F \in \mathcal{M}, N'$为$\mu$-零测集$N$的子集，$E = F \cup N'$
$\mathcal{X}_E = \mathcal{X}_F$在$N' \setminus F$外成立，设$\{\phi_n\}$为一列$\overline{\mathcal{M}}$-可测简单函数逐点收敛于$f$
对ϕ_n执行上述操作，可得ψ_n为$\mathcal{M}$-可测简单函数，且在E_n外$\phi_n = \psi_n$处处成立，其中E_n为μ-零测集N_n的子集，令$N = \bigcup_n N_n$为μ-零测集
令$g = \limsup\limits_{n\to\infty} \psi_n, \forall x \in N^c : f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x) = g(x)$
即$f = g$是μ-几乎处处成立的，且g是$\mathcal{M}$-可测的 □

3.2 非负函数的积分

在这一节中，取定测度空间$(X, \mathcal{M}, \mu)$，定义L^+为所有$X \to [0, +\infty]$的可测函数空间

定义 3.2.1. 设$\phi = \sum_1^n a_j \mathcal{X}_{E_j} \in L^+$为简单函数，我们定义$\phi$的积分
$\int \phi \, d\mu = \sum\limits_1^n a_j \mu(E_j)$
约定$0 * \infty = 0$
设$A \in \mathcal{M}$，$\phi * \mathcal{X}_A = \sum\limits_1^n a_j \mathcal{X}_{E_j} \mathcal{X}_A = \sum\limits_1^n a_j \mathcal{X}_{E_j \cap A}$仍为简单函数
$\int_A \phi \, d\mu := \int \phi * \mathcal{X}_A \, d\mu$
在这个约定下$\int \phi \, d\mu = \int_X \phi \, d\mu$
有时$\int_A \phi \, d\mu$也写作$\int_A \phi(x) \, d\mu(x)$或$\int_A \phi$

命题 3.2.2. 设$\phi, \psi \in L^+$为简单函数
a. $c \geq 0 \Rightarrow \int c\phi = c \int \phi$
b. $\int (\phi + \psi) = \int \phi + \int \psi$

c. $\phi \leq \psi \Rightarrow \int \phi \leq \int \psi$

d. $A \mapsto \int_A \phi \, d\mu$是$\mathcal{M}$上的一个测度

证明. 设$\phi = \sum_1^n a_j \mathcal{X}_{E_j}, \psi = \sum_1^m b_j \mathcal{X}_{F_j}$

a. $\int c\phi = \sum_1^n c a_j \mu(E_j) = c \sum_1^n a_j \mu(E_j) = c \int \phi$

b. 由于$X = \bigcup_1^n E_j = \bigcup_1^m F_j$为不交并，$E_j = \bigcup_{k=1}^m (E_j \cap F_k), F_j = \bigcup_{k=1}^n (E_k \cap F_j)$也是不交并

$\int \phi + \int \psi = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^m b_k \mu(F_k)$

$= \sum_{j=1}^n a_j \mu(\bigcup_{k=1}^m (E_j \cap F_k)) + \sum_{k=1}^m b_k \mu(\bigcup_{j=1}^n (E_j \cap F_k))$

$= \sum_{j,k} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k)$

$= \int (\phi + \psi)$

c. $E_j \cap F_k \neq \varnothing \Rightarrow a_j \leq b_k$

$\int \phi = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) = \sum_{j,k} a_j \mu(E_j \cap F_k) \leq \sum_{j,k} b_j \mu(E_j \cap F_k) = \int \psi$

d. $\int_\varnothing \phi \, d\mu = \int \phi * \mathcal{X}_\varnothing \, d\mu = \sum_1^n a_j \mu(\varnothing \cap E_j) = 0$

设$\{A_k\} \subset \mathcal{M}$为一列不交集，$A = \bigcup_1^\infty A_k$

$\int_A \phi \, d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(A \cap E_j) = \sum_{j=1}^n a_j \mu(\bigcup_{k=1}^\infty (A_k \cap E_j))$

$= \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k \cap E_j)$

$= \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^n a_j \mu(A_k \cap E_j)$

$= \sum_{k=1}^\infty \int_{A_k} \phi \, d\mu$

于是该映射是$\mathcal{M}$上的一个测度 □

现在我们将积分的定义扩张到L^+上

定义 3.2.3. 若$f \in L^+$，$\int f \, d\mu := \sup \left\{ \int \phi \, d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi是简单函数 \right\}$

由命题*3.2.2.c.*知，f为简单函数时，两个定义是等价的

容易验证$f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g, \int cf = c \int f, c \in [0, +\infty]$

