Simple 线性代数 $_0$

Preview 20

目录　Content

α_3

β

γ_2

δ

线性空间 | 定义

线性空间　设 $(\mathbf{F},+_F,\times_F)$ 是一个域, V 是一个集合, 则 $(V,(\mathbf{F},+_F,\times_F),+,\cdot)$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间, 当且仅当其加法 $+:V\times V\to V$ 和数乘 $\cdot:\mathbf{F}\times V\to V$ 满足如下性质:

1. 加法右幺元: 存在加法右幺元 $\mathbf{0}\in V$ 使得 $\boldsymbol{v}+\mathbf{0}=\boldsymbol{v}$ 对一切 $\boldsymbol{v}\in V$ 成立.

2. 数乘单位: 存在乘法左幺元 $1\in\mathbf{F}$ 使得 $1\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ 对一切 $\boldsymbol{v}\in V$ 成立.

3. 加法右逆元: 对任意 $\boldsymbol{v}\in V$ 都存在加法右逆元 $-\boldsymbol{v}\in V$ 使得 $\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$, 其中 $\mathbf{0}$ 是 V 的加法右幺元.

4. 加法结合律: $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ 对一切 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V$ 成立.

5. 数乘结合律: $(a\times_F b)\cdot\boldsymbol{v}=a\cdot(b\cdot\boldsymbol{v})$ 对一切 $a,b\in\mathbf{F}$ 和 $\boldsymbol{v}\in V$ 成立.

6. 左分配律: $a\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=a\cdot\boldsymbol{u}+a\cdot\boldsymbol{v}$ 对一切 $a\in\mathbf{F}$ 和 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$ 成立.

7. 右分配律: $(a+_F b)\cdot\boldsymbol{v}=a\cdot\boldsymbol{v}+b\cdot\boldsymbol{v}$ 对一切 $a,b\in\mathbf{F}$ 和 $\boldsymbol{v}\in V$ 成立.

我们一般直接用集合的符号来表示其所对应的线性空间, 并且可以省略数乘运算符 $\cdot$.

线性空间中的元素称为向量并用粗体字母表示, 其所在域 $\mathbf{F}$ 中的元素为标量. 由 V 中向量组成的集合和族分别简称为 V 中的向量集和向量组.

$\mathbf{F}$ 取 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 时的线性空间分别称为实线性空间和复线性空间. 称某个线性空间非零, 当且仅当其真包含加法幺元 $\mathbf{0}$.

域诱导线性空间　设 $(\mathbf{F},+,\cdot)$ 是一个域, 则

1. 对任意正整数 n, $(\mathbf{F}^n,(\mathbf{F},+,\cdot),+,\cdot)$ 是线性空间;

2. $(\mathbf{F}^\infty,(\mathbf{F},+,\cdot),+,\cdot)$ 是线性空间.

加法左幺元 & 加法左逆元　设 $\mathbf{0}$ 是线性空间 V 的加法右幺元, 则

1. $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ 对一切 $\boldsymbol{v}\in V$ 成立;

2. $(-\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ 对一切 $\boldsymbol{v}\in V$ 成立, 其中 $-\boldsymbol{v}$ 表示 $\boldsymbol{v}$ 的加法右逆元.

证明

对任意 $\boldsymbol{v}\in V$ 我们有

$$\mathbf{0}+(-(-\boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v}))+(-(-\boldsymbol{v}))=\boldsymbol{v}+((-\boldsymbol{v})+(-(-\boldsymbol{v})))=\boldsymbol{v}+\mathbf{0}=\boldsymbol{v}\,,$$

于是

$$\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\mathbf{0}+(\mathbf{0}+(-(-\boldsymbol{v})))=(\mathbf{0}+\mathbf{0})+(-(-\boldsymbol{v}))=\mathbf{0}+(-(-\boldsymbol{v}))=\boldsymbol{v}\,,$$
$$-\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}+(\mathbf{0}+(-(-\boldsymbol{v})))=(-\boldsymbol{v}+\mathbf{0})+(-(-\boldsymbol{v}))=-\boldsymbol{v}+(-(-\boldsymbol{v}))=\mathbf{0}\,,$$

从而 $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ 和 $(-\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ 对一切 $\boldsymbol{v}\in V$ 成立. □

根据上述结论, 我们可以统称加法右幺元和加法右逆元为加法幺元, 事实上, 加法幺元对于任何线性空间而言都具有唯一性.

加法幺元的唯一性 任何线性空间都有唯一的加法幺元.

证明

假设 $\mathbf{0}_1$ 和 $\mathbf{0}_2$ 都是线性空间 V 的加法幺元, 则

$$\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_2+\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2\,. \qquad \square$$

加法逆元的唯一性 向量 $\boldsymbol{v}$ 有唯一的加法逆元 $-\boldsymbol{v}$.

