



# 曲梁结构免自锁有限元无网格法 及其在屈曲分析中的应用

汇报人：何祖彦

指导老师：吴俊超

2025 年 12 月 14 日

## 1. 研究背景

## 2. 研究方案

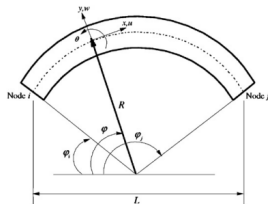
## 3. 进度安排



**主要研究对象为考虑横向剪切应变的曲梁结构**

曲率：

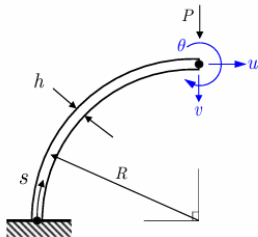
$$\kappa = \theta_{,s}$$



应变：

$$\gamma = w_{,s} - \theta + \frac{u}{R}$$

$$\varepsilon = u_{,s} - \frac{w}{R}$$



弯矩：

$$M = EI \frac{d\theta}{ds}$$

剪力：

$$Q = \kappa GA \left( \frac{dw}{ds} - \theta \right)$$

## 伽辽金弱形式:

$$D^b \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} d\Omega + D^s \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\gamma} d\Omega + \int_{\Gamma^h} \delta \boldsymbol{\theta}^T \overline{\mathbf{M}} d\Gamma + \int_{\Gamma^h} \delta w^T \overline{\mathbf{Q}} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta w q d\Omega = 0$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} \\ \varphi_{2,2} \\ \varphi_{1,2} + \varphi_{2,1} \end{bmatrix}$$

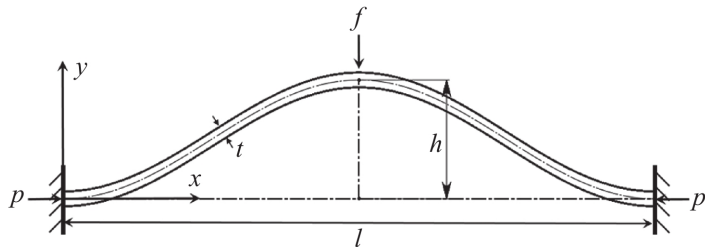
$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} w_{,1} - \varphi_1 \\ w_{,2} - \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

## 抗弯刚度和抗剪刚度

$$D^b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad D^s = kGh$$

**$h \rightarrow 0$  時  $D^s$  抗剪刚度过大导致剪切自由度受到约束，引起自锁**



## 屈曲理论

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{KL^2}$$

结构失稳的临界载荷



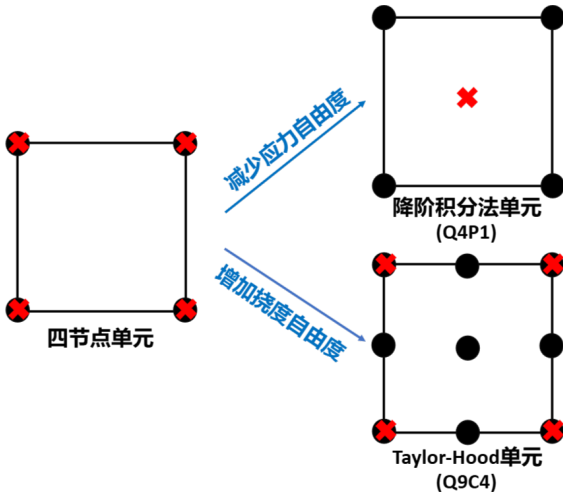
## 混合离散分析方法

### 挠度离散：

$$u^h(x) = \sum_{l=1}^{n_u} N_l^u(x) d_l$$

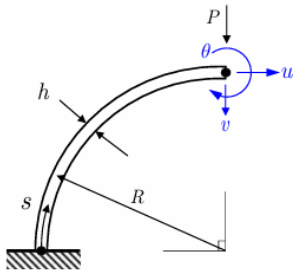
### 应力离散：

$$Q^h(x) = \sum_{l=1}^{n_q} M_l^q(x) q_l$$



$$\inf_{q \in Q} \sup_{w \in H} \frac{b(w, q)}{\|w\| \|q\|} \geq \beta > 0 \quad \longleftrightarrow \quad \dim(w) : \dim(q)$$

LBB 稳定性条件和自由度比例之间的关系不明确



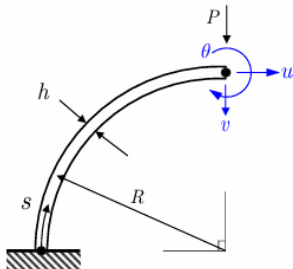
## 悬臂曲梁问题:

半径:  $R = 1$

荷载:  $P = 1000$

杨氏模量:  $E = 3 \times 10^6$

$\frac{h}{R}$	$ \frac{u^f}{u^c} - 1 $	$ \frac{v^f}{v^c} - 1 $	$ \frac{\theta^f}{\theta^c} - 1 $
1/5	0.35%	1.59%	2.09%
1/10	2.57%	3.24%	3.57%
1/20	9.08%	9.30%	9.04%
1/30	17.83%	17.82%	16.80%
1/40	27.48%	27.28%	25.54%
1/50	36.90%	36.58%	34.26%
1/100	69.27%	68.83%	65.96%
1/200	89.75%	89.54%	88.06%
1/300	95.13%	95.02%	94.24%
1/400	97.19%	97.13%	96.66%
1/500	98.18%	98.14%	97.83%
1/1000	99.54%	99.53%	99.45%



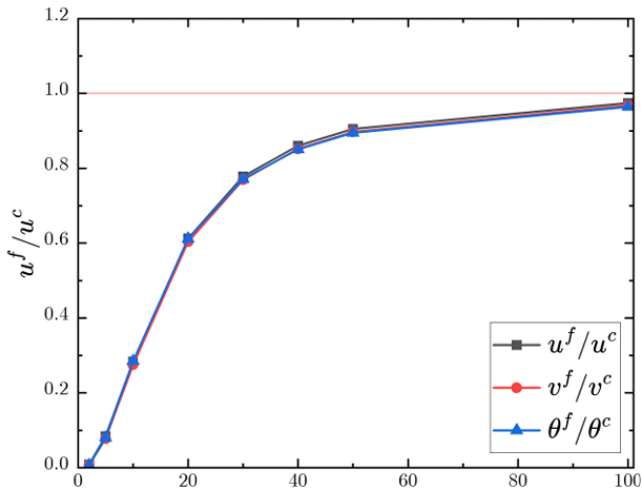
## 悬臂曲梁问题:

半径:  $R = 1$

荷载:  $P = 1000$

厚度:  $h = 1/10$

杨氏模量:  $E = 3 \times 10^6$



## 问题:

1. 消除自锁的最优自由度比例。
2. 如何任意调整约束自由度比例。

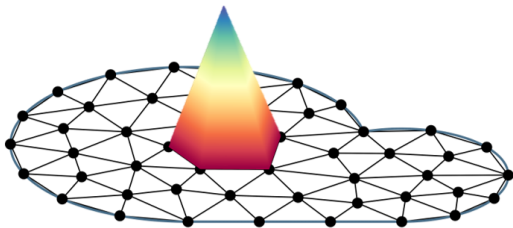
有限元

+

无网格

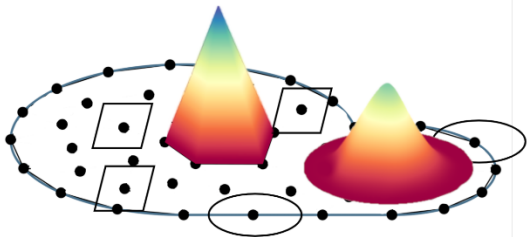


内禀最优约束比的  
有限元无网格混合分析方法



## 有限元法

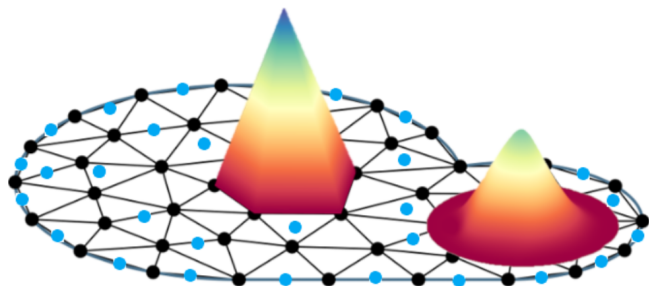
- 基于网格划分
- 形函数不连续
- 单元边界断裂
- 需网格生成



## 无网格法

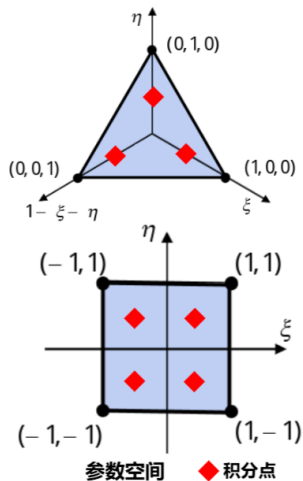
- 无需网格划分
- 形函数全域连续
- 光滑高阶逼近
- 适应性强

## 有限元无网格混合离散



● 位移节点    ● 应力节点

离散积分域



# 研究进度安排

时间	研究内容	进度情况
2023.7-2023.12	验证 LBB 稳定性条件与自由度比例之间的关系	●
2024.1-2024.2	进行 Timoshenko 曲梁的无网格有限元混合离散分析	○
2024.3-2024.9	曲梁结构免自锁在屈曲分析中的应用	
2024.10-2024.12	整理成果并完成论文初稿撰写	
2025.1-2025.3	进一步修改完善论文，形成并提交论文终稿	
● 已完成    ○ 正在进行		





**请各位老师批评指正！**