定理 3.2.4. *The Monotone Convergence Theorem*

若$\{f_n\} \subset L^+, f_j \leq f_{j+1}, f = \lim_{n\to\infty} f_n (= \sup_n f_n)$

那么$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$

证明. 首先$\int f_n$是单调递增数列，故极限存在或$= +\infty$

$f_n \leq f \Rightarrow \int f_n \leq \int f \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f$

取$\alpha \in (0,1)$，$0 \leq \phi \leq f$为简单函数，$E_n := \{x : f_n(x) \geq \alpha\phi(x)\}$

则$E_n \in \mathcal{M}(f-\alpha\phi$可测$(f-\alpha\phi)^{-1}[0,+\infty] \in \mathcal{M})$，且$E_n \subset E_{n+1}, \bigcup_n E_n = X$，否则$\exists x \in X : \forall n, f_n(x) < \alpha\phi(x) \Rightarrow f(x) \leq \alpha\phi(x) < \phi(x) \leq f(x)$矛盾于是$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \alpha \int_{E_n} \phi$

$\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \geq \alpha \lim\limits_{n\to\infty} \int_{E_n} \phi = \alpha \int_{\bigcup_1^\infty E_n} \phi = \alpha \int \phi$

以上讨论对任意α, ϕ成立，令$\alpha \to 1$，得$\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \geq \int \phi$

再对所有简单函数ϕ取上确界，得$\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \geq \int f$

综上，$\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = \int \phi$ □

对于$f \in L^+$，可取$\{\phi\} \subset L^+$为一单调简单函数且逐点收敛于f，$\int f = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n$

定理 3.2.5. *若$\{f_n\} \subset L^+$是一列有限或可数函数，$f = \sum_n f_n$*
则$\int f = \sum_n \int f_n$

证明. 首先考虑f_1, f_2，取$\{\phi_j\}, \{\psi_j\} \subset L^+$为单调递增简单函数且分别逐点收敛于$f_1, f_2$，那么$\{\phi_j + \psi_j\}$为单调递增简单函数且逐点收敛于$f_1 + f_2$

$\int(f_1 + f_2) = \lim_{j\to\infty} \int(\phi_j + \psi_j) = \lim_{j\to\infty}(\int \phi_j + \int \psi_j) = \lim_{j\to\infty} \int \phi_j + \lim_{j\to\infty} \int \psi_j = \int f_1 + \int f_2$

这表明若$\{f_n\}$是有限的，$\int f = \sum_n \int f_n$

若是无穷的，$\sum_1^N f_n$是单调递增的，$\int f = \int \sum_1^\infty f_n = \int \lim\limits_{N\to\infty} \sum_1^N f_n$

$= \lim_{N\to\infty} \int \sum_1^N f_n = \lim_{N\to\infty} \sum_1^N \int f_n = \sum_1^\infty \int f_n$ □

命题 3.2.6. *若$f \in L^+$,那么$\int f = 0 \Leftrightarrow f = 0$ a.e.*

证明. 首先若$f = \sum_j a_j \mathcal{X}_{E_j}$是简单函数，$\int f = 0 \Leftrightarrow a_j = 0$或$\mu(E_j) = 0$

对每个j成立，$\Leftrightarrow f = 0$ a.e.

$\Leftarrow$

$0 \le \phi \le f$为简单函数，则$\phi = 0$ a.e.$\Rightarrow \int \phi = 0$

于是$\int f = \sup_{0\le\phi\le f} \int \phi = 0$

$\Rightarrow$

$f^{-1}((0,+\infty]) = f^{-1}((\bigcup_1^\infty(\frac{1}{n}), +\infty]) = \bigcup_1^\infty f^{-1}((\frac{1}{n}, +\infty])$

若$f = 0$ a.e.不成立，必$\exists N : \mu(f^{-1}((\frac{1}{N}, +\infty])) > 0$，记为$E_N$

否则$\mu(f^{-1}((0,+\infty])) \le \sum_1^\infty \mu(f^{-1}((\frac{1}{n}, +\infty])) = 0$

这与$f = 0$ a.e.不成立矛盾

于是$\int f \ge \int f * \mathcal{X}_{E_N} > \int \frac{1}{N} * \mathcal{X}_{E_N} = \frac{1}{N} * \mu(E_N) > 0$

这又与$\int f = 0$矛盾 □

推论 3.2.7. *若*$\{f_n\} \subset L^+, f \in L^+$，$f_n(x)$*单调递增趋于*$f(x)$ *a.e.那么*$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$

