$f:X\to Y$可诱导$f^{-1}:\mathcal{P}(Y)\to\mathcal{P}(X), f^{-1}(E)=\{x\in X:f(x)\in E\}$且$f^{-1}$与并，交，补可换序。从而，$\mathcal{N}\subset\mathcal{P}(Y)$为$\sigma$-代数$\Rightarrow\{f^{-1}(E):E\in\mathcal{N}\}$为$X$上的$\sigma$-代数

定义 0.0.1. 设$(X,\mathcal{M}),(Y,\mathcal{N})$为可测空间，$f:X\to Y$称为$(\mathcal{M},\mathcal{N})$-可测的，或可测的，若$\forall E\in\mathcal{N}, f^{-1}(E)\in\mathcal{M}$

可测函数的复合明显是可测的，$f:X\to Y$是$(\mathcal{M},\mathcal{N})$-可测的，$g:Y\to Z$是$(\mathcal{N},\mathcal{O})$-可测的，则$E\in\mathcal{O}\Rightarrow g^{-1}(E)\in\mathcal{N}\Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(E))\in\mathcal{M}$即$(g\circ f)^{-1}(E)\in\mathcal{M}$，从而$g\circ f$是$(\mathcal{M},\mathcal{O})$-可测的

命题 0.0.2. 若$\mathcal{N}$是ε生成的σ-代数，则$f:X\to Y$是$(\mathcal{M},\mathcal{N})$-可测的充要条件是$\forall E\in\varepsilon, f^{-1}(E)\in\mathcal{M}$

证明. 由于$\varepsilon\subset\mathcal{N}$，必要性是明显的。充分性：$\{E\subset Y:f^{-1}(E)\in\mathcal{M}\}$是包含$\varepsilon$的$\sigma$-代数，从而包含$\mathcal{N}$ □

推论 0.0.3. 若X,Y是度量(拓扑)空间，所有连续映射$f:X\to Y$是$(\mathcal{B}_X,\mathcal{B}_Y)$-可测的

证明. f是连续的$\Leftrightarrow\forall U\subset Y$为开集，$f^{-1}(U)\in\mathcal{B}_X$，而$\mathcal{B}_Y$由$Y$中的开集生成 □

设$(X,\mathcal{M})$是可测空间，若X上的实值或复值函数f是$(\mathcal{M},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$或$(\mathcal{M},\mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-可测的，则称$f$为$\mathcal{M}$-可测的或可测的。

若$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$是$(\mathcal{L},\mathcal{B}_{\mathbb{C}})$(或$(\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\mathcal{B}_{\mathbb{C}})$)-可测的，则称为Lebesgue(Borel)-可测的，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$同理

$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是Lebesgue-可测的无法得出$f\circ g$是Lebesgue-可测的，因为$E\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\Rightarrow f^{-1}(E)\in\mathcal{L}$，却不一定$\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$，若$f$是Borel-可测的，则$f\circ g$是Lebesgue-可测的

命题 0.0.4. 若$(X, \mathcal{M})$是可测空间，$f : X \to \mathbb{R}$，以下命题等价

a. f是$\mathcal{M}$-可测的

b. $f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{M}, \forall a \in \mathbb{R}$

c. $f^{-1}([a, +\infty)) \in \mathcal{M}, \forall a \in \mathbb{R}$

d. $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{M}, \forall a \in \mathbb{R}$

e. $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{M}, \forall a \in \mathbb{R}$

证明. 由命题2.1.12. 命题3.1.2 可得 □

定义 0.0.5. 设$(X, \mathcal{M})$是可测空间，$f : X \to \mathbb{R}$，$E \in \mathcal{M}$，我们称f是E上可测的，如果$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, E \cap f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$

$\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, f_{|E}^{-1}(B) \in \mathcal{M}_E := \{F \cap E : F \in \mathcal{M}\}$

给定集合X，若$\{(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$是一族可测空间，$f_\alpha : X \to Y_\alpha, \alpha \in A$则$X$上存在唯一一个最小的$\sigma$-代数，使得每个$f_\alpha$是可测的，这个$\sigma$-代数由$f_\alpha^{-1}(E_\alpha)$生成，其中$E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha, \alpha \in A$，称为由$\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$生成的$\sigma$-代数，特别的，$X = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$时，$X$上的乘积$\sigma$-代数是投影映射$\{\pi_\alpha\}_{\alpha \in A}$生成的

