



東南大學  
SOUTHEAST UNIVERSITY

数字通信的计算机仿真（研讨）

## 6 采样与量化

讲解人：王俊波

***E-mail: [jbwang@seu.edu.cn](mailto:jbwang@seu.edu.cn)***

***Phone: 13770681926***

***QQ:308322767***

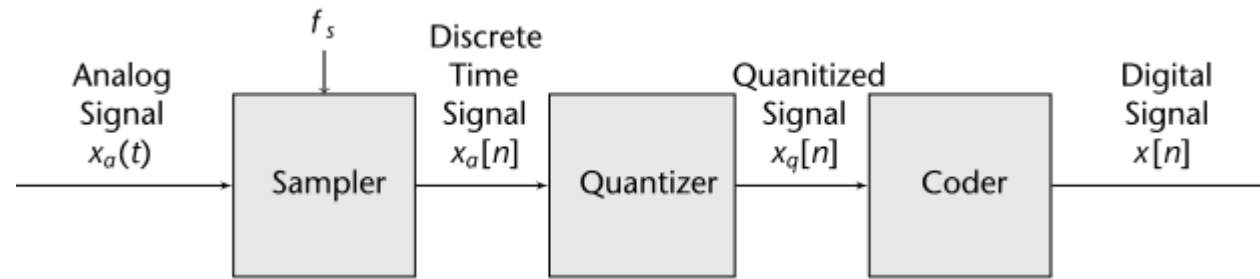
# 主要内容

---

- 低通采样
- 高通采用
- 采样率变换
- 量化

# 概述

- 自然界中的信号都是模拟信号,这需要对模拟信号进行处理形成数字信号后,在数字信号系统中传输
- 连续时间模拟信号可以通过采样和量化转换为离散时间数字信号



- ✓  $x_a(t)$  是模拟信号,  $x_a[n]$  是离散时间的模拟信号,  $x_q[n]$  是离散时间的离散数字信号,  $x[n]$  是编码后的输出
- ✓ 采样是将连续时间信号转换为离散时间信号的过程, 该离散时间信号的采样在离散时间瞬间获得; 量化处理将对模拟信号的幅度变成若干个固定幅度值; 编码处理将数字信号转换为一定的数字格式
- 离散时间信号可以通过重构转换成连续时间信号, 但重建并不总是成功的
  - ✓ 如果采样满足一定的准则, 则可以在不丢失信息的情况下重建信号, 这个准则是奈奎斯特抽样定理

# 均匀采样

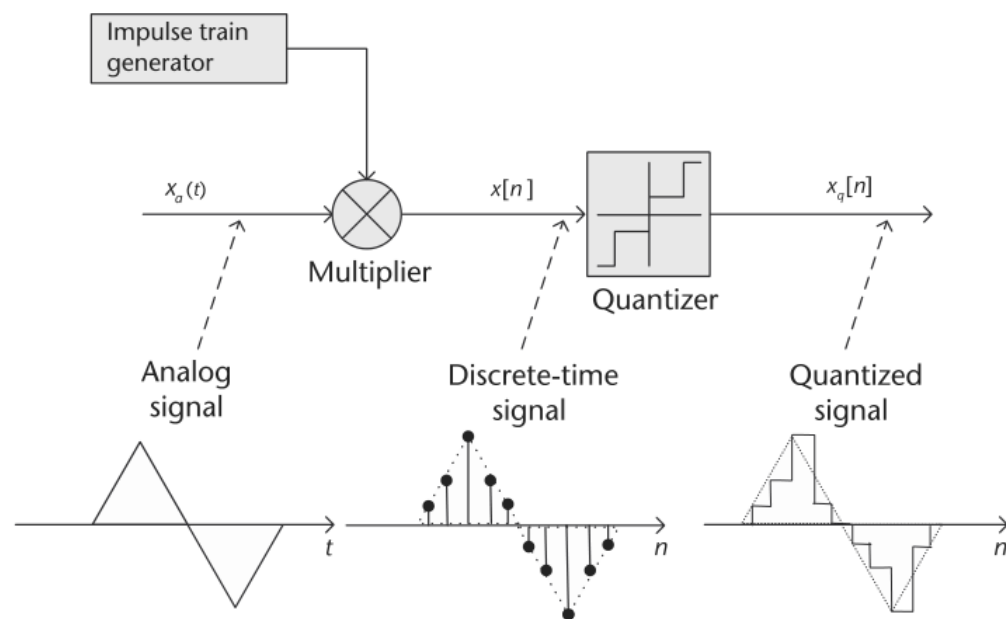
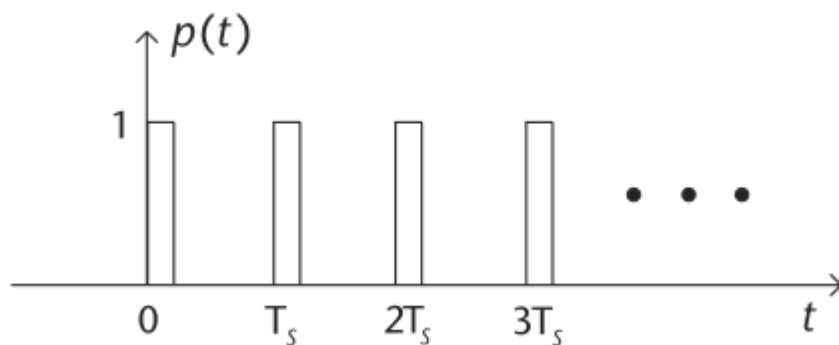
- 有许多方法可以将模拟信号采样为数字表示，若将采样间隔设为常数，称为均匀采样或周期采样
- 若采样周期为 $T_s$ ，连续信号的采样值可以表示为

$$x[n] = x(nT_s), \quad -\infty < n < \infty$$

- 数学上，采样过程可以描述为连续时间信号乘以一个周期信号

$$x_s(t) = x(t)p(t)$$

✓ 信号 $p(t)$ 称为采样函数



# 理想脉冲采样

□ 考虑理想的冲击采样，采样函数 $p(t)$ 为脉冲串

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_n \delta(t - nT_s) \quad \longrightarrow \quad \delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\Omega_s t} \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

傅里叶级数



$$\begin{aligned} D_k &= \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta_{T_s}(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-jk\Omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-j0} dt = \frac{1}{T_s} \end{aligned}$$



$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} e^{jk\Omega_s t}$$

$$x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jk\Omega_s t}$$

傅里叶变换



$$X_s(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_s)$$

✓ 另一种表示法

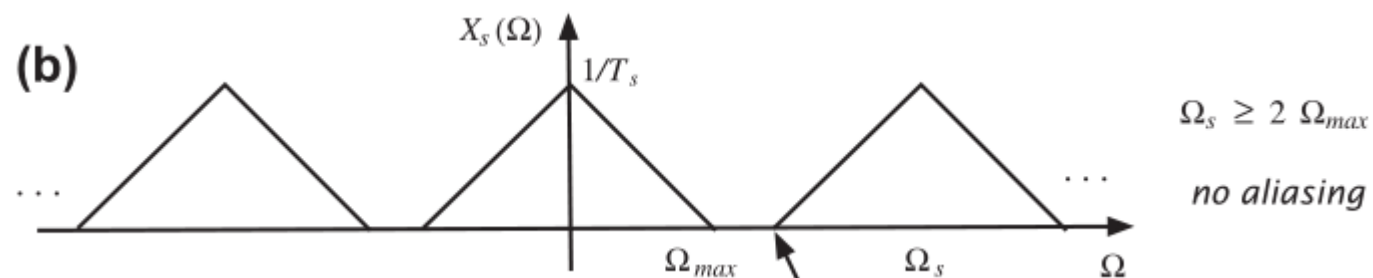
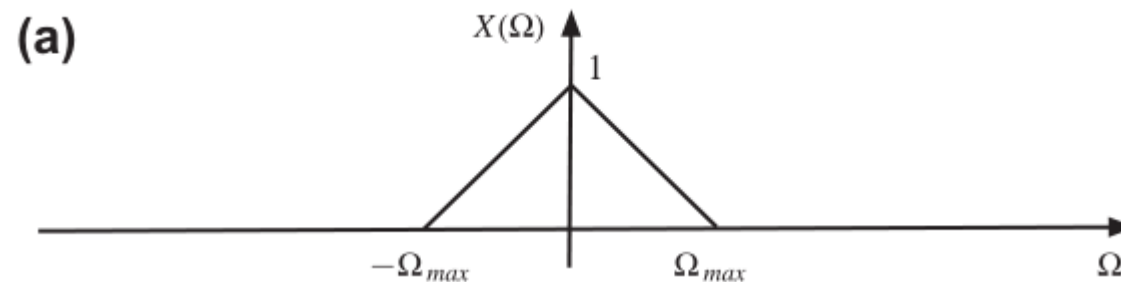
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

$$X_s(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j\Omega T_s n}$$

□ 从频域分析可知，均匀采样信号的傅里叶变换得到的频谱，频谱随采样频率 $f_s$ 或采样角频率 $\omega_s$ 呈周期性变化

# 奈奎斯特低通采样条件

- 带限信号： $\Omega_{\max}$  是信号的最大频率，也即  $X(\Omega) = 0, \Omega \geq \Omega_{\max}$
- 对带限信号，可以选择采样角频率  $\Omega_s$  使得采样信号的频谱包括时移不重叠的  $X(\Omega)/T_s$ ，此时，采样角频率满足  $\Omega_s - \Omega_{\max} \geq \Omega_{\max}$  或  $\Omega_s \geq 2\Omega_{\max}$ ，该条件为奈奎斯特采样条件
- 奈奎斯特低通采样定理：以每秒  $F_s > 2B$  个采样的速率均匀采样，可以无误差地重构频带限制在  $B$  Hz 的真实信号  $x(t)$ 
  - ✓ 奈奎斯特采样频率  $2B$ ，奈奎斯特采样间隔  $1/(2B)$
  - ✓ 奈奎斯特频率（折叠频率）  $F_s/2$



# 采样的频率混叠现象

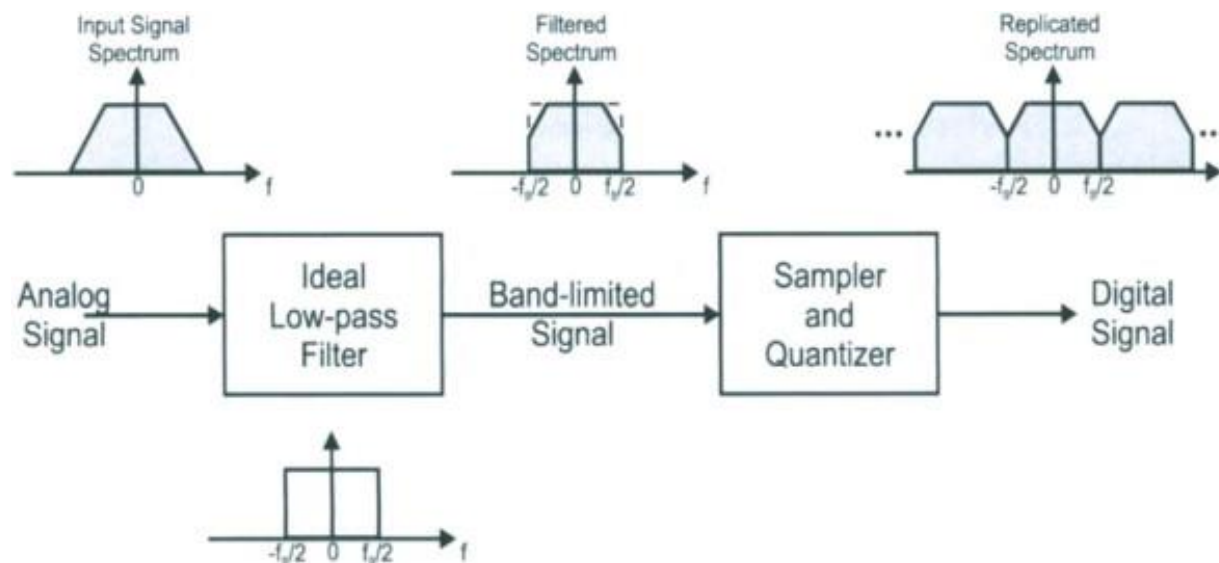
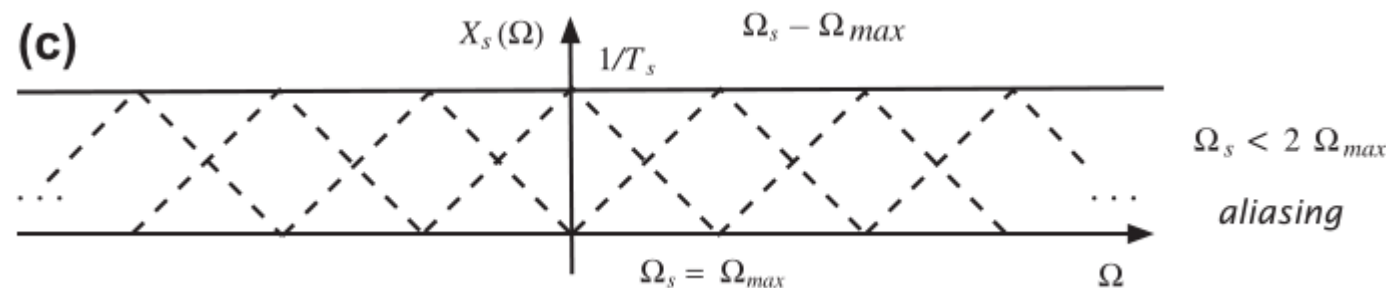
□ 当  $\Omega_s < 2\Omega_{\max}$ , 采样信号的频谱里时移的  $X(\Omega)/T_s$  有重叠

✓ 由于重叠, 无法从采样信号中恢复原始连续时间信号, 这种重叠现象被称为频率混叠, 因为由于频谱的重叠, 原始连续时间信号的一些频率分量获得不同的频率值或“混叠”

