这节主要构建了$\mathbb{R}$上的Borel测度，即定义域为$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$的测度
设μ为$\mathbb{R}$上的有限Borel测度，令$F(x) = \mu((-\infty, x])$，则$F(x)$是$\mathbb{R}$上的递增右连续函数 ($(-\infty, x] = \bigcap_1^\infty (-\infty, x_n], x_n$严格单调下降趋于$x, F(x) = \mu((-\infty, x]) = \mu(\bigcap_1^\infty (-\infty, x_n]) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, x_n]) = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$, 由海涅定理知$F$右连续)
于是我们可以通过$\mathbb{R}$上的递增右连续函数来构造Borel测度
以下形如$(a, b]$的区间简称为h-区间
容易验证，所有h-区间构成elementry family，故所有h-区间的不交并构成代数$\mathcal{A}$，且其生成的σ-代数为$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

命题 0.0.1. *设$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$为单调递增右连续函数，若$(a_j, b_j](j = 1, \dots n)$为不交的$h$-区间令*
$\mu_0(\bigcup_1^n (a_j, b_j]) = \sum_1^n [F(b_j) - F(a_j)], \mu_0(\phi) = 0$
则μ_0为$\mathcal{A}$上的预测度

证明. 首先验证μ_0是良定义的
若$\{(a_j, b_j]\}_1^n$为不交的，且$\bigcup_1^n (a_j, b_j] = (a, b]$
不妨设$a = a_1 < b_1 = a_2 < \cdots < b_n = b$，故$\sum_1^n [F(b_j) - F(a_j)] = F(b) - F(a)$
更一般的，设$\{I_i\}_1^n, \{J_j\}_1^m$为有限不交h-区间，$\bigcup_1^n I_i = \bigcup_1^m J_j$
$\sum_i \mu_0(I_i) = \sum_{i,j} \mu_0(I_i \cap J_j) = \sum_j \mu_0(J_j)$
故μ_0是良定义的
由于F单调递增，$F(+\infty), F(-\infty)$在$\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$上有定义
由定义知μ_0是有限可加的
设$\{I_i\}_1^\infty \subset \mathcal{A}$是不交的，$\bigcup_1^\infty I_i = \bigcup_1^m J_j \in \mathcal{A}$，其中$J_j$是不交的
$\bigcup_1^\infty I_i = \bigcup_{j=1}^m (J_j \cap \bigcup_{i=1}^\infty I_i) = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i=1}^\infty J_j \cap I_i$
$\mu_0(\bigcup_1^\infty I_i) = \sum_{j=1}^m \mu_0(\bigcup_{i=1}^\infty J_j \cap I_i)$
$\mu_0(\bigcup_1^m J_j) = \sum_1^m \mu_0(J_j)$
往证$\mu_0(\bigcup_1^\infty I_i) = \mu_0(\bigcup_1^m J_j)$，只需证$\mu_0(\bigcup_{i=1}^\infty J_j \cap I_i) = \mu_0(J_j), j = 1, \dots m$
于是不妨设$\bigcup_1^\infty I_i = J$为h-区间

$\mu_0(J)=\mu_0(\bigcup_1^n I_i)+\mu_0(J\setminus\bigcup_1^n I_i)\geq\mu_0(\bigcup_1^n I_i)=\sum_1^n\mu_0(I_i)$

$n\to\infty,\mu_0(J)\geq\sum_1^n\mu_0(I_i)$

为证明$\mu_0(J)\leq\sum_1^\infty\mu_0(I_i)$

首先假设$J=(a,b],-\infty<a<b<+\infty$

$\forall\epsilon>0$，由F右连续，$\exists\delta,\delta_i>0,F(a+\delta)-F(a)<\epsilon,$

$F(b_i+\delta_i)-F(b_i)<\epsilon 2^{-i}$，$\{(a_i,b_i+\delta_i)\}_1^\infty$覆盖$[a+\delta,b]$，于是存在有限子覆盖 $\{(a_j,b_j+\delta_j)\}_1^N$可设$b_j+\delta_j\in(a_{j+1},b_{j+1}+\delta_{j+1})$?且诸开区间无包含关系

