Incompressible Navier-Stokes Equation

有限体积法离散化

守恒方程微分形式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)=0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j)=-\frac{\partial}{\partial x_i}p+\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij}) \quad (1)$$
$$\tau_{ij}=\mu\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j}u_i+\frac{\partial}{\partial x_j}u_i^T\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}u_i I\right]$$

- ρ : 流体密度
- t : 时间
- u_i : 速度矢量
- p : 压力
- τ_{ij} : 粘性应力张量
- μ : 动力粘度
- I : 单位张量

以标量ϕ的瞬态输运方程为例说明控制方程的离散化$u_i->\phi$。对于任意控制体$\mathbf{V}$，以积分形式写成下面的形式：

$$\int_{\mathbf{V}}\frac{\partial \rho\phi}{\partial t}d\mathbf{V}\int_f \rho\phi u_j\cdot d\mathbf{A}=\int_f \Gamma_\phi\frac{\partial}{\partial x_i}\phi\cdot d\mathbf{A}+\int_{\mathbf{V}} S_\phi d\mathbf{V} \quad (2)$$

式中，ρ为密度； u_j为速度向量； A为面积向量；Γ_ϕ为扩散系数；$\nabla\phi$为ϕ的梯度；S_ϕ为单位体积的ϕ的源项。

离散方程为：

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t}V+\sum_f^{N_{\text{faces}}}\rho_f\mathbf{v}_f\phi_f\cdot\mathbf{A}_f=\sum_f^{N_{\text{faces}}}\Gamma_\phi\frac{\partial}{\partial x_i}\phi_f\cdot\mathbf{A}_f+S_\phi V \quad (3)$$

式中，N_{faces}为封闭网格单元的面数；ϕ_f为通过面f的对流量；$\rho_f\mathbf{v}_f\cdot a_f$为网格面f的面积向量；$\frac{\partial}{\partial x_i}\phi_f$为网格面$f$上变量$\phi$的梯度；$\mathbf{V}$为网格体积。

$$a_p\phi+\sum_{ub}a_{nb}\phi_{nb}=b_p \quad (4)$$

Pressure - based

无散度约束转化为压力的椭圆型方程，并且假设空间导数已经完成离散化处理

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}\right] \quad (5)$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Rightarrow\frac{\delta}{\delta x_i}$$

显式时间积分:

$$\frac{\phi^{n+1}-\phi^n}{\Delta t}=\mathbf{F}(\phi^n) \quad (6)$$

代入（1）

$$\frac{\partial\left(\rho u_i\right)}{\partial t}=-\frac{\delta\left(\rho u_i u_j\right)}{\delta x_j}+\frac{\delta\tau_{ij}}{\delta x_i}-\frac{\delta p}{\delta x_i}=H_i-\frac{\delta p}{\delta x_i}$$

$$(\rho u_i)^{n+1}-(\rho u_i)^n=\Delta t\left(H_i^n-\frac{\delta p}{\delta x_i}^n\right)\quad(7)$$

$$\frac{\delta(\rho u_i)^{n+1}}{\delta x_i}\neq 0$$

压力泊松方程:

$$\frac{\delta}{\delta x_i}\left(\frac{\delta p^n}{\delta x_i}\right)=\frac{\delta}{\delta x_i}H_i^n\quad(8)$$

隐式时间积分:

$$\begin{aligned}\frac{\phi^{n+1}-\phi^n}{\Delta t}&=\mathbf{F}(\phi^{n+1})\\ \phi^{n+1}&=\phi^n+\Delta t\mathbf{F}(\phi^{n+1})\end{aligned}\quad(9)$$

代入（1）

$$\frac{\partial\left(\rho u_i\right)}{\partial t}=-\frac{\delta\left(\rho u_i u_j\right)}{\delta x_j}+\frac{\delta\tau_{ij}}{\delta x_i}-\frac{\delta p}{\delta x_i}=H_i-\frac{\delta p}{\delta x_i}$$

$$(\rho u_i)^{n+1}-(\rho u_i)^n=\Delta t\left(H_i^{n+1}-\frac{\delta p}{\delta x_i}^{n+1}\right)\quad(10)$$

压力泊松方程:

$$\frac{\delta}{\delta x_i}\left(\frac{\delta p^{n+1}}{\delta x_i}\right)=\frac{\delta}{\delta x_i}H_i^{n+1}\quad(11)$$

投影法

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j)=-\frac{\partial}{\partial x_i}p+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij})\quad(1)$$

$u_i^{n+1}-u_i^n\Rightarrow(u_i^{n+1}-u_i^*)+(u_i^*-u_i^n)$

$$\frac{u_i^*-u_i^n}{\Delta t}=-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i^t u_j^t)+\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij}^*)\quad(12)$$

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^*}{\Delta t}=-\frac{\partial}{\partial x_i}p^*\quad(13)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\frac{\delta}{\delta x_i}(\frac{u_i^{n+1}}{\Delta t}-\frac{u_i^*}{\Delta t})&=\frac{\delta}{\delta x_i}(-\frac{\delta}{\delta x_i}p^*)\\ \frac{\delta}{\delta x_i}u_i^{n+1}&=0\\ \frac{1}{\Delta t}\frac{\delta u_i^*}{\delta x_i}&=\frac{\delta^2 p^*}{\delta^2 x_i}\quad(14)\\ \frac{u_i^{n+1}-u_i^*}{\Delta t}&=\frac{1}{\rho}\frac{\delta p^*}{\delta x_i}\quad(15)\end{aligned}$$

Uzawa演算法

$$\begin{bmatrix}A&\nabla\\ \nabla\cdot&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u^{n+1}\\ p^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}RHS\\ 0\end{bmatrix}$$

LU分解方法

$$\begin{bmatrix}A&0\\ \nabla\cdot&-\nabla\cdot A^{-1}\nabla\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I&A^{-1}\nabla\\ 0&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u^{n+1}\\ p^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}RHS\\ 0\end{bmatrix}$$

精确分裂方法（Exact Splitting）

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A & 0 \\ \nabla\cdot & -\nabla\cdot A^{-1}\nabla \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^* \\ p^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHS \\ 0 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} I & A^{-1}\nabla \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^* \\ p^* \end{bmatrix} \end{cases}$$

分步求解过程

第一步：动量方程预测

$$Au^* = RHS$$

第二步：压力泊松方程

$$\nabla \cdot u^* - \nabla \cdot A^{-1} \nabla p^* = 0$$

第三步：速度修正

$$u^{n+1} + A^{-1} \nabla p^{n+1} = u^*$$

第四步：压力更新

$$p^{n+1} = p^*$$

- $\mathbf{A}$: $(\mathbf{u} \cdot \nabla) - \nu \nabla^2$
- u^* : 预测速度场
- p^* : 中间压力场
- RHS : $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}$