□ 对非带限的信号, 这种采样也会产生频率混叠

✓ 通常以损失高频分量为代价, 获得非带限信号的近似带限信号

✓ 这个去除高频分量的滤波器, 叫抗混叠滤波器 (低通滤波器)



# 非带限信号的近似方法

## □ 信号真的可以是带限的吗？

- ✓ 他们似乎是，但他们似乎不是。
- ✓ 一方面，一对实心铜线不会在光频上传播电磁波，所以我在这对铜线上接收到的信号必须是带限的
- ✓ 事实上，谈论通过电线接收的能量，其频率高于某个有限的截止 $\omega$ ，比如 $10^{20}\text{Hz}$ ，是没有什么物理意义的
- ✓ 因此，信号必须是带限的

## □ 对非带限信号，可以设定一个频率值，低于这个频率值以下的能量占信号的绝大部分，该频率值可以选择为近似带限信号的最大频率

- ✓ 计算信号的频谱，然后在频域求最大频率
- ✓ 若选定的最大频率以下能量占信号全部能量99%，则这个最大频率可按下列式求解

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_M}^{\Omega_M} |X(\Omega)|^2 d\Omega = \frac{0.99}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$



# 求取近似带限信号的最大频率示例

□ 符号求解通常无解，一般采用数值求解

□ 例：

$$x_1(t) = u(t + 0.5) - u(t - 0.5)$$

$$X_1(\Omega) = \frac{e^{j0.5\Omega} - e^{-j0.5\Omega}}{j\Omega} = \frac{\sin(0.5\Omega)}{0.5\Omega}$$

✓ 程序：simMaxFreq.m

```
03. %寻找上界
04. Wmax=1;%最大频率
05. EngSum=0;%能量
06. Th=0.99;%设定占比不低于0.99
07.
08. %如果设定的最大频率以下能量不超过门限，Wmax就乘以2，搜索上界
09. while (EngSum<Th)
10.     Wmax=2*Wmax;
11.     h=Wmax/100;
12.     x=h:h:Wmax;
13.     y=(sin(0.5.*x)./(0.5.*x)).^2./pi;
14.     y=[1/2/pi y];%第一个元素为w=0的时候能量
15.     EngSum=sum(y.*h);
16. end
```

```
18. %找到上界以后，利用二分法，搜索更为核实的Wmax
19. l=Wmax/2;
20. u=Wmax;
21. Wmax=(u+l)/2;
22. h=Wmax/100;
23. x=h:h:Wmax;
24. y=(sin(0.5.*x)./(0.5.*x)).^2./pi;
25. y=[1/2/pi y];%第一个元素为w=0的时候能量
26. EngSum=sum(y.*h);
27. while abs(EngSum-Th)/EngSum>0.001 %控制误差，不超过0.001
28.     if EngSum>Th
29.         u=Wmax;
30.     else
31.         l=Wmax;
32.     end
33.     Wmax=(u+l)/2;
34.     h=Wmax/100;
35.     x=h:h:Wmax;
36.     y=(sin(0.5.*x)./(0.5.*x)).^2./pi;
37.     y=[1/2/pi y];%第一个元素为w=0的时候能量
38.     EngSum=sum(y.*h);
39. end;
40. fprintf('最大频率为%.2f[rad],最大采样间隔为%.2f[ms],...最小采样频率为%.2f[Hz]\n',...
41.     Wmax,pi/Wmax*1000,Wmax/pi);
```

最大频率为 68.00[rad],最大采样间隔为 46.20[ms], 最小采样频率为 21.65[Hz]

# 信号重建

- 对一个带限信号，若采样频率满足奈奎斯特采样条件  $\Omega_s > 2\Omega_{max}$ ，则存在理想低通滤波器从采样值恢复出原来信号

$$H_{lp}(\Omega) = \begin{cases} T_s & -\Omega_s/2 \leq \Omega \leq \Omega_s/2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$X_r(\Omega) = H_{lp}(\Omega)X_s(\Omega) = \begin{cases} X(\Omega) & -\Omega_s/2 \leq \Omega \leq \Omega_s/2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

- 信号重建可使用sinc函数的插值操作

- ✓ 理想的低通重建滤波器的脉冲响应为
- ✓ 重建的信号是采样信号和重建滤波器的卷积

$$h_{lp}(t) = \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{\sin(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s}, \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$\begin{aligned} x_r(t) &= [x_s * h_{lp}](t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(\tau) h_{lp}(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(\tau - nT_s) \right] h_{lp}(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \frac{\sin(\pi(t - nT_s)/T_s)}{\pi(t - nT_s)/T_s} \end{aligned}$$

- ✓ 注意：理论上是从负无穷到正无穷计算，实际中无法实现，因此恢复用的抽样长度要大于待恢复的时间长度

# 模拟信号采样与重建的仿真

□ 设低通信号  $x(t) = 2 - \cos 2\pi 250t - \sin 2\pi 500t$ ，请采样并恢复，并观察采样速率、重建滤波器长度等参数的影响

✓ **simBandLimitedSamplingReconstruction.m**

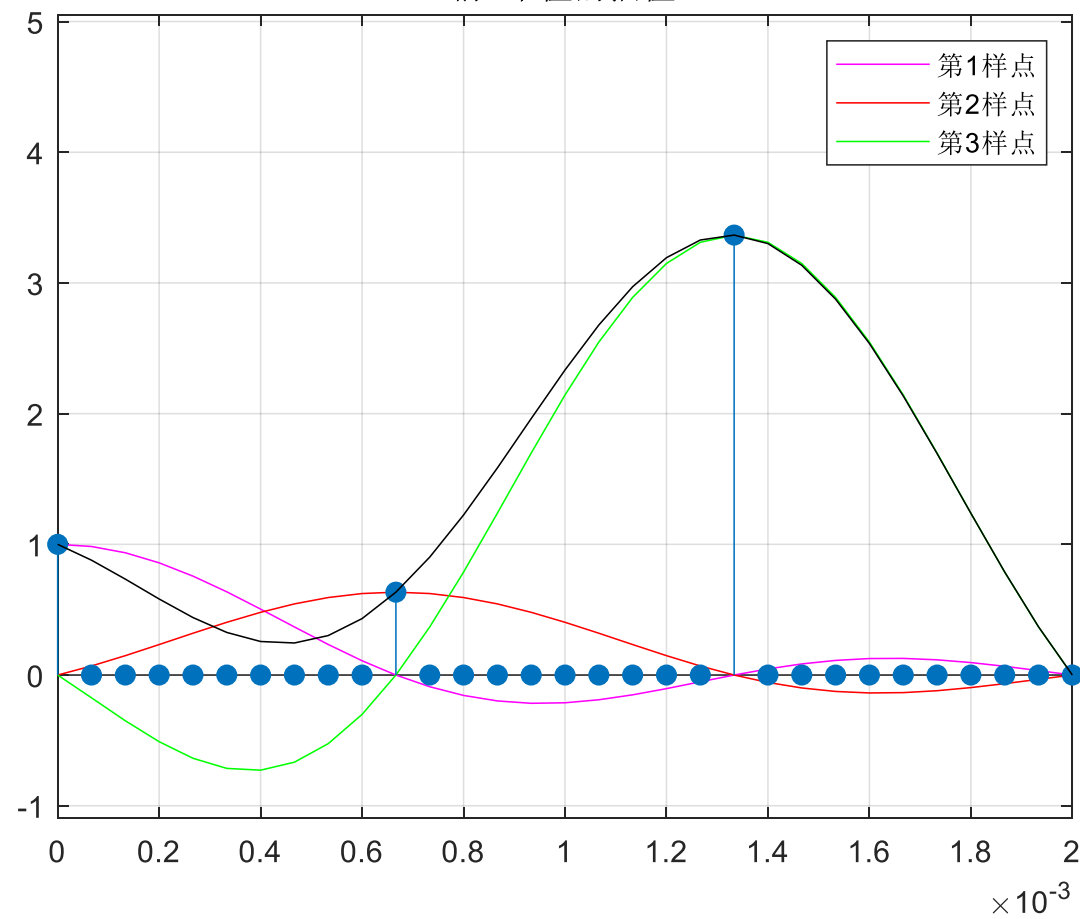
```
03. %% 符号定义函数
04. syms t
05. fo=250;
06. x=@(t)2-cos(2*pi*fo*t)-sin(4*pi*fo*t);
07. fmax=fo*2;
08.
09. %% 信号采样与重建
10. C=0.5; %信号的时间区间0~C
11. fs=3*fmax; %采样频率fs应大于2fmax, 通常是3倍
12. Ts=1/fs; %采样时间间隔
13. Nr=10; %信号恢复时, 样点之间插入Nr-1个恢复时刻
14. [~,xs]=sampling(x,C,Ts); %信号采样
15. [tr,xx,xr]= sincinterp(xs,1/fs,Nr); %信号恢复
16.
17. figure
18. fplot(t,x,[0,6/fo])
19. hold on
20. plot(tr(1:floor(6*fs/fo*Nr)),xx(1:floor(6*fs/fo*Nr)), 'r');
21. plot(tr(1:floor(6*fs/fo*Nr)),xr(1:floor(6*fs/fo*Nr)), 'k'); grid; hold off
22.
23. legend('原始信号','采样点','恢复信号')
24. title('带限信号的采样与恢复')
```

```
28. function [t,y]=sampling(f,C,Ts)
29. %信号采样函数
30. % f 自变量为t的符号函数
31. % C 时间范围0~C
32. % Ts 采样间隔
33. % y 在时间t上信号的采样值
34. t=0:Ts:C-Ts;
35. y=eval(subs(f,'t',t));
36. end
```

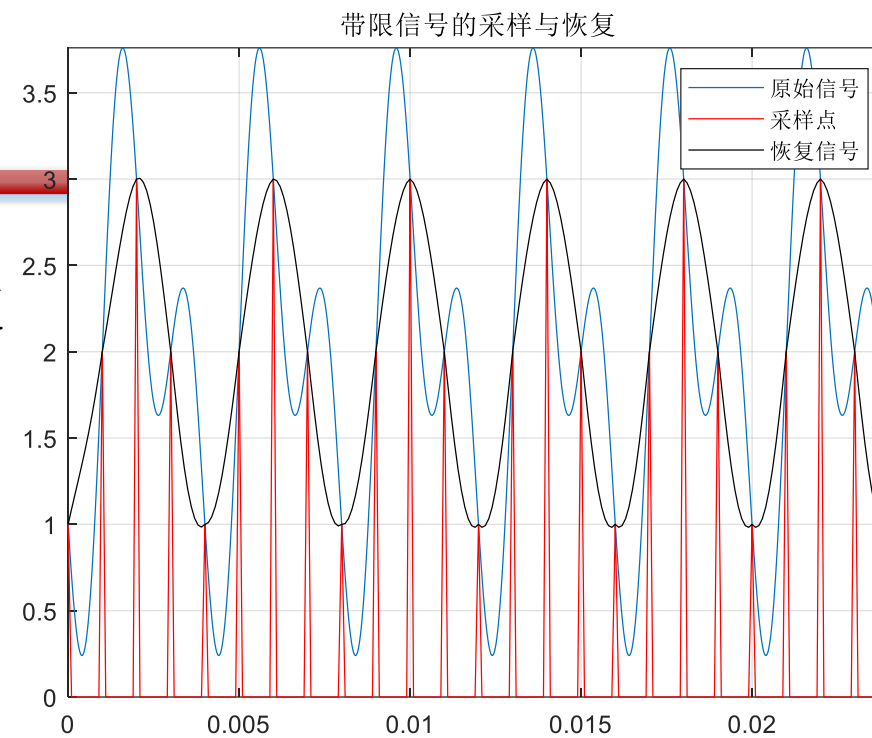
```
38. function [tr,xx,xr]= sincinterp(x,Ts,Nr)
39. % Sinc 插值
40. % x 信号的采样样点
41. % Ts 信号的采样间隔
42. % Nr 每个样点插值恢复成Nr个样点输出
43. % xx和xr为时间范围tr上的原始样点和恢复信号
44. dT=1/Nr;
45. N=length(x);
46. t=0:dT:N-dT;
47. xr=zeros(1,N*Nr);
48. kk=2; % 截断sinc函数, 前后取kk*Nr个点
49. for k=1:N
50. %xr=xr+x(k)*sinc(t-(k-1));
51. xr=xr+x(k)*sinc(t-(k-1)).*(heaviside(t-(k-1)+kk/2*Nr)-heaviside(t-(k-1)-kk/2*Nr));
52. end
53. xx(1:Nr:N*Nr)=x(1:N);
54. xx=[xx zeros(1,Nr-1)];
55. NN=length(xx);
56. tr=0:Ts/Nr:NN-1;
57. end
```

$$\begin{aligned}x_r(t) &= [x_s * h_{lp}](t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(\tau) h_{lp}(t - \tau) d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(\tau - nT_s) \right] h_{lp}(t - \tau) d\tau \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \frac{\sin(\pi(t - nT_s)/T_s)}{\pi(t - nT_s)/T_s}\end{aligned}$$