$\mu_0(J)=F(b)-F(a)<F(b)-F(a+\delta)+\epsilon$

$\leq F(b_N+\delta_N)-F(a_1)+\epsilon$

$=F(b_N+\delta_N)-F(a_N)+\sum_1^{N-1}[F(a_{j+1})-F(a_j)]+\epsilon$

$<\sum_1^N[F(b_j)+\epsilon 2^{-j}-F(a_j)]+\epsilon$

$<\sum_1^\infty[F(b_j)-F(a_j)]+2\epsilon$

$=\sum_1^\infty\mu_0(I_j)+2\epsilon$ 由ϵ的任意性知$\mu_0(J)\leq\sum_1^\infty\mu_0(I_i)$

$a=-\infty$时，任意$M<+\infty$，对$(-M.b]$进行上述过程，有：

$F(b)-F(-M)\leq\sum_1^\infty\mu_0(I_i)+\epsilon$

$\epsilon\to 0,M\to+\infty$，$\mu_0(J)\leq\sum_1^\infty\mu_0(I_i)$

$b=+\infty$时，任意$M<+\infty$,对$(a,M]$进行上述过程，

同理可得$F(M)-F(a)\leq\sum_1^\infty\mu_0(I_i)+2\epsilon$

$\epsilon\to 0,M\to+\infty$，即得$\mu_0(J)\leq\sum_1^\infty\mu_0(I_i)$

□

定理 0.0.2. 若$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是任意递增右连续函数，则存在唯一$\mathbb{R}$上的$Borel$测度$\mu_F$ 使得$\mu_F((a,b])=F(b)-F(a)$，若G是另一递增右连续函数，$\mu_F=\mu_G$当且仅当$F-G$为常数，若μ是$\mathbb{R}$上的$Borel$测度，且于任意有界$Boerl$集上有限，定义$F(x)=\begin{cases}\mu((0,x]) & if\ x>0\\ 0 & if\ x=0\\ -\mu((x,0]) & if\ x<0\end{cases}$，则$F$为递增右连续函数，且$\mu=\mu_F$

证明. 首先由命题2.4.1，F可诱导$\mathcal{A}$上的一个预测度，且F和G诱导同一个预测度当且仅当$F-G$为常数,且这些预测度是σ-有限的，$\mathbb{R}=\bigcup_1^{+\infty}(j,j+1]$ 由命题2.3.7知前两个断言的正确性。最后一个断言F明显是递增的，任取x_n递减趋于x，$x\geq 0$时，$(0,x]=\bigcap_1^\infty(0,x_n]$，$x<0$时，$(x,0]=\bigcup_1^\infty(x_n,0]$由海涅定理可得$F$的右连续性。$\mu=\mu_F$在$\mathcal{A}$上成立，于是由命题2.3.7知其在$\mathcal{B}_\mathbb{R}$上成立 □

若F是$\mathbb{R}$上的递增右连续函数，则F可以诱导一个定义域包含$\mathcal{B}_\mathbb{R}$的完全的测度，记作μ_F，称作F诱导的Lebesgue-Stieltjes测度。之后μ_F简记为μ，其定义域记为$\mathcal{M}_\mu$，$\forall E\in\mathcal{M}_\mu$

$\mu(E)=\inf\{\sum_1^\infty[F(b_j)-F(a_j)]:E\subset\bigcup_1^\infty(a_j,b_j]\}$

$=\inf\{\sum_1^\infty\mu((a_j,b_j]):E\subset\bigcup_1^\infty(a_j,b_j]\}$

引理 0.0.3. $\forall E\in\mathcal{M}_\mu$,

$\mu(E)=\inf\{\sum_1^\infty\mu((a_j,b_j)):E\in\bigcup_1^\infty(a_j,b_j)\}$

证明. 等式右边的式子记作$\nu(E)$，设$E\subset\bigcup_1^\infty(a_j,b_j),(a_j,b_j)=\bigcup_{k=1}^\infty I_j^k$, 其中$I_j^k=(c_j^k,c_j^{k+1}],c_j^1=a_j,k\to\infty,c_j^k$严格单调递增趋于$b_j$，于是