命题 0.0.6. 设$(X, \mathcal{M})$和$(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha), \alpha \in A$是可测空间，$Y = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$，
$\mathcal{N} = \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{N}_\alpha$，$\pi_\alpha : Y \to Y_\alpha$是投影映射，那么$f : X \to Y$是可测的当且仅当$f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$是$(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\alpha)$-可测的

证明. 从上面的讨论知投影映射$\pi_\alpha : Y \to Y_\alpha$是$(\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{N}_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)$-可测的，若$f$是$(\mathcal{M}, \mathcal{N})$可测的，那么$f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$是$(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\alpha)$-可测的，必要性成立
若f_α是$(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\alpha)$-可测的，$\forall E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha, f_\alpha^{-1}(E_\alpha) = f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)) \in \mathcal{M}$
由于$\mathcal{N} = \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{N}_\alpha = \mathcal{M}(\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha, \alpha \in A\})$
由命题3.1.2知f是$(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-可测的 □

推论 0.0.7. $f : X \to \mathbb{C}$是$\mathcal{M}$-可测的当且仅当$Re(f), Im(f)$是$\mathcal{M}$-可测的

扩展实数系$\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$，定义$\overline{\mathbb{R}}$上的Borel集$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}=\left\{E\subset\overline{\mathbb{R}}:E\cap\mathbb{R}\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\right\}$
$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$可由$(a,+\infty],[-\infty,a)$生成。$f:X\to\overline{\mathbb{R}}$如果是$(\mathcal{M},\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-可测的，则称为是$\mathcal{M}$-可测的

命题 0.0.8. 若$f,g:X\to\mathbb{C}$是$\mathcal{M}$-可测的，那么$f+g,fg$也是$\mathcal{M}$-可测的

证明. 定义$F:X\to\mathbb{C}\times\mathbb{C},\ \phi,\psi:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$
$F(x)=(f(x),g(x)),\phi(z,w)=z+w,\psi(z,w)=zw$
$\mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}}=\mathcal{B}_{\mathbb{C}}\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$，由命题3.1.6知$F$是$(\mathcal{M},\mathcal{B}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}})$-可测的，$\phi,\psi$均为连续的，从而可测，$f+g=\phi\circ F,fg=\psi\circ F$也是可测的 □

命题 0.0.9. 若$\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$是一列$(X,\mathcal{M})$上的扩展实值可测函数，那么

$$g_1(x)=\sup_j f_j(x),\qquad g_3(x)=\limsup_{j\to\infty} f_j(x)$$
$$g_2(x)=\inf_j f_j(x),\qquad g_4(x)=\liminf_{j\to\infty} f_j(x)$$

均为可测的

证明. 首先验证$g_1^{-1}((a,+\infty])=\bigcup_1^\infty f_j^{-1}((a,+\infty])$:
$x\in g_1^{-1}((a,+\infty])\Leftrightarrow a<g_1(x)\le+\infty$
$\Leftrightarrow\exists j:a<f_j(x)\le+\infty$
否则$\forall j:f_j(x)\le a\Rightarrow g_1(x)=\sup\limits_j f_j(x)\le a$，矛盾
于是$\Leftrightarrow x\in\bigcup_1^\infty f_j^{-1}((a,+\infty])$
同理$g_2^{-1}([-\infty,a))=\bigcup_1^\infty f_j^{-1}([-\infty,a))$
于是g_1,g_2可测
$g_3(x)=\limsup\limits_{j\to\infty} f_j(x)=\inf\limits_k(\sup\limits_{j>k} f_j(x))$是可测函数，$g_4$同理 □

推论 0.0.10. 若$f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$是可测的，那么$max(f,g),min(f,g)$也是可测的

推论 0.0.11. 若$\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$是一列复值可测函数，且$f(x)=\lim_{j\to\infty}f_j(x)$存在，则$f$也是可测函数

