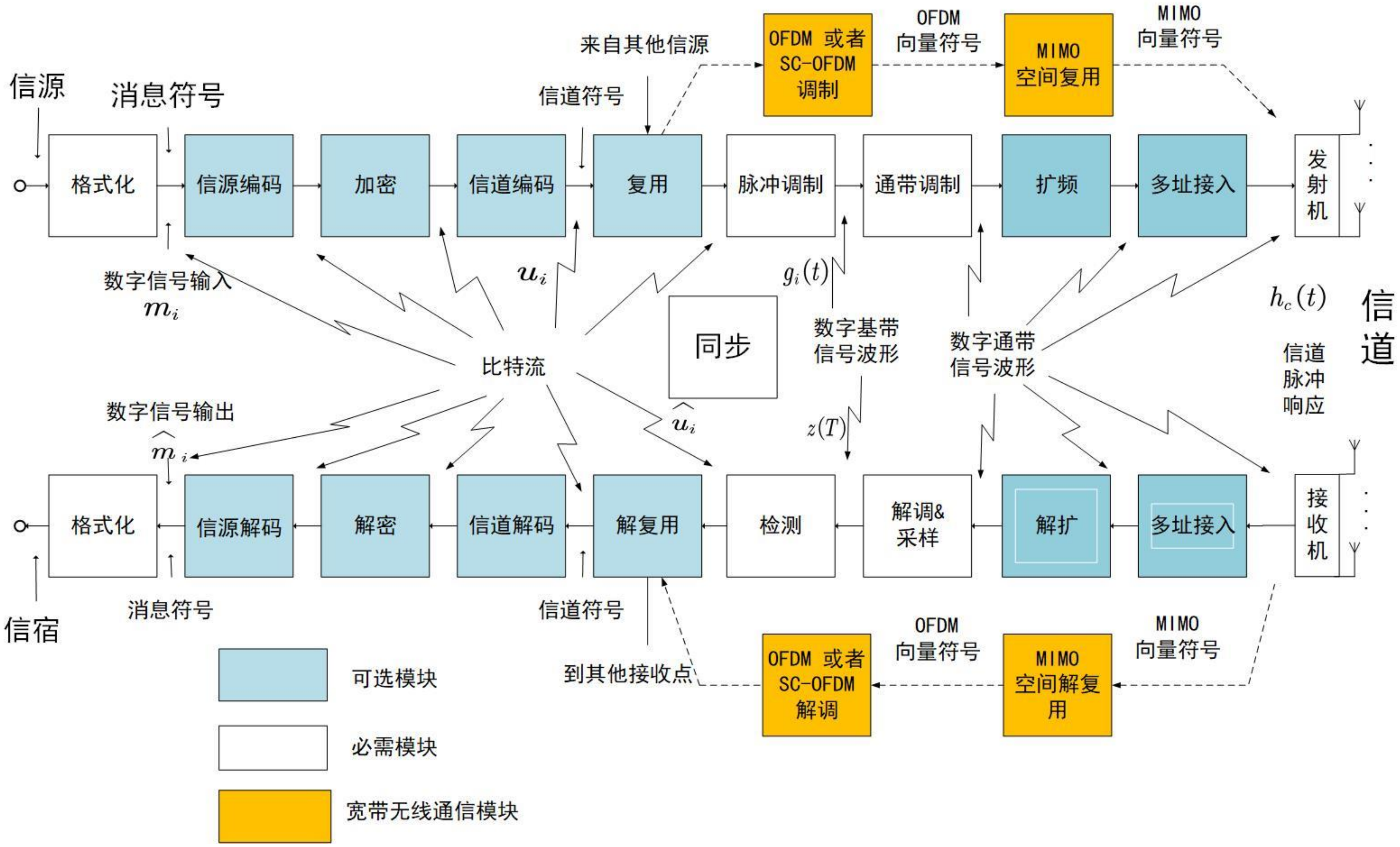
8 AWGN信道的最优接收

讲 解 人： 王俊波
E-mail: jbwang@seu.edu.cn
Phone: 13770681926
QQ:308322767

主要内容

- 信号空间与信号矢量
- AWGN信道的信号检测
  - ✓ 贝叶斯检测与最大似然检测
- 二阶调制的波形
  - ✓ 双极性
  - ✓ 正交
- 接收机实现
  - ✓ 相关器接收机
  - ✓ 匹配滤波器接收机
- 高阶调制简介

数字通信系统的一般结构



信号空间与信号矢量

- 在数字通信系统中，调制器的输入通常是一串二进制的比特信息
  - ✓ 对二阶调制，调制器通常会将0和1分别映射成两个波形：$s_1(t)$和$s_2(t)$
  - ✓ 对M阶调制，调制器会使用M个波形$\{s_i(t)\}_{i=1,\cdots,M}$，每次传输$k$个比特数据，这里通常$M=2^k$
- 使用信号波形框架进行研究，显得冗长不方便，引出了信号矢量的概念
- 在定义时间$[0,T]$上定义函数的正交集合$\phi_j(t)$满足

$$\int_0^T \phi_i(t)\phi_j(t)\,dt = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

- 给定$s_i(t)$是第i个信号波形，对该信号进行分解，可得

$$s_{ik} = \int_0^T s_i(t)\phi_k(t)\,dt$$

信号空间与信号矢量

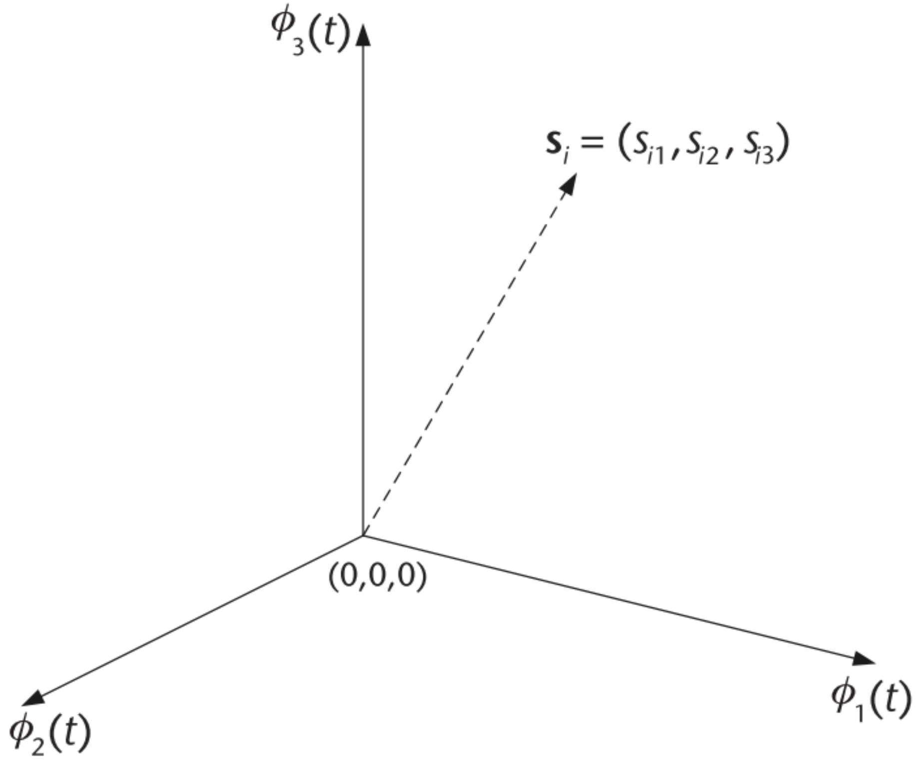
- 利用s_{ik}，可将$s_i(t)$表示为若干正交函数的加权和

$$s_i(t) = \sum_{k=1}^{N} s_{ik}\,\phi_k(t)$$

- 因此，$s_i(t)$可以等效得由一个矢量表示

$$s_i(t) = (s_{i1}, s_{i2}, \cdots, s_{iN})$$

- 由于信号波形可以描述为标准正交函数的加权和，任一信号波形都可以描述为一个简单的矢量
  - ✓ 这些矢量构成的空间也称为信号空间
  - ✓ 信号之间运算可用线性代数进行描述



寻找正交函数：格拉姆-施密特正交化过程

- 基⇒正交基⇒标准正交基
- 设α_1，α_2，$\cdots$，α_r为向量空间V的一个基
- 第1步：初始化
  - ✓ 取$\beta_1=\alpha_1$
- 第2步：正交化
  - ✓ $\beta_2=\alpha_2-\frac{[\beta_1,\alpha_2]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1$
  - ✓ $\beta_3=\alpha_3-\frac{[\beta_1,\alpha_3]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\beta_2,\alpha_3]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2$
  - ✓ …
  - ✓ $\beta_r=\alpha_r-\frac{[\beta_1,\alpha_r]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\beta_2,\alpha_r]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2-\cdots-\frac{[\beta_{r-1},\alpha_r]}{[\beta_{r-1},\beta_{r-1}]}\beta_{r-1}$
- 第3步：归一化
  - ✓ 对β_r矢量归一化

示例：格拉姆-施密特正交化

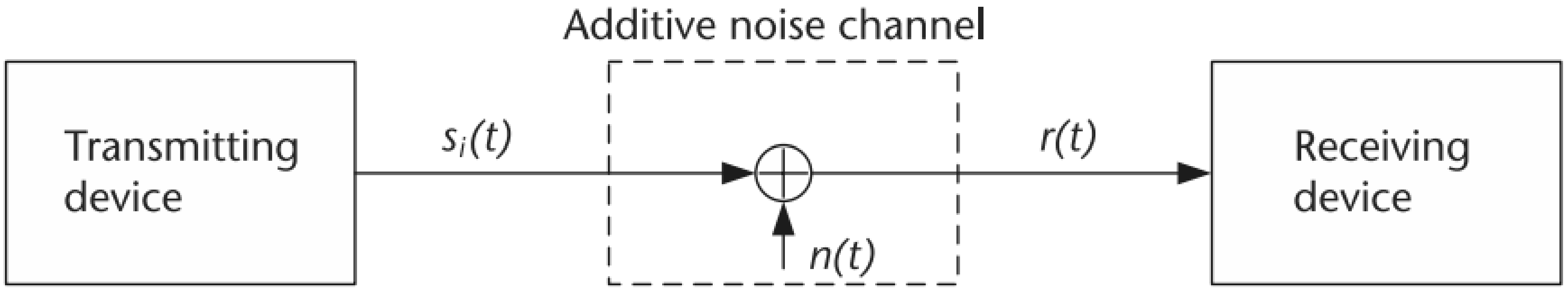
◻ 程序：simGSOrthogonalization.m

```
% 演示正交化过程

A=[1 2 3; 2 1 3]';
B=GSOrthogonalization(A);
V=B'*B
```

```
V =

    1.0000    0.0000
    0.0000    1.0000
```

```
function b=GSOrthogonalization(a)
%格拉姆-施密特正交化化
% 输入参数 a 列矢量构成的输入矩阵
% 输出参数 b 列矢量构成标准正交矢量
[m,n] = size(a);
if(m<n)
    error('行小于列，无法计算，请转置后重新输入');
    return
end
b=zeros(m,n);
%正交化
b(:,1)=a(:,1);
for i=2:n
    for j=1:i-1
        b(:,i)=a(:,i)-dot(a(:,i),b(:,j))/dot(b(:,j),b(:,j))*b(:,j);
    end
end
%矢量归一化
for k=1:n
    b(:,k)=b(:,k)/norm(b(:,k));
end
```

AWGN信道下数字通信的信号矢量框架



$$s_i(t) = \sum_{k=1}^{N} s_{ik}\phi_k(t), \quad r(t) = \sum_{k=1}^{N} r_k\phi_k(t), \quad n(t) = \sum_{k=1}^{N} n_k\phi_k(t).$$

- **AWGN信道的传输模型**

$$\sum_{k=1}^{N} r_k\phi_k(t) = \sum_{k=1}^{N} s_{ik}\phi_k(t) + \sum_{k=1}^{N} n_k\phi_k(t)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}.$$

- **接收机的信号检测问题：给定r,确定发端发的是哪个s_i**

噪声的统计特性分析

- 因为r由确定性信号s_i和随机信号n，有必要分析n的特性，其信号矢量元素可计算为

$$n_k = \int_0^T n(t)\phi_k(t)dt$$

  - ✓ 由于噪声信号$n(t)$是一个高斯随机变量，积分过程是一个线性操作，这就意味着n_k也是一个高斯随机变量，噪声信号矢量是一个高斯矢量

- 噪声信号矢量的数字特征
  - ✓ 期望：$\mathbb{E}\{n_k\} = \mathbb{E}\left\{\int_0^T n(t)\phi_k(t)dt\right\} = \int_0^T \mathbb{E}\{n(t)\}\phi_k(t)dt = 0 \Longrightarrow \mathbb{E}\{n\} = 0$
  - ✓ 方差：$\mathbb{E}\{n_k n_l\} = \mathbb{E}\left\{\left(\int_0^T n(t)\phi_k(t)dt\right)\left(\int_0^T n(\tau)\phi_l(\tau)d\tau\right)\right\}$
  - ✓ $= \mathbb{E}\left\{\int_0^T \int_0^T n(t)n(\tau)\phi_k(t)\phi_l(\tau)\,dtd\tau\right\} = \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}\{n(t)n(\tau)\}\phi_k(t)\phi_l(\tau)\,dtd\tau$
  - ✓ $= \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)\phi_k(t)\phi_l(\tau)dtd\tau = \frac{N_0}{2}\int_0^T \phi_k(t)\phi_l(t)dt = \frac{N_0}{2}\delta(k-l)$
  - ✓ $\Longrightarrow \mathbb{E}\{nn^T\} = \frac{N_0}{2}I_{N\times N}$