$\sum_1^\infty\mu((a_j,b_j))=\sum_{j,k=1}^\infty\mu(I_j^K)\geq\mu(E)$，从而$\nu(E)\geq\mu(E)$

另一方面，$\forall\epsilon>0,\exists\{(a_j,b_j]\}_1^\infty:E\subset\bigcup_1^\infty(a_j,b_j],\sum_1^\infty\mu((a_j,b_j])\leq\mu(E)+\epsilon$，

对每个j,$\exists\delta_j>0,F(b_j+\delta_j)-F(b_j)<\epsilon 2^{-j},E\subset\bigcup_1^\infty(a_j,b_j+\delta_j)$

$\sum_1^\infty\mu((a_j,b_j+\delta_j))\leq\sum_1^\infty\mu((a_j,b_j+\delta_j])\leq\sum_1^\infty\mu((a_j,b_j])+\epsilon\leq\mu(E)+2\epsilon$

故$\nu(E)\leq\mu(E)$ □

定理 0.0.4. *若$E\in\mathcal{M}_\mu$，则*

$\mu(E)=\inf\{\mu(U):U\supset E,U\text{是开集}\}$

$=\sup\{\mu(K):K\subset E,K\text{是紧集}\}$

证明. 由引理2.4.3，$\forall\epsilon>0,\exists(a_j,b_j):E\subset\bigcup_1^\infty(a_j,b_j),\sum_1^\infty\mu((a_j,b_j))<\mu(E)+\epsilon$，令$U=\bigcup_1^\infty(a_j,b_j)$，$U$是开集，$\mu(U)\leq\sum_1^\infty\mu((a_j,b_j))<\mu(E)+\epsilon$，

另一方面$E \subset U \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(U)$，故第一个等式成立

现证第二个等式

首先设E有界，若E是闭集，则也是紧集，等式自然成立，否则，$\forall \epsilon > 0, \exists$开集$U : U \supset \overline{E} \setminus E, \mu(U) < \mu(\overline{E} \setminus E) + \epsilon$($\overline{E}$是闭集，故$\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}_\mu$，从而$\overline{E} \setminus E \in \mathcal{M}_\mu$)令$K = \overline{E} \setminus U = E \setminus U$，则$K \subset E$为紧集，

$\mu(K) = \mu(E) - \mu(E \cap U) = \mu(E) - [\mu(U) - \mu(U \setminus E)]$

$= \mu(E) - \mu(U) + \mu(U \setminus E) \geq \mu(E) - \mu(\overline{E} \setminus E) + \mu(U \setminus E) - \epsilon \geq \mu(E) - \epsilon$

若E无界，令$E_j = E \cap (j, j+1]$，对任意$\epsilon > 0, \exists K_j \subset E_j$为紧集，$\mu(K_j) \geq \mu(E_j) - \epsilon 2^{-|j|}$，令$H_n = \bigcup_{-n}^{n} K_j$，则$H_n \subset E$为紧集，$\mu(H_n) = \sum_{-n}^{n} \mu(K_j) \geq \sum_{-n}^{n} \mu(E_j) - 3\epsilon \geq \mu(\bigcup_{-n}^{n} E_j) - 3\epsilon$

$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{-n}^{n} E_j), \exists N : \mu(\bigcup_{-n}^{n} E_j) > \mu(E) - \epsilon$对所有$n \geq N$成立，于是$\mu(H_N) \geq \mu(E) - 4\epsilon$ □