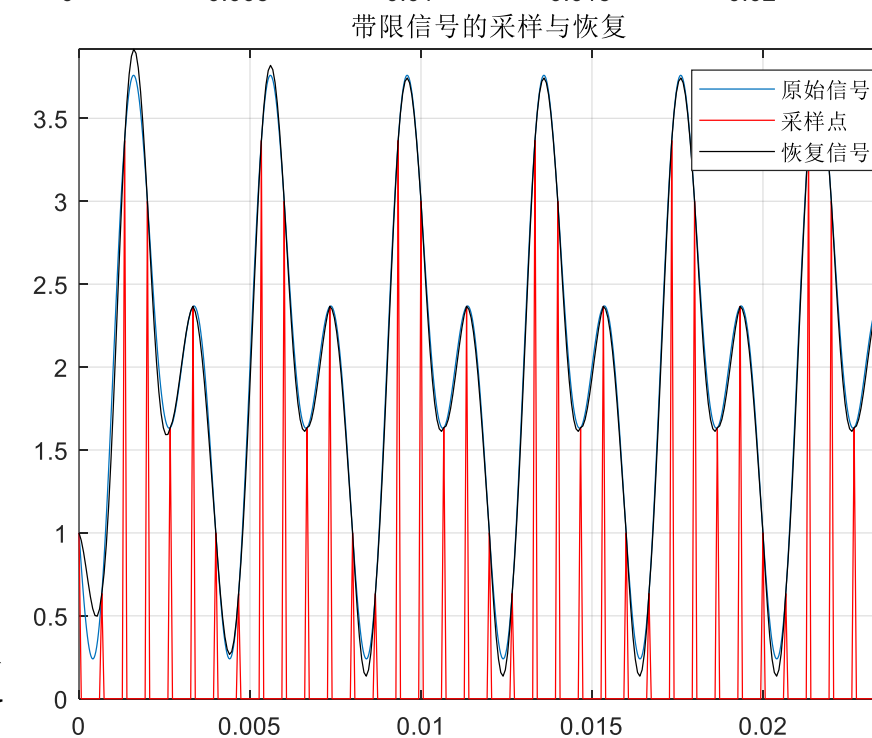
前3个值的插值



## 2倍采样的恢复

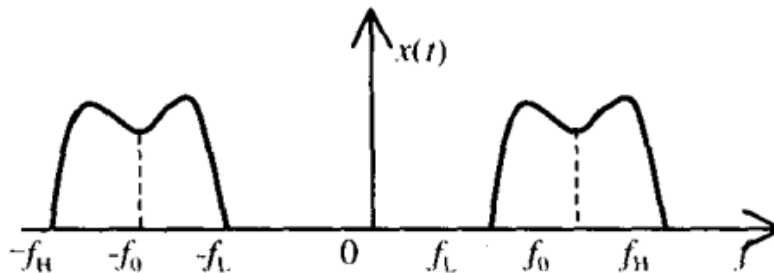


## 3倍采样的恢复



# 带通信号的采样问题

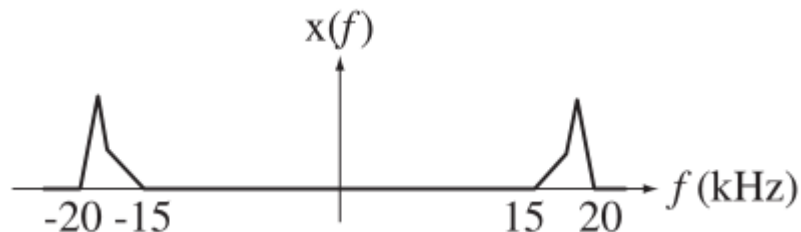
- 带通信号：把基带信号经过载波调制后的信号，把信号的频率范围搬移到较高的频段以便在信道中传输（即仅在一段频率范围  $(f_L, f_H)$  内能够通过信道）



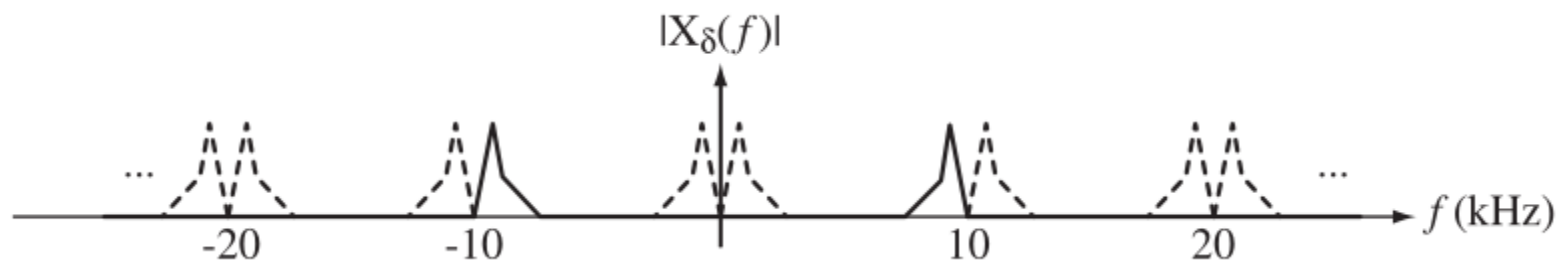
- 如何采样带通信号呢？
  - ✓ 根据Nyquist采样定理，仍然可以按  $f_s > 2f_H$  的采样速率来进行采样
- 当信号的最高频率远远大于其信号带宽  $B$  时，按奈奎斯特采样率来采样，则其采样频率会很高，
  - ✓ 信道利用率低
  - ✓ 数据量占用空间大、处理速度跟不上
- 由于带通信号本身的带宽并不一定很宽，那么自然会想到能不能采用比Nyquist采样率更低的速率来采样呢？甚至以两倍带宽的采样率来采样呢？

# 带通信号的采样问题

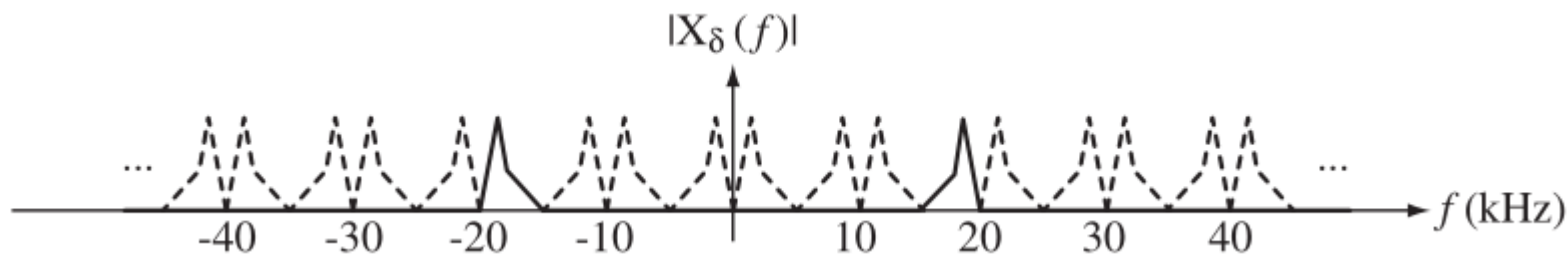
- 考虑一个带通连续信号，其频率范围为15KHz-20KHz，该信号的带宽为5 kHz



- ✓ 按20KHz进行采样，直觉上觉得会产生混叠，但实际上并没有



- ✓ 如果按照更低的10KHz进行采样，同样没有频谱混叠



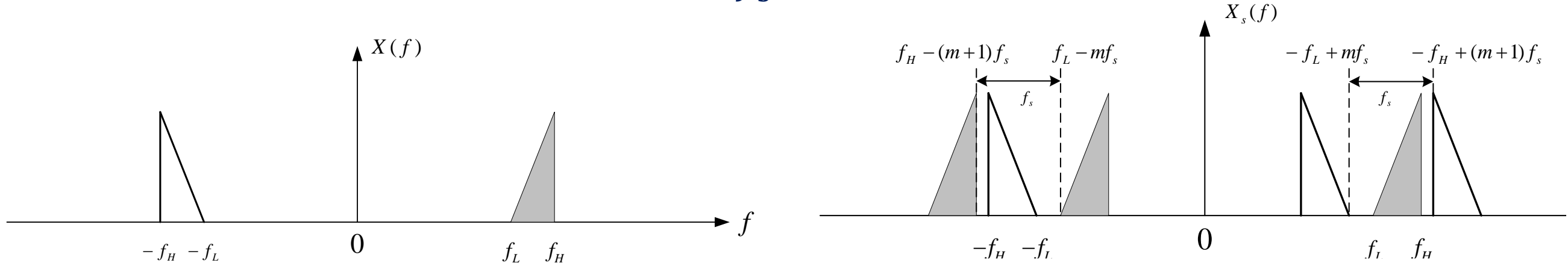
# 带通信号采样定理

- 一个频带限制在  $(f_L, f_H)$  内的时间连续信号  $x(t)$ , 信号带宽  $B = f_H - f_L$ , 令  $N$  为不大于  $f_H/B$  的最大正整数, 如果抽样频率  $f_s$  满足条件

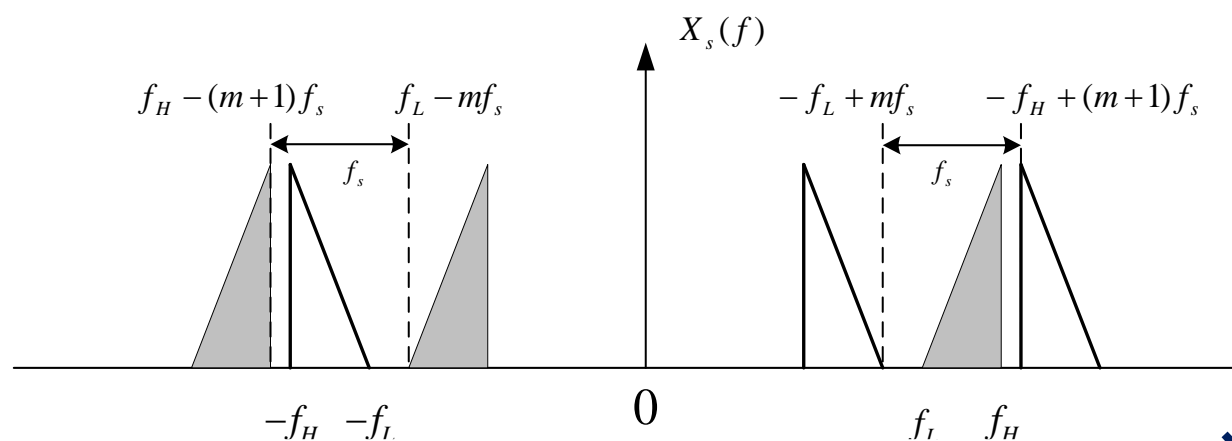
$$\frac{2f_H}{m+1} \leq f_s \leq \frac{2f_L}{m}, 0 \leq m \leq N-1$$

则可以由抽样序列无失真的重建原始信号。

- 对信号  $x(t)$  以频率  $f_s$  抽样后, 得到的采样信号  $x(nT_s)$  的频谱是  $x(t)$  的频谱经过周期延拓而成, 延拓周期为  $f_s$
- ✓ 可以看作是负半轴的分量按照整数倍  $f_s$  延拓到正半轴



- 为了能够由抽样序列无失真的重建原始信号，必须选择合适的延拓周期（也就是选择采样频率），使得位于和的频带分量不会和延拓分量出现混叠，这样使用带通滤波器就可以由采样序列重建原始信号
- 由于正负频率分量的对称性，仅考虑 $(f_L, f_H)$ 的频带分量不会有混叠的条件
  - ✓ 在抽样信号的频谱中，在频带 $(f_L, f_H)$ 的两边，有着两个延拓频谱分量
  - ✓ 为了避免混叠，延拓后的频带分量应满足



$$-f_L + mf_s \leq f_L$$

$$f_H \leq -f_H + (m+1)f_s$$



$$\frac{2f_H}{m+1} \leq f_s \leq \frac{2f_L}{m}$$

当 $m = 0$ 时,  $f_s \geq 2f_H$  是当作低通信号采样



# 一些讨论

## □ $m$ 的取值

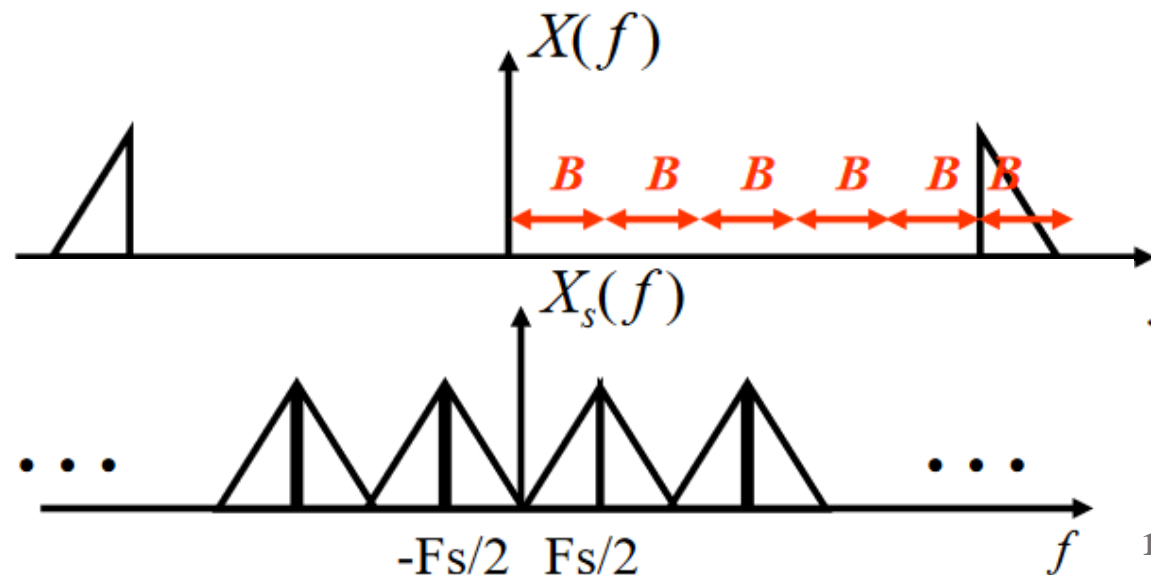
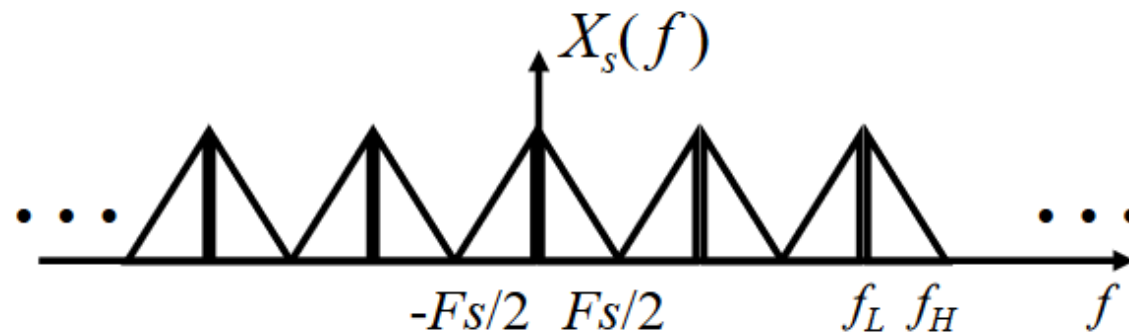
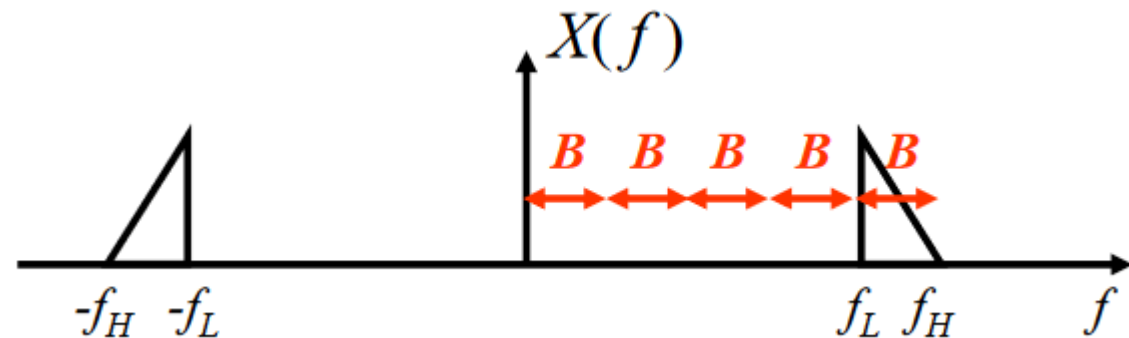
- ✓ 取得越大，采样频率会越低
- ✓  $m$ 过大，会产生混叠，因此  $f_s \leq \frac{2f_L}{m}$
- ✓ 延拓周期要大于两倍的信号带宽，即  $f_s \geq 2B$