噪声信号矢量的概率密度函数

- 给定期望和方差，噪声信号矢量的概率密度函数为

$$f(\boldsymbol{n}) = f(n_1, n_2, \cdots, n_N) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \prod_{i=1}^{N} e^{-\frac{n_i^2}{2\sigma^2}} = \prod_{i=1}^{N} f(n_i)$$

  - ✓ $f(n_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n_i^2}{2\sigma^2}}$
  - ✓ $\mathbb{E}\{n_k^2\} = \frac{N_0}{2} = \sigma^2$

- 因为$\sum_{i=1}^{N} n_i^2 = \|\boldsymbol{n}\|^2$

$$f(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{\|\boldsymbol{n}\|^2}{2\sigma^2}}$$

接收机的信号检测

- 衡量数字通信系统性能最常用的定量指标之一是误码率，即传输的比特被错误解码的概率
  - ✓ 在评估数字通信系统的设计是否满足所支持的应用程序(如语音、多媒体或数据)的特定误差要求时，这个指标非常重要
  - ✓ 评价系统设计或技术性能时，误码率是重要的参考标准
- 假设系统采用两个信号波形s_1和s_2，接收机的目标是确定发射机发送的是s_1还是s_2，最小化判断错误的概率，也即最小化误码率

$$\text{Minimize } P(\text{error}) \rightarrow P(\hat{m}_i \neq m_i)$$

$$\text{Maximize } P(\text{correct}) \rightarrow P(\hat{m}_i = m_i),$$

  - ✓ 理论工具是贝叶斯检测（Bayes Detection)

贝叶斯检测涉及的概念

- 先验概率（priori probability）
  - ✓ $\{p(m_i)\}_{i=1,\cdots,M}$：发射机发送数据$m_i$的概率，在数据通信中，通常$p(m_i)=\frac{1}{M}$
- 后验概率（posteriori probability）
  - ✓ $\{p(s_i|r)\}_{i=1,\cdots,M}$：接收机接检测到$r$时，推断发射机发送的波形是$s_i$的概率
- 条件概率密度
  - ✓ $\{f(r|s_i)\}_{i=1,\cdots,M}$：发射机发送波形$s_i$时，接收机检测到信号的概率密度函数
- 检测代价
  - ✓ $\{c_{ij}\}_{i,j\in\{0,1\}}$：发射机实际发送数据$m_i$,判定为$m_j$的代价，在数据传输中，$c_{00}=c_{11}=0$，$c_{01}=c_{10}=1$
- 判决准则
  - ✓ 信号空间R被划分成若干子空间满足$R=\cup_{\forall i}R_i$且$R_i\cap R_j=\emptyset\ \forall i\neq j$
  - ✓ 若$r\in R_i$,则判定发送的数据为m_i

将最优接收机设计建模为贝叶斯检测问题

- 检测概率
  - ✓ $P(m_j|m_i)$：发送数据m_i，判定为m_j的概率，数学上可计算为

$$P(j|i)=\int_{r\in R_j} f(r|s_i)dr$$

- 在贝叶斯的框架下，最优接收机的检测问题可以描述为一个优化问题

$$\min_{\{R_i\}_{i=1,\cdots,M}} \sum_{\forall i} p(m_i) \sum_{\forall j} c_{ij} P(m_j|m_i)$$

  - ✓ Subject to $R=\cup_{\forall i} R_i \quad R_i \cap R_j=\emptyset \ \forall i \neq j$
- 若考虑$M=2$，则问题简化为（$m_1=0$；$m_2=1$）

$$\min_{R_1} P(1|0)+P(0|1)$$

  - ✓ Subject to $R_1 \subset R$
  - ✓ 注意：R_1为判0的空间，R_2是判1的空间

判定区域和判定准则

- $P(1|0)+P(0|1)=\int_{r\in R_2} f(r|s_1)dr+\int_{r\in R_1} f(r|s_2)dr$

$$=1-\int_{r\in R_1} f(r|s_1)dr+\int_{r\in R_1} f(r|s_2)dr=1+\int_{r\in R_1} f(r|s_2)-f(r|s_1)dr$$

- 若要使得代价最小，应选择R_1满足$\int_{r\in R_1} f(r|s_2)-f(r|s_1)dr<0$

$$\Rightarrow R_1=\{r\in R|f(r|s_2)<f(r|s_1)\}$$
$$\Rightarrow R_2=\{r\in R|f(r|s_2)\geq f(r|s_1)\}$$

- $M=2$时的判定准则
  - ✓ $f(r|s_2)<f(r|s_1)$：判定发送为0
  - ✓ $f(r|s_2)\geq f(r|s_1)$：判定发送为1
- M为任意值时的判定准则

$$m_i=arg\max_{\forall i} f(r|s_i)$$

AWGN信道的最大似然检测

- 最大似然检测（Maximum Likelihood Detection）是一种流行的统计方法，用于拟合统计模型的数据，并识别模型参数
  - ✓ 一般来说，对于一组固定的数据和潜在的概率模型，最大似然方法选择模型参数的值，使得这些值产生的分布最有可能产生观测数据(即，使似然函数最大化的参数)
- AWGN信道的传输模型

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s}_i + \boldsymbol{n}$$

  - ✓ 由n的概率密度函数，可以推得条件概率函数为

$$f(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_i) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}_i\|^2}{2\sigma^2}}$$

- 最大似然判定准则

$$\boldsymbol{arg}\max_{\forall i} f(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_i) \equiv \boldsymbol{arg}\max_{\forall i} \ln f(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s}_i)$$

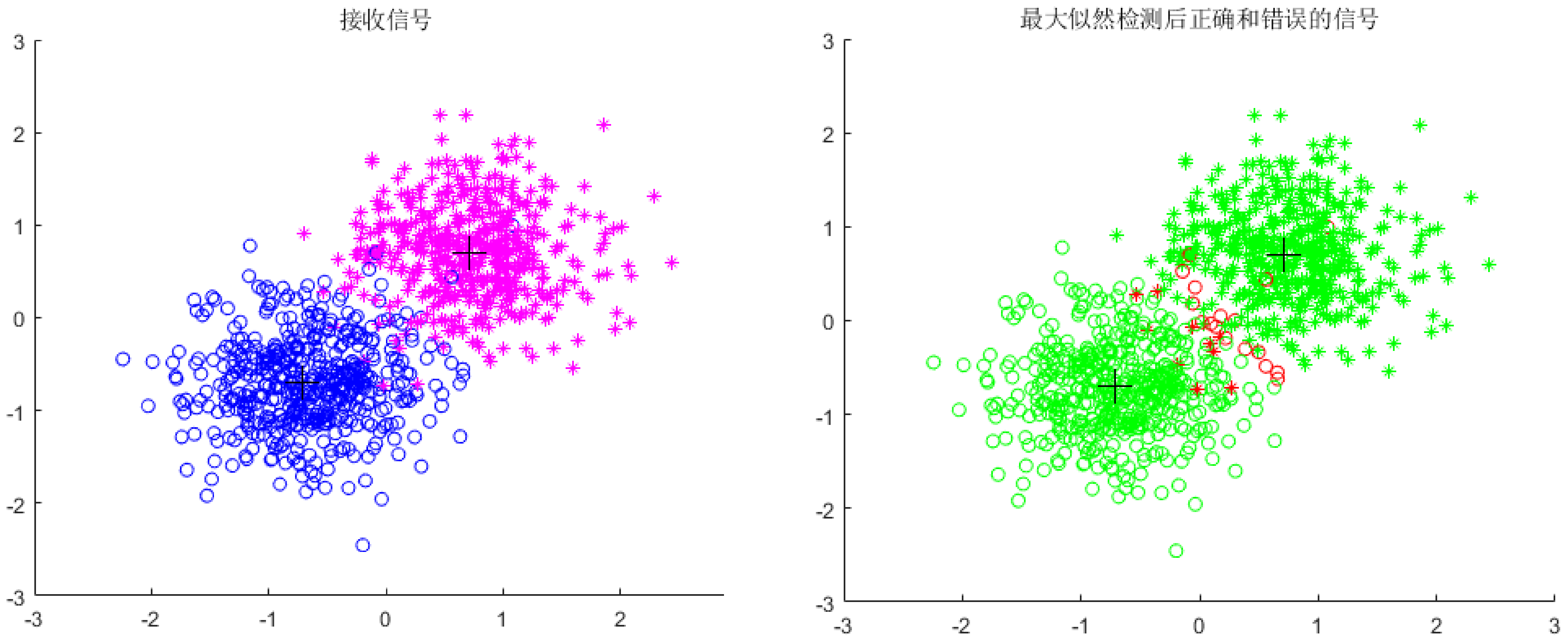
$$= \boldsymbol{arg}\max_{\forall i}\left\{\frac{N}{2}\ln\frac{1}{2\pi\sigma^2} - \frac{\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}_i\|^2}{2\sigma^2}\right\} \equiv \boldsymbol{arg}\max_{\forall i}\left\{-\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}_i\|^2\right\} \equiv \boldsymbol{arg}\min_{\forall i}\|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}_i\|$$

示例：最大似然检测

- 例 考虑一个二阶传输系统，比特0和比特1分别用信号矢量$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$和$\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$表示，假设$N0=0.5$，接收机使用最大似然检测。请画出接收信号矢量的分布以及误码比特的分布
  - ✓ 程序：simMLDetection.m

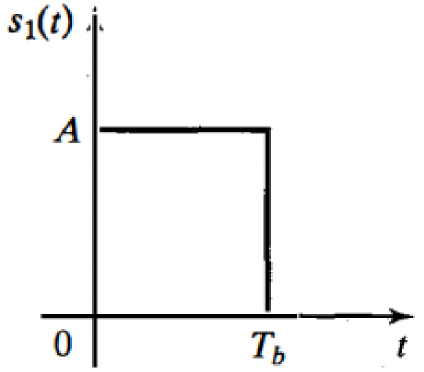
```
N=1e3;                          %仿真比特数目
s=randi([0,1],1,N);             %发送的比特流
x=zeros(2,N);                   %发送信号矢量
d=zeros(1,N);                   %检测出的比特流
N0=0.5;                         %噪声单边功率谱密度

V(:,1)=[-1/sqrt(2);-1/sqrt(2)];   %比特0对应的信号矢量1
V(:,2)=[1/sqrt(2);1/sqrt(2)];     %比特1对应的信号矢量2

% 比特映射到信号矢量（调制）
for i=1:N
    if s(i)==0
        x(:,i)=V(:,1);
    elseif s(i)==1
        x(:,i)=V(:,2);
    end
end

n = sqrt(N0/2)*randn(size(x));          %生成噪声
y=x+n;                                  %信号矢量通过AWGN信道
```

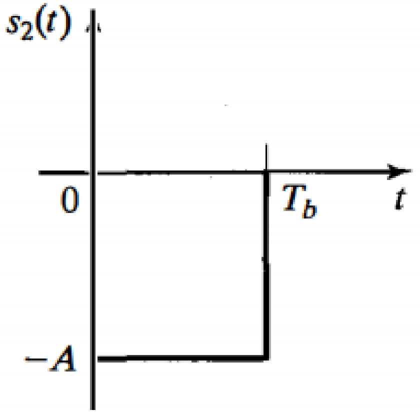
```
figure
hold on
for i=1:length(x)
    if s(i)==0
        plot(y(1,i),y(2,i),'bo');
    else
        plot(y(1,i),y(2,i),'m*');
    end

    % 最大似然检测，欧氏距离小的，作为判决比特输出
    if sum((y(:,i)-V(:,1)).^2).^0.5<sum((y(:,i)-V(:,2)).^2).^0.5
        d(i)=0;
    else
        d(i)=1;
    end
end
plot(V(1,1),V(2,1),'k+',V(1,2),V(2,2),'k+','MarkerSize',15)
title('接收信号')
axis([-3,3,-3,3])
hold off
```

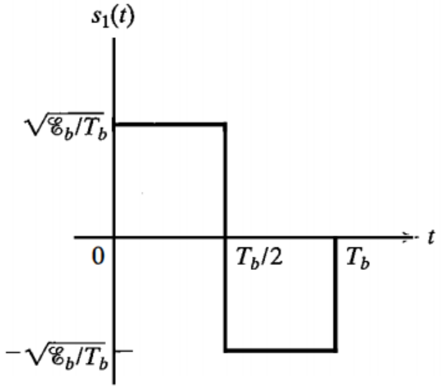

接收信号
最大似然检测后正确和错误的信号
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3

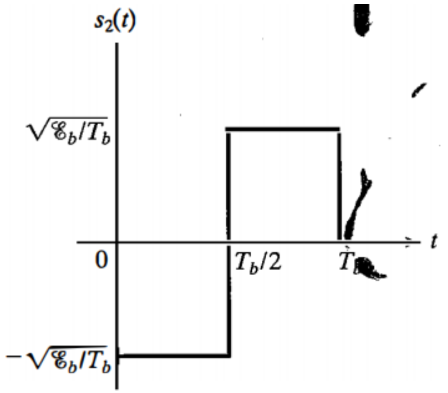
二阶调制波形——双极性信号

- 双极性信号：信息比特1用宽度为T_b的波形$p(t)$，信息比特0则用$-p(t)$
  - ✓ 2PAM：$s_m(t) = A_m p(t),\ t \in [0, T_b)$， T_b是比特时间间隔， $A_1 = A$，$A_2 = -A$