证明. $\exists E \in \mathcal{M} : \mu(E^c) = 0, \forall x \in E, f_n(x)$单调递增趋于$f(x)$成立，那么$f - f * \mathcal{X}_E \in L^+, f_n - f_n * \mathcal{X}_E \in L^*$且$f - f * \mathcal{X}_E = 0, f_n - f_n * \mathcal{X}_E = 0$ a.e.，由命题3.2.6.知$\int f - f * \mathcal{X}_E = \int f_n - f_n * \mathcal{X}_E = 0$

又$f_n * \mathcal{X}_E$单调递增趋于$f * \mathcal{X}_E$

$\int f = \int f * \mathcal{X}_E = \lim_{n\to\infty} \int f_n * \mathcal{X}_E = \lim_{n\to\infty} \int f_n$ □

引理 3.2.8. *Fatou's Lemma*

若$\{f_n\} \subset L^+$*是任意序列，则*$\int(\liminf f_n) \le \liminf \int f_n$

证明. $\forall j \ge k, \inf\limits_{n\ge k} f_n \le f_j$,于是$\int \inf\limits_{n\ge k} f_n \le \int f_j, \forall j \ge k$

$\Rightarrow \int \inf\limits_{n\ge k} f_n \le \inf\limits_{j\ge k} \int f_j$

令$k \to \infty$，有$\int(\liminf f_n) = \lim_{k\to\infty} \int \inf\limits_{n\ge k} f_n \le \liminf \int f_n$ □

推论 3.2.9. *若*$\{f_n\} \subset L^+, f \in L^+, f_n \to f$ *a.e.*，*那么*$\int f \le \liminf \int f_n$

证明. 若$f_n \to f$处处成立，那么根据Fatou's Lemma，$\int f = \int \liminf f_n \le \liminf \int f_n$。一般的，$\exists E \in \mathcal{M} : \mu(E^c) = 0, \forall x \in E, f_n(x) \to f(x)$，即$f_n * \mathcal{X}_E \to f * \mathcal{X}_E$处处成立,$f - f * \mathcal{X}_E, f_n - f_n * \mathcal{X}_E \in L^+, f - f * \mathcal{X}_E = 0, f_n -$

$f_n * \mathcal{X}_E = 0$ a.e.，于是$\int f = \int f * \mathcal{X}_E, \int f_n = \int f * \mathcal{X}_E$

$\int f = \int f * \mathcal{X}_E \leq \liminf \int f_n * \mathcal{X}_E = \liminf \int f_n$ □

命题 3.2.10. 若$f \in L^+, \int f < +\infty$，那么$\{x : f(x) = +\infty\}$是零测集，且$\{x : f(x) > 0\}$是$\sigma$-有限的

证明. 记$E_n = f^{-1}((n, n+1]), n = 1, \ldots, F_k = f^{-1}((\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]), k = 1, 2, \ldots$，则$\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$是不交并，若$\exists E_n$或$F_k$，使得$\mu(E_n) = +\infty$或$\mu(F_k) = +\infty$，则取$\phi = n\mathcal{X}_{E_n}$或$\frac{1}{k+1}\mathcal{X}_{F_k}$，均有$\phi \leq f$，于是$\int f \geq \int \phi = +\infty$，矛盾，从而$\{x : f(x) > 0\}$是$\sigma$-有限的

记$E = f^{-1}(\{+\infty\})$，若$\mu(E) = c > 0$，那么取$\phi_n = n\mathcal{X}_E$，有$\phi_n \leq f$

$\int f \geq \lim_{n\to\infty} \int \phi_n = \lim_{n\to\infty} nc = +\infty$，矛盾，故$\mu(E) = 0$ □

3.3　复值函数的积分

这一节仍假定$(X, \mathcal{M}, \mu)$是测度空间

定义 3.3.1. 设$f : X \to \mathbb{R}$是可测的，且$\int f^+$和$\int f^-$至少一个是有限的，则定义$\int f = \int f^+ - \int f^-$

定义 3.3.2. 若$\int f^+$和$\int f^-$都是有限的，则称f是可积的，由于$|f| = f^+ + f^-$，f可积等价于$|f|$可积，等价于$\int |f| < +\infty$

命题 3.3.3. X上的所有实值可积函数构成实向量空间，且积分是其上的线性函数

证明. X上的所有实值函数构成实向量空间，故只需验证所有实可积函数是其子空间，只需验证对线性运算封闭。设f, g为实可积函数，则 $af+bg$是实可测的，且$|af + bg| \leq |a||f| + |b||g| \Rightarrow \int |af + bg| \leq |a| \int |f| + |b| \int |g|$是有限的，从而封闭性得证。