证明

假设对任意 $\boldsymbol{v}\in V$, $-\boldsymbol{v}_1$ 和 $-\boldsymbol{v}_2$ 都是 $\boldsymbol{v}$ 的加法逆元, 则

$$-\boldsymbol{v}_1=-\boldsymbol{v}_1+\mathbf{0}=-\boldsymbol{v}_1+(\boldsymbol{v}_1+(-\boldsymbol{v}_2))=(-\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_1)+(-\boldsymbol{v}_2)=\mathbf{0}+(-\boldsymbol{v}_2)=-\boldsymbol{v}_2\,. \qquad \square$$

加法逆元的对合律 $\boldsymbol{v}=-(-\boldsymbol{v})$ 对一切 $\boldsymbol{v}\in V$ 成立.

向量减法 设 $\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2\in V$, 我们定义 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2:=\boldsymbol{v}_1+(-\boldsymbol{v}_2)$.

向量减法的性质

1. 左分配律: $a\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})=a\cdot\boldsymbol{u}-a\cdot\boldsymbol{v}$ 对一切 $a\in\mathbf{F}$ 和 $\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}\in V$ 成立.

2. 右分配律: $(a-_F b)\cdot\boldsymbol{v}=a\cdot\boldsymbol{v}-b\cdot\boldsymbol{v}$ 对一切 $a\,,\,b\in\mathbf{F}$ 和 $\boldsymbol{v}\in V$ 成立.

线性空间 中的设定

- 设 $(\mathbf{F}\,,+\,,\cdot)$ 是域, 令 $0\,,\,1\,,\,-1$ 分别表示其加法幺元, 乘法幺元和乘法幺元的加法逆元.
- 设 $(U\,,\mathbf{F}\,,+\,,\cdot)\,,\,(V\,,\mathbf{F}\,,+\,,\cdot)\,,\,(W\,,\mathbf{F}\,,+\,,\cdot)$ 是域 $\mathbf{F}$ 上线性空间.
- 不产生歧义时, 令 $\mathbf{0}$ 表示任何线性空间的加法幺元.

线性空间 | 基本性质

线性空间 | **基本性质** 中的设定

- 设 $a \in \mathbf{F}$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$.

下面我们将利用 **加法幺元和加法逆元的对称性** 来验证加法交换律适用于一切向量.

加法交换律 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$.

证明

分别应用 **左分配律和右分配律** 可得

$$(1+1)\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}+((\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}) \ ,$$
$$(1+1)\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}+((\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})+\boldsymbol{v}) \ ,$$

于是同时有

$$(-\boldsymbol{u}+(1+1)\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}))+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \, ,$$
$$(-\boldsymbol{u}+(1+1)\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}))+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \, ,$$

这就证明了 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$. □

无零因子性质 $a\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ 当且仅当 $a=0$ 或 $\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$.

$\Longleftarrow$ 证明

$$0\boldsymbol{v}=0\boldsymbol{v}+\mathbf{0}=0\boldsymbol{v}+0\boldsymbol{v}-0\boldsymbol{v}=(0+_F 0)\,\boldsymbol{v}-0\boldsymbol{v}=0\boldsymbol{v}-0\boldsymbol{v}=\mathbf{0} \, ,$$
$$a\mathbf{0}=a\mathbf{0}+\mathbf{0}=a\mathbf{0}+a\mathbf{0}-a\mathbf{0}=a\,(\mathbf{0}+\mathbf{0})-a\mathbf{0}=a\mathbf{0}-a\mathbf{0}=\mathbf{0} \ .$$
□

$\Longrightarrow$ 证明 (反证法)

假设 $a\neq 0$ 且 $\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$. 因为 a 不为域 $\mathbf{F}$ 的加法幺元, 我们令其乘法逆元为 a^{-1} , 于是

$$\boldsymbol{v}=1\boldsymbol{v}=\left(a^{-1}\times_F a\right)\boldsymbol{v}=a^{-1}\,(a\boldsymbol{v})=a^{-1}\mathbf{0}=\mathbf{0} \, ,$$

从而导出了矛盾. □

下面的三则定理将进一步展现域和线性空间在乘法运算上的一致性.

乘法左幺元 *1 是 V 的乘法幺元.*

证明

1. 当 $V = \{\mathbf{0}\}$ 时, 显然有 $1\mathbf{0} = \mathbf{0}$ 成立;
2. 当 $V \supset \{\mathbf{0}\}$ 时, 设 $1'$ 是 V 的乘法幺元, 则

$$1\boldsymbol{v} = 1\,(1'\boldsymbol{v}) = (1 \times_F 1')\,\boldsymbol{v} = 1'\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\ .$$

综上所述, 1 必为线性空间 V 的乘法幺元. □

乘法左幺元的唯一性 *若线性空间 V 非零, 则 $1 \in \mathbf{F}$ 是唯一使得 $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ 成立的标量.*

证明

选取任意非零向量 $\boldsymbol{v} \in V$, 则对一切 $a \in \mathbf{F}$ 有

$$(1 \times_F a -_F a)\,\boldsymbol{v} = (1 \times_F a)\,\boldsymbol{v} - a\boldsymbol{v} = 1\,(a\boldsymbol{v}) - a\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} - a\boldsymbol{v} = \mathbf{0}\ ,$$

由**无零因子性质**可知必有 $1 \times_F a = a$, 故 1 为 $\mathbf{F}$ 的乘法幺元, 域的**乘法幺元唯一性**保证了其作为 V 的乘法幺元的唯一性. □

加法逆元的一致性 $(-1)\,\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$.