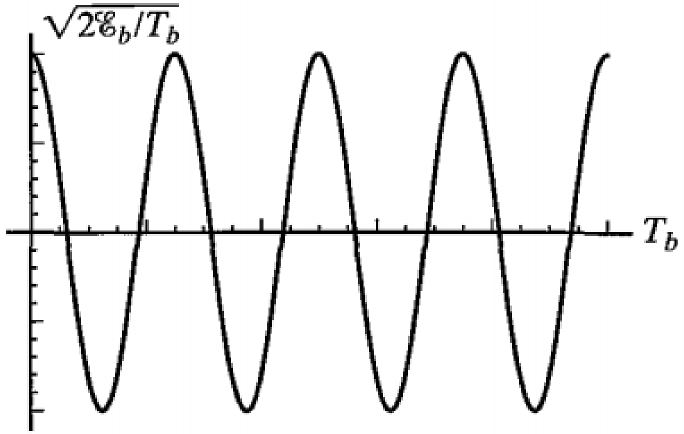


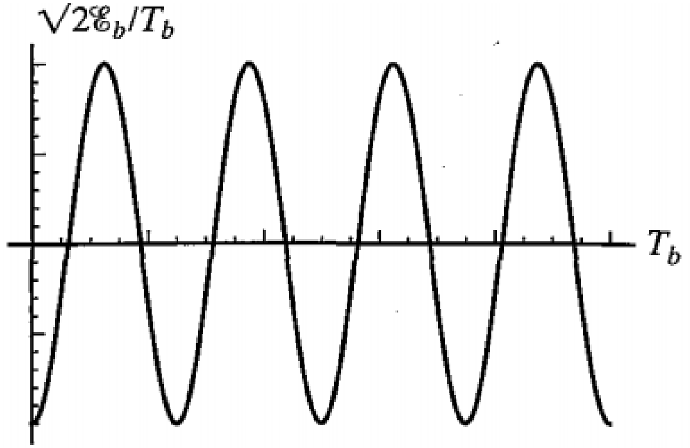






  - ✓ 2ASK： $s_m(t) = A_m p(t), \cos 2\pi f_c t \quad t \in [0, T_b)$

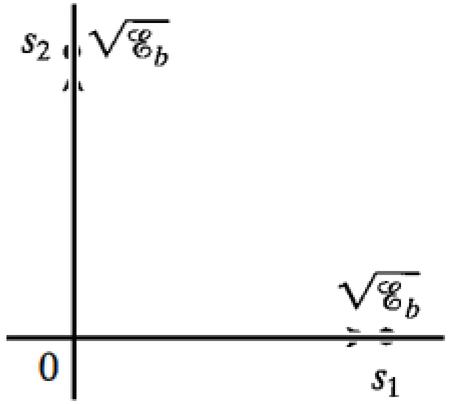




二阶调制信号——正交信号

- 正交信号：信号$s_1(t)$和$s_2(t)$具有相等的能量且相互正交，也即满足

$$\int_0^{T_b} s_1^2(t)\,dt = \mathcal{E}_b \quad \int_0^{T_b} s_2^2(t)\,dt = \mathcal{E}_b \quad \int_0^{T_b} s_1(t)s_2(t)\,dt = 0$$

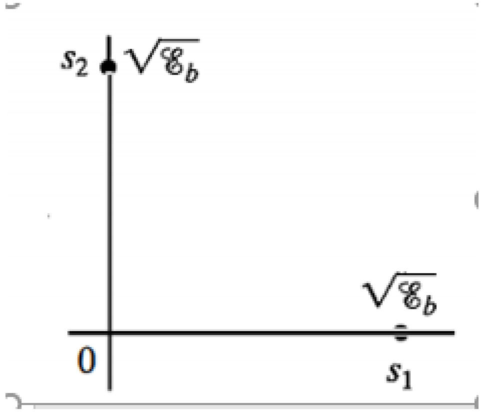


- 由于两个信号已经正交，归一化两个信号可以得到正交基函数

$$\psi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_b}} \quad \psi_2(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_b}}$$

- 信号$s_1(t)$和$s_2(t)$可以写成

$$s_1(t) = \sqrt{\mathcal{E}_b}\psi_1(t) + 0\psi_2(t) \quad s_2(t) = 0\psi_1(t) + \sqrt{\mathcal{E}_b}\psi_2(t)$$

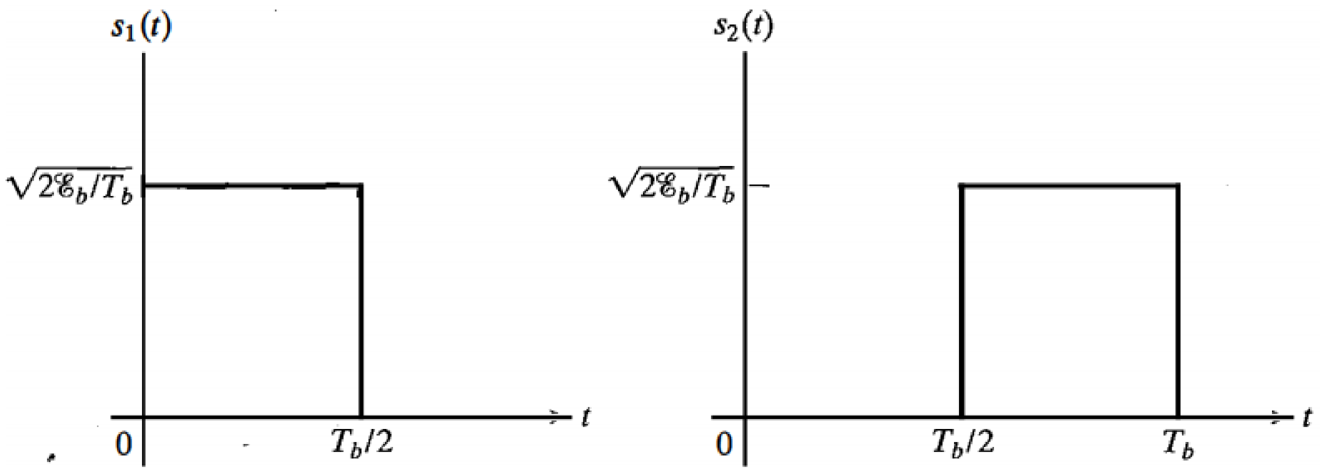


- 相应的信号矢量为

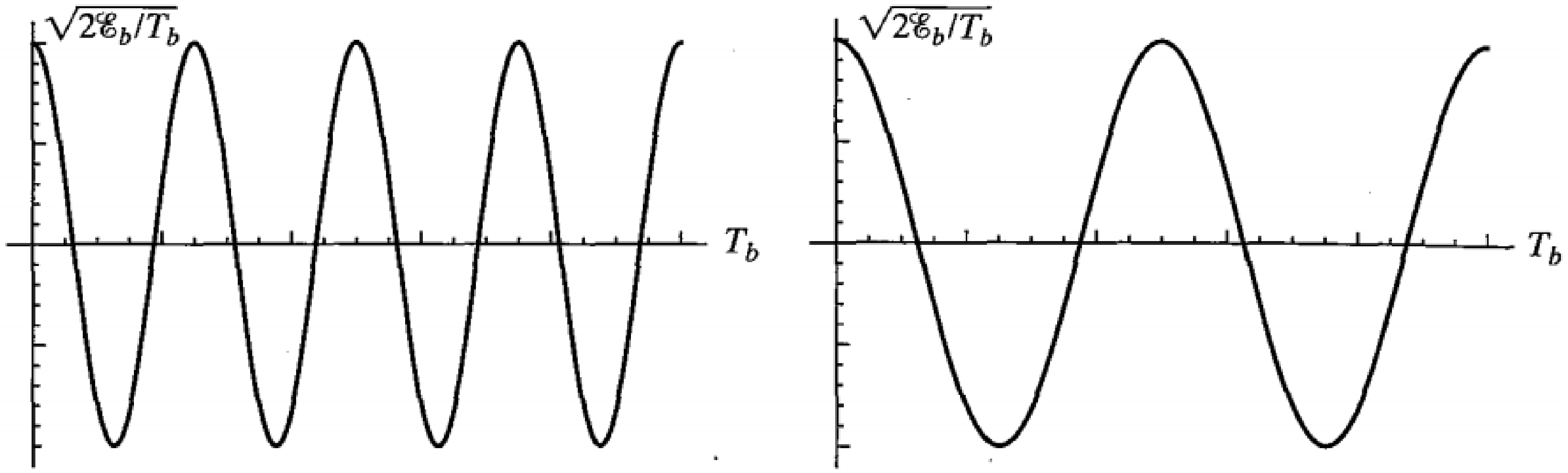
$$\mathbf{s}_1 = \left(\sqrt{\mathcal{E}_b},\ 0\right) \quad \mathbf{s}_2 = \left(0,\ \sqrt{\mathcal{E}_b}\right)$$

二阶调制信号——正交信号

- 二阶脉冲位置调制（PPM）



- 二阶频移键控（FSK）
  - ✓ $\psi_1(t) = \cos 2\pi f_1 t$
  - ✓ $\psi_2(t) = \cos 2\pi f_2 t$



相关接收机——二阶双极性信号（1）

- 二阶双极性信号

$$s_m(t) = s_m\psi(t) \quad m = 1, 2$$

✓ $\psi(t) = \frac{p(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_b}}$, $s_1 = \sqrt{\mathcal{E}_b}$, $s_2 = -\sqrt{\mathcal{E}_b}$

- 接收信号为

$$r(t) = s_m\psi(t) + n(t) \ t \in [0, T_b)$$

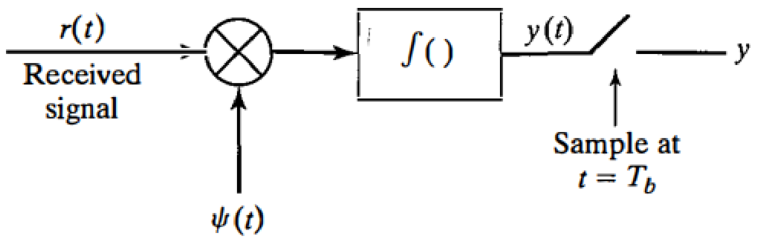
- 相关接收机将接收信号$r(t)$与波形$\psi(t)$相乘，并在$t \in [0, T_b)$上积分，得到$r(t)$与$\psi(t)$的互相关

$$y(t) = \int_0^t r(t)\psi(t)\,dt = s_m \int_0^t \psi^2(t)\,dt + \int_0^t n(t)\psi(t)\,dt$$

✓ 在$t = T_b$时刻对相关输出进行采样，得到

$$y(T_b) = s_m + n$$

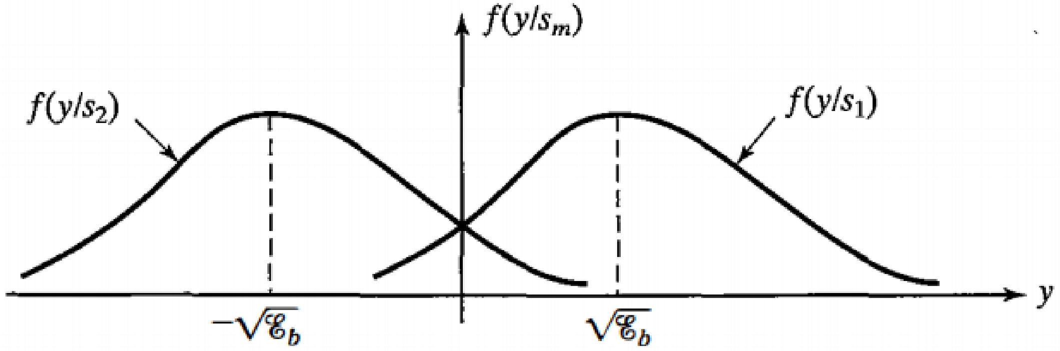
✓ 其中，$n = \int_0^{T_b} n(t)\psi(t)\,dt$



相关接收机——二阶双极性信号（2）

- 注意： n是零均值，方差为
  - ✓ $\sigma^2 = \mathbb{E}\{n^2\} = \mathbb{E}\left\{\int_0^{T_b}\int_0^{T_b} n(t)n(\tau)\psi(t)\psi(\tau)d\tau\, dt\right\}$
  - ✓ $= \int_0^{T_b}\int_0^{T_b} \mathbb{E}\{n(t)n(\tau)\}\psi(t)\psi(\tau)d\tau\, dt$
  - ✓ $= \int_0^{T_b}\int_0^{T_b} \frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)\psi(t)\psi(\tau)d\tau\, dt = \frac{N_0}{2}\int_0^{T_b}\psi^2(t)dt = \frac{N_0}{2}$
- 因此，$y = y(T_b)$是均值为s_m，方差为$\frac{N_0}{2}$的高斯随机变量

$$f(r|s_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(y-s_m)^2}{N_0}}$$



相关接收机——二阶双极性信号（3）

- 平均错误概率是阈值α的函数

$$P_E(\alpha) = P(s_1)\int_{-\infty}^{\alpha} f(y|s_1)\,dy + P(s_2)\int_{\alpha}^{+\infty} f(y|s_2)\,dy$$

