表 1-1：研究生学位论文开题报告（首次开题）

拟撰写学位论文的题目	曲梁结构免自锁有限元无网格法 及其在屈曲分析中的应用
支持学位论文研究的科研项目	

开题报告内容（**博士不少于 5000 字，硕士不少于 3000 字**）：

1 论文选题的依据：

随着工程结构轻量化与高性能化发展，数值仿真对精度和效率的要求日益提高。复合材料结构分析中，各向异性导致的特殊剪切行为使传统梁理论难以满足精度需求。Timoshenko 曲梁模型通过独立描述弯曲与剪切效应，建立平面应变假定与经典 Euler-Bernoulli 梁理论形成鲜明对比——后者基于平截面假定。当应用 Timoshenko 理论分析细长梁时，理论要求剪切变形趋近于零。然而，有限元[1]单元若采用不匹配的形函数和完全积分方案，会强制产生虚假剪切变形，导致系统表现出过高剪切刚度，引发「剪切自锁」[2]现象，计算位移远小于理论值，本质是数学上的过度约束。此现象源于挠度与转角场插值阶次不匹配，当梁细长时，虚假剪切应变能主导弯曲响应，使模型过于刚硬。无网格[3]方法作为新兴数值技术，通过移动最小二乘形函数独立插值挠度与转角，摆脱单元网格束缚，从根本上避免基于单元离散的数值病理，尤其当基函数采用高阶多项式时效果显著。但其计算成本较高，因形函数构建需大型支持域和矩阵求逆，效率低于传统有限元方法，限制了大规模工程应用。发展高精度、高效率且免自锁的数值方法，成为重要研究课题。

Timoshenko 曲梁在有限元分析中常出现剪切自锁现象，这是由于横向位移 $\boldsymbol{w}$ 和旋转场 θ 的插值阶次不匹配导致的。为消除锁闭效应，减缩积分和选择性积分技术被广泛采用。Malkus[2]与 Hughes[4]等人证明了混合有限元方法与减缩-选择性积分位移方法的等价性，通过减少积分点放松应变约束，适用于线性和非线性问题。基于此方法 Stolarski 和 Belytschko[5] 与 de Melo 等人[6]针对曲单元与弯管通过局部降阶积分方案，通过减少高阶应变项的积分点规避复杂几何下的锁闭风险；Choi 等人[7]则采用选择性降阶基函数策略减轻锁定效应。另一方面，Bouclier[8]与 Cheng 等人[9]则提出将缩减积分与高阶技术耦合处理剪切能项，通过结合单点高斯积分和气泡函数空间，同步减少膜和剪切应变能的积分点消除锁定。然而，Bouclier[8]与 Zhang 等人[10]指出此方法会因沙漏模式引发单元不稳定；并而在考虑高阶基函数和非均匀单元间连续性时变得相当复杂，限制其通用性；此外，Hernández 和 Vellojin[11]指出，相比混合约束应变方法，减缩积分方案通过减少约束方程数量缓解锁定的效果较弱。

因此，学者转向混合方法通过独立近似应力场与位移场从变分原理层面消除剪切自锁现象。Saleeb 和 Saleeb[12]基于 Hellinger-Reissner 变分原理独立插值应力和位移场，通过静态凝聚消除内部应力参数并引入约束指数准则确保无锁定性能；Afsin Saritas[13]则采用 Hu-Washizu 三场变分原理独立插值位移、应力和应变场，通过力插值函数精确满足平衡方程以消除锁定；L. Beirão da Veiga 等[14]、L. Greco 等[15]与 Bouclier 等[16]则将该范式延伸至等几何分析，利用 B 样条基函数高阶连续性引入独立剪切应变变量与优化应力场插值，解决高阶基函数引发的数值锁定。此外，贺立新等[17]采用分区混合算法，在物面附近黏性主导区使用间断 Galerkin 有限元法，在非黏性区采用有限体积法，通过通量守恒实现平滑过渡以兼顾锁定缓解与计算效率；胡凯等[18]则提出强-弱耦合单元微分法，在应力奇异区采用伽辽金弱形式，其余区域保留强形式单元微分法，通过结合两种方法的优势优化计算精度与效率。Baier-Saip 等人[19]指出混合插值法通过独立近似场消除剪切锁定，性能优于纯位移法。然而，因需处理多个独立场和全局矩阵求逆，导致刚度矩阵稠密化并增加计算负担；方法实现复杂，需谨慎选择离散空间以满足稳定性准则，Baier-Saip 等人[19]强调必须满足 Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzy 稳定性条件，否则可能出现伪模式，而 Hale 和 Baiz[20]指出混合变分公式需严格处理基函数特性以避免精度损失。