定理 0.0.5. *若$E \subset \mathbb{R}$，那么以下命题等价：*

a. $E \in \mathcal{M}_\mu$

b. $E = V \setminus N_1$，其中V是G_δ集，$\mu(N_1) = 0$

c. $E = H \cup N_2$，其中H为F_σ集，$\mu(N_2) = 0$

证明. 由于μ在$\mathcal{M}_\mu$上是完全的，故b.c.$\Rightarrow$a.是明显的

若$\mu(E) < +\infty$，

由定理2.4.4,对$j \in \mathbb{N}$，$\exists$开集$U_j \supset E$，紧集$K_j \subset E$

$\mu(U_j) - 2^{-j} \leq \mu(E) \leq \mu(K_j) + 2^{-j}$

令$V = \bigcap_1^\infty U_j, H = \bigcup_1^\infty K_j$，则$H \subset E \subset V$

$\mu(V) - 2^{-j} \leq \mu(U_j) - 2^{-j} \leq \mu(E) \leq \mu(K_j) + 2^{-j} \leq \mu(H) + 2^{-j}$

$j \to \infty, \mu(V) = \mu(E) = \mu(H) < +\infty$

故$\mu(V \setminus E) = \mu(E \setminus H) = 0$

若$\mu(E) = +\infty$，

? □

命题 0.0.6. 若$E \in \mathcal{M}_\mu, \mu(E) < +\infty$，则$\forall \epsilon > 0, \exists A$为有限个开区间的并，且$\mu(E \triangle A) < \epsilon$

证明. ? □

定义 0.0.7. $F(x) = x$诱导的完全的测度μ_F称为勒贝格测度，记作m，m定义域中的集合称为勒贝格可测集，记作$\mathcal{L}$

定义 0.0.8. $E \subset \mathbb{R}, r, s \in \mathbb{R}$
$E + s := \{x + s : x \in E\}, rE := \{rx : x \in E\}$

定理 0.0.9. 若$E \in \mathcal{L}$，则$E + s \in \mathcal{L}, rE \in \mathcal{L}, \forall r, s \in \mathbb{R}$，且$m(E + s) = m(E), m(rE) = |r|m(E)$

证明. 首先变换$E \mapsto E+s, E \mapsto rE$是保持$\mathcal{A}$的双射($r = 0$时明显保持Borel集，故不妨设$r \neq 0$)，从而也是保持$\mathcal{B}_\mathbb{R}$的?，其中$\mathcal{A}$为h-区间有限不交并的集合，$E$为h-区间时，$m(E) = m(E + s), m(rE) = |r|m(E)$是明显的，又$m$是$\sigma$-有限的，由定理2.3.7知:
$m(E + s) = m(E), m(rE) = |r|m(E)$在$\mathcal{B}_\mathbb{R}$上恒成立
于是$E \in \mathcal{L}, m(E) = 0 \Rightarrow \exists U_j \supset E$为开集, $m(U_j) < 2^{-j}$,
$U_j + s \supset E + s, rU_j \supset rE$,
$m(E + s) \leq m(U_j + s) < 2^{-j}$
$m(rE) \leq m(rU_j) < 2^{-j}$
从而$m(E + s) = m(rE) = 0$
$E \in \mathcal{L}$可写成Borel集和勒贝格零测集的并:$E = H \cup N$, 于是$E + s = (H+s) \cup (N+s) \in \mathcal{L}, rE = (rH) \cup (rN) \in \mathcal{L}$，且$m(E+s) = m(E), m(rE) = |r|m(E)$成立 □

?