✓ $\min\limits_{\alpha} P_E(\alpha) \Longrightarrow \frac{\partial P_E(\alpha)}{\partial \alpha} = 0 \Longrightarrow P(s_1)f(\alpha|s_1) - P(s_2)f(\alpha|s_2) = 0 \Longrightarrow \frac{P(s_2)}{P(s_1)} = \frac{f(\alpha|s_1)}{f(\alpha|s_2)} \Longrightarrow$

$\frac{P(s_2)}{P(s_1)} = e^{\frac{4\alpha\sqrt{\mathcal{E}_b}}{N_0}} \Longrightarrow \alpha^* = \frac{N_0}{4\sqrt{\mathcal{E}_b}} \ln\frac{P(s_2)}{P(s_1)}$

✓ $P(s_1) = P(s_2) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \alpha^* = 0$

- 最优阈值α下的平均错误概率

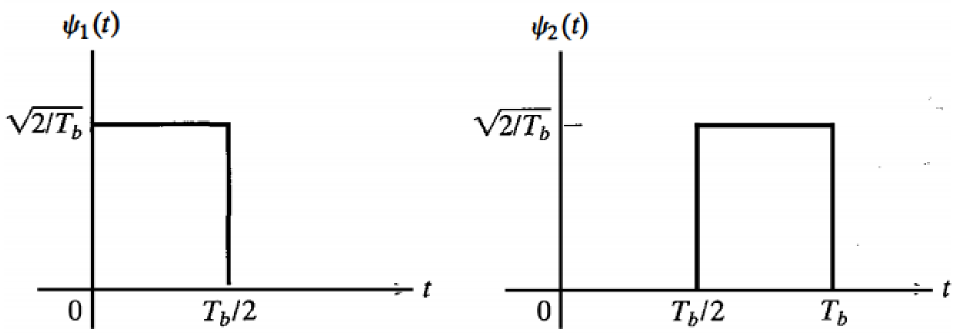
$$P_E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f(y|s_1)\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} f(y|s_2)\,dy = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f(y|s_1)\,dy = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{\left(y-\sqrt{\mathcal{E}_b}\right)^2}{N_0}}\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\sqrt{2\mathcal{E}_b/N_0}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = Q\left(\sqrt{2\mathcal{E}_b/N_0}\right)$$

✓ $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

相关接收机——二阶正交信号（1）

- 二阶正交信号波形
  - ✓ $s_1(t) = s_{11}\psi_1(t) + s_{12}\psi_2(t)$
  - ✓ $s_2(t) = s_{21}\psi_1(t) + s_{22}\psi_2(t)$
  - ✓ $s_{11} = s_{22} = \sqrt{\mathcal{E}_b},\ s_{12} = s_{21} = 0$



- 接收信号为

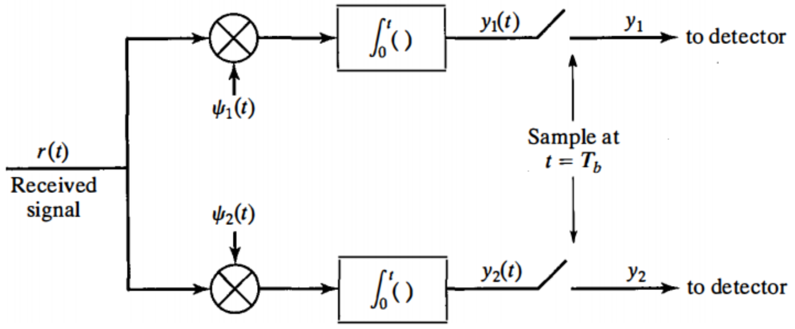
$$r(t) = s_m(t) + n(t)\ t \in [0, T_b)$$

- 由于发送信号是二维的，相关接收机将$r(t)$分别与两个基信号波形$\psi_1(t)$和$\psi_2(t)$进行相关，输出波形为

$$y_m(t) = \int_0^t r(t)\psi_m(t)\,dt$$

  - ✓ 在$t = T_b$时刻对相关输出进行采样，得到

$$y(T_b) = \int_0^{T_b} r(t)\psi_m(t)\,dt$$



相关接收机——二阶正交信号（2）

- 假设发送信号为$s_1(t)=s_{11}\psi_1(t)$，则$r(t)=s_{11}\psi_1(t)+n(t)$
  - ✓ 第1个相关器输出：$y_1=\int_0^{T_b} r(t)\psi_1(t)\,dt=s_{11}+n_1=\sqrt{\mathcal{E}_b}+n_1$
  - ✓ 第2个相关其输出：$y_2=\int_0^{T_b} r(t)\psi_2(t)\,dt=s_{12}+n_2=n_2$
  - ✓ $n_1=\int_0^{T_b} n(t)\psi_1(t)\,dt$ $n_2=\int_0^{T_b} n(t)\psi_2(t)\,dt$
  - ✓ 接收信号矢量为$y=(y_1,y_2)=\left(\sqrt{\mathcal{E}_b}+n_1,n_2\right)$
- 相关器输出分量(y_1,y_2)的条件联合概率密度函数为

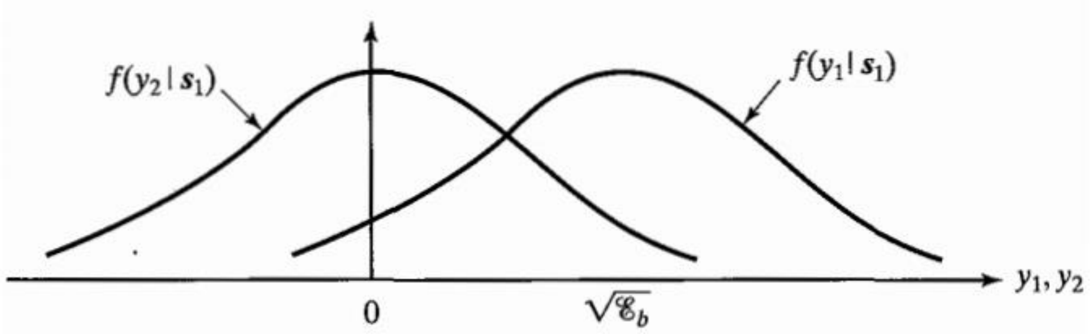
$$f(y_1,y_2|s_1)=\frac{1}{\pi N_0}e^{-\frac{\left(y_1-\sqrt{\mathcal{E}_b}\right)^2}{N_0}}e^{-\frac{y_2^2}{N_0}}$$

- 类似地，当发送信号为$s_2(t)=s_{22}\psi_2(t)$，输出分量(y_1,y_2)的条件联合概率密度函数为

$$f(y_1,y_2|s_1)=\frac{1}{\pi N_0}e^{-\frac{y_1^2}{N_0}}e^{-\frac{\left(y_2-\sqrt{\mathcal{E}_b}\right)^2}{N_0}}$$

相关接收机——二阶正交信号（3）

- 发送信号为$s_1(t)$时的概率密度函数



- 判决方式：由于两个正交信号等概率，则可以直接比较y_1和y_2，给出判决结果
  - ✓ $y_1 > y_2$：判为$s_1(t)$
  - ✓ $y_1 \le y_2$：判为$s_2(t)$
- 平均错误概率
  - ✓ 发送信号为$s_1(t)$，则$z = y_1 - y_2 = \sqrt{\mathcal{E}_b} + n_1 - n_2 \sim N\left(\sqrt{\mathcal{E}_b}, N_0\right)$
  - ✓ $P_E = P(z < 0) = \int_{-\infty}^{-\sqrt{\mathcal{E}_b/N_0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{N_0}} dx = Q\left(\sqrt{\mathcal{E}_b/N_0}\right)$

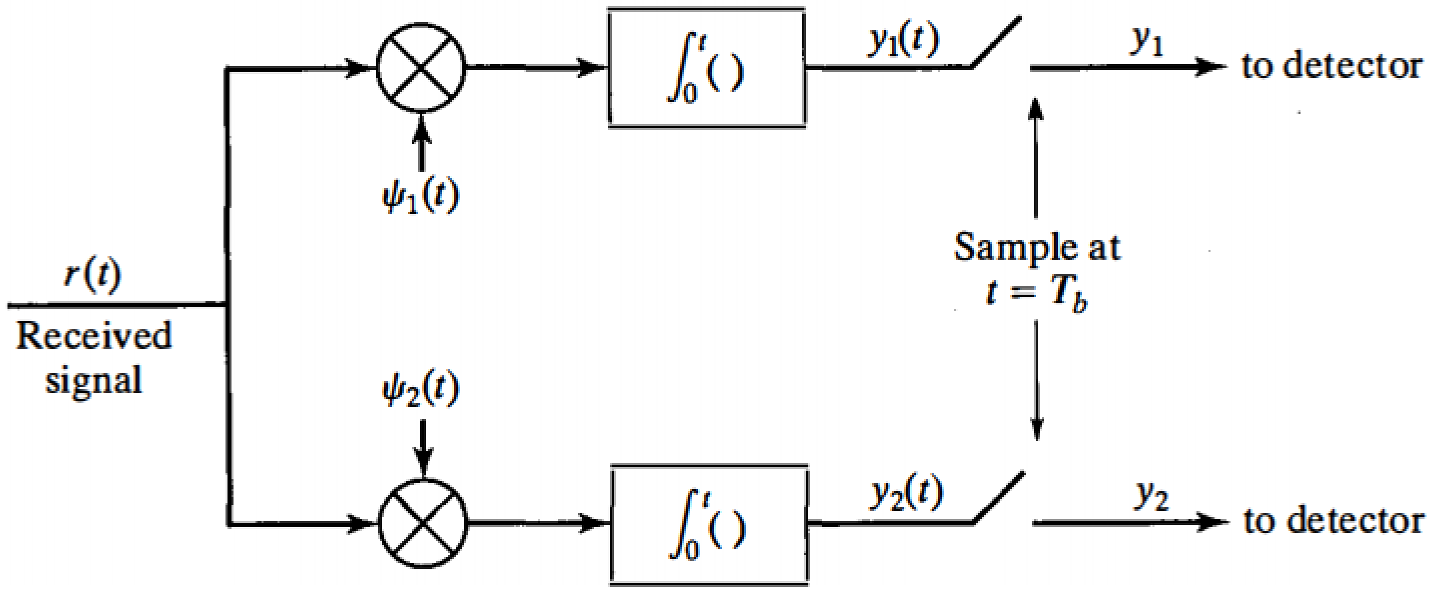
相关接收机的等效判决方法

- 前述基于门限的判决方法比较适用于二阶调制，对高阶调制过于麻烦
- 最大似然判定准则（一般化）

$$\boldsymbol{arg}\max_{\forall \boldsymbol{i}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{s_i}) \equiv \boldsymbol{arg}\min_{\forall \boldsymbol{i}} \|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s_i}\|$$

$$= \boldsymbol{arg}\min_{\forall \boldsymbol{i}} \sqrt{\|\boldsymbol{r}\|^2 - 2\boldsymbol{r}\boldsymbol{s_i^*} + \|\boldsymbol{s_i}\|^2}$$

$$\equiv \boldsymbol{arg}\min_{\forall \boldsymbol{i}} \{-2\boldsymbol{r}\boldsymbol{s_i^*}\} = \boldsymbol{arg}\max_{\forall \boldsymbol{i}} \{\boldsymbol{r}\boldsymbol{s_i^*}\}$$