设$h = f + g$，$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$,

$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$
$\Rightarrow \int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+$
$\Rightarrow \int h = \int h^+ - \int h^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int f + \int g$
$a \geq 0$时，$\int af = \int af^+ - \int af^- = a\int f^+ - a\int f^- = a(\int f^+ - \int f^-) = a\int f$
$a < 0$时类似可得
综上，积分是这个向量空间上的线性函数 □

定义 3.3.4. 若f是复值可测函数，若$\int |f| < +\infty$，则称f是可积的。更一般的，若$E \in \mathcal{M}$，$\int_E |f| < +\infty$，则称f在E上是可积的
由于$|f| \leq |Re\, f| + |Im\, f| \leq 2|f|$，$f$可积当且仅当$Re\, f$和$Im\, f$均可积
于是我们可以定义$\int f = \int Re\, f + i\int Im\, f$
容易验证所有复值可积函数构成复向量空间，其上的积分是线性函数，我们将这个向量空间记作$L^1(\mu)$或$L^1(X,\mu)$或$L^1(X)$或L^1

命题 3.3.5. 若$f \in L^1$，那么$|\int f| \leq \int |f|$

证明. f是实值函数时$|\int f| = |\int f^+ - \int f^-| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|$
f为复值函数时，不妨设$\int f \neq 0$，令$\alpha = \overline{sgn(\int f)}$，那么$|\int f| = \frac{|\int f|^2}{|\int f|} = \frac{\overline{\int f} * \int f}{|\int f|} = \alpha \int f = \int \alpha f$
$|\int f| = Re\, \int \alpha f = \int Re(\alpha f) \leq \int |Re(\alpha f)| \leq \int |\alpha f| = \int |f|$ □

命题 3.3.6. *a.* 若$f \in L^1$，则$\{x : f(x) \neq 0\}$是σ-有限的
b. 若$f, g \in L^1$，那么$\forall E \in \mathcal{M}, \int_E f = \int_E g$当且仅当$\int |f - g| = 0$当且仅当$f = g\ a.e.$

证明. a. $\{x : f(x) \neq 0\} = f^{-1}([-\infty, 0)) \cup f^{-1}((0, +\infty])$
$= (f^+)^{-1}((0, +\infty]) \cup (-f^-)^{-1}([-\infty.0))$
由$f \in L^1$知$\int |f^+| < +\infty, \int |f^-| < +\infty$
由命题3.2.10.知$(f^+)^{-1}((0, +\infty])$和$(-f^-)^{-1}([-\infty, 0)) = (f^-)^{-1}((0, +\infty])$均为$\sigma$-有限的，从而$\{x : f(x) \neq 0\}$是$\sigma$-有限的

b. 由命题3.2.6.知$\int |f-g|=0 \Leftrightarrow f=g$ a.e.

$\int |f-g|=0 \Rightarrow \forall E\in\mathcal{M}, \int_E f=\int_E g$

$|\int_E f-\int_E g|=|\int (f-g)*\mathcal{X}_E|\le \int |(f-g)*\mathcal{X}_E|\le \int |f-g|=0$

从而$\int_E f=\int_E g$

$\forall E\in\mathcal{M}, \int_E f=\int_E g \Rightarrow f=g$ a.e.

设$u=Re(f-g), v=Im(f-g)$，若$f-g=u+iv=0$ a.e. 不成立，不妨设$u=0$ a.e.不成立，令$E^+=(u^+)^{-1}((0,+\infty]), E^-=(u^-)^{-1}((0,+\infty])$，那么$E=\{x:u(x)\neq 0\}=E^+\cup E^-$是不交的，且$\mu(E)>0$，故不妨设$\mu(E^+)>0, \forall x\in E^+, u^-(x)=0, Re(\int_{E^+} f-\int_{E^+} g)=\int_{E^+} Re(f-g)=\int_{E^+} u^+>0$，这与题设矛盾

$\int_{E^+} u^+>0$是因为：

$E^+=(u^+)^{-1}((0,+\infty])=(u^+)^{-1}(\bigcup_1^\infty(\frac{1}{n},+\infty])=\bigcup_1^\infty(u^+)^{-1}((\frac{1}{n},+\infty])$

$\mu(E^+)>0\Rightarrow \exists n:\mu((u^+)^{-1}((\frac{1}{n},+\infty]))>0, E_n:=(u^+)^{-1}((\frac{1}{n},+\infty])$

$\int_{E^+} u^+\ge \int_{E_n} u^+\ge \int_{E_n}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}*\mu(E_n)>0$ □