证明. 记m^*为$F(x) = x$诱导的$\mathbb{R}$上的外测度，$r = 0$时是明显的，故不妨设$r \neq 0$,容易验证:

$(A+s)\cap(B+s)=(A\cap B)+s$

$(A+s)\cup(B+s)=(A\cup B)+s$

$(A+s)^c=A^c+s$

$(rA)\cap(rB)=r(A\cap B)$

$(rA)\cup(rB)=r(A\cup B)$

$(rA)^c=r(A^c)$

$E\in\mathcal{A}\Rightarrow E+s,rE\in\mathcal{A}$

首先验证，$\forall E\subset\mathbb{R},m^*(E+s)=m^*(E),m^*(rE)=|r|m^*(E):$

对于h-区间E,$\mu_F(E+s)=\mu_F(E),\mu_F(rE)=|r|\mu_F(E)$是明显的

$\forall E\subset\mathbb{R},m^*(E+s)=\inf\{\sum_1^\infty\mu_F(I_j):I_j\in\mathcal{A},E+s\subset\bigcup_1^\infty I_j\}$

$>\sum_1^\infty\mu_F(I_j)-\epsilon=\sum_1^\infty\mu_F(I_j-s)-\epsilon$，其中$I_j-s\in\mathcal{A},E\subset\bigcup_1^\infty(I_j-s)$

即$m^*(E+s)\geq m^*(E)-\epsilon$对$\forall\epsilon>0$成立，故$m^*(E+s)\geq m^*(E)$

同理$m^*(E+s)\leq m^*(E)$

由于$rE\subset\bigcup_1^\infty I_j\Rightarrow E\subset\bigcup_1^\infty(r^{-1}I_j),r^{-1}I_j\in\mathcal{A}$

同上讨论知$m^*(rE)=|r|m^*(E)$

设$E\in\mathcal{L}$

$E+s\in\mathcal{L}\Leftrightarrow m^*(A)=m^*(A\cap(E+s))+m^*(A\cap(E+s)^c),\forall A\subset\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m^*(A)=m^*((A-s)\cap E+s)+m^*((A-s)\cap(E^c)+s)$

$\Leftrightarrow m^*(A)=m^*((A-s)\cap E)+m^*((A-s)\cap E^c)$

$\Leftrightarrow m^*(A)=m^*(A-s)$成立

同理可得$m^*(A)=m^*(A\cap(rE))+m^*(A\cap(rE)^c)$

从而$E+s,rE\in\mathcal{L}$

对于$E\in\mathcal{L}$

由于$m(E)=\inf\{\sum_1^\infty\mu_F(a_j,b_j):E\subset\bigcup_1^\infty(a_j,b_j)\}$

同上讨论可知$m(E+s)=m(E),m(rE)=|r|m(E)$ □

[0,1]上的p进位表数法

$x\in[0,1]$，我们按以下方式将x唯一的写做$\sum_1^\infty a_jp^{-j}$，其中$a_j=0,\ldots,p-1$

p为大于1的整数

若$x = 0, x = \sum_1^\infty 0 * p^{-j}$

若$x \in (0, 1]$

区间$(kp^{-j}, (k+1)p^{-j}]$记作I_j^k，其中$k = 0, 1, \ldots, p-1, j = 1, \ldots$

第1步：

$I_0^0 = \bigcup_0^{p-1} I_1^k$是不交并，于是$\exists! k : x \in I_1^k, a_1 := k$

第2步：

$a_1 p^{-1} + I_1^0 = \bigcup_0^{p-1}(a_1 p^{-1} + I_2^k)$是不交并，于是$\exists! k, x \in a_1 p^{-1} + I_2^k, a_2 := k$

$\ldots$

第j步：

设已经取出$a_1, a_2, \ldots a_{j-1}$

$x \in \sum_{i=1}^{j-1} a_i p^{-i} + I_{j-1}^0 = \bigcup_{k=1}^{p-1}(\sum_{i=1}^{j-1} a_i p^{-i} + I_j^k)$为不交并，

于是$\exists! k : x \in \sum_{i=1}^{j-1} a_i p^{-i} + I_j^k, a_j := k$

$\ldots$

我们得到唯一的$\{a_j\}_1^\infty$满足：

$a_j = 0, 1, \ldots, p-1$

$\sum_{i=1}^{j} a_1 p^{-i} < x \leq \sum_{i=1}^{j} a_i p^{-i} + p^{-j}, j = 1, 2, \ldots$