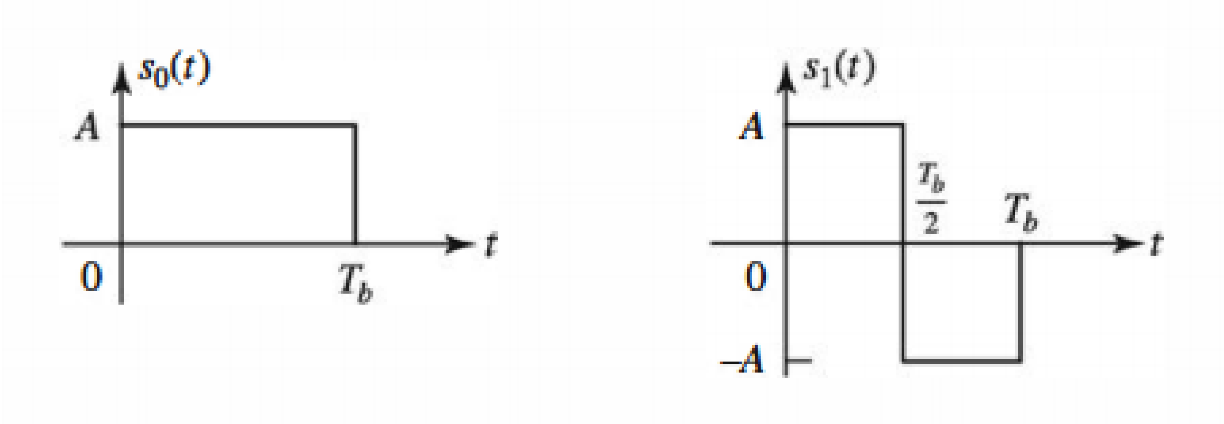
相关后，那一路输出最大，就判为哪个

示例：相关接收机的输出波形（1）

- 例：假设信号波形$s_0(t)$和$s_1(t)$如图所示，并设$s_0(t)$是已发送信号，那么已接收信号是：

$$r(t) = s_0(t) + n(t) \qquad 0 \le t \le T_b$$

求在采样瞬时的相关器的输出



示例：相关接收机的输出波形（2）

- 采样瞬间$t = T_b$时

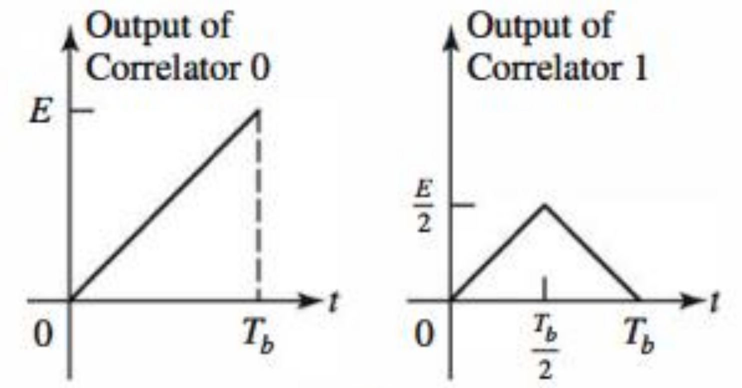
$$r_0 = \int_0^{T_b} r(t)s_0(t)dt = \int_0^{T_b} s_0(t)s_0(t)dt + \int_0^{T_b} n(t)s_0(t)dt = E + n_1$$

$$r_1 = \int_0^{T_b} r(t)s_1(t)dt = \int_0^{T_b} s_0(t)s_1(t)dt + \int_0^{T_b} n(t)s_1(t)dt = n_1$$

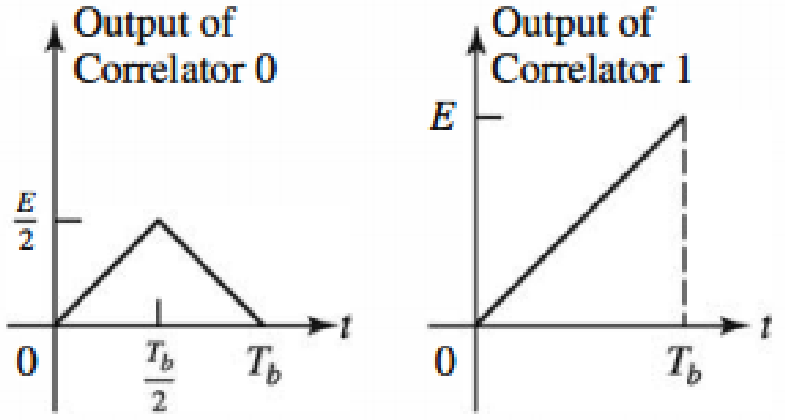
$$n_0 = \int_0^{T_b} n(t)s_0(t)\mathrm{d}t \qquad n_1 = \int_0^{T_b} n(t)s_1(t)\mathrm{d}t$$

$E=A^2T_b$

- 同理可得，当$s_1(t)$是已发送信号时，信号相关器的输出是：$r_0=n_0$；$r_1=E+n_1$
- 无噪声的输出为



(a)



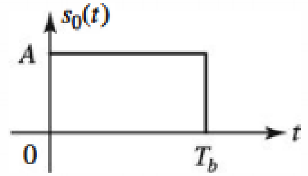
(b)

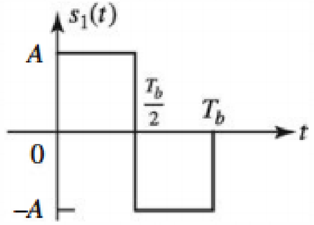
示例：相关接收机的输出波形（3）

- 对前例中的信号波形以$F_s=20/T_b$(采样间隔$T_s=T_b/20$)的速率进行采样，并且数值上用$s_0(t)$和$s_1(t)$对$r(t)$进行相关,画出

$$r_0(kT_s)=\sum_{n=1}^{k} r(nT_s)s_0(nT_s),\quad k=1,2,\ldots,20$$

$$r_1(kT_s)=\sum_{n=1}^{k} r(nT_s)s_1(nT_s),\quad k=1,2,\ldots,20$$





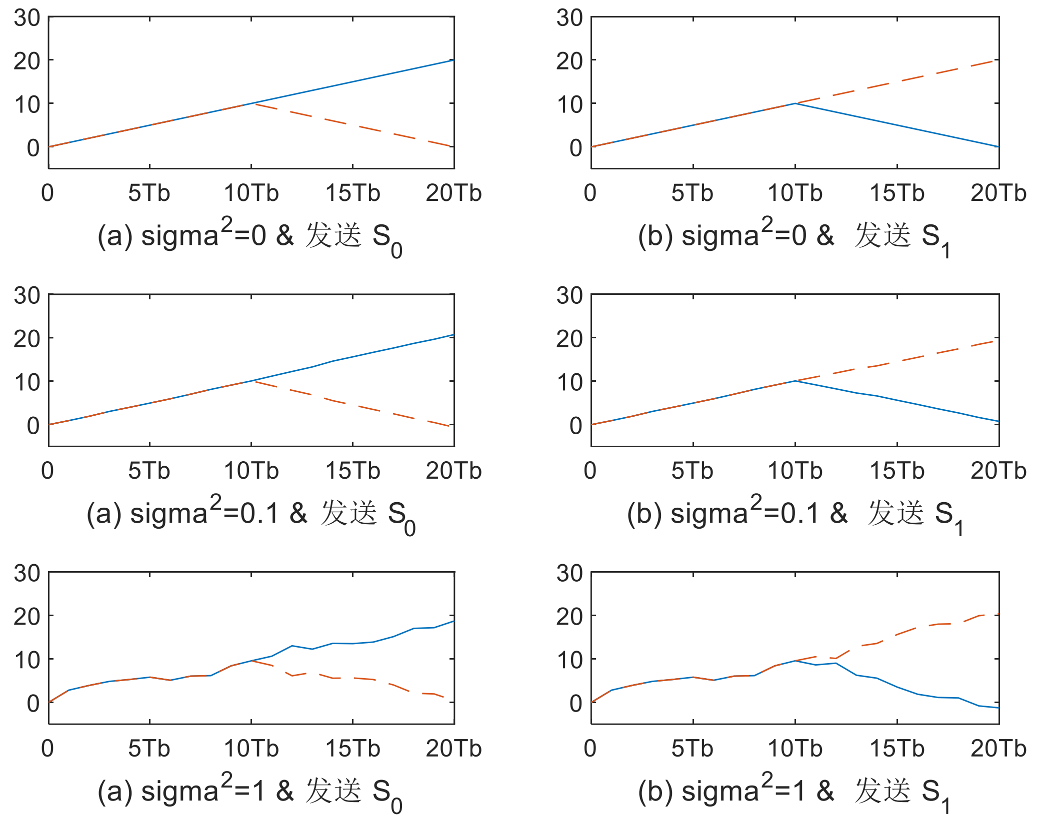
- 当信号样本$r(kT_s)$被假性高斯白噪声样本$n(kT_s)$污染时，重复上述计算和画图过程。
  - ✓ 程序：simCorrelation.m

```
% 初始化
K=20;         % 采样数目
A=1;          % 信号幅度
t=0:K;

% 定义信号波形
s_0=A*ones(1,K);
s_1=[A*ones(1,K/2) -A*ones(1,K/2)];

% 初始化输出波形
r_0=zeros(1,K);
r_1=zeros(1,K);

sigma=[0,0.1,1];%噪声功率
```

示例：相关接收机的输出波形（4）

Ex11correlation.m

```
for i=1:3
    noise=random('Normal',0,sigma(i),1,K);
    s=s_0;
    r=s+noise;  % 接收信号
    for n=1:K
        r_0(n)=sum(r(1:n).*s_0(1:n));
        r_1(n)=sum(r(1:n).*s_1(1:n));
    end

    subplot(3,2,(i-1)*2+1)
    plot(t,[0 r_0],'-',t,[0 r_1],'--')
    set(gca,'XTickLabel',{'0','5Tb','10Tb','15Tb','20Tb'})
    axis([0 20 -5 30])
    ss=strcat('(a) sigma^2=', num2str(sigma(i)), ' & 发送 S_{0}');
    xlabel(ss,'fontsize',10)

    s=s_1;
    r=s+noise;  % 接收信号
    for n=1:K
        r_0(n)=sum(r(1:n).*s_0(1:n));
        r_1(n)=sum(r(1:n).*s_1(1:n));
    end

    subplot(3,2,(i-1)*2+2)
    plot(t,[0 r_0],'-',t,[0 r_1],'--')
    set(gca,'XTickLabel',{'0','5Tb','10Tb','15Tb','20Tb'})
    axis([0 20 -5 30])
    ss=strcat('(b) sigma^2=', num2str(sigma(i)), ' &  发送 S_{1}');
    xlabel(ss,'fontsize',10)
end
```



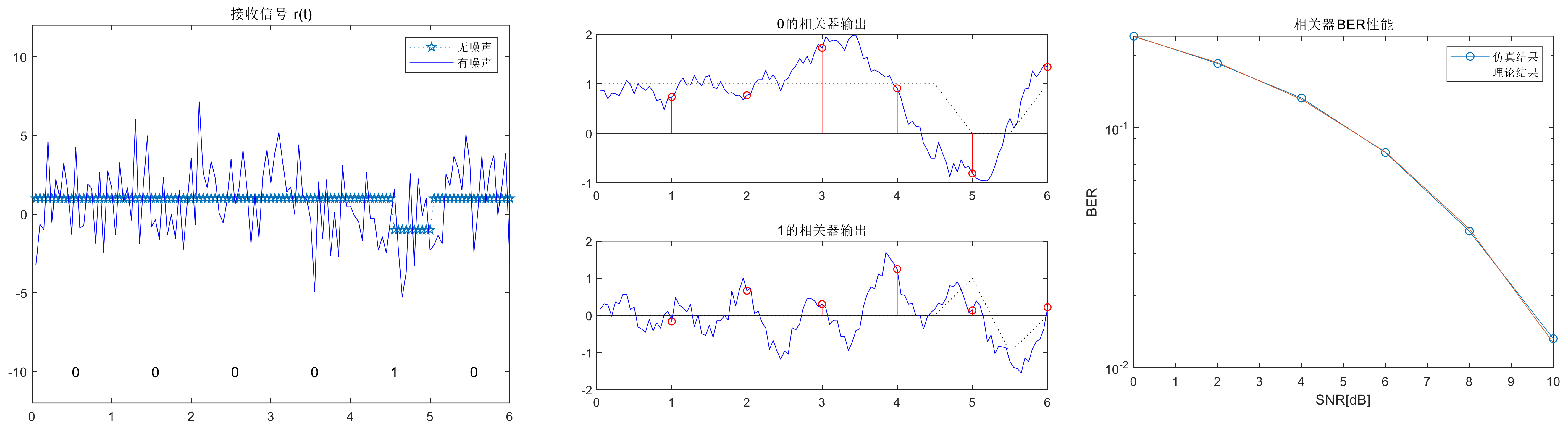
示例：相关接收机的BER性能

◻ 程序：simCorrelatedDetector.m

```
% 相关接收机的仿真实现
function [sBer,tBer]=simCorrelatedDetector(SNRdB,Nsym)
% SNR     信噪比dB值
% Nsym    仿真符号数
% sBer    仿真统计BER
% tBer    理论计算BER

if nargin == 0 %无输入参数，默认展示
    clear, close all;
    SNRdB=6;
    Nsym=1e5;
elseif nargin == 1
    Nsym=1e5;
end

rng default

Tsym=1;                         %符号周期
Nsam=20;                        %采样倍数
Tsam=Tsym/Nsam;                 %采样周期

L=6;                           %保存L个符号波形，用于展示
LB=L*Nsam;                     %保存的波形矢量长度

sw(1,:)=ones(1,Nsam);           %  信号波形
sw(2,:)=[ones(1,Nsam/2), -ones(1,Nsam/2)];


%计算波形能量
E1=sum(sw(1,:).^2.*Tsam);
E2=sum(sw(2,:).^2.*Tsam);
Esym=(E1+E2)/2;
sBer=[];
tBer=[];
for SNR=10.^(SNRdB/10)
    N0=2*Esym/SNR;                        %单边功率谱密度
    halfN0=N0/2;                         %双边功率谱密度
    sigma_sT=sqrt(halfN0/Tsam);          %噪声功率，标准方差

    st= zeros(1,LB);
    r= zeros(1,LB);
    y= zeros(2,LB);  %输出波形: 无噪声影响
    yr= zeros(2,LB); %输出波形: 有噪声影响

    s=zeros(1,Nsym);
    d=zeros(1,Nsym); %检测出的数据

    for n=1:Nsym
       s(n)=randi([0,1]);
       i=s(n)+1; %0,对应1的波形; 1, 对应2的波形
       for m=1:Nsam
         t=sw(i,m);
         tn=t+sigma_sT*randn;
         st=[st(2:LB) t];                 % 发送信号波形
         r=[r(2:LB) tn]; % 被噪声影响的接收信号波形

         if size(SNRdB,2)==1
            yy(1,:)=sw(1,:)*st(LB-Nsam+1:LB)';
            yy(2,:)=sw(2,:)*st(LB-Nsam+1:LB)';
            y=[y(:,2:LB) yy.*Tsam];
         end

         yyn(1,:)=sw(1,:)*r(LB-Nsam+1:LB)';
         yyn(2,:)=sw(2,:)*r(LB-Nsam+1:LB)';
         yr=[yr(:,2:LB) yyn.*Tsam];
       end
       % 检测器(ML检测)
       d(n)=(yr(2,end)>yr(1,end));
    end
    sBer=[sBer sum(s~=d)/Nsym];
    tBer=[tBer qfn(sqrt(Esym/N0))];
end
```