这个命题告诉我们，改变一个可积函数在一个零测集上的值不改变它的积分(假设该测度空间完全，改变函数在一个零测集上的值不改变其可测性)。若函数f只在$E\in\mathcal{M}$上有定义，且$\mu(E^c)=0$，那么我们可以补充定义$x\in E^c, f(x)=0$从而计算其积分(f是否可测?)。对于$\overline{\mathbb{R}}$值的可积函数f，也可以改变∞为有限值($f^{-1}(\infty)$零测)，而不改变其积分值。

容易验证$f=g$ a.e.为$L^1(\mu)$上的等价关系，且$f=g$ a.e.$\Rightarrow \int f=\int g$，于是我们可以重新定义$L^1(\mu)$为在这个等价关系下的商集，这样$L^1(\mu)$仍为复向量空间($\int|f_1-f_2|=\int|g_1-g_2|=0\Rightarrow \int|f_1+g_1-f_2-g_2|\le\int|f_1-f_2|+\int|g_1-g_2|=0, \int|af_1-af_2|=|a|\int|f_1-f_2|=0$，故加法和数乘有定义)。尽管$L^1(\mu)$已经被定义为商集，我们仍用$f\in L^1(\mu)$表示一个可积函数$f$

$L^1(\mu)$的新定义有两个好处：1.若$\overline{\mu}$是μ的完备化，命题3.1.17.给出了$L^1(\overline{\mu})$到$L^1(\mu)$的单射，因此可以认为这两个空间是相同的(?)；2.在度量$\rho(f,g)=$

$\int|f-g|$下，$L^1(\mu)$构成度量空间(三角不等式和对称性是明显的，$\int|f-g|=0 \Leftrightarrow f=g\ a.e.$)，我们将该度量空间中的收敛称为$L^1$中的收敛：$f_n \to f\ in\ L^1 \Leftrightarrow \int|f_n-f| \to 0$

定理 3.3.7. *The Dominated Convergence Theorem*
令$\{f_n\}$为L^1中的函数列满足：
$a.\ f_n \to f\ a.e.$
$b.\ \exists g \in L^1, g \geq 0 : |f_n| \leq g\ a.e., \forall n$
那么$f \in L^1$且$\int f = \lim_{n\to\infty}\int f_n$

证明. 首先f在修改一个μ-零测集上的函数值后是μ-可测的，由命题3.1.16. 3.1.17，知，f在修改一个μ-零测集上的函数值后$\in L^1$(因为$|f_n| \leq g\ a.e. \Rightarrow |f| \leq g\ a.e.$，从而$f$是有限的)分别考虑$f_n, f$的实部和虚部，不妨假设它们都是实值函数，有$g+f_n \geq 0\ a.e., g-f_n \geq 0\ a.e.$即$\exists E \in \mathcal{M}, \mu(E^c)=0, (g+f_n)*\mathcal{X}_E, (g-f_n)*\mathcal{X}_E \in L^+$,由Fatou's Lemma,
$\int f + \int g = \int(f+g)*\mathcal{X}_E = \int(f*\mathcal{X}_E + g*\mathcal{X}_E) = \int \liminf(f_n*\mathcal{X}_E + g*\mathcal{X}_E)$
$\leq \liminf \int(f_n*\mathcal{X} + g*\mathcal{X}_E) = \int g*\mathcal{X}_E + \liminf \int f_n*\mathcal{X}_E$
$= \int g + \liminf \int f_n$
$\int g - \int f = \int(g-f) = \int \liminf(g-f_n)*\mathcal{X}_E \leq \liminf \int(g*\mathcal{X}_E - f_n*\mathcal{X}_E)$
$= \int g - \limsup \int f_n$
综上，$\limsup \int f_n \leq \int f \leq \liminf \int f_n$，即$\lim \int f_n = \int f$ □

定理 3.3.8. 设$\{f_j\} \subset L^1$满足$\sum_1^\infty \int|f_j| < +\infty$，那么$\sum_1^\infty f_j$几乎处处收敛于$L^1$中的一个函数，且$\int \sum_1^\infty f_j = \sum_1^\infty \int f_j$

证明. 首先$\int \sum_1^\infty |f_j| = \sum_1^\infty \int |f_j| < +\infty, g = \sum_1^\infty |f_j| \in L^1$，且$g$是几乎处处有限的，从而$\sum_1^\infty f_j$几乎处处收敛，又$|\sum_1^\infty f_j| \leq g$，由控制收敛定理$\int \sum_1^\infty f_j = \sum_1^\infty \int f_j$ □