证明

$$\boldsymbol{v} + (-1)\,\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} + (-1)\,\boldsymbol{v} = (1 -_F 1)\,\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}\ .$$ □

事实上, 对于只包含加法幺元 $\mathbf{0}$ 的线性空间 V , 任何域 $\mathbf{F}$ 中的元素都是其乘法幺元, 这是因为 $a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ 对一切 $a \in \mathbf{F}$ 成立.

线性空间 子空间 | 定义

线性空间 子空间 中的设定

- 设 $U \subseteq V$.

对于线性空间 V 的一些特定的子集 U , 我们可以直接在 U 上赋予与 V 一致的代数结构（域和运算）而使之成为线性空间.

子空间 $(U, \mathbf{F}, +, \cdot)$ 是 $(V, \mathbf{F}, +, \cdot)$ 的子空间, 当且仅当 $(U, \mathbf{F}, +, \cdot)$ 是线性空间.

V 的最小子空间和最大子空间分别是 $\{\mathbf{0}\}$ 和 V , 我们将除 V 自身外的子空间统称为 V 的真子空间.

子空间的判定准则 $(U, \mathbf{F}, +, \cdot)$ 是 $(V, \mathbf{F}, +, \cdot)$ 的子空间, 当且仅当其满足如下性质:

- $U \neq \varnothing$;
- $\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v} \in U$ 对一切 $\lambda, \mu \in \mathbf{F}$ 和 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ 成立.

$\Longrightarrow$ 证明

这是显然的. □

$\Longleftarrow$ 证明

$a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} \in U$ 保证了 U 对加法和数乘运算封闭. 由 U 非空知 $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{u} \in U$ 成立, 其中 $\boldsymbol{u} \in U$; 因为数乘运算与 V 相同, 因此 U 有和 V 相同的乘法幺元; 同时对一切 $\boldsymbol{u} \in U$ 有 $-\boldsymbol{u} = (-1)\boldsymbol{u} \in U$; 其余**线性空间**要求的运算律显然成立, 因为它们在包含 U 的线性空间 V 上成立. □

该准则中对 U 非空的要求是必须的, 因为空集满足两条封闭性条件但不是线性空间.

线性空间 子空间 中的设定中的设定

- 设 $U, V_1, V_2, \cdots, V_n$ 是 V 的子空间.

线性空间 向量组 | 张成空间

线性空间 向量组 中的设定

- 设 I 是集合, $S=(\boldsymbol{v}_k)_{k\in I}$ 是 V 中的向量组.

张成空间　S 的张成空间定义为

$$\operatorname{span} S := \{\mathbf{0}\} \cup \left\{ \sum_{k\in J} a_k \boldsymbol{v}_k \,\middle|\, (a_k)_{k\in J} \in \mathbf{F}^J \,,\, J \text{ 是 } I \text{ 的有限子集} \right\} .$$

如果 $V=\operatorname{span} S$, 则称 S 张成 V .

我们把 $\operatorname{span} S$ 中的元素称为 S 的线性组合. 注意, 在上面的定义中额外并入 $\{\mathbf{0}\}$ 是为了保证 $\operatorname{span}(\,)=\{\mathbf{0}\}$, 由此有下面的结论成立.

张成空间是线性空间　$\operatorname{span} S$ 是 V 的子空间.

证明

$\operatorname{span} S$ 的定义确保了 $\mathbf{0}\in\operatorname{span} S$, 对任意 $a\,,b\in\mathbf{F}$ 和 $\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{v}\in\operatorname{span} S$, 不妨记

$$\boldsymbol{u}=\sum_{k\in J_1} a_k\boldsymbol{v}_k \quad \text{and} \quad \boldsymbol{v}=\sum_{k\in J_2} b_k\boldsymbol{v}_k \ ,$$

其中 $J_1\,,J_2$ 是 I 的有限子集, 则有

$$a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}=\sum_{k\in J_1}(aa_k)\,\boldsymbol{v}_k+\sum_{k\in J_2}(bb_k)\,\boldsymbol{v}_k \ ,$$

其中各 $aa_k\,,bb_k\in\mathbf{F}$, 于是由**子空间的判定准则**可知 $\operatorname{span} S$ 是 V 的子空间. □

下面的事实给出了判断两个向量组的张成空间是否相等的简便方法.

等价向量组　设 $S_1=(\boldsymbol{v}_k^{(1)})_{k\in I_1}$ 和 $S_2=(\boldsymbol{v}_k^{(2)})_{k\in I_2}$ 是 V 中的向量组, S_1 与 S_2 等价当且仅当任何 $\boldsymbol{v}_k^{(1)}$ 都属于 $\operatorname{span} S_2$ 且任何 $\boldsymbol{v}_k^{(2)}$ 都属于 $\operatorname{span} S_1$.