仿真结果

- simCorrelatedDetector.m



- [a,b]=simCorrelatedDetector (0:2:10)

匹配滤波器接收机

□ 二阶双极性信号

$$r(t) = s_m\psi(t) + n \quad m = 1,2$$

✓ 通过一个线性时变滤波器，其冲激响应为

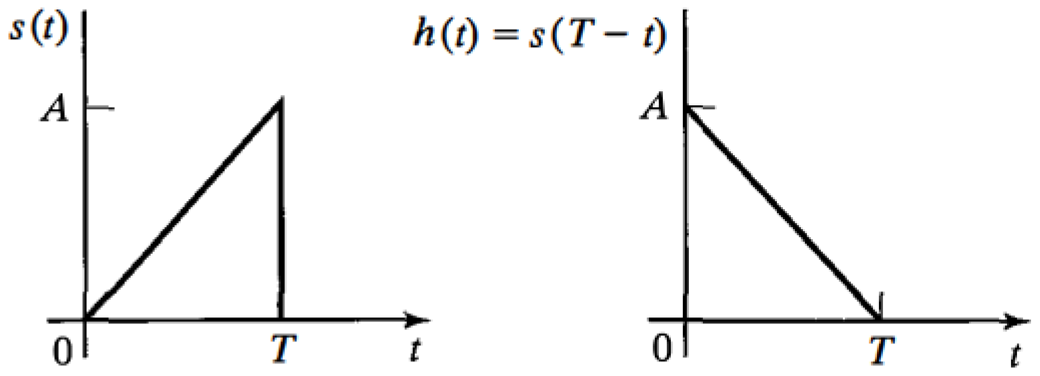
$$h(t) = \psi(T_b - t) \quad t \in [0, T_b)$$

✓ 滤波器在$t = T_b$时刻对滤波器输出抽样可得

$$y(T_b) = \int_0^{T_b} r(t)h(T_b - t)\,dt$$

✓ 由于$h(T_b - t)$=$\psi(t)$，有

$$y(T_b) = \int_0^{T_b} [s_m\psi(t) + n]\psi(t)\,dt = s_m + n$$



(a) Signal $s(t)$

(b) Impulse response of filter matched to $s(t)$

□ 二阶正交信号

$$r(t) = s_m(t) + n(t)$$

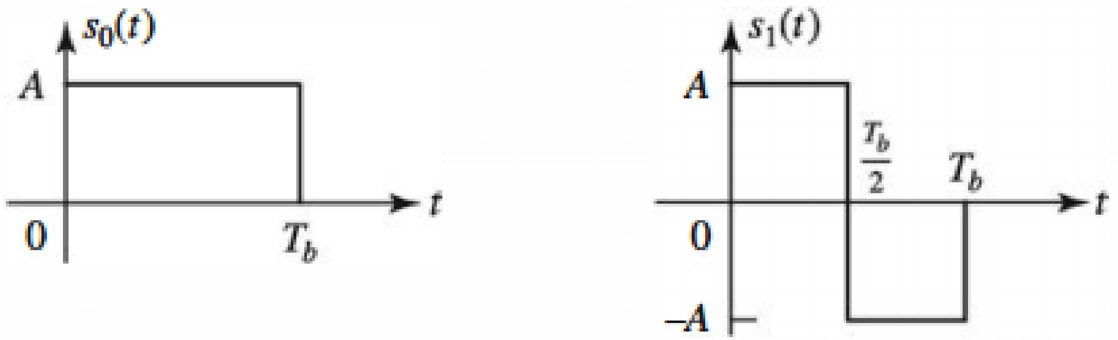
✓ 分别通过两个线性时变滤波器，其冲激响应为

$$h_m(t) = \psi_m(T_b - t) \quad t \in [0, T_b) \; m = 1,2$$

匹配滤波器接收机性能与相关接收机性能一样

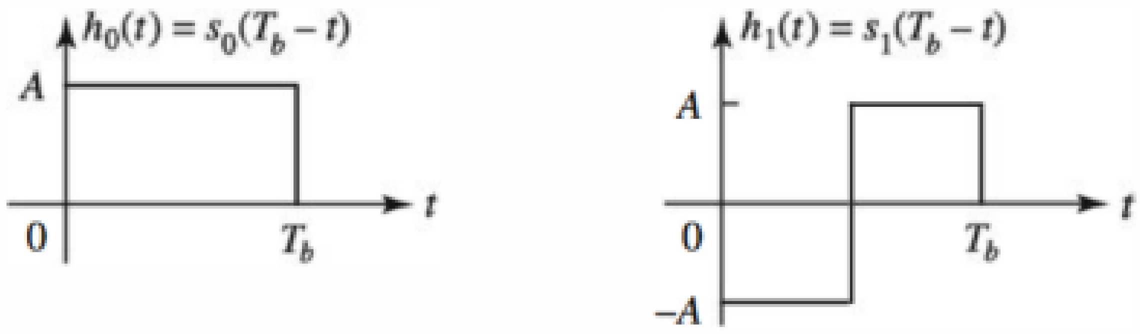
示例：匹配滤波器的输出波形(1)

- 考虑用匹配滤波器对下面两个信号波形进行解调，并求信号所对应匹配滤波器



- 定义：匹配滤波器的冲激响应为$h(t) = s(Tb - t)$， $0 \le t \le Tb$
  - ✓ 两个匹配滤波器冲击响应为

$$h_0(t) = s_0(T_b - t)$$
$$h_1(t) = s_1(T_b - t)$$



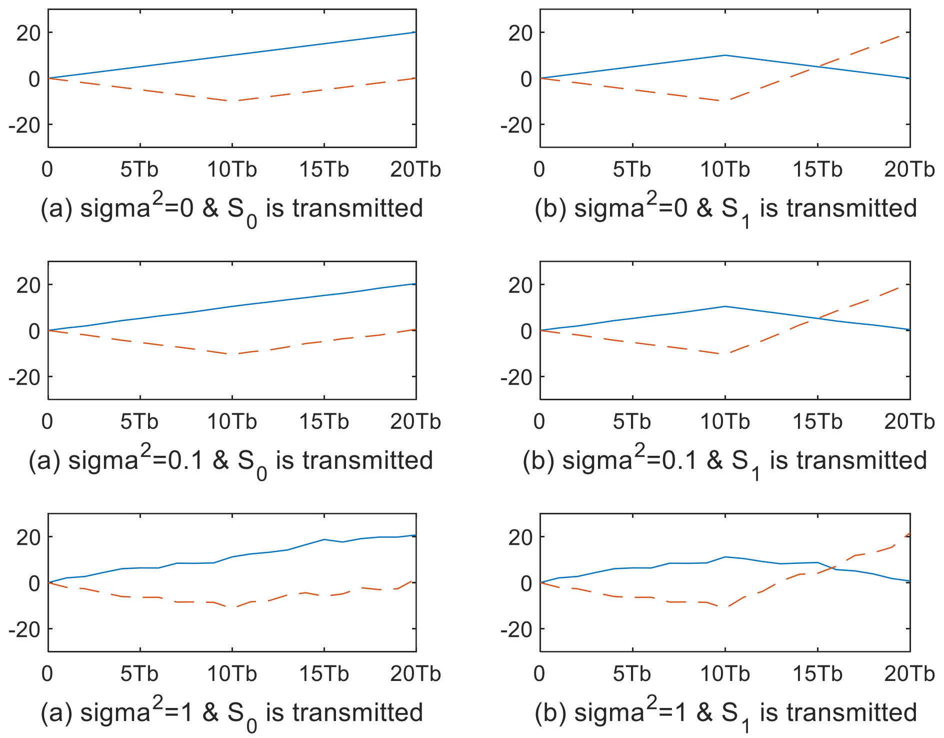
示例：匹配滤波器的输出波形(2)

- 对上例中的信号波形以$F_s = 20/T_b$(采样间隔$T_s = T_b/20$)的速率进行采样，并且数值上用$s_0(t)$和$s_1(t)$对$r(t)$进行相关,画出

$$y_0(kT_s) = \sum_{n=1}^{k} r(nT_s)s_0(kT_s - nT_s), \quad k = 1,2,\ldots,20$$

$$y_1(kT_s) = \sum_{n=1}^{k} r(nT_s)s_1(kT_s - nT_s), \quad k = 1,2,\ldots,20$$

  - ✓ 当信号样本$r(kT_s)$被加性高斯白噪声样本$n(kT_s)$污染时，重复上述计算和画图过程



- 程序：simMatchedFilter.m

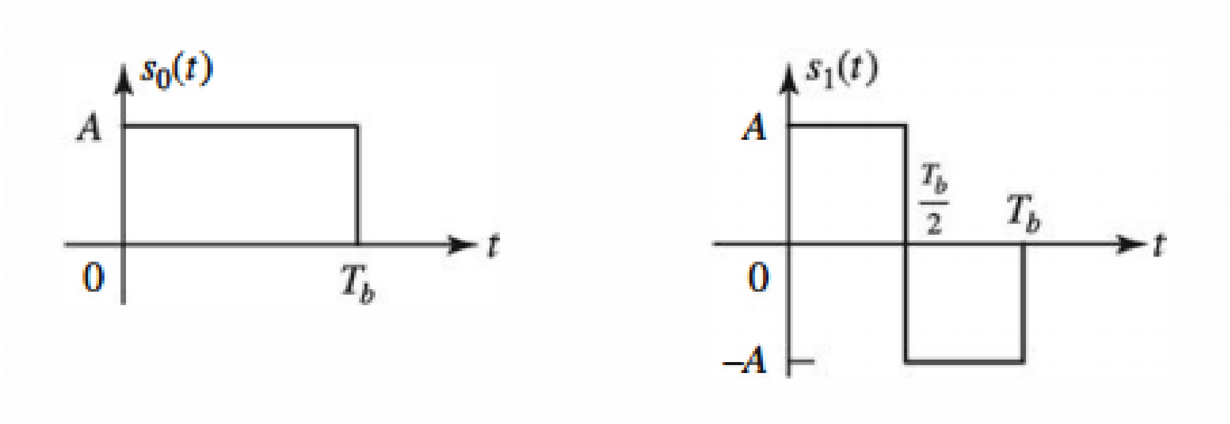
示例：匹配滤波器的输出波形(3)

```
% 初始化
K=20;         % 采样数目
A=1;          % 信号幅度
l=0:K;

% 定义信号波形
s_0=A*ones(1,K);
s_1=[A*ones(1,K/2) -A*ones(1,K/2)];
% 初始化输出信号
y_0=zeros(1,K);
y_1=zeros(1,K);

sigma=[0,0.1,1];%噪声功率
```

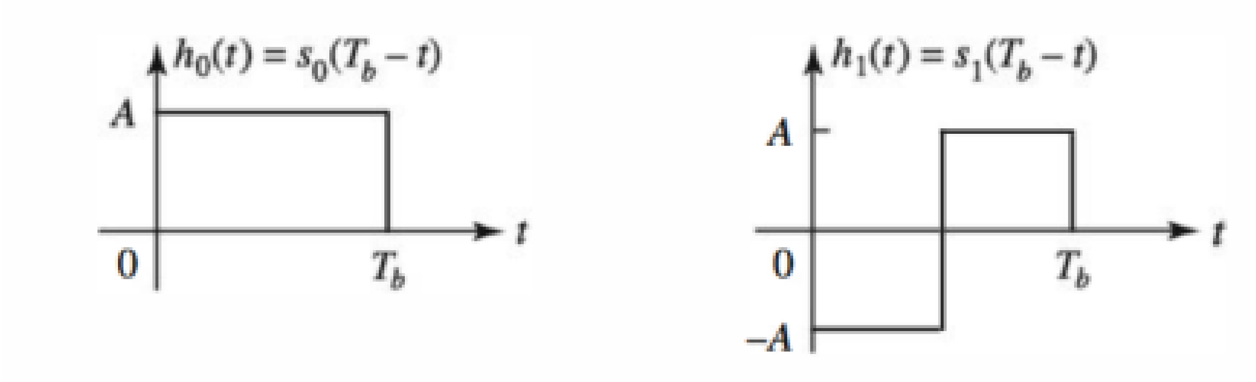
```
for i=1:3
    noise=random('Normal',0,sigma(i),1,K);
    s=s_0;
    y=s+noise;  % 接收信号

    y_0=conv(y,fliplr(s_0));
    y_1=conv(y,fliplr(s_1));

    subplot(3,2,(i-1)*2+1)
    plot(l,[0 y_0(1:K)],'-',l,[0 y_1(1:K)],'--')
    set(gca,'XTickLabel',{'0','5Tb','10Tb','15Tb','20Tb'})
    axis([0 20 -30 30])
    ss=strcat('(a) sigma^2=', num2str(sigma(i)), ' & 发送 S_{0}');
    xlabel(ss,'fontsize',10)
    % s = s_1:
    s=s_1;
    y=s+noise;  % 接收信号
    y_0=conv(y,fliplr(s_0));
    y_1=conv(y,fliplr(s_1));

    subplot(3,2,(i-1)*2+2)
    plot(l,[0 y_0(1:K)],'-',l,[0 y_1(1:K)],'--')
    set(gca,'XTickLabel',{'0','5Tb','10Tb','15Tb','20Tb'})
    axis([0 20 -30 30])
    ss=strcat('(b) sigma^2=', num2str(sigma(i)), ' & 发送 S_{1}');
    xlabel(ss,'fontsize',10)
end
```