定理 3.3.9. 若$f \in L^1(\mu), \epsilon > 0$,那么$\exists$可积简单函数$\phi = \sum a_j \mathcal{X}_{E_j}$使得

$\int |f-\phi|\,d\mu < \epsilon$，*若$\mu$是$\mathbb{R}$上的Lebesgue-Stieltjes测度，$E_j$可以是有限个开区间的并，还有一有界闭集外为0的连续函数$g: \int |f-g|\,d\mu < \epsilon$*

证明. 由定理3.1.15.存在简单函数列ϕ_n逐点收敛于f，即$\lim|f-\phi_n| = 0, |f-\phi_n| \leq 2|f|$，由控制收敛定理，$\lim\int|f-\phi_n| = \int\lim|f-\phi_n| = 0$，于是存在充分大的$n$使得$\int|f-\phi_n| < \epsilon$，若$\mu$为$\mathbb{R}$上的Lebesgue-Stieltjes测度，
$\phi_n = \sum_1^N a_j\mathcal{X}_{E_j}, \mu(E_j) = a_j^{-1}\int_{E_j}\phi_n \leq a_j^{-1}\int|f| < +\infty$
由命题2.4.6.存在有限个1开区间的并A_j，使得$\mu(E_j\triangle A_j) < \epsilon$
$\mu(E\triangle F) = \mu(E\cup F) - \mu(F\cap E) = \int\max(\mathcal{X}_E, \mathcal{X}_F) - \int\min(\mathcal{X}_E, \mathcal{X}_F) = \int|\mathcal{X}_E - \mathcal{X}_F|$
令$\psi_n = \sum_1^N a_j\mathcal{X}_{A_j}, \int|f-\psi_n| \leq \int|f-\phi_n| + \int|\phi_n-\psi_n| < \epsilon + \sum_1^N|a_j||\mathcal{X}_{E_j} - \mathcal{X}_{A_j}| < \epsilon + \sum_1^N|a_j|\mu(A_j\triangle E_j) < \epsilon(1+\sum_1^N|a_j|)$

对于开区间(a,b)，定义连续函数$g_{(a,b)}^{\epsilon} = \begin{cases} 0 & \text{if } x\in[-\infty,a] \\ \epsilon^{-1}(x-a) & \text{if } x\in(a,a+\epsilon) \\ 1 & \text{if } x\in[a+\epsilon,b-\epsilon] \\ -\epsilon^{-1}(x-b) & \text{if } x\in(b-\epsilon,b) \\ 0 & \text{if } x\in[b,+\infty] \end{cases}$

$\int|g_{(a,b)}^{\epsilon} - \mathcal{X}_{(a,b)}| < \int\mathcal{X}_{[a,a+\epsilon]} + \mathcal{X}_{[b-\epsilon,b]} = 2\epsilon$
已知存在简单函数$\phi = \sum a_j\mathcal{X}_{I_j}, \int|f-\phi| < \epsilon$，其中$I_j$为开区间，取$g = \sum a_j g_{I_j}^{\epsilon}$为连续函数，$\int|f-g| \leq \int|f-\phi| + \int|\phi-g| < \epsilon + \sum|a_j|\int|\mathcal{X}_{I_j} - g_{I_j}^{\epsilon}| < \epsilon(1+2\sum|a_j|)$ □

定理 3.3.10. *设$f: X\times[a,b]\to\mathbb{C}(a<b)$，且$\forall t\in[a,b], f(.,t): X\to\mathbb{C}$可积*
令$F(t) = \int_X f(x,t)\,d\mu(x)$，则
a. 若存在$g\in L^1(\mu): \forall t\in[a,b], |f(x,t)| \leq g(x), \forall x\in X, \lim_{t\to t_0} f(x,t) = f(x,t_0)$，那么$\lim_{t\to t_0}F(t) = F(t_0)$
b. 若$\frac{\partial f}{\partial t}$存在，$\exists g\in L^1(\mu): |\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq g(x), \forall x,t$，那么$F$可微，且$\frac{dF}{dt}(t) = \int_X\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu(x)$