等价向量组的张成空间　设 $S_1\,,S_2$ 是 V 中的向量组, 则 S_1 与 S_2 等价当且仅当

$$\operatorname{span} S_1=\operatorname{span} S_2 \ .$$

线性空间 向量组 | 线性相关性

线性相关性 向量组 S 线性相关当且仅当存在有限集 $J \subseteq I$ 和不全为 0 的 $(a_k)_{k\in J} \in \mathbf{F}^J$ 使得

$$\sum_{k\in J} a_k \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0} \ ,$$

否则 S 线性无关. 另外, 我们规定空组 ( ) 线性无关.

从 **线性相关性** 的定义中可得知如下事实:

线性相关性的遗传性

1. 线性无关组的任何子组都线性无关.

2. 任何以线性相关组为子组的向量组都线性相关.

若 S 线性相关, 则表明 S 中的某个向量可以被写作其它向量的线性组合, 从而在某种意义上是多余的. 例如, 考虑向量组 $S = (\mathbf{0}, \boldsymbol{v})$, 其中 $\boldsymbol{v}$ 是非零向量, 那么就会出现 $a\mathbf{0} + 0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$, 这里 a 可以取任何 $\mathbf{F}$ 中的非零元素, 所以我们可以缩减向量组为 $S' = (\boldsymbol{v})$, 并且 $\operatorname{span} S' = \operatorname{span} S$. 但这里我们不能将 $\boldsymbol{v}$ 删去, 因为我们不可能写出类似 $a\mathbf{0} + b\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ 这样的等式, 其中 b 为 $\mathbf{F}$ 中的非零元素, 这也表明 $\boldsymbol{v}$ 在 S 中是不可替代的.

将上面的想法严格化, 就得到了如下表述, 这也是线性相关性概念产生的意义:

线性相关性引理

1. 若 S 线性相关, 则存在 $\boldsymbol{v}_m$ 使得 $\boldsymbol{v}_m \in \operatorname{span}(\cdots, \boldsymbol{v}_{m-1})$.

2. 若存在 $\boldsymbol{v}_m$ 使得 $\boldsymbol{v}_m \in \operatorname{span}(\cdots, \boldsymbol{v}_{m-1}, \boldsymbol{v}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$, 则 S 线性相关.

1 证明

由 S 线性相关可知存在不全为 0 的 $(a_k)_{k=1}^n \in \mathbf{F}^n$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0} \ ,$$

现在设 m 是使得 $a_k \neq 0$ 成立的最大的正整数 k . 若 $m = 1$, 我们必定有 $\boldsymbol{v}_m = \mathbf{0}$, 故显然有该命题成立; 若 $m > 1$, 则有

$$\boldsymbol{v}_m = -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{a_m} \boldsymbol{v}_k \ . \qquad \square$$

2 证明

设存在 $(\cdots, a_{m-1}, a_{m+1}, \cdots, a_n) \in \mathbf{F}^{n-1}$ 使得

$$\boldsymbol{v}_m = \sum_{k=1}^{m-1} a_k \boldsymbol{v}_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k \boldsymbol{v}_k ,$$

令 $a_m = -1$, 从而存在不全为 0 的 $(a_k)_{k=1}^n \in \mathbf{F}^n$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0} ,$$

即 S 线性相关. $\square$

该定理表明 S 线性相关等价于存在 $\boldsymbol{v}_m \in S$ 使得向量组 $(\cdots, \boldsymbol{v}_{m-1}, \boldsymbol{v}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ 与 S 等价, 又因为**等价向量组张成相同的空间**相同, 这可以进一步等价于

$$\operatorname{span}(\cdots, \boldsymbol{v}_{m-1}, \boldsymbol{v}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = \operatorname{span} S .$$

线性空间 向量组 | 替换定理

替换定理 设 $S_1=(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^m$ 和 $S_2=(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^n$ 是 V 中的向量组, 其中 S_1 线性无关且 S_2 张成 V , 则 $m\leqslant n$ 并且存在 S_2 的子组 $S_2'=(\boldsymbol{v}_k')_{k=1}^{n-m}$ 使得

$$\operatorname{span}\left(\boldsymbol{u}_1\,,\,\cdots,\,\boldsymbol{u}_m\,,\,\boldsymbol{v}_1'\,,\,\cdots,\,\boldsymbol{v}_{n-m}'\right)=V\ .$$

证明 (流程)

对每个 $k\leqslant n$, 设 $\boldsymbol{r}_k^{(0)}=\boldsymbol{v}_k$, 现在从 $p=1$ 开始依次考虑每个正整数 $p\leqslant m$. 记

$$\boldsymbol{w}_k^{(p)}=\begin{cases}\boldsymbol{u}_k & k\leqslant p\\ \boldsymbol{r}_{k-p}^{(p-1)} & p+1\leqslant k\leqslant n+1\end{cases}\ ,$$

其中

$$\boldsymbol{w}_p^{(p)}\in V=\operatorname{span}\left(\boldsymbol{w}_1^{(p)},\,\cdots,\,\boldsymbol{w}_{p-1}^{(p)},\,\boldsymbol{w}_{p+1}^{(p)},\,\cdots,\,\boldsymbol{w}_{n+1}^{(p)}\right)\ ,$$