$\forall j > 0, \exists k \geq j, a_k \neq 0$

否则，设$\exists j > 0, \forall k \geq j, a_k = 0$

于是$\sum_{i=1}^{j-1} a_1 p^{-i} < x \leq \sum_{i=1}^{j-1} a_i p^{-i} + p^{-k}, k = j-1, j, j+1, \ldots$

$k \to \infty$ 得$\sum_{i=1}^{j-1} a_1 p^{-i} < x \leq \sum_{i=1}^{j-1} a_i p^{-i}$矛盾

于是$x = \sum_1^\infty a_i p^{-i}$，记作$0.a_1 a_2 \ldots a_j \ldots$为无穷小数

下面的讨论中，x的p进小数总采用以上取法

定义 0.0.10. *Cantor* 集$C := \{x \in [0, 1] : x$的*3*进小数$0.a_1 a_2 \ldots$中$a_j \neq 1,$

或$\exists N > 0, a_N = 1, a_j \neq 1 (j < N), a_j = 2 (j > N), j = 1, \ldots\}$

注意*Cantor*集等价于$[0, 1]$去掉形如$(0.a_1 \ldots a_j 1,\ 0.a_1 \ldots a_j 2)$的开区间，其中$a_i \neq$

$1, i = 1, \ldots j$

命题 0.0.11. 设C为$Cantor$集

a. C*是紧的，无处稠密的，完全不连通的(连通部分为单点集)，没有孤立点的*

b. $m(C) = 0$

c. $card(C) = \mathcal{C}$

证明. b. 记$F = \bigcup \{(0.a_1 \ldots a_j 1,\ 0.a_1 \ldots a_j 2) : a_i \neq 1, i = 1, \ldots j\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

则$[0,1] = C \cup F$是不交并，$C = [0,1] \cap F^c \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$,$m([0,1]) = m(C) + m(F)$

$m(F) = \sum_0^\infty \frac{2^j}{3^{j+1}} = \frac{1}{3} * \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$

于是$m(C) = 1 - m(F) = 0$

c. 设$x \in C$，$x = 0.x_1 x_2 \ldots$，若x满足:

$\exists N > 0, x_N = 1, x_j \neq 1 (j < N), x_j = 2 (j > N), j = 1, \ldots$

则将x改写为$0.x_1 \ldots x_{N-1} 2$

于是$C = \{x \in [0,1] :$ 在上述改写后，x的3进小数中没有1$\}$

做映射$f : 0.x_1 x_2, \cdots \mapsto \sum_0^\infty \frac{x_j}{2} * 2^{-j}$

右端为$[0,1]$的2进小数，于是f为C到[0,1]的满射，$card(C) \geq \mathcal{C}$

又$C \subset [0,1]$，故$card(C) \leq \mathcal{C}$

综上，$card(C) = \mathcal{C}$

a.首先$C = [0,1] \cap F^c$为有界闭集，故是紧集

C无处稠密$\Leftrightarrow \overline{C}^\circ = \phi \Leftrightarrow C^\circ = \phi$

否则设$x \in C^\circ$，$\exists N \in \mathbb{N}, (x - 3^{-N}, x + 3^{-N}) \subset C, \exists k = 0, 1, \ldots, 3^N - 1$

$(k3^{-N} + 3^{-(N+1)}, k3^{-N} + 2 * 3^{-(N+1)}) \subset (k3^{-N}, (k+1)3^{-N})$

$\subset (x - 3^{-N}, x + 3^{-N})$从而$C \cap F \neq \phi$矛盾

若C有连通部分是区间，则同上讨论知$C \cap F \neq \phi$矛盾

设$x \in C$，则$x = 0.x_1 x_2 \ldots$，其中$x_j = 0, 2$

$\overline{x}_N := 0.x_1x_2\dots x_N$于是$\overline{x}_N \in C$且$|x-\overline{x}_N| \le 2*3^{-N}$

这说明了$\forall x \in C$是C的聚点，也即C无孤立点 $\square$