证明. a. 由海涅定理，只需证明：$\forall\{t_n\}\subset[a,b],t_n\to t_0:F(t_n)\to F(t_0)$
令$h_n(x)=f(x,t_n)$，于是h_n可测，逐点收敛于$f(x,t_0)$，且$|h_n|\le g$，由控制收敛定理，$F(t_n)=\int h_n d\mu\to\int f(x,t_0)d\mu=F(t_0)$
b. 只需证明$\forall t_0\in[a,b],\forall\{t_n\}\subset[a,b]\setminus\{t_0\},t_n\to t_0:\frac{F(t_n)-F(t_0)}{t_n-t_0}\to\int_X\frac{\partial f}{\partial t}f(x,t_0)d\mu$，其中$\frac{F(t_n)-F(t_0)}{t_n-t_0}=\int_X\frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}d\mu(x)$，令$h_n(x)=\frac{f(x,t_n)-f(x,t_0)}{t_n-t_0}$
于是h_n可测，逐点收敛于$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$，且$|h_n(x)|=|\frac{\partial f}{\partial t}(x,\xi_n)|\le\sup_{t\in[a,b]}|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)|\le g(x)$，由控制收敛定理，$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$可测，且$\frac{F(t_n)-F(t_0)}{t_n-t_0}=\int_X h_n d\mu\to\int_X\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)d\mu(x)$

□

定义 3.3.11. 令$[a,b]$为一有限闭区间，$P=\{t_j\}_0^n\subset[a,b]:a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$称为$[a,b]$的分割，再设$f$为$[a,b]$上的有界实值函数，
$S_Pf:=\sum_1^n M_j(t_j-t_{j-1}),s_P:=\sum_1^n m_j(t_j-t_{j-1})$，其中$M_j=\sup_{x\in[t_j,t_{j-1}]}f(x)$
$m_j=\inf_{x\in[t_j,t_{j-1}]}f(x)$
定义$\overline{I}_a^b(f)=\inf\limits_P S_Pf,\underline{I}_a^b(f)=\sup\limits_P s_Pf$
若$\overline{I}_a^b(f)=\underline{I}_a^b(f)$，则称$f$在$[a,b]$上黎曼可积，$\int_a^b f(x)dx:=\overline{I}_a^b(f)$

定理 3.3.12. 设f为$[a,b]$上的有界实值函数
a. 若f黎曼可积，则f勒贝格可积，且$\int_a^b f(x)dx=\int_{[a,b]}fdm$
b. f黎曼可积当且仅当f的不连续点集为勒贝格零测集

证明. a.设f为$[a,b]$上的黎曼可积函数，$P=\{t_j\}_0^n,G_P=\sum_1^n M_j\mathcal{X}_{(t_{j-1},t_j]}g_P=\sum_1^n m_j\mathcal{X}_{(t_{j-1},t_j]}$，取$\{P_k\}_1^\infty:|P_k|=\sup(t_j-t_{j-1})\to 0(k\to\infty),P_k\subset P_{k+1}$，于是$G_{P_k},g_{P_k}$分别为单调递减和单调递增函数,$\int_a^b G_{P_k}dx=\sum_1^n M_j(t_j-t_{j-1})=\int_{(a,b]}G_{P_k}dm=\int_{[a,b]}G_{P_k}dm,\int_a^b g_{P_k}dx=\int_{[a,b]}g_{P_k}dm$
令$G=\lim_{k\to\infty}G_{P_k},g=\lim_{k\to\infty}g_{P_k}$，于是$G,g$可测，且由单调收敛定理知：
$\int_{[a,b]}Gdm=\lim\int_{[a,b]}G_{P_k}dm=\lim\int_a^b G_{P_k}(x)dx=\int_a^b f(x)dx$
同理$\int_{[a,b]}gdm=\int_a^b f(x)dx$
$G-g\ge 0,\int_{[a,b]}(G-g)dm=0\Rightarrow G=g\ a.e.$从而$G=f\ a.e.$由于$m$是完备的，知$f$可测，且$\int_{[a,b]}fdm=\int_{[a,b]}Gdm=\int_a^b f(x)dx<+\infty$，于是$f$勒贝格可积

b. 先证明两个引理：

引理 3.3.13. *1.* 定义$H(x)=\lim_{\delta\to 0}\sup_{y\in[x-\delta,x+\delta]}f(y), h(x)=\lim_{\delta\to 0}\inf_{y\in[x-\delta,x+\delta]}f(y)$ 则$H(x)=h(x)$当且仅当f于x点连续

证明. f于x点连续当且仅当$\lim_{y\to x}f(y)=f(x)$，当且仅当f沿$y\to x$的附着点只有$f(x)$当且仅当$\bigcap_{\delta>0}\overline{f([x-\delta,x+\delta])}=\{f(x)\}$，右边包含于左边是明显的，于是等价于证明$\bigcap_{\delta>0}\overline{f([x-\delta,x+\delta])}\subset\{f(x)\}$当且仅当$H(x)=h(x)$现在证明$H(x)=\sup\bigcap_{\delta>0}\overline{f([x-\delta,x+\delta])}$：