定义 0.0.12. 设$f: X \to \overline{\mathbb{R}}$，我们定义$f$的正部和负部：
$f^+(x) = max(f(x), 0)$, $\ f^-(x) = max(-f(x), 0)$
则$f = f^+ - f^-$若f是可测的，那么f^+, f^-也是可测的
若$f: X \to \mathbb{C}$ 我们有极分解：
$f = (sgn f)|f|$，其中$sgn(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & if\ z \neq 0 \\ 0 & if\ z = 0 \end{cases}$
若f是可测的，那么$z \mapsto |z|$是连续的，从而$|f|$可测，$z \mapsto sgn(z)$在除原点外连续，$U \subset \mathbb{C}$为开集，则$sgn^{-1}(U) = V \cup \{0\}$或开集，于是$sgn(z)$是可测的，即$sgn(f) = sgn \circ f$是可测的

定义 0.0.13. 设$(X, \mathcal{M})$为可测空间，$E \subset X$，我们定义E的特征函数*:*
$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1 & if\ x \in E \\ 0 & if\ x \notin E \end{cases}$
容易验证$\mathcal{X}_E$可测当且仅当$E \in \mathcal{M}$

定义 0.0.14. X上的简单函数是一些可测特征函数在复系数下的线性组合，我们不允许简单函数取值无穷。等价的有：$f: X \to \mathbb{C}$是简单函数当且仅当 f是可测的，且f的像集为$\mathbb{C}$的有限点集，此时有*:*
$f = \sum_1^n z_j \mathcal{X}_{E_j}$，其中$E_j = f^{-1}(\{z_j\})$，$range(f) = \{z_1, \ldots, z_n\}$
称为f的标准表示，其中各E_j是不交的，$\bigcup_1^n E_j = X$*(*某个$z_j = 0$*)*

若f, g为简单函数，则$f + g, fg$也是，因为$f + g, fg$仍为可测函数且像集为有限点集

下面讨论可测函数由简单函数逼近

定理 0.0.15. 设$(X, \mathcal{M})$为可测空间
a. 若$f: X \to [0, +\infty]$是可测的，存在一列简单函数$\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$满足：
$0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \cdots \leq f, \phi_n$逐点收敛于$f$，且在任意$f$有界的子集上，是一致收敛的
b. 若$f: X \to \mathbb{C}$是可测的，存在一列简单函数$\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$满足：

$0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \cdots \leq |f|, \phi_n$逐点收敛于$f$，且在任意$f$有界的子集上，是一致收敛的

证明. a. 对于$n = 0, 1, 2, \ldots, 0 \leq k \leq 2^{2n} - 1$

令$E_n^k = f^{-1}((k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]), F_n = f^{-1}((2^n, +\infty])$

令$\phi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} k2^{-n} \mathcal{X}_{E_n^k} + 2^n \mathcal{X}_{F_n}$

首先验证单调性:

$x \in [0, +\infty]$

1. $f(x) = 0, \phi_n(x) = \phi_{n+1}(x) = 0$

2. $x \in E_n^k, \phi_n(x) = k2^{-n},$

$f(x) \in (k2^{-n}, (k+1)2^{-n}] = (2k2^{-(n+1)}, 2(k+1)2^{-(n+1)}]$

$\exists l = 2k, 2k+1, \ldots, 2(k+1), x \in E_{n+1}^k,$

$\phi_{n+1}(x) = l2^{-(n+1)} \geq 2k2^{-(n+1)} = \phi_n(x)$

3. $x \in F_n, f(x) \in (2^n, +\infty] = (2^n, 2 * 2^n] \cup (2^{n+1}, +\infty]$

$= (2^{2n+1} * 2^{-(n+1)}, 2^{2n+2} * 2^{-(n+1)}] \cup (2^{n+1}, +\infty]$

于是$\phi_{n+1}(x) = 2^{n+1}$或$l2^{-(n+1)} \geq 2^{2n+1} * 2^{-(n+1)} = 2^n = \phi_n(x)$

总之有$\phi_{n+1} \geq \phi_n$

现在验证收敛性:

设f在E上有上界$2^N, \forall n > N, \forall x \in E,$

$\phi(x) = k2^{-n} < f(x) \leq (k+1)2^{-n} = \phi_n(x) + 2^{-n}$

即$0 < f(x) - \phi_n(x) \leq 2^{-n}, \forall x \in E$

于是ϕ_n在E上一致收敛于f

$\forall x \in X$，若$f(x) < +\infty$，ϕ_n在x点的收敛以得证，若$f(x) = +\infty$

$\forall n, x \in F_n, \phi_n(x) = 2^n \to +\infty = f(x)$，于是$\phi_n$于$x$收敛

b. 设$f = g + ih$，对g^+, g^-, h^+, h^-使用a.，

得到$\psi_n^+, \psi_n^-, \zeta_n^+, \zeta_n^-$

令$\phi_n = \psi_n^+ - \psi_n^- + i(\zeta_n^+ - \zeta_n^-)$

对于$x \in X$，g^+, g^-, h^+, h^-分别至少有一个为0，

不妨设$g^-(x)=h^-(x)=0$，于是$\psi_n^-(x)=\zeta_n^-(x)=0$,

$|f(x)|=\sqrt{g^+(x)^2+h^+(x)^2}\geq\sqrt{\psi_{n+1}^+(x)^2+\zeta_{n+1}^+(x)^2}$

$\geq\sqrt{\psi_n^+(x)^2+\zeta_n^+(x)^2}$

即$|f(x)|\geq|\phi_{n+1}(x)|\geq|\phi_n(x)|$

收敛性的部分是明显的 □

命题 0.0.16. 设$(X,\mathcal{M},\mu)$是测度空间，下面推断是有效的，当且仅当测度μ是完全的

a. f是可测的且$f=g$是μ-几乎处处成立$\Rightarrow g$是可测的

b. f_n是可测的，且$f_n\to f$是μ-几乎处处成立的$\Rightarrow f$是可测的

证明. 首先设μ是完全的

a. 令$h=g-f$，则$\exists E\in\mathcal{M},\mu(E)=0:\forall x\notin E,h(x)=0$

往证$g=f+h$可测，只需证h可测，只需证$\forall a\in\mathbb{R},h^{-1}((a,+\infty])\in\mathcal{M}$

1. $a\geq 0,h(x)>a\geq 0\Rightarrow x\in E$，即$h^{-1}((a,+\infty])\subset E$

由于μ是完全的，知$h^{-1}((a,+\infty])\in\mathcal{M}$

2. $a<0,h^{-1}((a,+\infty])=h^{-1}((a,0))\cup h^{-1}(\{0\})\cup h^{-1}((0,+\infty])$

$=F_1\cup E^c\cup F_2\in\mathcal{M}$，其中$F_1,F_2$为$E$的子集$\in\mathcal{M}$，$E^c\in\mathcal{M}$

b. 令$h=\limsup\limits_{n\to\infty}f_n,h=f$是$\mu$-几乎处处成立的，由于$h$是可测的，由a.知$f$是可测的

若μ不是完全的，对于μ-0测集E，$\exists F\subset E,F\notin\mathcal{M}$

$\mathcal{X}_X=\mathcal{X}_F$是$\mu$-几乎处处成立的，但$\mathcal{X}_X$可测，$\mathcal{X}_F$不可测，即推断a.不成立 □

命题 0.0.17. 设$(X,\mathcal{M},\mu)$是一测度空间，$(X,\overline{\mathcal{M}},\overline{\mu})$是其完备化若$f$是$X$上的$\overline{\mathcal{M}}$-可测函数，则存在$\mathcal{M}$-可测函数$g$满足$f=g$是$\overline{\mu}$-几乎处处成立的

证明. 设$E\in\overline{\mathcal{M}},\exists F\in\mathcal{M},N'$为$\mu$-零测集$N$的子集，$E=F\cup N'$

$\mathcal{X}_E=\mathcal{X}_F$在$N'\setminus F$外成立，设$\{\phi_n\}$为一列$\overline{\mathcal{M}}$-可测简单函数逐点收敛于$f$

对ϕ_n执行上述操作，可得ψ_n为$\mathcal{M}$-可测简单函数，且在E_n外$\phi_n=\psi_n$处处成

立，其中E_n为μ-零测集N_n的子集，令$N=\bigcup_n N_n$为μ-零测集

令$g=\limsup\limits_{n\to\infty}\psi_n,\forall x\in N^c: f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)=g(x)$

即$f=g$是μ-几乎处处成立的，且g是$\mathcal{M}$-可测的 $\square$