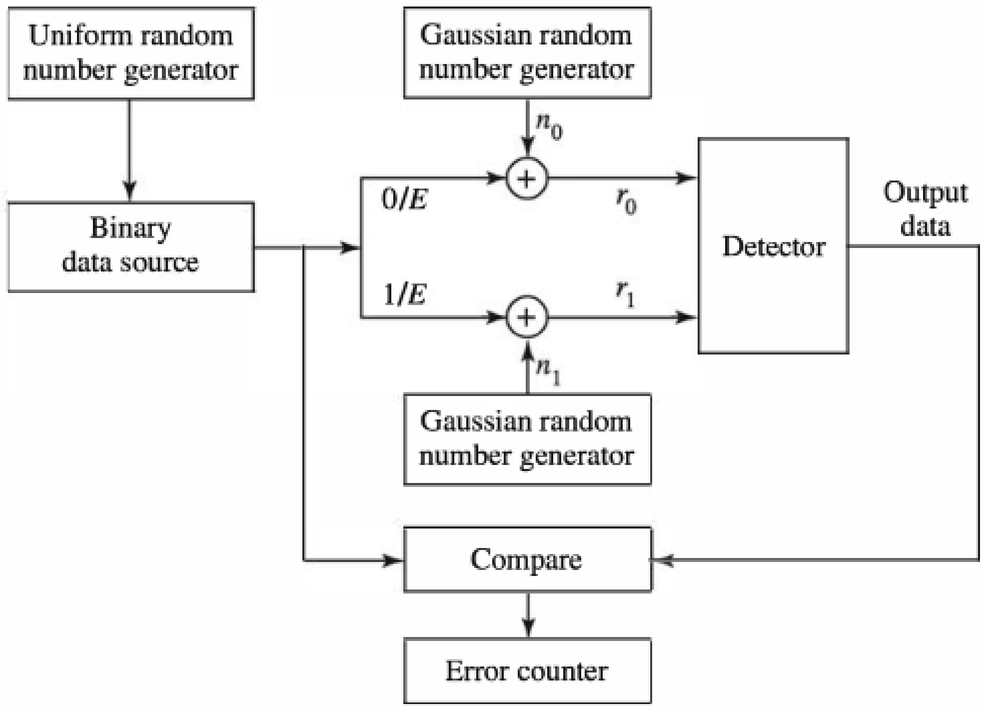
示例：匹配滤波器的BER性能

□ 信号波形



□ 匹配滤波器



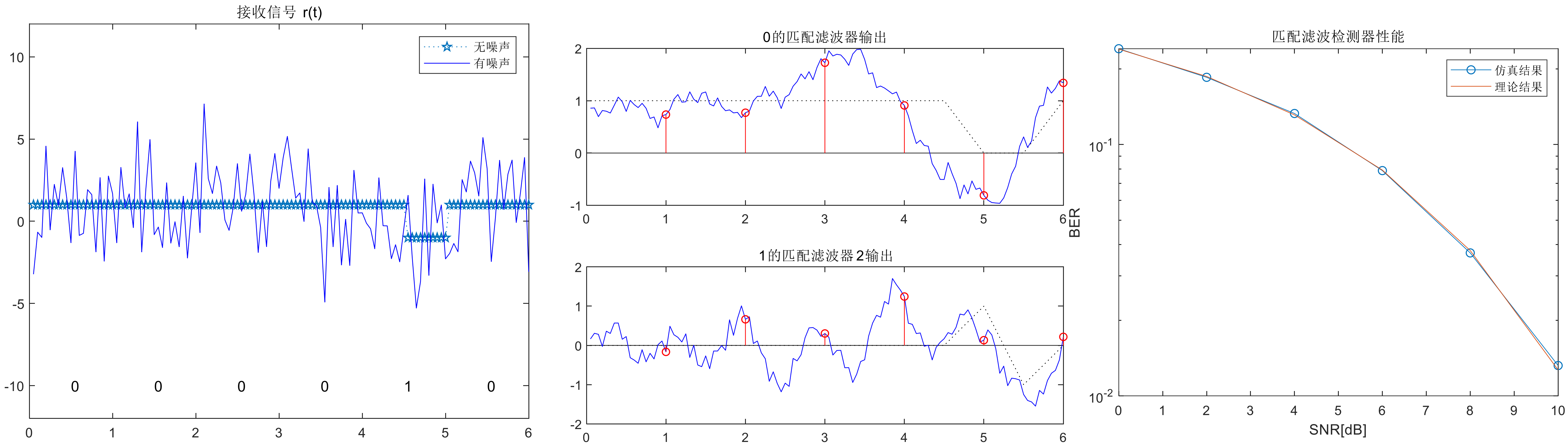


```
function [sBer,tBer]=simMatchedFilterDetector(SNRdB,Nsym)
% SNR    信噪比dB值
% Nsym   仿真符号数
% sBer   仿真统计BER
% tBer   理论计算BER

if nargin == 0 %无输入参数，默认展示
    clear, close all;
    SNRdB=6;
    Nsym=1e5;
elseif nargin == 1
    Nsym=1e5;
end

rng default

Tsym=1;                          %符号周期
Nsam=20;                         %采样倍数
Tsam=Tsym/Nsam;                  %采样周期

L=6;                            %保存L个符号波形，用于展示
LB=L*Nsam;                      %保存的波形矢量长度

sw(1,:)=ones(1,Nsam);           % 信号波形 ： 正交信号
sw(2,:)=[ones(1,Nsam/2), -ones(1,Nsam/2)];

%计算波形能量和相关系数
E1=sum(sw(1,:).^2.*Tsam);
E2=sum(sw(2,:).^2.*Tsam);
Esym=(E1+E2)/2;
```

```
sBer=[];
tBer=[];
for SNR=10.^(SNRdB/10)
    N0=2*Esym/SNR;                        %单边功率谱密度
    halfN0=N0/2;                         %双边功率谱密度
    sigma_sT=sqrt(halfN0/Tsam);          %噪声功率，标准方差

    st= zeros(1,LB);
    r= zeros(1,LB);
    y= zeros(2,LB);  %输出波形： 无噪声影响
    yr= zeros(2,LB); %输出波形： 有噪声影响

    s=zeros(1,Nsym);
    d=zeros(1,Nsym); %检测出的数据

    zi=zeros(2,length(sw(1,:))-1);
    zin=zeros(2,length(sw(1,:))-1);

    mf=1/Esym.*fliplr(sw);%匹配滤波器
    for n=1:Nsym
       s(n)=randi([0,1]);
       i=s(n)+1; %0,对应1的波形; 1, 对应2的波形
       for m=1:Nsam
         t=sw(i,m);
         tn=t+sigma_sT*randn;
         st=[st(2:LB) t];                  % 发送信号波形
         r=[r(2:LB) tn]; % 被噪声影响的接收信号波形

         if size(SNRdB,2)==1
             [yy(1,:),zi(1,:)]=filter(mf(1,:),[1],t,zi(1,:)); %无噪声影响下的匹配滤波器1输出
             [yy(2,:), zi(2,:)]=filter(mf(2,:),[1],t,zi(2,:)); %无噪声影响下的匹配滤波器2输出
             y=[y(:,2:LB) yy.*Tsam];
         end

         [yyn(1,:), zin(1,:)]=filter(mf(1,:),[1],tn,zin(1,:)); %有噪声影响下的匹配滤波器1输出
         [yyn(2,:), zin(2,:)]=filter(mf(2,:),[1],tn,zin(2,:)); %有噪声影响下的匹配滤波器2输出
         yr=[yr(:,2:LB) yyn.*Tsam];
       end
       % 检测器
       %d(n)=((yr(1,end)<yr(2,end)));
       d(n)=(yr(2,end)>yr(1,end));
    end
    sBer=[sBer sum(s~=d)/Nsym];
    tBer=[tBer qfn(sqrt(Esym/N0))];
end
```

仿真结果

- simMatchedFilterDetector.m

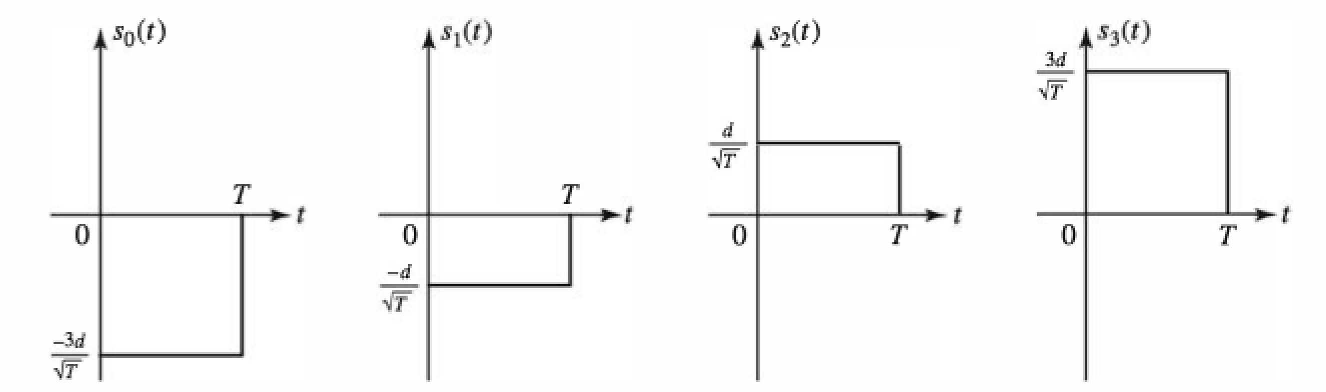


- [a,b]=simMatchedFilterDetector(0:2:10)

多幅度信号传输

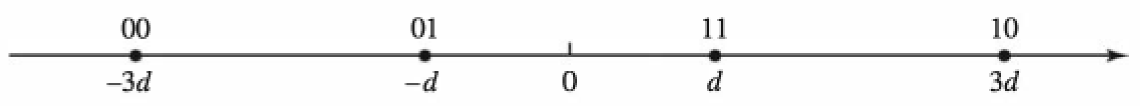
◻ PAM（Pulse Amplitude Modulation）信号波形

$$s_m(t) = A_m g(t), \quad 0 \le t \le T \qquad A_m = (2m-3)d, \quad m = 0,1,2,3$$



$$00 \to s_0(t)$$
$$01 \to s_1(t)$$
$$11 \to s_2(t)$$
$$10 \to s_3(t)$$

✓ 符号： $\{00, 01, 10, 11\}$



◻ 数学模型

$$r(t) = s_i(t) + n(t), \quad i = 0,1,2,3, \quad 0 \le t \le T$$

✓ $n(t)$是AWGN的采样函数，功率谱$N_0/2$ W/Hz

相关接收机

- 接收信号$r(t)$与信号脉冲$g(t)$相关，并在$t = T$时采样输出

$$r = \int_0^T r(t)g(t)\,dt = \int_0^T A_i g^2(t)\,dt + \int_0^T g(t)n(t)\,dt = A_i + n$$

$$n = \int_0^T g(t)n(t)\,dt$$

$$E(n) = \int_0^T g(t)E[n(t)]\,dt = 0$$

$$\sigma^2 = E(n^2) = \int_0^T \int_0^T g(t)g(\tau)E[n(t)n(\tau)]\,dt\,d\tau = \frac{N_0}{2}\int_0^T \int_0^T g(t)g(\tau)\delta(t-\tau)\,dt\,d\tau = \frac{N_0}{2}\int_0^T g^2(t)\,dt = \frac{N_0}{2}$$

- 相关器输出的PDF为

$$p(r \mid s_i(t)\text{was transmitted}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(r-A_i)^2/2\sigma^2}$$