## □ $f_H = nB$ ( $n$ 为奇数)

- ✓ 采样率为  $f_s = 2B$  时，可以频移出完美的频率分量

## □ $f_H = nB$ ( $n$ 为偶数)

- ✓ 采样率为  $f_s = 2B$  时，可以频移出完美的频率分量的翻折
- ✓ 在信号处理中，这个不是问题，因为后面可以进一步处理



# 采样率

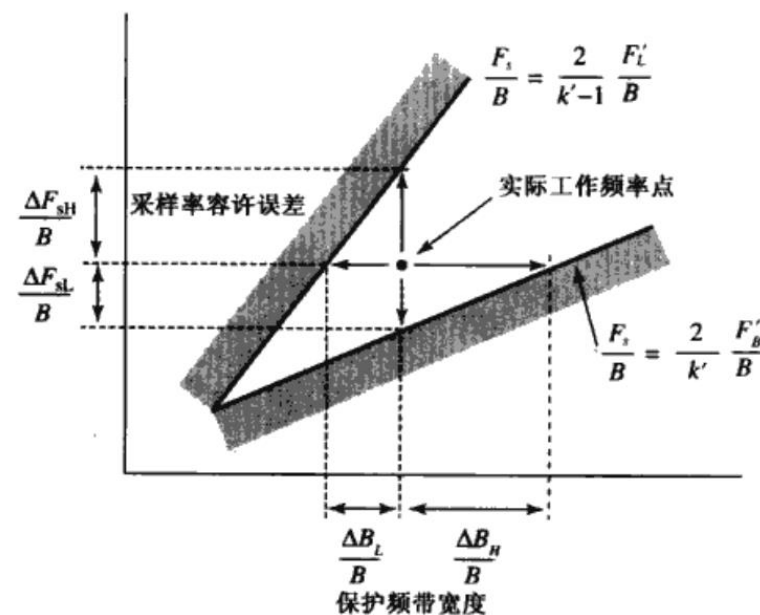
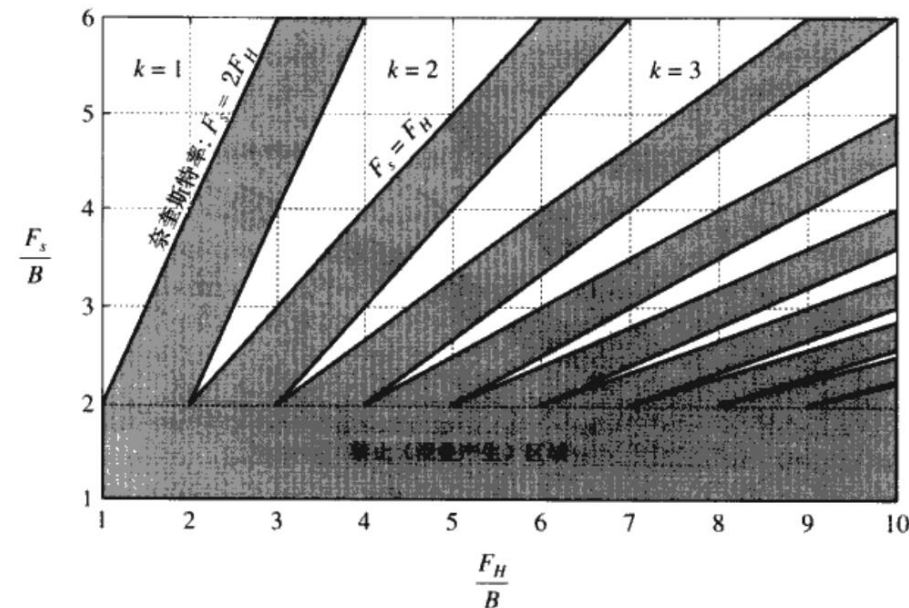
## □ 带通抽样信号的抽样频率 $f_s$ 选择

- ✓ 带通信号最低采样频率随最高频率的变化
- ✓ 白色区域是允许的采样率，灰色的是禁止采样率

## □ 考虑到采样率误差容限，采样率选择为

$$f_s = \frac{2(f_L + f_H)}{(2n + 1)}$$

- ✓  $n=0,1,2,\dots$ 是满足  $f_s \geq 2(f_H - f_L)$  的最大整数



# 带通信号的重建(1/3)

## □ 假设带通信号表示为

$$x(t) = a(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

$$= a(t) \cos(2\pi f_c t) \cos \varphi - a(t) \sin(2\pi f_c t) \sin \varphi$$

$$a_c(t) = a(t) \cos \varphi$$

$$= a_c(t) \cos(2\pi f_c t) - a_s(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$a_s(t) = a(t) \sin \varphi$$

## □ 采样得到

$$x(nT_s) = a_c(nT_s) \cos(2\pi f_c nT_s) - a_s(t) \sin(2\pi f_c nT_s)$$

## □ 若 $f_H$ 是 $B$ ( $f_B$ ) 的整数倍, 且采样频率 $f_s$ 为2倍的信号带宽 ( $2f_B$ )

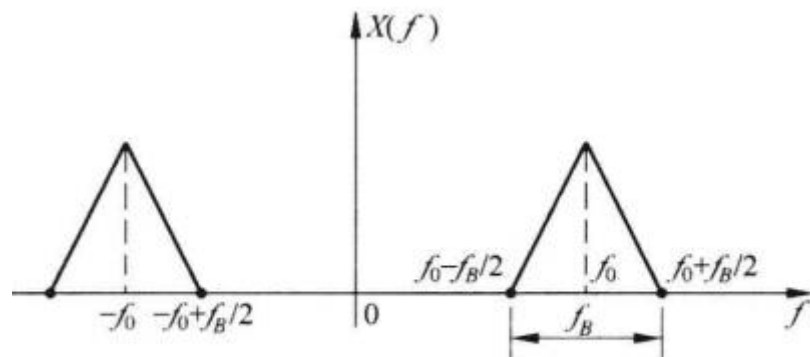


图 9.3.6 窄带信号频谱上的各个频率

$$f_H = f_c + \frac{f_B}{2} = kf_B \rightarrow f_c = \frac{2k-1}{2} f_B$$

$$T_s = \frac{1}{2f_B}$$

## 带通信号的重建(2/3)

□ 代入  $f_c = \frac{2k-1}{2} f_B$  和  $T_s = \frac{1}{2f_B}$

$$\begin{aligned} x(nT_s) &= a_c(nT_s) \cos(2\pi f_c nT_s) - a_s(t) \sin(2\pi f_c nT_s) \\ &= a_c(nT_s) \cos\left(2\pi \frac{2k-1}{2} f_B nT_s\right) - a_s(t) \sin\left(2\pi \frac{2k-1}{2} f_B nT_s\right) \\ &= a_c(nT_s) \cos \frac{n\pi(2k-1)}{2} - a_s(nT_s) \sin \frac{n\pi(2k-1)}{2} \end{aligned}$$

✓ n为偶数

$$x(2mT_s) = a_c(2mT_s) \cos \pi(2k-1)m - a_s(2mT_s) \sin \pi(2k-1)m = (-1)^m a_c(2mT_s)$$

✓ n为奇数

$$x((2m-1)T_s) = a_c((2m-1)T_s) \cos \frac{(2m-1)\pi(2k-1)}{2} - a_s((2m-1)T_s) \sin \frac{(2m-1)\pi(2k-1)}{2} = (-1)^{m+k+1} a_s((2m-1)T_s)$$

# 带通信号的重建(3/3)

□ 由于 $a_c(t)$ 和 $a_s(t)$ 都是低通信号，可按照低通信号重建

$$a_c(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_c(mT_1) \frac{\sin\left(\pi(t-mT_1)/T_1\right)}{\pi(t-mT_1)/T_1} \quad a_s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_s\left(mT_1 - \frac{T_1}{2}\right) \frac{\sin\left(\pi\left(t-mT_1 + \frac{T_1}{2}\right)/T_1\right)}{\pi\left(t-mT_1 + \frac{T_1}{2}\right)/T_1} \quad T_1 = 2T_s$$
$$x(t) = a_c(t) \cos(2\pi f_c t) - a_s(t) \sin(2\pi f_c t)$$

□ 重建公式

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_c(mT_1) \frac{\sin\left(\pi(t-mT_1)/T_1\right)}{\pi(t-mT_1)/T_1} \cos(2\pi f_c t) - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_s\left(mT_1 - \frac{T_1}{2}\right) \frac{\sin\left(\pi\left(t-mT_1 + \frac{T_1}{2}\right)/T_1\right)}{\pi\left(t-mT_1 + \frac{T_1}{2}\right)/T_1} \sin(2\pi f_c t) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m x(2mT_s) \frac{\sin\left(\frac{t-2mT_s}{2T_s} \pi\right)}{\frac{t-2mT_s}{2T_s} \pi} \cos(2\pi f_c t) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m+k} x((2m-1)T_s) \frac{\sin\left(\frac{t-2mT_s+T_s}{2T_s} \pi\right)}{\frac{t-2mT_s+T_s}{2T_s} \pi} \sin(2\pi f_c t) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(mT_s) \frac{\sin\left(\frac{t-mT_s}{2T_s} \pi\right)}{\frac{t-mT_s}{2T_s} \pi} \cos 2\pi f_c (t-2mT_s) \end{aligned}$$

✓ 数字信号处理：理论、算法与实现（第三版）胡广书编 清华大学出版社（第9章）

# 带通信号采样示例

□ 设信号 $x(t) = (2\cos 2\pi 10t - \sin 2\pi 20t)\cos 2\pi 1000t$ ,请采样并恢复,并观察采样速率、重建滤波器长度等参数的影响