故 $(\boldsymbol{w}_k^{(p)})_{k=1}^{n+1}$ 线性相关, 由**线性相关性引理**可以找到某个 $\boldsymbol{w}_k^{(p)}$ 使得

$$\boldsymbol{w}_k^{(p)}\in\operatorname{span}\left(\boldsymbol{w}_1^{(p)},\,\cdots,\,\boldsymbol{w}_{k-1}^{(p)}\right)\ ,$$

并且 $\boldsymbol{w}_k^{(p)}$ 不可能为 S_1 中的向量, 因为由 S_1 线性无关, 从而 $k>p$, 我们记

$$\left(\boldsymbol{w}_{p+1}^{(p)},\,\cdots,\,\boldsymbol{w}_{k-1}^{(p)},\,\boldsymbol{w}_{k+1}^{(p)},\,\cdots,\,\boldsymbol{w}_{n+1}^{(p)}\right)$$

为 $\left(\boldsymbol{r}_1^{(p)},\,\cdots,\,\boldsymbol{r}_{n-p}^{(p)}\right)$, 注意到 $\left(\boldsymbol{u}_1\,,\,\cdots,\,\boldsymbol{u}_p\,,\,\boldsymbol{r}_1^{(p)},\,\cdots,\,\boldsymbol{r}_{n-p}^{(p)}\right)$ 依然张成 V .

当考虑完所有的正整数 p 后, 我们令 $S_2'=\left(\boldsymbol{r}_1^{(m)},\,\cdots,\,\boldsymbol{r}_{n-m}^{(m)}\right)$, 此时即有

$$\operatorname{span}\left(\boldsymbol{u}_1\,,\,\cdots,\,\boldsymbol{u}_m\,,\,\boldsymbol{r}_1^{(m)},\,\cdots,\,\boldsymbol{r}_{n-m}^{(m)}\right)=V$$

成立, 并且此时有 $m\leqslant n$. □

在上述流程中的最后一步, 我们通过**线性相关性引理**证明了 $\boldsymbol{w}_k^{(m)}$ 的存在性, 又通过 S_1 线性无关证明了 $k>m$, 此即保证了大于 m 但不大于 $n+1$ 的正整数 k 的存在性, 也即证明了 $m\leqslant n$.

替换定理的重要性在于, 其表明线性空间的无关组的长度必定不大于张成组的长度, 这为建立有限维线性空间的判定准则及其维数研究提供了基础.

线性空间 | Hamel 基

线性空间 | Hamel 基 中的设定

- 对任意集族 $\mathcal{A}$ ，记

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \ .$$

Hamel 基　V 中的向量组 $(\boldsymbol{v}_k)_{k\in I}$ 是 V 的Hamel 基，当且仅当如下性质成立：

1. 张成性：$V = \operatorname{span}(\boldsymbol{v}_k)_{k\in I}$.

2. 无关性：$(\boldsymbol{v}_k)_{k\in I}$ 线性无关.

$_{\text{AC}}$**Hamel 基的存在性**　任何线性空间都有 Hamel 基.

证明（Zorn 引理）

考虑由 V 中全体使得 $(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{v}\in S}$ 线性无关的向量集 S 构成的集合 $\mathcal{S}$ ，显然 $\varnothing \in \mathcal{S}$ ，为了对其使用 Zorn 引理，我们需要验证对偏序集 $(\mathcal{S}, \subseteq)$ 的任意全序子集 $\mathcal{S}'$ 都有 $\bigcup \mathcal{S}' \in \mathcal{S}$ ，从而 $\mathcal{S}'$ 在 $\mathcal{S}$ 中有上界.

给定任意的有限集 $I \subseteq \bigcup \mathcal{S}'$ ，对任意 $\boldsymbol{v} \in I$ ，令 $S_{\boldsymbol{v}}$ 表示 $\mathcal{S}'$ 中某个含有 $\boldsymbol{v}$ 的向量集，结合 $\mathcal{S}'$ 的全序性和归纳法可知存在某个 $S_{\boldsymbol{v}_0}$ 包含一切 $S_{\boldsymbol{v}}$ ，从而 $I \subseteq S_{\boldsymbol{v}_0}$ ，又因为 $(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{v}\in S_{\boldsymbol{v}_0}}$ 线性无关，于是 $(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{v}\in I}$ 也线性无关.

