这一节建立了用来构造测度的工具

定义 0.0.1. 非空集合X上的外测度是函数$\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$，并且满足以下条件：

1. $\mu^*(\phi) = 0$

2. $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

3. $\mu^*(\bigcup_1^\infty A_j) \leq \sum_1^\infty \mu^*(A_j)$

命题 0.0.2. 设$\varepsilon \subset \mathcal{P}(X), \rho : \varepsilon \to [0, +\infty]$满足：$\phi \in \varepsilon, X \in \varepsilon, \rho(\phi) = 0$
对任意$A \in \mathcal{P}(X)$，定义：
$\mu^*(A) = \inf \{\sum_1^\infty \rho(E_j) : E_j \in \varepsilon, A \subset \bigcup_1^\infty E_j\}$
则μ^*是一个外测度

证明. 首先，由于$X \in \varepsilon$，故$\forall A \in \mathcal{P}(X), A \subset X$，该定义是良定义的
1. $\phi \in \varepsilon, \mu^*(\phi) = \rho(\phi) = 0$
2. $A \subset B$，$\forall \{E_j\}_1^\infty$覆盖B，也覆盖A，即$\mu^*(A) \leq \sum_1^\infty \rho(E_j)$
对任意$\{E_j\}_1^\infty$成立，于是$\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
3. $\forall \epsilon > 0$对于$A_j \in \mathcal{P}(X), \exists \left\{E_j^k\right\}_{k=1}^\infty \subset \varepsilon : \sum_{k=1}^\infty \rho(E_j^k) < \mu^*(A_j) + \epsilon 2^{-j}$
令$A = \bigcup_1^\infty A_j \subset \bigcup_{j,k} E_j^k, \mu^*(A) \leq \sum_{j,k} \rho(E_j^k) \leq \sum_1^\infty \mu^*(A_j) + \epsilon$
由ϵ任意性，$\mu^*(\bigcup_1^\infty A_j) \leq \sum_1^\infty \mu^*(A_j)$ □

定义 0.0.3. 设μ^*为X上的一个外测度，$A \subset X$称为μ^*-可测的，若：
$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$对所有$E \subset X$成立

由于$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$平凡成立，故$A$是$\mu^*$-可测的，只需验证$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$对所有$E : \mu^*(E) < +\infty$成立

定理 0.0.4. *Caratheodory's Theorem*
若μ^*是X上的一个外测度，所有μ^*-可测集构成的集合$\mathcal{M}$是σ-代数，μ^*在$\mathcal{M}$上的限制是一个完全的测度

证明. 首先证明$\mathcal{M}$是σ-代数

由于μ^*-可测的定义关于A, A^c对称，故$\mathcal{M}$关于取补集封闭

设$A, B \in \mathcal{M}$，$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$

$= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c)$

$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$

$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c)$

从而$A \cup B$可测，$A \cup B \in \mathcal{M}$

若还有$A \cap B = \phi$，

$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$

即μ^*在$\mathcal{M}$上有限可加

现往证$\mathcal{M}$对于可数不交并封闭

设$\{A_j\}_1^\infty$为$\mathcal{M}$中一列不交集，令$B_n = \bigcup_1^n A_j, B = \bigcup_1^\infty A_j$

归纳可得$B_n \in \mathcal{M}$，$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c)$

$= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1})$

令$B_0 = \phi$，归纳可得$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_1^n \mu^*(E \cap A_j)$

$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_1^n \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B)$

令$n \to \infty$，$\mu^*(E) \geq \sum_1^\infty \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B)$

$\geq \mu^*(\bigcup_1^\infty (E \cap A_j)) + \mu^*(E \cap B^c) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c)$

于是$B = \bigcup_1^\infty A_j \in \mathcal{M}$

在上式中取$E = B$，得$\mu^*(\bigcup_1^\infty A_j) = \sum_1^\infty \mu^*(A_j)$

于是$\mu^*_{|\mathcal{M}}$是测度

$\mu^*(A) = 0 \Rightarrow \mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E)$

从而$A \in \mathcal{M}$，即$\mu^*_{|\mathcal{M}}$是完全的 □

定义 0.0.5. 设$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$是一个代数，$\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$称为预测度，若其满足以下条件:

$\mu_0(\phi) = 0$

设$\{A_j\}_1^\infty$是$\mathcal{A}$中的一列不交集，并且$\bigcup_1^\infty A_j \in \mathcal{A}$，则$\mu_0(\bigcup_1^\infty A_j) = \sum_1^\infty \mu_0(A_j)$

从而μ_0也是有限可加的

若μ_0是$\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$是一个预测度，则由命题2.3.2 μ_0可以诱导一个外测度： $\mu^*(E)=\inf\{\sum_1^\infty\mu_0(A_j):A_j\in\mathcal{A},E\subset\bigcup_1^\infty A_j\}$