取定x，记$d=H(x),\forall\epsilon>0,\exists\delta_0>0:\sup_{y\in[x-\delta_0,x+\delta_0]}f(y)<d+\epsilon$

$\bigcap_{\delta>0}\overline{f([x-\delta,x+\delta])}\subset\overline{f([x-\delta_0,x+\delta_0])}\Rightarrow\sup\bigcap_{\delta>0}\overline{f([x-\delta,x+\delta])}\le\sup\overline{f([x-\delta_0,x+\delta_0])}=\sup_{y\in[x-\delta_0,x+\delta_0]}f(y)<d+\epsilon$

由ϵ任意性，$\sup\bigcap_{\delta>0}\overline{f([x-\delta,x+\delta])}\le d$

记$\sup\overline{f([x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}])}=y_n,\lim_{n\to\infty}y_n=d$由于$y_n\in\overline{f([x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}])}$

$\exists x_n\in[x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}],|f(x_n)-y_n|<\frac{1}{n}$，于是$\lim_{n\to\infty}x_n=x,\lim_{n\to\infty}f(x_n)=d,\forall\delta>0,$往证$d\in\overline{f([x-\delta,x+\delta])}$，即证$\forall\epsilon>0,(d-\epsilon,d+\epsilon)\cap f([x-\delta,x+\delta])\neq\varnothing$，对上述$\epsilon,\delta,\exists N:x_N\in[x-\delta,x+\delta],f(x_N)\in(x-\epsilon,x+\epsilon)$这就证明了$d\in\bigcap_{\delta>0}\overline{f([x-\delta,x+\delta])}$，从而$d\le\sup\bigcap_{\delta>0}\overline{f([x-\delta,x+\delta])}$

综上，$H(x)=\sup\bigcap_{\delta>0}\overline{f([x-\delta,x+\delta])}$，同理$h(x)=\inf\bigcap_{\delta>0}\overline{f([x-\delta,x+\delta])}$

f于x连续当且仅当$H(x)=h(x)$ □

引理 3.3.14. *2.* 沿用定理*3.3.12.a*的记号，$H=G\ a.e.,h=g\ a.e.$因此H,G均勒贝格可测，且$\int_{[a,b]}Hdm=\overline{I}_a^b(f),\int_{[a,b]}hdm=\underline{I}_a^b(f)$

证明. P_k的选取同定理3.3.12.a，令$N=\bigcup_1^\infty P_k$为勒贝格零测集

$\forall x\in[a,b]\setminus N,\forall k,\exists j:x\in(t_{j-1}^k,t_j^k),\exists\delta_0>0:(t_{j-1}^k,t_j^k)\supset[x-\delta_0,x+\delta_0],G_{P_k}(x)=\sup_{y\in(t_{j-1}^k,t_j)}f(y)\ge\sup_{y\in[x-\delta_0,x+\delta_0]}f(y)\ge\inf_{\delta>0}\sup_{y\in[x-\delta,x+\delta]}f(y)=H(x)$

$k\to\infty,G(x)\ge H(x)$

$\forall x\in[a,b]\setminus N$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_0 > 0 : \sup\limits_{y \in [x-\delta_0, x+\delta_0]} f(y) < H(x) + \epsilon$

对上述x, δ_0，又存在$k, j : (t^k_{j-1}, t^k_j) \subset [x - \delta_0, x + \delta_0]$

$G(x) \leq G_{P_k}(x) = \sup\limits_{y \in (t^k_{j-1}, t^k_j)} f(y) \leq \sup\limits_{y \in [x-\delta_0, x+\delta_0]} f(y) < H(x) + \epsilon$

由ϵ任意性，$G(x) \leq H(x)$

即$\forall x \in [a, b] \setminus N, G(x) = H(x)$

同理可得$g(x) = h(x)\ a.e.$

$\int_{[a,b]} H dm = \int_{[a,b]} G dm = \lim \int_{[a,b]} G_{P_k} dm = \lim S_{P_k}(f) = \overline{I}^b_a(f)$

$\int_{[a,b]} h dm = \int_{[a,b]} g dm = \lim \int_{[a,b]} g_{P_k} dm = \lim s_{P_k}(f) = \underline{I}^b_a(f)$ □

现在可以完成b.的证明:

f黎曼可积当且仅当$\overline{I}^b_a(f) = \underline{I}^b_a(f)$当且仅当$\int_{[a,b]} H dm = \int_{[a,b]} h dm$当且仅当$H = h\ a.e.$当且仅当$f$连续 a.e. □

今后黎曼积分符号均用于表示勒贝格积分

3.4　收敛