由 Zorn 引理可知存在极大元 $H \in \mathcal{S}$ 使得 $H \not\subset S$ 对一切 $S \in \mathcal{S}$ 成立. 由 $\mathcal{S}$ 的定义知 $(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{v}\in H}$ 线性无关，假设存在某个向量 $\boldsymbol{v}' \in V \setminus \operatorname{span}(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{v}\in H}$ ，则令 $H' = H \cup \{\boldsymbol{v}'\}$ ，我们有 $H \subset H'$ ，并且由 $\boldsymbol{v}' \notin \operatorname{span}(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{v}\in H}$ 和 $(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{v}\in H}$ 线性无关知 $(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{v}\in H'}$ 线性无关，这与 H 的极大性矛盾，因此必有 $V = \operatorname{span}(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{v}\in H}$. 这就得到了 V 的 Hamel 基 $(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{v}\in H}$. □

Hamel 坐标　V 中的向量组 $(\boldsymbol{v}_k)_{k\in I}$ 是 V 的 Hamel 基，当且仅当对任意 $\boldsymbol{v} \in V$ ，存在唯一仅有限个非零的 $(a_k)_{k\in I} \in \mathbf{F}^I$ 使得

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k\in J} a_k \boldsymbol{v}_k \ ,$$

其中 $J = \{k \in I \mid a_k \neq 0\}$ ，我们称 $(a_k)_{k\in I}$ 为 $\boldsymbol{v}$ 在 Hamel 基 $(\boldsymbol{v}_k)_{k\in I}$ 下的坐标.

$\Longrightarrow$ 证明

显然 $V=\operatorname{span}(\boldsymbol{v}_k)_{k\in I}$ 蕴涵了 $(a_k)_{k\in I}$ 的存在性. 假设同时存在 $(a_k^{(1)})_{k\in I}$ 和 $(a_k^{(2)})_{k\in I}$ 使得

$$\boldsymbol{v}=\sum_{k\in I}a_k^{(1)}\boldsymbol{v}_k=\sum_{k\in I}a_k^{(2)}\boldsymbol{v}_k\ ,$$

设 $(a_k^{(1)})_{k\in I}$ 和 $(a_k^{(2)})_{k\in I}$ 分别仅在 I 的有限子集 J_1 和 J_2 上非零, 并且令 $J=J_1\cup J_2$, 则

$$\sum_{k\in J}\left(a_k^{(1)}-a_k^{(2)}\right)\boldsymbol{v}_k=\mathbf{0}\ ,$$

由 $(\boldsymbol{v}_k)_{k\in I}$ 线性无关知 $a_k^{(1)}=a_k^{(2)}$ 对一切 $k\in J$ 成立, 从而 $(a_k)_{k\in J}$ 的唯一性得证. □

$\Longleftarrow$ 证明

假设 $(\boldsymbol{v}_k)_{k\in I}$ 不线性无关, 则存在有限子集 $J\subseteq I$ 和不全为零的 $(a_k)_{k\in J}$ 使得

$$\sum_{k\in J}a_k\boldsymbol{v}_k=\mathbf{0}\ .$$

取某个 $k_0\in J$ 使得 $a_{k_0}\neq 0$, 则对任意 $\boldsymbol{v}\in V$, 若存在 $(b_k)_{k\in I}$ 使得

$$\boldsymbol{v}=\sum_{k\in I}b_k\boldsymbol{v}_k\ ,$$

则同时有

$$\boldsymbol{v}=\sum_{\substack{k\in I\\ k\neq k_0}}b_k\boldsymbol{v}_k+(\,b_{k_0}+ta_{k_0}\,)\,\boldsymbol{v}_{k_0}\ ,$$

对任意 $t\in\mathbf{F}$, 这与 $(\boldsymbol{v}_k)_{k\in I}$ 的坐标唯一性矛盾, 因此 $(\boldsymbol{v}_k)_{k\in I}$ 线性无关得证. □

线性空间 子空间 | 交 & 和

子空间的交的最大性 $V_1 \cap V_2$ 是包含于 V_1 和 V_2 的子空间, 并且任何包含于 V_1 和 V_2 的子空间必定包含 $V_1 \cap V_2$.

证明

我们只需证明 $V_1 \cap V_2$ 是 V 的子空间即可, 定理的其余部分是显然的.

显然 $\mathbf{0} \in V_1 \cap V_2$. 对任意 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V_1 \cap V_2$, 分别在线性空间 V_1 和 V_2 中应用加法封闭性即有 $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V_1 \cap V_2$, 同理可知对任意 $\boldsymbol{v} \in V_1 \cap V_2$ 和 $a \in \mathbf{F}$ 有 $a\boldsymbol{v} \in V_1 \cap V_2$.

由 **子空间的判定准则** 即可完成验证. □

与交集不同的是, 很多情况下子空间的并不再是线性空间.

无限域线性空间并的不完全性 设 $\mathbf{F}$ 是无限域, 且 $V_1, \cdots, V_n$ 是 V 的真子空间, 则

$$V \neq \bigcup_{k=1}^{n} V_k .$$

证明 (数学归纳法)

当 $n = 1$ 时, 上述命题显然成立.

假设上述命题对于正整数 n 成立, 现在考虑 $n+1$ 时的情形. 由归纳假设知存在 $\boldsymbol{v} \in V$ 使得 $\boldsymbol{v} \notin V_1 \cup \cdots \cup V_n$, 若又有 $\boldsymbol{v} \notin V_{n+1}$, 则我们就找到了

$$\boldsymbol{v} \notin \bigcup_{k=1}^{n+1} V_k ,$$

因此可令 $\boldsymbol{v} \in V_{n+1}$, 又由 V_{n+1} 是 V 的真子空间可知存在 $\boldsymbol{u} \in V \setminus V_{n+1}$. 现在考虑 V 中的向量集

$$\boldsymbol{L} = \{\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v} \mid a \in \mathbf{F}\} .$$

首先, $\boldsymbol{L}$ 与 V_{n+1} 不相交, 因为若存在 $a_0 \in \mathbf{F}$ 使得 $\boldsymbol{u} + a_0\boldsymbol{v} \in V_{n+1}$, 则

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u} + a_0\boldsymbol{v}) - a_0\boldsymbol{v} \in V_{n+1} ,$$

这与 $\boldsymbol{u} \notin V_{n+1}$ 矛盾.