混合方法虽能从理论上消除锁定，但其计算成本高且实现复杂。为平衡精度与效率，因此，Elguedj 等人[21]提出的 B-bar 投影体系解决剪切锁定问题；Bouclier 等[8]将此扩展至任意曲率梁，耦合选择性缩减积分实现无剪切修正分析。同时，Greco 等[15]与 Zhang 等[10]分别采用局部/全局投影样条重建，构建膜锁定通用解决方案，通过重构应变场插值增强数值鲁棒性。此外，Patton 等人[22]在等几何假定自然应变方法的基础上，借助 NURBS 高阶连续性优势，通过局部投影将应变场解耦为独立分量消除多重锁定，避免全局矩阵求逆；Prathap 和 Shashirekha[23]则通过变分一致性重构膜应变场，在保持位移插值不变的前提下优化曲梁单元精度，显著降低计算复杂度。然而，Elguedj 等人[21]的 B-bar 方法在高阶应用中需结合其他技术以完全消除锁定，而 Greco 等人[15]强调假定自然应变方法中合适采样点选取困难且易引入误差。

此外，高阶插值法和混合插值法作为替代方案也被广泛研究。Likang Li[24]通过增加多项式次数 p，而 Koziey 和 Mirza[25]以及 Dawe[26]则通过阶次优化策略 (采用三次位移和二次旋转多项式、五次多项式) 确保一致性，从而避免虚假剪切应变；Caillerie 等[27]与 Tai 和 Chan[28]基于此引入分层高阶形函数或内部自由度，在提升精度的同时规避锁定问题。在混合插值法方面，Saleeb 和 Chang[12]基于 Hellinger-Reissner 变分原理独立插值应力与位移场，Saritas[13]则利用 Hu-Washizu 三场变分原理独立插值位移、应力和应变场，均通过松弛约束有效消除膜锁定。此外，Wang 等[29]、王晓峰等[30]、Bathe 和 Dvorkin[31]通过引入内部节点和 Hermitian/Lagrange 独立插值，在精确考虑弯扭耦合效应的同时避免了横向剪切锁定。形函数方法中，陈太聪等[32]与田荣[33]提出构造精确形函数并设计迭代算法，使粗网格能准确捕捉屈曲载荷和失稳模态，其方法可同时用于弱/强形式离散且无需网格加密即可实现高阶收敛。然而，这些方法均存在局限，高阶插值需足够大的 p 值才能完全消除锁定，计算成本高且不适用于实时应用；混合插值法实现复杂且计算昂贵；形函数方法构造依赖特定问题而缺乏通用性。

上述传统有限元法基于单元建立形函数的近似方法难以在确保插值精度的同时消除剪切自锁现象。无网格法是一类不依赖单元建立形函数方法的新兴研究方向。Wang 和 Chen[34]基于 MLS/RK 近似和稳定共轭节点积分提出无网格曲梁公式，通过曲率平滑技术消除剪切和膜锁定，可精确再现纯弯曲模式而无寄生变形；Donning 和 Liu[35]采用基数样条函数作为形函数，结合位移基 Galerkin 方法在粗网格下实现高精度，并通过插值层面点对点消除锁定；Hale 和 Baiz 等人[20]基于混合变分公式，融合最大熵基函数与旋转 Raviart-Thomas-Nédélec 单元，可直接施加狄利克雷边界条件并避免剪切锁定；Huang 等人[36]基于 CSPM 法自动满足自由边界条件，适用于大变形但同样未明确针对锁定问题；Xiao 和 McCarthy[37]与 Atluri 和 Zhu[38]利用 MLPG 方法结合无锁公式和移动最小二乘近似处理，通过改变控制方程变量消除锁定，无需网格离散；Li 等人[39]采用对称 SPH 方法改进一致性误差，适用于功能梯度材料但未直接解决剪切锁定。然而，无网格方法存在本质边界条件处理困难，Donning 和 Liu[35]指出其框架中满足本质边界条件仍是重大挑战；Xiao 和 McCarthy[37]提到因近似扩散特性导致低阶时锁定缓解效果有限。

尽管现有研究已发展出减缩积分、假定应变场、混合方法、高阶插值及无网格方法等多种技术以抑制 Timoshenko 曲梁分析中的剪切自锁现象，这些方法仍存在诸多未解决的根本问题，如数值稳定性与计算效率难以兼顾、实现复杂度高、通用性受限，以及缺乏对自锁机理的统一理论指导。为此，本文将以 Timoshenko 曲梁为研究对象，重点探讨其混合离散分析中消除剪切自锁的“最优约束比例”问题，旨在通过理论分析与数值实验明确不同离散策略下约束条件与自锁行为之间的内在关联，从而填补现有方法在理论指导层面的空白。在此基础上，本文将进一步建立一种“自锁约束比例可控的有限元与无网格混合离散分析方法”，通过有机结合有限元的结构化离散优势与无网格法的灵活近似特性，实现约束比例的可控调节，在保证计算精度的同时有效避免自锁现象，为工程实践提供一种兼具鲁棒性与适应性的新型数值解决方案。