命题 0.0.6. 设μ_0是$\mathcal{A}$上的一个预测度，μ^*是其诱导的外测度，那么：
a. $\mu^*_{|\mathcal{A}}=\mu_0$;
b. $\mathcal{A}$中的每个集合都是μ^*-可测的

证明. a. 设$E\in\mathcal{A}$，若$E\subset\bigcup_1^\infty A_j,A_j\in\mathcal{A}$，
令$B_n=E\cap(A_n\setminus(\bigcup_1^{n-1}A_j))\in\mathcal{A}$ 于是B_n是不交的，且$\bigcup_1^\infty B_n=E$
$\mu_0(E)=\sum_1^\infty\mu_0(B_n)\leq\sum_1^\infty\mu_0(A_n)$
由A_n的任意性，$\mu_0(E)\leq\mu^*(E)\leq\mu_0(E)$
其中第二个不等号是明显的，因为$E\subset E\in\mathcal{A}$
b. 设$A\in\mathcal{A},E\in\mathcal{P}(X),\forall\epsilon>0,\exists\{B_j\}_1^\infty\subset\mathcal{A}:$
$A\subset\bigcup_1^\infty B_j,\sum_1^\infty\mu_0(B_j)<\mu^*(E)+\epsilon$
于是$\mu^*(E)+\epsilon>\sum_1^\infty\mu_0(B_j)=\sum_1^\infty\mu_0((B_j\cap A)\cup(B_j\cap A^c))$
$=\sum_1^\infty\mu_0(B_j\cap A)+\sum_1^\infty\mu_0(B_j\cap A^c)$
$\geq\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)$
由ϵ的任意性，$\mu^*(E)\geq\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)$
从而A是μ^*-可测的 □

定理 0.0.7. 令$\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$是一个代数，$\mu_0$是$\mathcal{A}$上的预测度，$\mathcal{M}$是$\mathcal{A}$生成的$\sigma$-代数则存在$\mathcal{M}$上的测度$\mu$，其在$\mathcal{A}$上的限制等于$\mu_0$，且$\mu=\mu^*_{|\mathcal{M}}$，其中$\mu^*$是$\mu_0$诱导的外测度，若$\nu$是$\mathcal{M}$上的另一个$\mu_0$由扩张的测度，则$\nu(E)\leq\mu(E)\,\forall E\in\mathcal{M}$其中等号在$\mu(E)<+\infty$时成立，若$\mu_0$是$\sigma$-有限的，则$\mu$是$\mu_0$在$\mathcal{M}$上唯一的扩张

证明. 首先由Caratheodory Theorem和命题2.3.6 μ_0可诱导X上的外测度μ^*，其所有μ^*-可测集构成包含$\mathcal{A}$的σ-代数，自然也包含$\mathcal{M}$，且μ^*在$\mathcal{M}$上的限制

是测度，即$\mu = \mu^*_{|\mathcal{M}}$，$\mu_{|\mathcal{A}} = \mu^*_{\mathcal{A}} = \mu_0$

设$E \in \mathcal{M}$，$\{A_j\}_1^\infty$为任意$\mathcal{A}$中覆盖E的集列，则

$\nu(E) \leq \nu(\bigcup_1^\infty A_j) \leq \sum_1^\infty \nu(A_j) = \sum_1^\infty \mu_0(A_j)$

$\nu(E) \leq \mu^*_{|\mathcal{M}}(E) = \mu(E)$

若$\mu(E) < +\infty$，$\forall \epsilon > 0, \exists \{A_j\}_1^\infty \subset \mathcal{A}:$

$\mu(A) \leq \sum_1^\infty \mu(A_j) = \sum_1^\infty \mu_0(A_j) < \mu(E) + \epsilon$

$\mu(A \setminus E) = \mu(A) - \mu(E) < \epsilon$

$\mu(E) \leq \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_1^n A_j) = \lim_{n\to\infty} \nu(\bigcup_1^n A_j)$

$= \nu(A) = \nu(A \setminus E) + \nu(E) \leq \mu(A \setminus E) + \nu(E) < \epsilon + \nu(E)$

由ϵ任意性知$\nu(E) \leq \mu(E)$

设μ_0是σ-有限的，即$\exists \{A_j\}_1^\infty \subset \mathcal{A} : X = \bigcup_1^\infty A_j, \mu_0(A_j) < +\infty$

不妨设A_n是不交的，否则代之以$B_n = A_n \setminus (\bigcup_1^{n-1} A_j)$

$\forall E \in \mathcal{M}, \mu(E) = \mu(E \cap X) = \mu(E \cap (\bigcup_1^\infty A_j)) = \mu(\bigcup_1^\infty (E \cap A_j))$

$= \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_1^n (E \cap A_j)) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \mu(E \cap A_j)$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \nu(E \cap A_j) = \lim_{n\to\infty} \nu(\bigcup_1^n (E \cap A_j))$

$= \nu(\bigcup_1^\infty (E \cap A_j)) = \nu(E \cap X) = \nu(E)$

于是$\mu = \nu$ $\square$