其次, $\boldsymbol{L}$ 与其它每个 V_k 最多只有 1 个交点, 因为若存在不同的 $a_1, a_2 \in \mathbf{F}$ 使得 $\boldsymbol{u} + a_1\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + a_2\boldsymbol{v} \in V_k$, 则

$$\boldsymbol{v} = \frac{(\boldsymbol{u} + a_1\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u} + a_2\boldsymbol{v})}{a_1 - a_2} \in V_k ,$$

这与 $\boldsymbol{v} \notin V_k$ 矛盾.

由于 $\mathbf{F}$ 是无限域, 所以至少存在某个 $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{L}$ 使得

$$\boldsymbol{w} \in V \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} V_k ,$$

这就完成了证明. □

现在我们定义一种子空间的全新运算, 它在许多性质上与子空间的交形成对偶.

子空间的和　子空间 V_1 和 V_2 的和定义为

$$V_1 + V_2 := \{\, \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \mid (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \in V_1 \times V_2 \,\} .$$

子空间的和的最小性　$V_1 + V_2$ 是包含 V_1 和 V_2 的子空间, 并且任何包含 V_1 和 V_2 的子空间必定包含 $V_1 + V_2$.

证明

首先, 显然 $V_1 + V_2$ 包含 U. 其次, 设 U 是 V 的子空间并且 U 包含 V_1 和 V_2, 则对任意的有序对 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \in V_1 \times V_2$, 必然有 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$, 又因为 U 是线性空间, 所以又有 $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in U$, 从而 $V_1 + V_2 \subseteq U$. □

线性空间 中的设定

- 对任意线性空间 V 的任意子空间 V_1, V_2: 令 $V_1 + V_2$ 表示 V_1 与 V_2 的和, 并且允许对多个子空间以左结合的形式使用该记号.

线性空间 子空间 | 直和

作为一类特殊的和, 直和意味着其中的每一个向量都能唯一地被表示为各个子空间中向量的线性组合.

直和 当且仅当映射

$$T : \prod_{k=1}^{n} V_k \to \sum_{k=1}^{n} V_k \;,\; (\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{n} \mapsto \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{v}_k$$

是单射时, 定义 $V_1\,, V_2\,, \cdots, V_n$ 的直和为

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n := \sum_{k=1}^{n} V_k \;.$$

当我们写下 $V_1 \oplus V_2$ 这个表达式, 或是说 $V_1 + V_2$ 是直和时, 就意味着子空间 V_1 和 V_2 需要满足一些理想的性质.

直和的等价条件 下面的各命题等价:

1. $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ 是直和.

2. 不存在不全为 $\mathbf{0}$ 的 $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{n} \in (V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n)$ 使得 $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$ 成立.

3. 对一切正整数 $i \leqslant n$ 都有

$$V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{\mathbf{0}\} \;.$$

4. 任何向量组

$$S \in \prod_{k=1}^{m} (V_k' \setminus \{\mathbf{0}\})$$

都线性无关, 其中 $V_1'\,, \cdots, V_m'$ 是 $V_1\,, V_2\,, \cdots, V_n$ 中所有非零子空间.

1 $\Longrightarrow$ 2 证明 (逆否命题)

假设存在不全为 $\mathbf{0}$ 的 $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{n}$ 使得 $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$ 成立, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{0} = \mathbf{0} \;,$$

并且 $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{n} \neq (\mathbf{0})_{k=1}^{n}$, 这表明 $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ 不是直和. □

2 $\Longrightarrow$ 1 证明 (逆否命题)

假设存在不同的 $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$, $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^n \in (V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n)$ 使得

$$\sum_{k=1}^n \boldsymbol{u}_k = \sum_{k=1}^n \boldsymbol{v}_k ,$$

那么

$$\sum_{k=1}^n (\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v}_k) = \sum_{k=1}^n \boldsymbol{u}_k - \sum_{k=1}^n \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0} ,$$

其中 $\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v}_k$ 不全为 $\mathbf{0}$. □

1 ⟹ 3 证明

给定任意的 i , 对任意

$$\boldsymbol{v}_i \in V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j$$

总有 $(\boldsymbol{v}_i , -\boldsymbol{v}_i) \in V_1 \times V_2$ 使得 $\boldsymbol{v}_i + (-\boldsymbol{v}_i) = \mathbf{0}$ 成立, 根据直和的定义可知必有 $\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$. □

3 ⟹ 1 证明

对任意的 $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^n \in (V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n)$, 若 $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$, 则对每个 i 有

$$\boldsymbol{v}_i = -\sum_{j \neq i} \boldsymbol{v}_j = \sum_{j \neq i} -\boldsymbol{v}_j \in \sum_{j \neq i} V_j ,$$

于是

$$\boldsymbol{v}_i \in V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j ,$$

这表明 $\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$. □

直和的基 若 $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ 是直和并且对每个正整数 $m \leqslant n$ 都有 $(\boldsymbol{v}_k^{(m)})_{k \in I_m}$ 是 V_m 的 Hamel 基, 则

$$(\boldsymbol{v}_k^{(m)})_{(k,m) \in I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_n}$$

是 $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ 的 Hamel 基.