✓ simBandPassSamplingReconstruction.m

```
07. %% 符号定义信号
08. syms t
09. fo=10; %基带正弦信号的频率
10. fc=1e3; %载频
11.
12. fmax=fo*3;
13. fL=fc-fmax;
14. fH=fc+fmax;
15. xm=@(t)2*cos(2*pi*fo*t)+sin(4*pi*fo*t); %基带信号
16. xc=@(t)xm*cos(2*pi*fc*t); %带通信号

18. %% 基带生成与展示
19. C=1; %信号的时间区间0~C[秒]
20. fs=100*fmax; %用于画基带信号的采样率
21. Ts=1/fs;
22. [t,ym]=sampling(xm,C,Ts); %信号采样
23. [Yfm, ffm] = SpectrumCalc(ym, fs);

37. %% 带通信号生成与展示
38. fs=10*fc;
39. Ts=1/fs;
40. [tPass, ycPass]=sampling(xc,C,Ts); %信号采样
41. [Yfo, ffo] = SpectrumCalc(ycPass, fs);

57. %% 带通信号采样
58. n=0;
59. while(2*(fL+fH)/(2*n+1)>2*(fH-fL))
60.     n=n+1;
61. end
62. n=n-1;
63. fs=2*(fL+fH)/(2*n+1);
64. m=floor(2*fL/fs);
65. fprintf('采样频率为%.3f[Hz]\n',fs);
66.
67. % fs=2.1*(fH-fL);
68. Ts=1/fs; %用于画带通信号的采样率
69. [t, ys]=sampling(xc,C,Ts); %信号采样
70. [Yf, f] = SpectrumCalc(ys, fs);
```

```

81. %% 带通信号恢复
82. Nr=100;                %信号恢复时，样点之间插入Nr-1个恢复时刻
83. [tr,xx,xr]= sincinterp(ys,1/fs,fc,Nr);
84.
85. subplot(233);
86. hold on
87. plot(tr,xx,'r');
88. grid; hold off
89. title('采样点');xlim([0,0.2]);
90. %注意：恢复信号幅度为原来一半，时因为调制的原因。

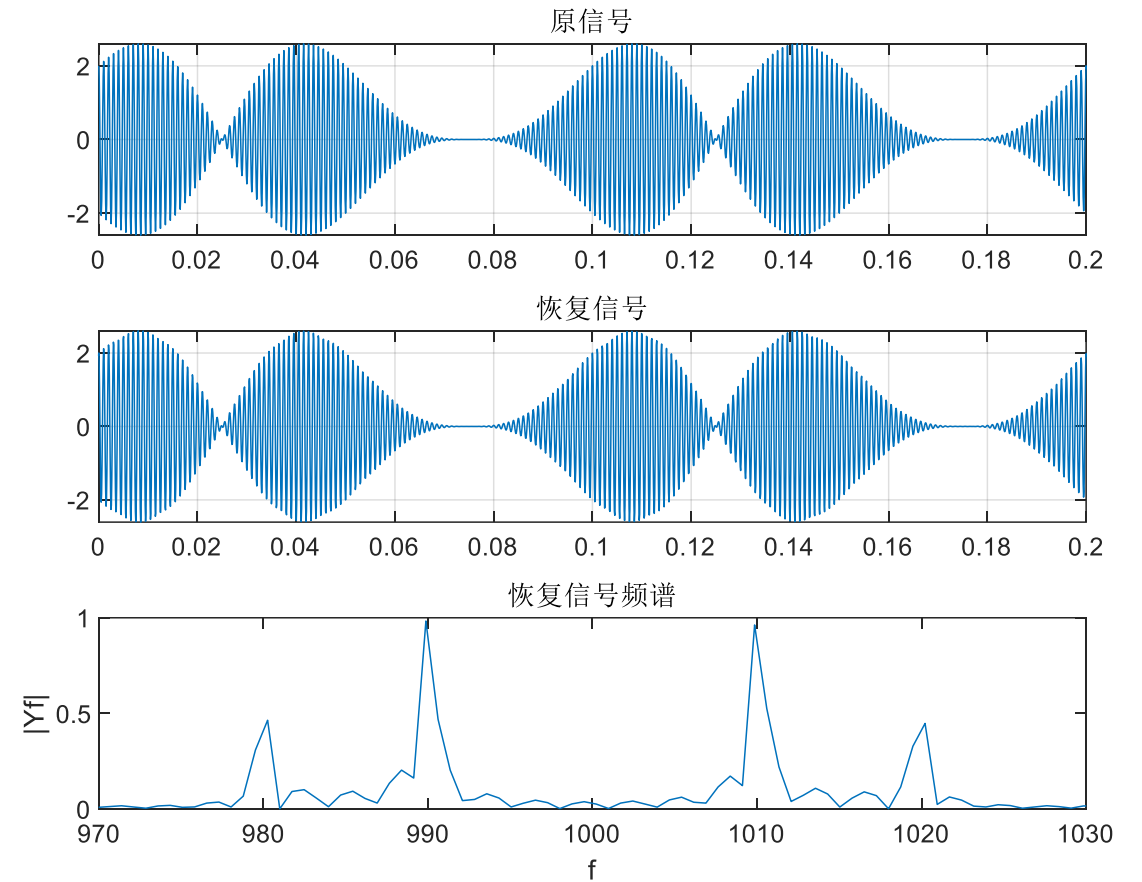
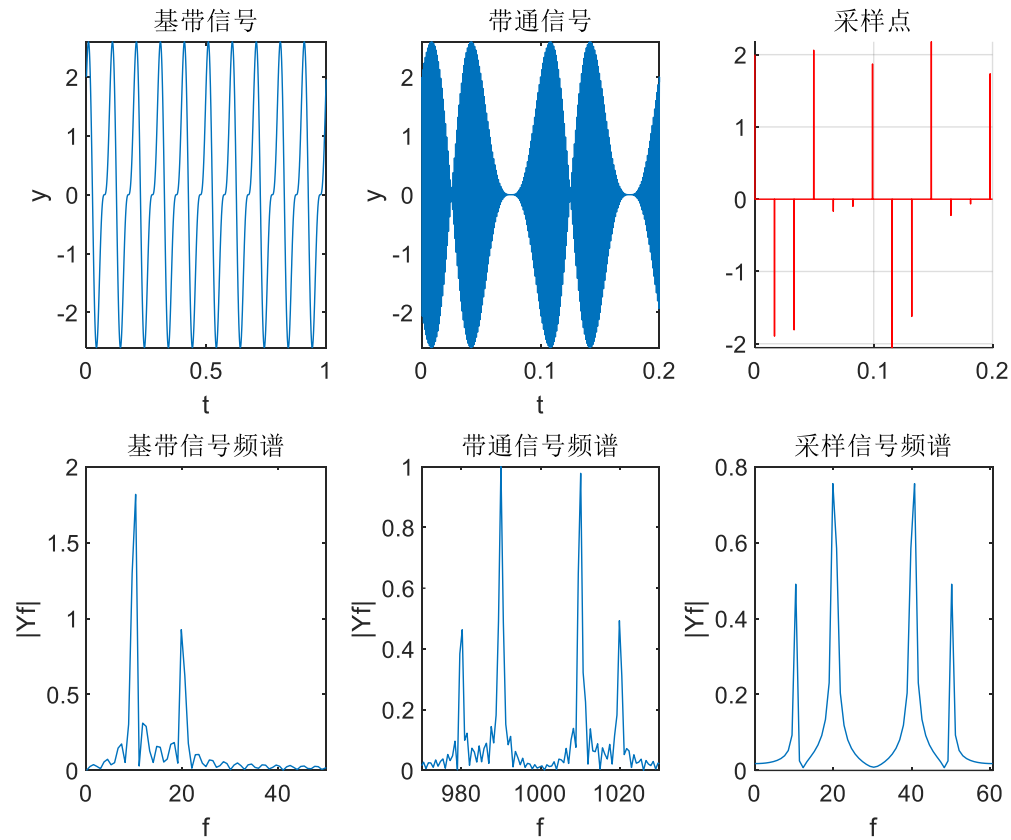
```

```

109. %% 支持函数
110. function [t,y]=sampling(f,C,Ts)
111.     %信号采样函数
112.     % f 自变量为t的符号函数
113.     % C 时间范围0~C
114.     % Ts 采样间隔
115.     % y 在时间t上信号的采样值
116.     t=0:Ts:C-Ts;
117.     y=eval(subs(f,'t',t));
118. end
119.
120. function [tr,xx,xr]= sincinterp(x,Ts,fc,Nr)
121. % Sinc 插值
122. % x 信号的采样样点
123. % Ts 信号的采样间隔
124. % xx和xr为时间范围tr上的原始样点和恢复信号
125. dT=Ts/Nr;
126. N=length(x);
127. t=0:dT:N*Ts-dT;
128. xr=zeros(1,length(t));
129. kk=3;          % 截断sinc函数，前后取kk*Nr个点
130. for k=1:N
131.     xr = xr + x(k)*sinc((t-k*Ts)/(2*Ts)).*cos(2*pi*fc*(t-k*Ts))...
132.         .*(heaviside(t-(k-1)+kk/2*Nr)-heaviside(t-(k-1)-kk/2*Nr));
133. end
134. xx(1:Nr:N*Nr)=x(1:N);
135. xx=[xx zeros(1,Nr-1)];
136. tr=t;
137. end

```

# 仿真结果





# 离散信号的采样/采样率变换

## □ 背景

- ✓ 对高速无线通信系统，随着采样率的提高，一些后续的信号处理有可能跟不上，特别是一些同步解调算法，计算量过大
- ✓ 正常的通信过程，也需要多次采样率的变换
- ✓ 数据通过不同系统或不同格式间变换

## □ 在模拟域实现

- ✓ 先做数模转换DA，再按信道采样率做模数转换AD
- ✓ DA和AD均引入错误或噪声

## □ 在数字域直接实现，可以减少信号变形

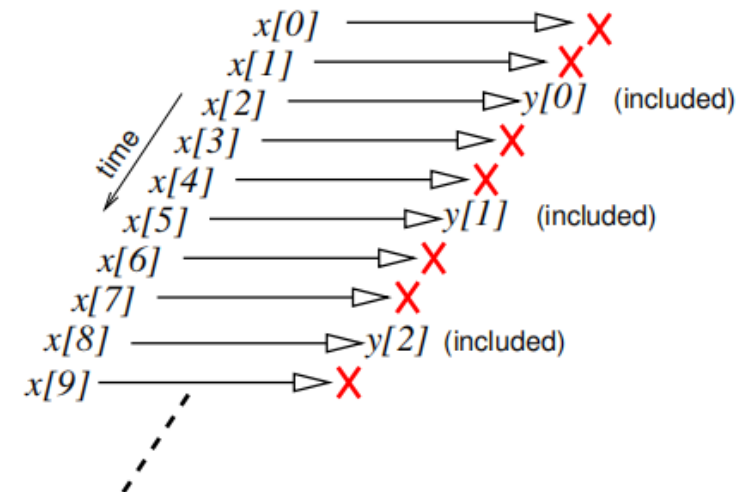
## □ 分类

- ✓ 下采样
- ✓ 上采样
- ✓ 分数倍重采样

# 下采样

- 将采样率降低整数倍的过程称为数据序列的下采样，也将下采样称为“抽取”
- 将数据序列  $x(n)$  的采样率降为整数因子  $M$ ，可表示为
  - ✓  $y(m)$  是下采样序列，通过对每  $m$  个样本，丢弃  $M-1$  数据而获得，也即每  $M$  个样品取 1 个

$$y(m) = x(mM)$$



# 下采样的频率特性

□ 从奈奎斯特采样定理可知，由于采样率降低，在下采样信号中会出现混叠现象

✓ 下采样因子  $M$  后，新采样周期变为  $MT$ ，新采样频率为

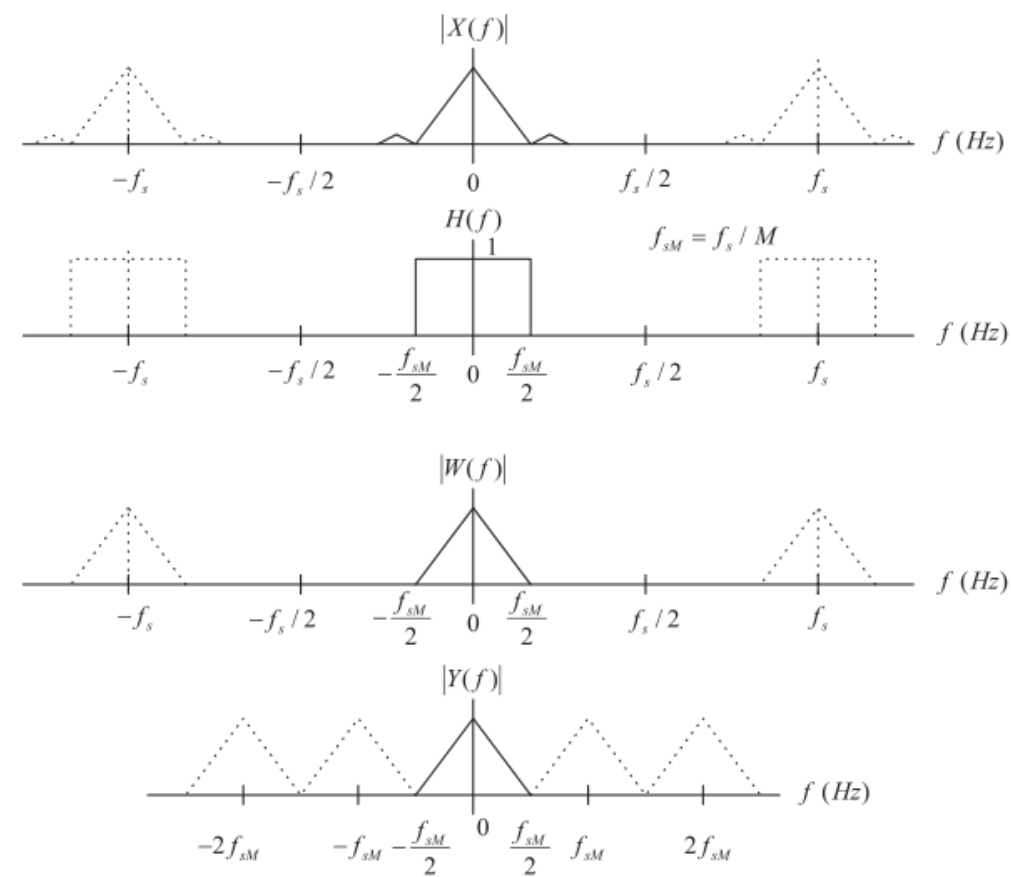
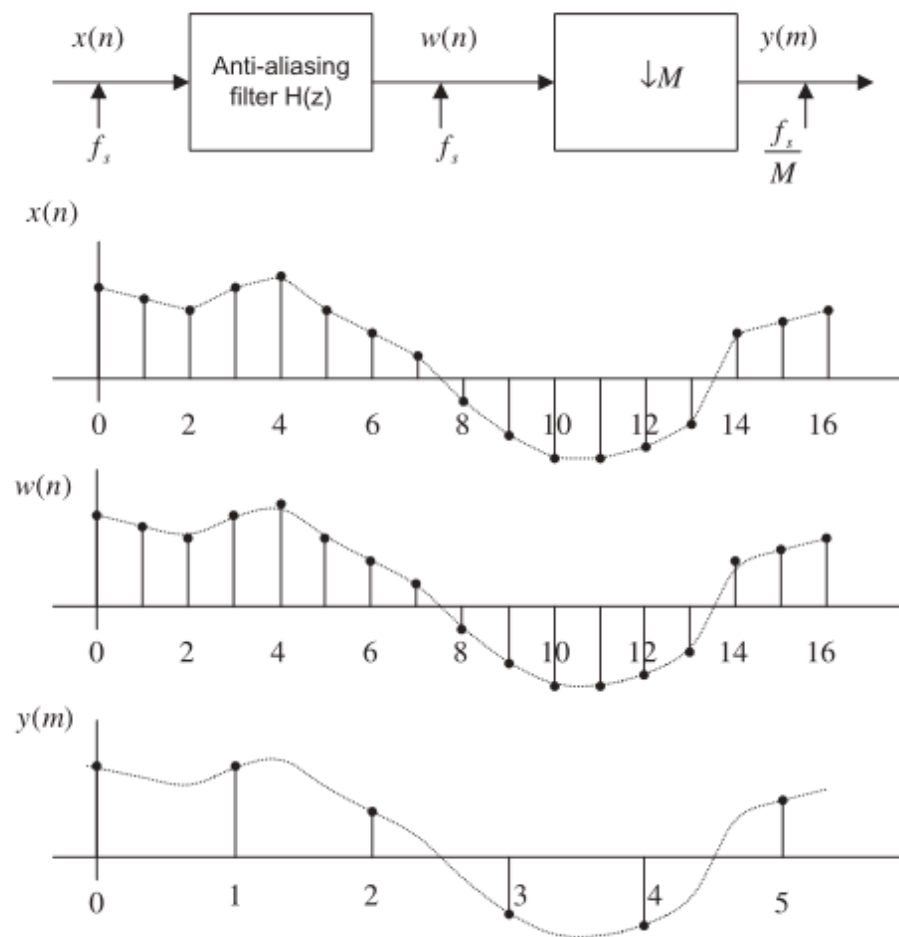
$$f_{sM} = \frac{1}{MT} = \frac{f_s}{M}$$