- 最优接收机计算距离，并选择距离最小幅度的作为输出

$$D_i = |r - A_i|, \qquad i = 0, 1, 2, 3$$

错误分析

□ 平均错误概率

- ✓ 发送±d：噪声 $|n| > d$ 就会出现错误
- ✓ 发送±3d：噪声在一个方向上可以出现错误

$$SER = P\ A_i = -3d\ P\ r - A_i > d \big| A_i = -3d\ + P\ A_i = -d\ P\ \big|r - A_i\big| > d \big| A_i = -d$$

$$P\ A_i = d\ P\ \big|r - A_i\big| > d \big| A_i = d\ + P\ A_i = 3d\ P\ \big|r - A_i\big| > -d \big| A_i = 3d$$

$$= \frac{1}{4}\Big[P\ r - A_i > d \big| A_i = -3d\ + P\ \big|r - A_i\big| > d \big| A_i = -d\ + P\ \big|r - A_i\big| > d \big| A_i = d\ + P\ \big|r - A_i\big| > -d \big| A_i = 3d\ \Big]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 6 \int_{d}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = \frac{3}{2} \int_{\frac{d}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{\sigma^2}}\right) = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right)$$

- ✓ 平均符号能量

$$E_{av} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{4} \int_0^T s_k^2(t)\, dt = 5d^2$$

$$SER = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2E_{av}}{5N_0}}\right)$$

- ✓ 平均比特能量

$$E_{av}/2 \equiv E_{avb}$$

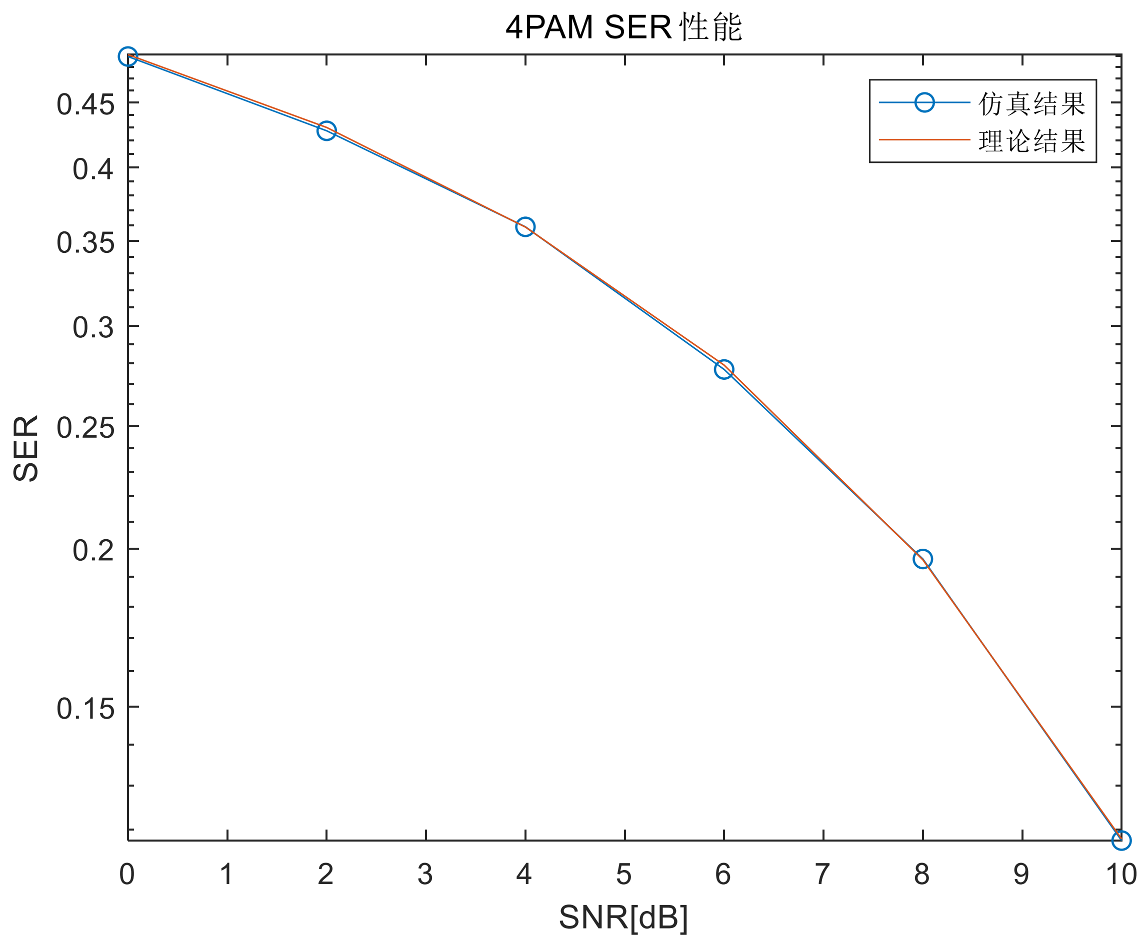
$$BER = \frac{1}{2} SER = \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{4E_{avb}}{5N_0}}\right)$$

4PAM仿真实现

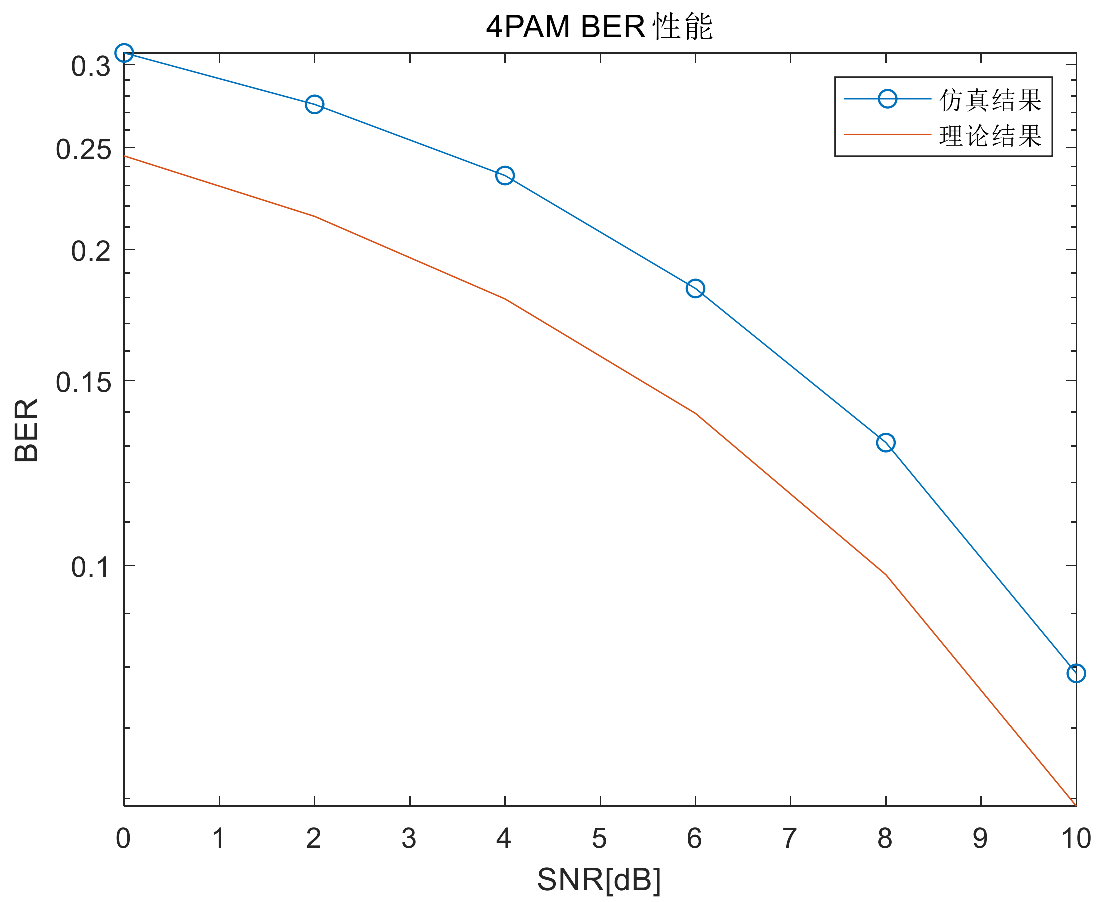
□ sim4PAM.m

```
rng default
M = 4;                              % 星座点数
k = log2(M);                        % 每符号的点数
dataIn = randi([0 1],Nbit,1);       % 生成随机比特
dataInMatrix = reshape(dataIn,length(dataIn)/k,k);
dataSymbolsIn = bi2de(dataInMatrix);                   % 把bit转成符号
dataMod = double(pammod(dataSymbolsIn,M,0,'bin'));     % PAM调制, 相位偏转0
Nsym=Nbit/k;

sBer=[];
tBer=[];
sSer=[];
tSer=[];
for SNR=10.^(SNRdB/10)
    y = awgn(dataMod,10*log10(SNR),'measured');
    dataSymbolsOut = pamdemod(y,M,0,'bin');
    dataOutMatrix = de2bi(dataSymbolsOut,k);
    dataOut = dataOutMatrix(:);                       % Return data in column vector

    sBer=[sBer sum(dataIn~=dataOut)/Nbit];
    tBer=[tBer 3/4*qfn(sqrt(SNR/5))];
    sSer=[sSer sum(dataSymbolsOut~=dataSymbolsIn)/Nsym];
    tSer=[tSer 1.5*qfn(sqrt(SNR/5))];
    fprintf('仿真SER[%6.2e] 理论SER[%6.2e] 仿真BER[%6.2e] 理论BER[%6.2e]\n',sSer,tSer,sBer,tBer);
end
```

仿真性能



4PAM SER 性能
仿真结果
理论结果
SER
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
SNR[dB]



4PAM BER 性能
仿真结果
理论结果
BER
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
SNR[dB]

推广到更高阶PAM

- 对MPAM，每个符号代表b=log2(M)个比特
- 平均符号功率为

$$E_{av}=\frac{1}{M}2d^2\left[1^2+3^2+\cdots+(M-1)^2\right]=\frac{2d^2}{6M}(M^2-1)$$

- 平均比特功率为

$$E_{av,b}=\frac{1}{M}2d^2\left[1^2+3^2+\cdots+(M-1)^2\right]=\frac{2d^2}{6Mb}(M^2-1)$$

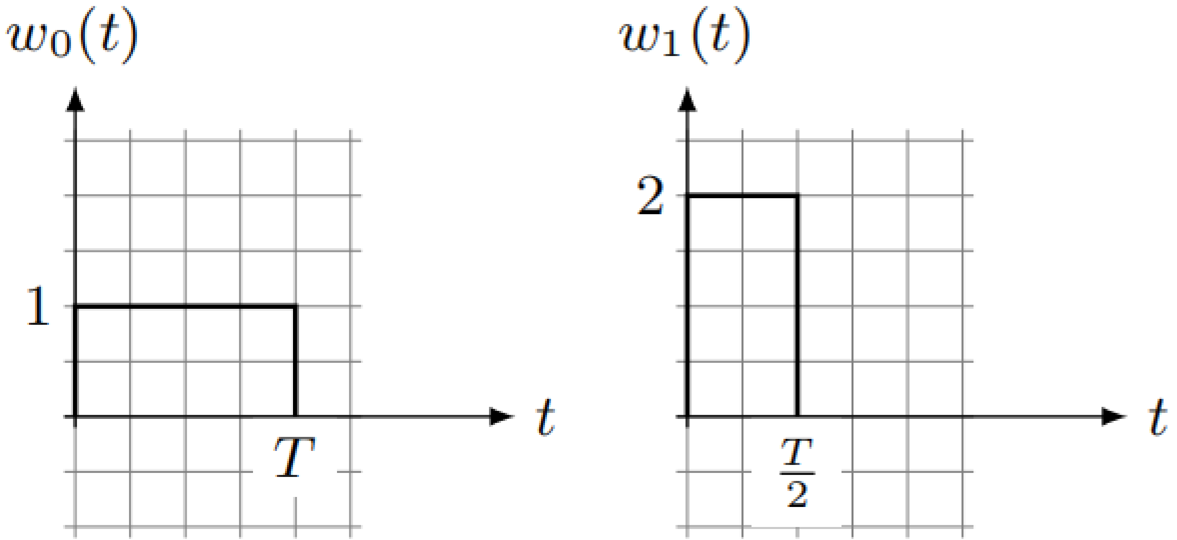
- 平均错误概率

$$\begin{aligned}SER&=\left(P(s_0)+2P(s_1)+\cdots+2P(s_{M-2})+P(s_{M-1})\right)Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{\sigma^2}}\right)\\&=\frac{2(M-1)}{M}Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right)\\&=\frac{2(M-1)}{M}Q\left(\sqrt{\frac{6ME_{av}}{(M^2-1)N_0}}\right)\end{aligned}$$

$$BER=\frac{1}{b}SER$$

课后作业

- 考虑基于双极性信号的基带传输系统，假设基带脉冲信号有如下两种形式，通过AWGN信道后，利用匹配滤波器进行数据接收，请绘制这两种脉冲信号的BER性能曲线，并将这些曲线与理论BER曲线进行比较和分析
  - ✓ 方波脉冲$p(t) = u(t) - u(t-T)$
  - ✓ 半正弦脉冲$p(t) = sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)[u(t) - u(t-T)]$
- 编程实现gramm - schmidt过程，为所下所示的函数张成的向量空间找到一组标准正交基



课后作业

- Demo1，实现AWGN下PAM调制与解调，并分析仿真结果
  - ✓ 发射信号与接收信号对比
  - ✓ 发射和接收信号星座图对比
  - ✓ 统计仿真的BER和SER，并与SER的理论计算结果对比

有问题，随便问！