2 研究特色及创新之处

Timoshenko 曲梁混合离散分析中消除剪切自锁问题的最优约束比例。

自锁约束比例可控的有限元无网格混合离散分析方法。

曲梁结构免自锁在屈曲分析中的应用。

3 研究内容与方法

3.1 研究内容

本文将针对 Timoshenko 曲梁剪切自锁问题，研究位移场和约束场的自由度数量比与 LBB 稳定性条件件影响机理，并利用最优约束比和无网格法的离散便利性，从而建立 Timoshenko 曲梁最优约束比的有限元无网格混合分析方法，并应用于曲梁结构屈曲分析中。具体内容如下：

1. 建立 Timoshenko 曲梁有限元无网格混合离散理论框架，设计横向位移 $\boldsymbol{w}$ 和旋转场 θ 采用二次再生核无网格形函数离散；约束场采用有限元离散，并研究可任意调整自由度数量的无网格法节点布置方案，从而优化形函数影响域大小。
2. 将 Timoshenko 曲梁最优约束比例引入有限元无网格混合离散分析方法中，从而建立最优约束比的免自锁有限元无网格混合离散分析方法。为复杂曲梁结构的锁紧问题提供了新的解决路径。
3. 将所建立的免自锁有限元无网格混合离散分析方法应用于曲梁结构屈曲分析中，通过数值实验验证其在屈曲载荷和失稳模态计算中的有效性和优越性。

4 研究计划与预期成果

预期将取得以下成果:

1. 建立 Timoshenko 曲梁剪切自锁与 LBB 稳定性条件的关系，确定剪切自锁的最优约束比例。
2. 建立曲梁最优约束比的有限元无网格混合离散分析方法，在保证计算精度的同时消除自锁现象。
3. 曲梁结构免自锁在屈曲分析中的应用

5 论文的研究进展和进度安排

時間	研究内容	進度情況
2023.7-2023.12	验证 LBB 稳定性条件与自由度比例之间的关系	●
2024.1-2024.2	进行 Timoshenko 曲梁的无网格有限元混合离散分析	○
2024.3-2024.9		
2024.10-2024.12	整理成果并完成论文初稿撰写	
2025.1-2025.3	进一步修改完善论文，形成并提交论文终稿	

● 已完成 ○ 正在進行

参考文献

[1] Liu W K, Li S, Park H S. Eighty Years of the Finite Element Method: Birth, Evolution, and Future. Archives of Computational Methods in Engineering, 2022, 29(6): 4431-4453.

[2] Malkus D S, Hughes T J. Mixed finite element methods — Reduced and selective integration techniques: A unification of concepts. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1978, 15(1): 63-81.

[3] 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用. 力学进展, 2009, 39(01): 1-36.

[4] Hughes T J R, Taylor R L, Kanoknukulchai W. A simple and efficient finite element for plate bending. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1977, 11(10): 1529-1543.

[5] Stolarski H, Belytschko T. Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements. Journal of Applied Mechanics, 1982, 49(1): 172-176.

[6] De Melo F, De Castro P. A reduced integration mindlin beam element for linear elastic stress analysis of curved pipes under generalized in-plane loading. Computers & Structures, 1992, 43(4): 787-794.

[7] Choi M J, Sauer R A, Klinkel S. A selectively reduced degree basis for efficient mixed nonlinear isogeometric beam formulations with extensible directors. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023, 417: 116387.

[8] Bouclier R, Elguedj T, Combescure A. Locking free isogeometric formulations of curved thick beams. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 245–246: 144-162.

[9] Cheng X l, Han W, Huang H c. Finite element methods for Timoshenko beam, circular arch and Reissner-Mindlin plate problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1997, 79(2): 215-234.

[10] Zhang G, Alberdi R, Khandelwal K. On the locking free isogeometric formulations for 3-D curved Timoshenko beams. Finite Elements in Analysis and Design, 2018, 143: 46-65.

[11] Hernández E, Vellojin J. A locking-free finite element formulation for a non-uniform linear viscoelastic Timoshenko beam. Computers & Mathematics with Applications, 2021, 99: 305-322.

[12] Saleeb A F, Chang T Y. On the hybrid-mixed formulation of C^0 curved beam elements. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1987, 60: 95-121.