➤  $f_s$  为原先采样率

✓ 无失真最大频率为  $f_{sM}/2 = \frac{f_s}{2M}$

✓ 为了避免混叠，信号下采样前需要通过一个低通滤波器，其截止频率为  $f_{sM}/2$ ，对应的归一化频率为

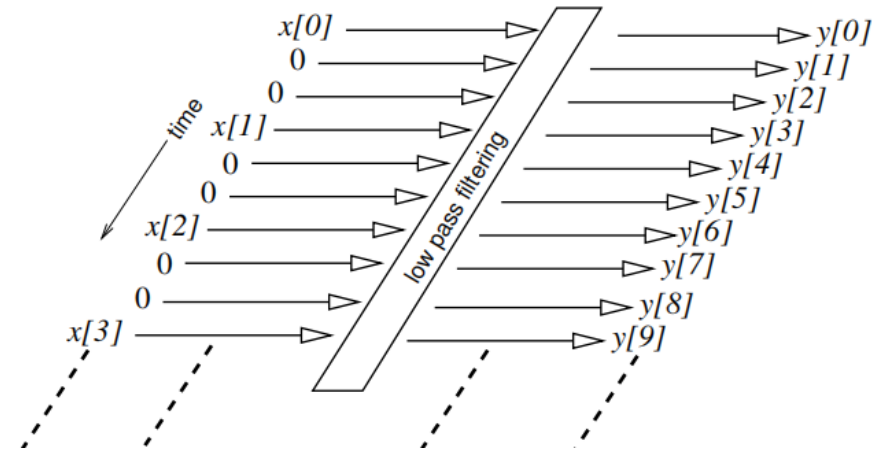
$$F_{stop} = \frac{\frac{f_s}{2M}}{\frac{f_s}{2}} = \frac{1}{M}$$



# 上采样

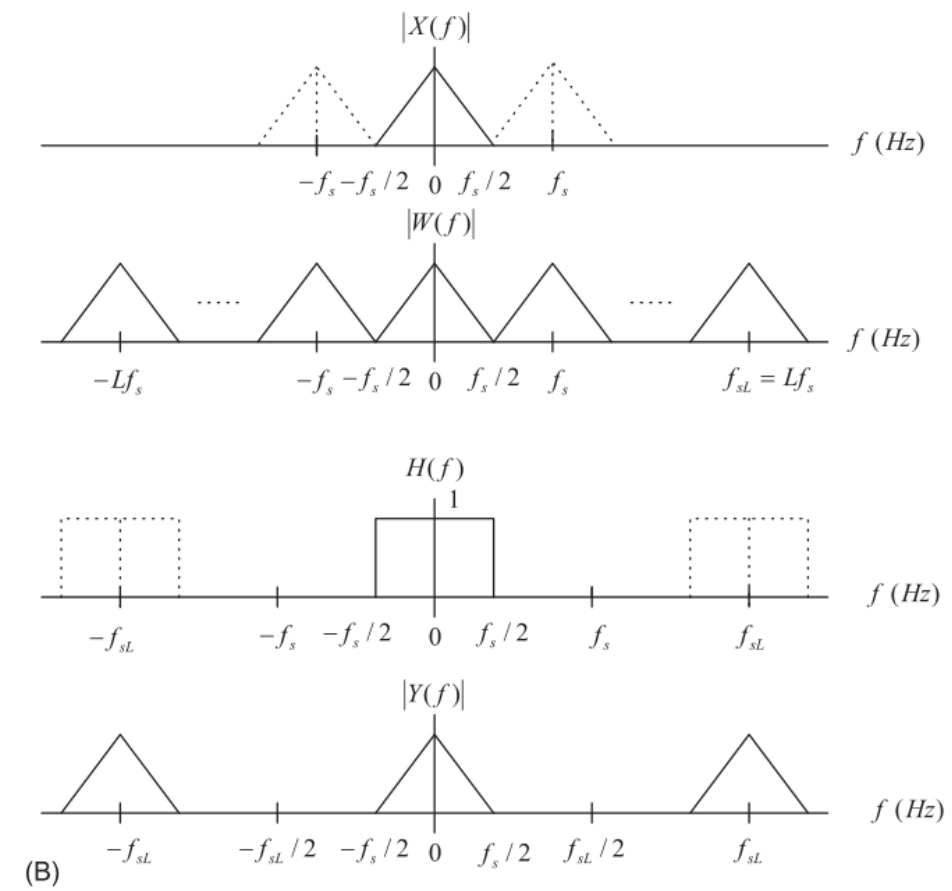
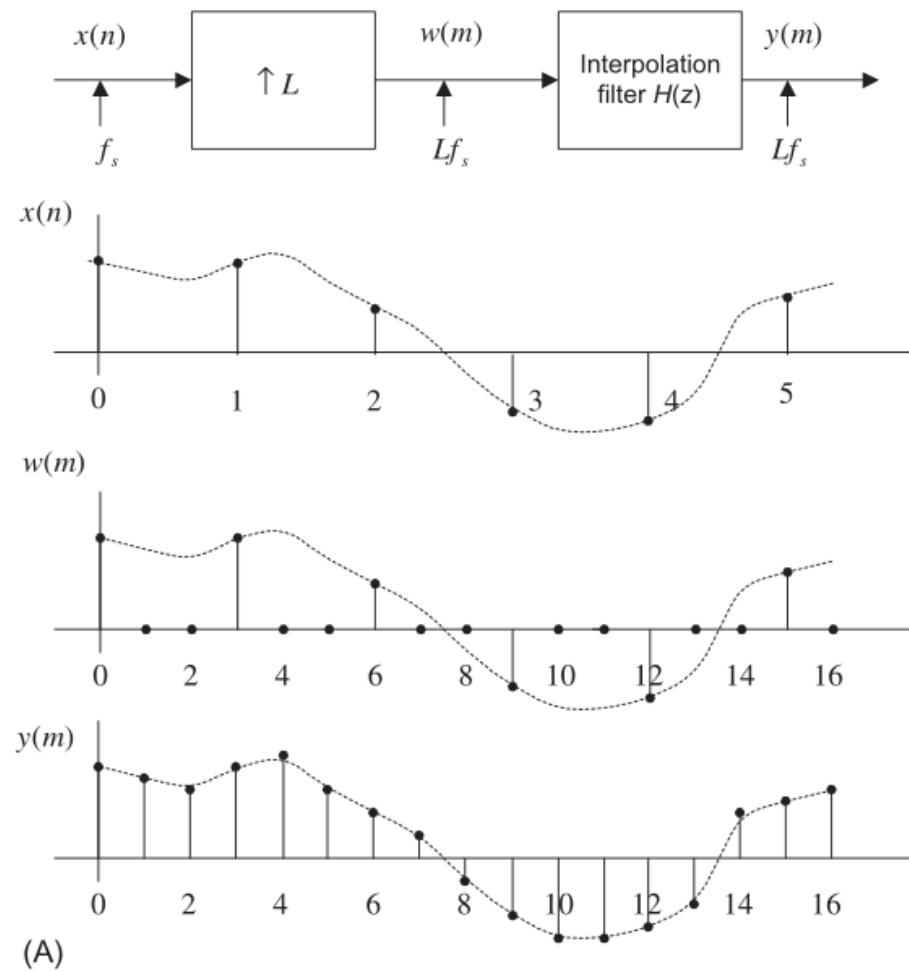
- 将采样率提高整数倍的过程称为数据序列的上采样，也将下采样称为“插值”
- 若上采样因子为  $L$ , 常用的方式是每两个样点间插入  $L-1$  个 0, 数学上表示为

$$y(m) = \begin{cases} x\left(\frac{m}{L}\right) & m = nL \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



- 上采样因子  $L$  后, 新采样频率为  $f_{sL} = Lf_s$ 
  - ✓ 因此, 频率上会在  $\pm f_s, \pm 2f_s, \pm 3f_s \dots$  产生频谱复制
- 为了去掉这些复制频谱, 上采样后需要通过一个低通滤波器, 其截止频率为  $f_s/2$ , 相对应的归一化截止频率为

$$F_{stop} = \frac{f_s/2}{Lf_s/2} = \frac{1}{L}$$



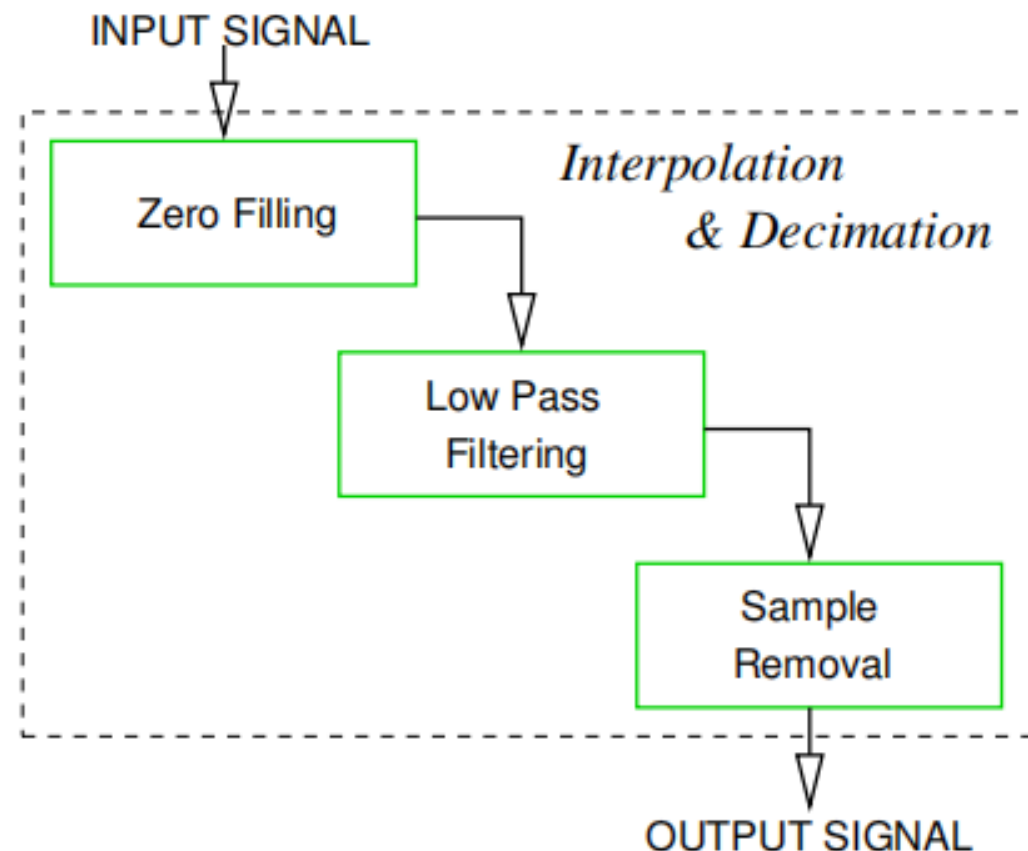
# 分数倍重采样

## □ $L/M$ 分数倍重采样可看作是两个采样转换过程

- ✓ 以整数 $L$ 的因子执行上采样处理, 再通过插值滤波器 $H_1(z)$ ;
- ✓ 通过抗混叠滤波器 $H_2(z)$ , 再执行整数 $M$ 的因子下采样
- ✓  $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 可以合并为一个低通滤波器

## □ 插值低通滤波器和抗混叠滤波器都是低通滤波器, 可以组合到一起, 其截止角频率为

$$F_{stop} = \min \left\{ \frac{1}{L}, \frac{1}{M} \right\}$$



# Matlab实现要点

## □ 滤波器截止角频率为

$$F_{stop} = \min \left\{ \frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M} \right\}$$

## □ 为解决滤波器的泄露现象，采用Kaiser加窗滤波器

✓ 加窗滤波器需要归一化并考虑插值的影响

## □ 由于FIR滤波有时延，采用conv，并取中间的输出值，若滤波器阶数是L，则首尾共去掉（L-1）点

✓ simTestMyresample.m

```
05. L = 3; M = 2; % set the up- and downsampling factors
06. N = 30; % length of the signal
07. f1 = 0.043; % frequency of 1st sinusoid
08. f2 = 0.031; % frequency of 2nd sinusoid
09. n = 0:N-1;
10. xn = sin(2*pi*f1*n) + sin(2*pi*f2*n);
11.
12. %使用Matlab官方函数
13. ym = resample(xn, L,M);
14.
15. m = 0:length(ym)-1; % create a new index
16. figure
17. subplot(3, 1, 1)
18. stem(n, xn)
19. xlabel('Time index n'); ylabel('Amplitude')
20. title('Input sequence')
21. subplot(3, 1, 2)
22. stem(m, ym)
23. xlabel('Time index n'); ylabel('Amplitude')
24. title('Output sequence from Matlab Official Function')
25.
26. %使用自己的函数
27. ymy = MyResample(xn, L, M);
28. subplot(3, 1, 3)
29. stem(0:length(ymy)-1, ymy)
30. xlabel('Time index n'); ylabel('Amplitude')
31. title('Output sequence from My Function')
```

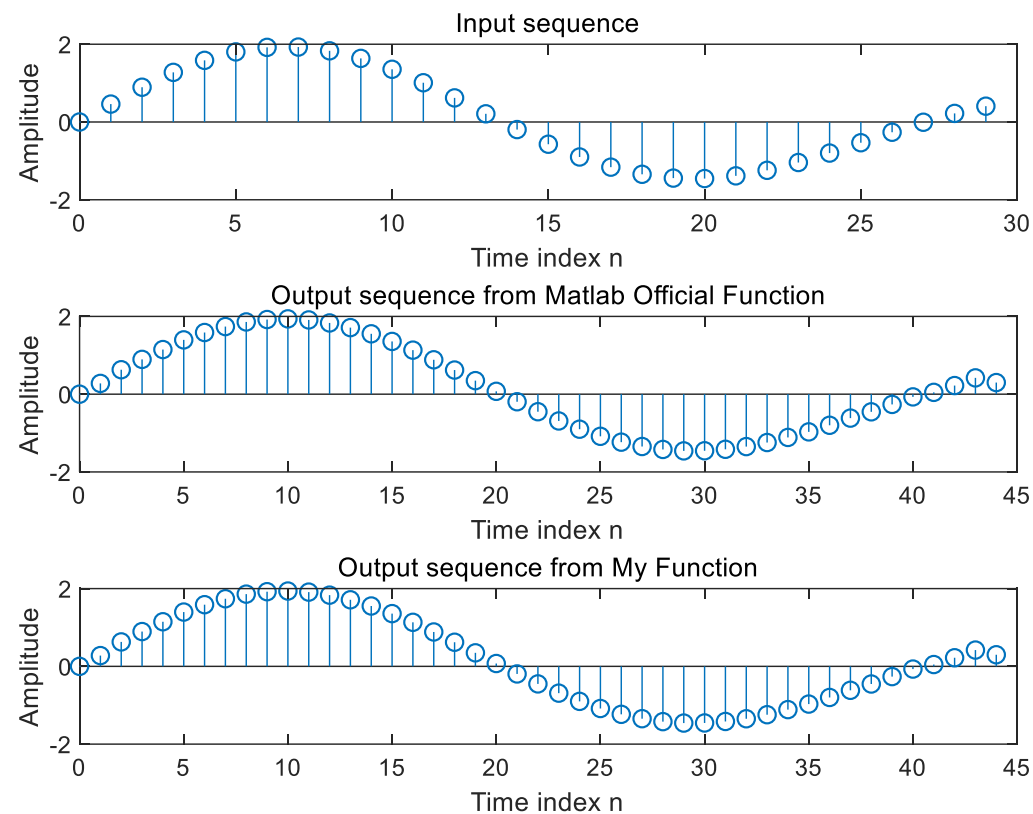


# Matlab实现

## □ Myresample.m

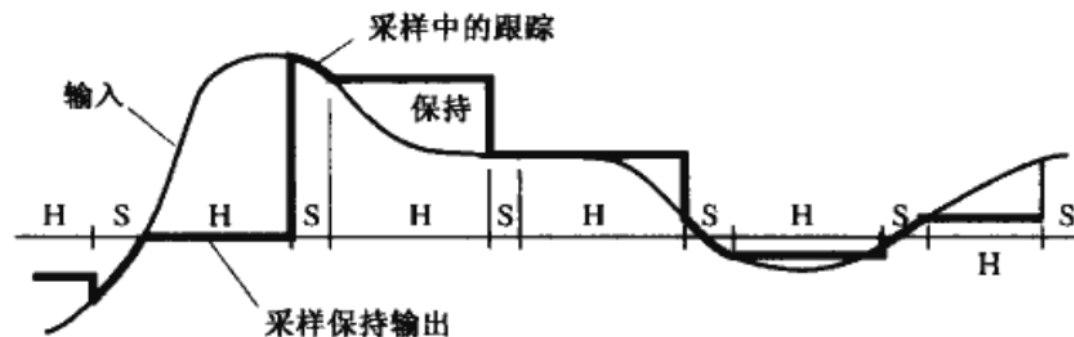
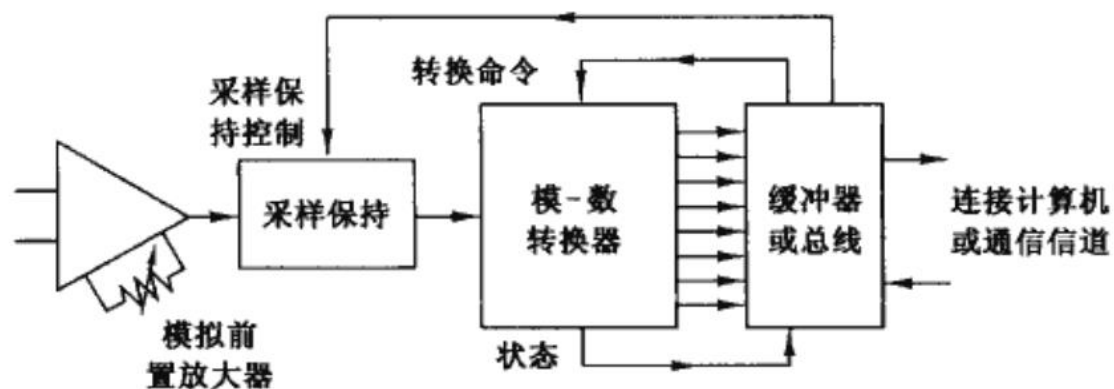
```
01. function output=MyResample(x,p,q,varargin)
02. %x 输入序列
03. %p,q 再采样因子, 均为正整数, 先上采样p, 再降采样q
04. %n 抗混叠滤波器阶数参数 阶数为L = 2*n*max (p,q) +1;
05. %beta Kaiser窗参数
06. %m 方法参数 0-自己实现的时域插值方法
07. %      1-自己实现的频域插值方法
08. %      2-从Matlab resample函数中uniformResample里整理出来的代码

38. %插入p-1个零
39. x1=[x;repmat(zeros(1,length(x)),p-1,1)];
40. x2=reshape(x1,1,size(x1,1)*size(x1,2));
41.
42. pqmax = max(p,q);
43. fc = 1/pqmax; %滤波器截止频率
44. L = 2*n*pqmax+1; %滤波器阶数
45. h=firls( L-1, [0 fc fc 1], [1 1 0 0]).*kaiser(L,bta)'; %加窗滤波器
46. %fir1(L-1,2*fc,kaiser(L,bta));
47. win = p*h/sum(h); %加窗后, 能量归一化, 滤波器的增益为p
48. y=conv(win,x2);
49.
50. %FIR滤波, 会有时延, 为取中间的部分, 去掉首位一共L-1个点
51. halfL=floor((L-1)/2);
52. halfR=L-1-halfL;
53. y1=y;
54. y1(1:halfL)=[];
55. y1(end-halfR+1:end)=[];
56.
57. %q倍降采样
58. y2=y1(1:q:end);
59. output=y2;
```



# 模数转化

- 在前一节中，我们假设A/D和D/A转换器在处理连续时间信号时是理想的
  - ✓ 一个隐含假设：模拟到数字转换中的量化误差和数字信号处理中的舍入误差是可忽略的
  - ✓ 然而因为模拟系统中的电子元件具有误差，模拟信号处理操作也不能非常精确，，在操作过程中会引入噪声
  - ✓ 一般来说，数字系统设计师比设计等效模拟系统的模拟系统设计师对数字信号处理系统中的误差有更好的控制
- 将连续时间（模拟）信号转换为数字序列（可由数字系统处理）的过程要将采样值量化为有限数量的电平，并用若干位表示每个电平。



# A/D转换

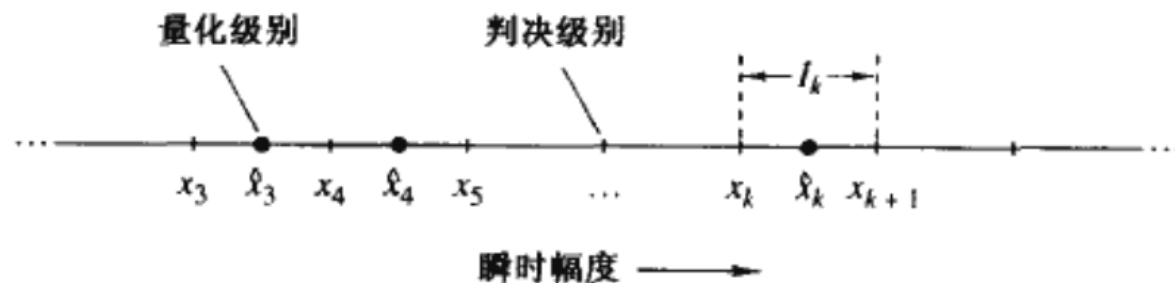
□ A/D转换器的基本任务是将输入连续振幅范围转换为离散的数字码字集，即将时间 $t = nT$ 时的给定振幅 $x(n) = x(nT)$ 映射到从有限值集中取的振幅 $x_k$

✓ 这种转换涉及量化和编码的过程

✓ 量化是一个非线性的不可逆过程

✓ 信号幅度范围分为 $L$ 个区间

$$I_k = \{x_k < x(n) \leq x_{k+1}\}, \quad k = 1, 2, \dots, L$$

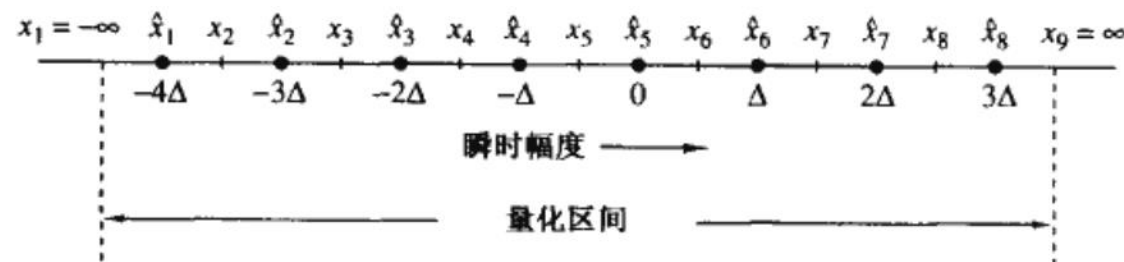


✓ 量化器的可能输出（即量化电平）表示为  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_L$

✓ 量化运算为

$$x_q(n) \equiv Q[x(n)] = \hat{x}_k, \quad x(n) \in I_k$$

✓ 对均匀量化，相邻量化电平差为量化步长 $\Delta$



# 标量量化

## □ 量化间隔

- ✓ 随机变量 $X$ 的范围被随机分成 $N$ 个互不重叠的区域,  $R_i, 1 \leq i \leq N$

## □ 量化电平

- ✓ 某个区域内选取的某个单一的点
- ✓ 在每个量化间隔内, 最佳的量化电平是该间隔的质心
- ✓ 不知道分布, 通常取量化区域的中点

$$\begin{aligned}\hat{x}_i &= E[X|X \in \mathcal{R}_i] \\ &= \frac{\int_{\mathcal{R}_i} x f_X(x) dx}{\int_{\mathcal{R}_i} f_X(x) dx} \quad 1 \leq i \leq N\end{aligned}$$

## □ 均方量化误差 $D = \sum_{i=1}^N \int_{\mathcal{R}_i} (x - \hat{x}_i)^2 f_X(x) dx$

## □ 量化信噪比 $\text{SQNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{E[X^2]}{D}$

## □ 均匀量化

- ✓ 除去 $R_1$ 和 $R_N$ 区域, 全部量化区域都有相等的长度 $\Delta$
- ✓ 均匀量化器设计等效于确定 $a$ 和 $\Delta$ , 再确定量化电平

$$\mathcal{R}_1 = (-\infty, a]$$

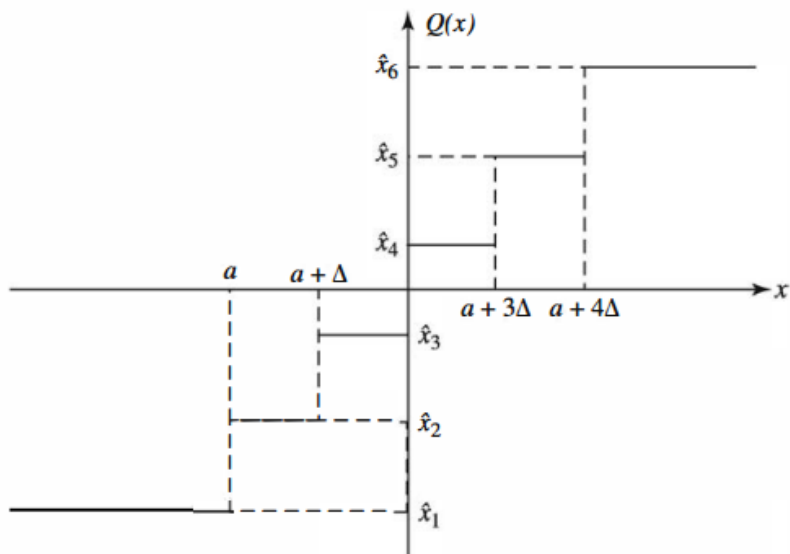
$$\mathcal{R}_2 = (a, a + \Delta]$$

$$\mathcal{R}_3 = (a + \Delta, a + 2\Delta]$$

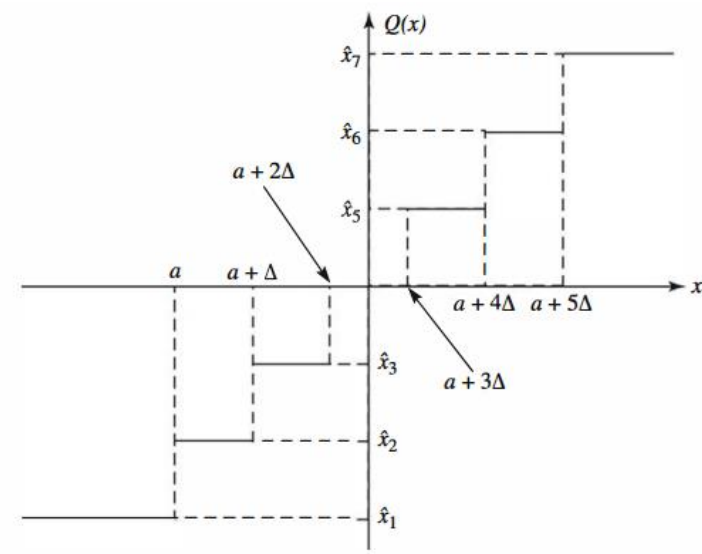
$\vdots$

$$\mathcal{R}_N = (a + (N - 2)\Delta, \infty)$$

# 示例



**N=6的均匀量化器**  
N为偶数，此时 $a+2\Delta=0$



**N=7的均匀量化器**  
N为奇数，这里 $\hat{x}_4 = 0$

□ 对于对称概率密度问题

$$\mathcal{R}_i = \begin{cases} (a_{i-1}, a_i], & 1 \leq i \leq N-1 \\ (a_{i-1}, a_N), & i = N \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = -\infty \\ a_i = (i - N/2)\Delta & 1 \leq i \leq N-1 \\ a_N = \infty \end{cases}$$