[13] Saritas A. Modeling of inelastic behavior of curved members with a mixed formulation beam element. Finite Elements in Analysis and Design, 2009, 45(5): 357-368.

[14] Beirão Da Veiga L, Lovadina C, Reali A. Avoiding shear locking for the Timoshenko beam problem via isogeometric collocation methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 241–244: 38-51.

[15] Greco L, Cuomo M, Contrafatto L, Gazzo S. An efficient blended mixed B-spline formulation for removing membrane locking in plane curved Kirchhoff rods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017, 324: 476-511.

[16] Bouclier R, Elguedj T, Combescure A. Efficient isogeometric NURBS-based solid-shell elements: Mixed formulation and B ¯ -method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2013, 267: 86-110.

[17] 贺立新. 间断 Galerkin 有限元方法及其与有限体积混合计算方法研究. 中国空气动力研究与发展中心, 2008.

[18] 胡凯, 高效伟, 徐兵兵. 求解固体力学问题的强-弱耦合形式单元微分法. 力学学报, 2022, 54(07): 2050-2058.

[19] Baier-Saip J, Baier P, De Faria A, Oliveira J, Baier H. Shear locking in one-dimensional finite element methods. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2020, 79: 103871.

[20] Hale J, Baiz P. A locking-free meshfree method for the simulation of shear-deformable plates based on a mixed variational formulation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 241–244: 311-322.

[21] Elguedj T, Bazilevs Y, Calo V M, Hughes T J. B and F Projection Methods for Nearly Incompressible Linear and Nonlinear Elasticity and Plasticity using Higher-order NURBS Elements:. Fort Belvoir, VA: Defense Technical Information Center, 2007.

[22] Patton A, Leonetti L, Kiendl J. An Isogeometric Assumed Natural Strain Method to Alleviate Locking in Solid Beams. SSRN, 2025.

[23] Shashirekha B R, Prathap G. Variationally Correct Assumed Strain Field for the Simple Curved Beam Element. Computers & Structures, 1993, 47(6): 1071-1073.

[24] Li L. Discretization of the Timoshenko Beam problem by thep and theh-p versions of the finite element method. Numerische Mathematik, 1990, 57(1): 413-420.

[25] Koziey B L, MtRZA F A. Consistent Curved Beam Element. Computers & Structures, 1994, 51(6): 643-654.

[26] Dawe D. Curved finite elements for the analysis of shallow and deep arches. Computers & Structures, 1974, 4(3): 559-580.

[27] Caillerie D, Kotronis P, Cybulski R. A Timoshenko finite element straight beam with internal degrees of freedom. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2015, 39(16): 1753-1773.

[28] Tai C Y, Chan Y. A hierarchic high-order Timoshenko beam finite element. Computers & Structures, 2016, 165: 48-58.

[29] Wang X, Yang Q, Law S s. A shear locking-free spatial beam element with general thin-walled closed cross-section. Engineering Structures, 2014, 58: 12-24.

[30] 王晓峰, 杨庆山. 考虑横向和扭转剪切变形的空间薄壁梁单元. 力学学报, 2013, 45 (02): 293-296.

[31] Bathe K J, Dvorkin E N. A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1985, 21(2): 367-383.

[32] 陈太聪, 马海涛. 框架结构屈曲的精确有限元求解. 力学学报, 2009, 41(06): 953-960.

[33] 田荣. C1 连续型广义有限元格式. 力学学报, 2019, 51(01): 263-277.

[34] Wang D, Chen J S. Locking-free stabilized conforming nodal integration for meshfree Mindlin–Reissner plate formulation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193(12-14): 1065-1083.

[35] Donning B M, Liu W K. Meshless methods for shear-deformable beams and plates. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 152(1-2): 47-71.

[36] Huang Y, Zhang Z, Peng Y, Hua H. A three-dimensional beam formulation for large deformation and an accurate implementation of the free boundary. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2021, 134: 103736.

[37] Xiao J, McCarthy M. Meshless analysis of Timoshenko beams based on a locking-free formulation and variational approaches. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192(39-40): 4403-4424.

[38] Atluri S N, Zhu T. A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. Computational Mechanics, 1998, 22(2): 117-127.

[39] Li J, Wang G, Guan Y, Zhao G, Lin J, Naceur H, Coutellier D. Meshless analysis of bi-directional functionally graded beam structures based on physical neutral surface. Composite Structures, 2021, 259: 113502.

<table>
<tr><td colspan="2">开题报告指导老师审阅意见</td></tr>
<tr><td>对开题报告进行审阅，是否同意进入专家评审环节</td><td>□ 是　　□ 否</td></tr>
<tr><td colspan="2">请填写审阅意见：

指导老师签名：
年　月　日</td></tr>
</table>