□ 实现最小失真，仅有一个参数 $\Delta$ 需要选取

# 课堂练习

□ 对一个零均值，单位方差高斯分布的输入信号，量化区域的边界给出为 (-5,-4,-2,0,1,3,5)，确定质心

✓ 用符号计算实现

✓ 程序：ex6centroid4ex.m

$$\hat{x}_i = E[X|X \in \mathcal{R}_i] \\ = \frac{\int_{\mathcal{R}_i} x f_X(x) dx}{\int_{\mathcal{R}_i} f_X(x) dx} \quad 1 \leq i \leq N$$

```
01. a=[-10,-5,-4,-2,0,1,3,5,10];
02. syms x ;
03. y=??;
04. y1=??;
05. digits(5)
06. for i=1:length(a)-1
07.     y_actual(i)=vpa(int(y1,a(i),a(i+1))/int(y,a(i),a(i+1)));
08. end
09. y_actual
```

```
01. a=[-10,-5,-4,-2,0,1,3,5,10];
02. syms x ;
03. y=1/(sqrt(2*pi))*exp(-x^2/2);
04. y1=x/(sqrt(2*pi))*exp(-x^2/2);
05. digits(5)
06. for i=1:length(a)-1
07.     y_actual(i)=vpa(int(y1,a(i),a(i+1))/int(y,a(i),a(i+1)));
08. end
09. y_actual
```

# 非均匀量化

□ 非均匀量化是一种在整个动态范围内量化间隔不相等的量化

- ✓ 本质上是根据输入信号分布概率密度来分布量化电平
- ✓ PDF小时，量化间隔大；PDF大时，量化间隔小，可降低量化均方误差

□ Lloyd-Max算法，可以生成理想的非均匀方案

- ✓ 初始化量化边界点  $R_1 = (b_0, b_1], R_2 = (b_1, b_2], R_3 = (b_2, b_3], \dots, R_N = (b_{N-1}, b_{N+1})$

- ✓ 对每个区间，根据的PDF函数，计算区间的质心

$$c_i = E\{x|x \in R_i\} = \frac{\int_{x \in R_i} x f_X(x) dx}{\int_{x \in R_i} f_X(x) dx} \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

- ✓ 根据质心，更新区间边界为

$$b_i = \frac{c_{i-1} + c_i}{2} \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

- ✓ 重复前两步，直到量化均方误差收敛

# 语音信号的非均匀量化

- 让基带信号通过一个“压缩器”，它对小信号起放大作用，对大信号起压缩作用，然后，再把这个经过压缩的信号输入均匀量化器。解调时，对解码后的压缩量化信号先经扩张电路，起作用正好与压缩相反，使受到压缩的信号复原
- 通常采用对数压缩，也即 $y=\ln x$ 
  - ✓ 美国日本：u律
  - ✓ 中国欧洲：A律

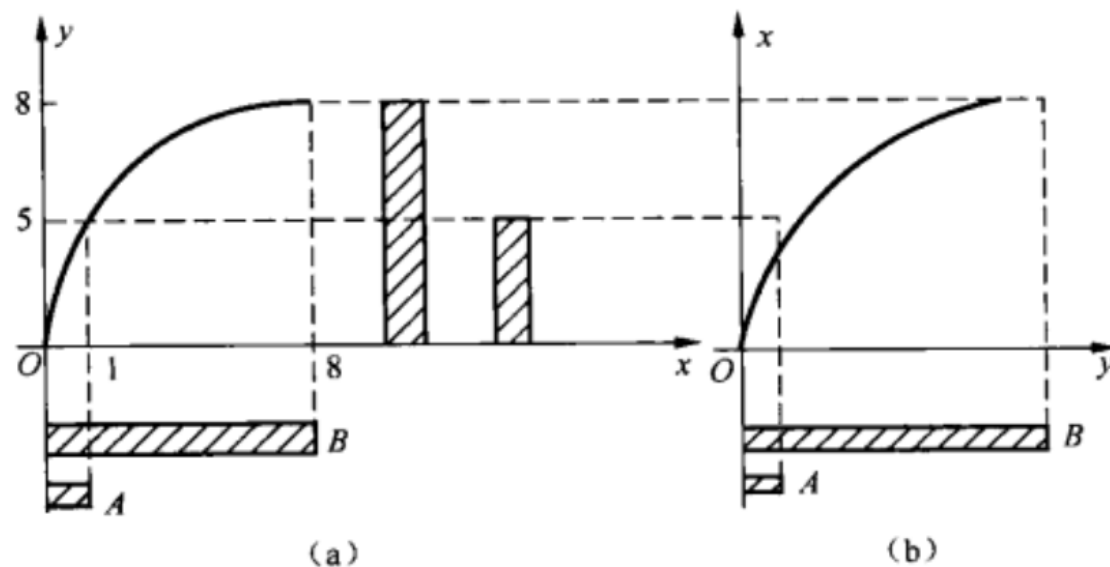


图 6-12 压缩与扩张的示意图

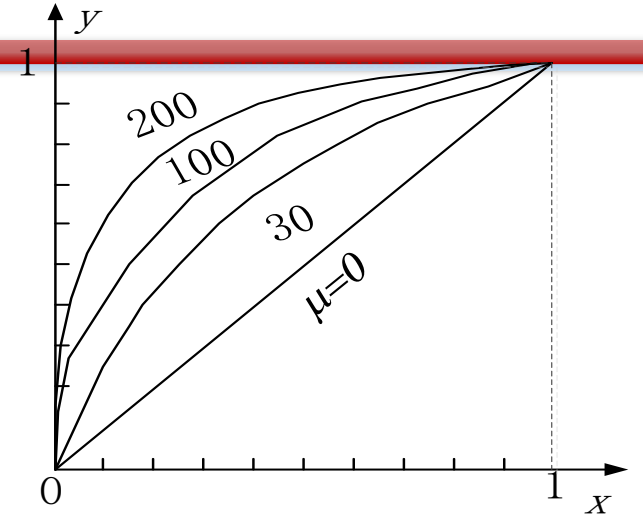


# μ律和A律

## □ μ律的非线性

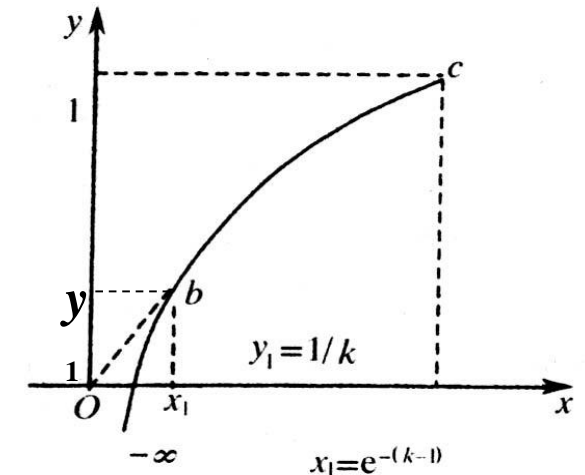
$$y = \frac{\ln(1 + \mu x)}{\ln(1 + \mu)} \quad 0 \leq x \leq 1$$

- ✓ 其中x为归一化输入
- ✓ μ=0为直线，越大压缩效果越明显
- ✓ μ为一个参数标准，在国际标准值中为255



## □ A律的非线性

$$y = \frac{Ax}{1 + \ln A}, 0 < x \leq \frac{1}{A} \quad y = \frac{1 + \ln Ax}{1 + \ln A}, \frac{1}{A} \leq x \leq 1$$



- ✓ x - 压缩器归一化输入电压； y - 压缩器归一化输出电压； A - 常数，它决定压缩程度，在实用中，A等于87.6
- ✓ 由两个表示式组成。第一个表示式中的y和x成正比，是一条直线方程；第二个表示式中的y和x是对数关系

# 13折线 - A律的近似

- A律表示式是一条平滑曲线，用电子线路很难准确地实现
- 用数字电路近似实现，也即13折线
  - ✓ 横坐标 $x$ 在0至1区间中分为不均匀的8段
  - ✓ 1/2至1间的线段称为第8段；1/4至1/2间的线段称为第7段；1/8至1/4间的线段称为第6段；依此类推，直到0至1/128间的线段称为第1段
  - ✓ 第1象限中的第1和第2段和在第3象限中的第1和第2段折线斜率也相同，这4段折线构成了一条直线。因此，共有13段折线，故称13折线压缩特性

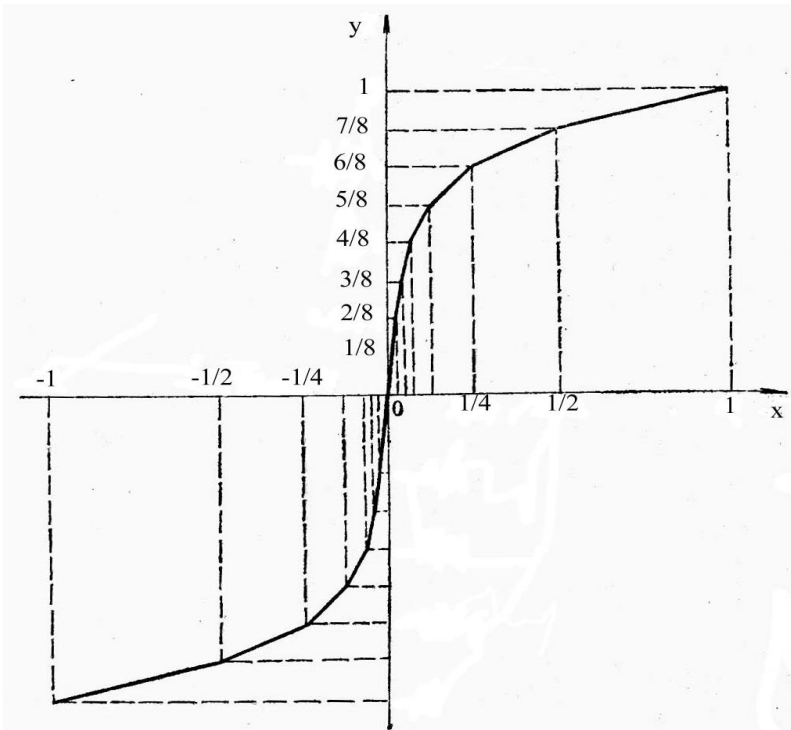
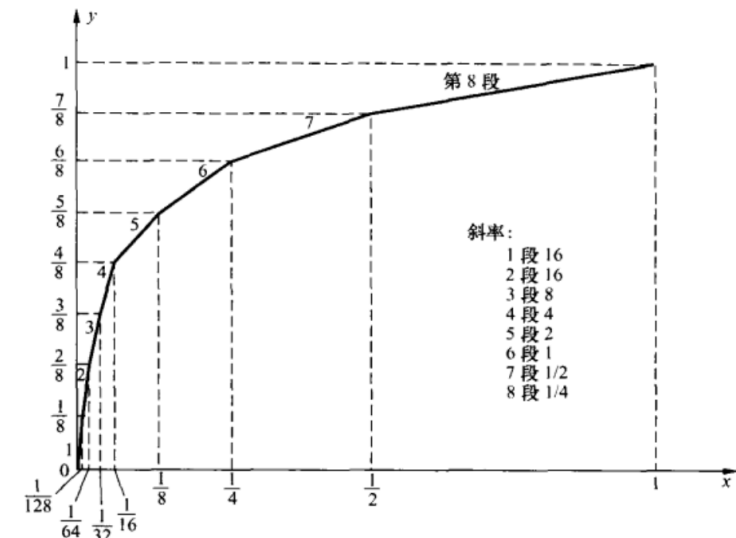


表 6-3 13 折线分段时的  $x$  值与计算的  $x$  值比较表

$y$	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	1
$x$	0	1/128	1/60.6	1/30.6	1/15.4	1/7.79	1/3.93	1/1.98	1
折线分段的 $x$	0	1/128	1/64	1/32	1/16	1/8	1/4	1/2	1
段落	┌┐		┌┐		┌┐		┌┐		┌┐
斜率	16		16		8		4		1/4

# 课后作业

- 设低通信号  $x(t) = \sin 2\pi t + \cos 5\pi t$ 
  - ✓ 画出该低通信号的波形
  - ✓ 画出抽样速率为不同抽样频率的抽样序列及其恢复出来的信号，并分析
  
- 给定采样率为44.1KHz的音频文件“风铃44k.wav”，请自编程序将采样率转换成32KHz的音频文件“风铃32k.wav”（不允许使用Matlab自带的采样率变换函数）
  
- 假设一个模拟信号的PDF为标准正态分布，假设整个区间为  $[b_0 = -5, b_N = 5]$ ，将整个区间划分成10个非均匀量化区间，请用Lloyd-Max算法计算量化区间边界和质心。

# 有问题，随便问！

---