证明

对任意 $\boldsymbol{v} \in V_1 + \cdots + V_n$, 不妨记 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_n$, 其中各 $\boldsymbol{v}_k \in V_k$, 对每个正整数 $m \leqslant n$, 由 $\operatorname{span}(\boldsymbol{v}_k^{(m)})_{k \in I_m} = V_m$ 可知存在有限集 $J_m \subseteq I_m$ 和 $(a_k^{(m)})_{k \in J_m}$ 使得

$$\boldsymbol{v}_m = \sum_{k \in J_m} a_k^{(m)} \boldsymbol{v}_k^{(m)} ,$$

于是就得到了有限集 $J_1\sqcup\cdots\sqcup J_n\subseteq I_1\sqcup\cdots\sqcup I_n$ 和 $(a_k^{(m_k)})_{k\in J_1\sqcup\cdots\sqcup J_n}$ 使得

$$\boldsymbol{v}=\sum_{m=1}^{n}\boldsymbol{v}_m=\sum_{m=1}^{n}\sum_{k\in J_m}a_k^{(m)}\boldsymbol{v}_k^{(m)}=\sum_{k\in J_1\sqcup\cdots\sqcup J_n}a_k^{(m_k)}\boldsymbol{v}_k^{(m_k)}\ ,$$

这就证明了

$$\operatorname{span}(\boldsymbol{v}_k^{(m_k)})_{k\in I_1\sqcup\cdots\sqcup I_n}=\sum_{k=1}^{n}V_k\ .$$

对 $(\boldsymbol{v}_k^{(m_k)})_{k\in I_1\sqcup\cdots\sqcup I_n}$ 的任意有限子组 S，不妨记

$$S=(\boldsymbol{v}_k^{(m_k)})_{k\in I_1'\sqcup\cdots\sqcup I_n'}\ ,$$

其中各 $I_k'\subseteq I_k$ 均为有限集, 若存在不全为 0 的 $(a_k)_{k\in I_1'\sqcup\cdots\sqcup I_n'}$ 使得

$$\sum_{k\in I_1'\sqcup\cdots\sqcup I_n'}a_k\boldsymbol{v}_k=\mathbf{0}\ ,$$

则必定存在不全为 0 的 $(a_k)_{k\in I_m'}$ 使得

$$\sum_{k\in I_m'}a_k\boldsymbol{v}_k^{(m)}=\mathbf{0}\ ,$$

这与 $(\boldsymbol{v}_k^{(m)})_{k\in I_m}$ 线性无关矛盾. □

特别地, 若各 V_k 的 Hamel 基均为有限集, 则我们可以将 $V_1+V_2+\cdots+V_n$ 的 Hamel 基表示为

$$\left(\boldsymbol{v}_1^{(1)},\cdots,\boldsymbol{v}_{N_1}^{(1)},\boldsymbol{v}_1^{(2)},\cdots,\boldsymbol{v}_{N_2}^{(2)},\cdots\cdots,\boldsymbol{v}_1^{(n)},\cdots,\boldsymbol{v}_{N_n}^{(n)}\right)\ .$$

线性空间 中的设定

- 对线性空间 V 的任意子空间 $V_1, V_2, \cdots, V_n$：令 $V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$ 或

$$\bigoplus_{k=1}^{n}V_k$$

表示 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 的直和, 其中 $\boxed{k}$ 是任意形式记号.

线性空间 子空间 | 商空间

商空间　子空间 U 的商空间定义为

$$V/U := \{\boldsymbol{v}+U \mid \boldsymbol{v}\in V\}\ ,$$

其中 $\boldsymbol{v}+U := \{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u}\in U\}$ 是向量 $\boldsymbol{v}$ 关于子空间 U 的陪集.

商空间引理　设 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ ，下列各命题等价:

1. $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\in U$.

2. $\boldsymbol{v}_1+U=\boldsymbol{v}_2+U$.

3. $(\boldsymbol{v}_1+U)\cap(\boldsymbol{v}_2+U)\neq\varnothing$.

证明

先证 $\Longrightarrow_1$. 设存在 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\in U$ 使得 $\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{v}_2$ ，则 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1\in U$.

再证 $\Longrightarrow_2$. 对任意 $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{v}_1+U$ ，存在 $\boldsymbol{u}\in U$ 使得 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}$ ，于是

$$\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\in U \implies \boldsymbol{w}\in\boldsymbol{v}_2+U\ ,$$

从而 $\boldsymbol{v}_1+U\subseteq\boldsymbol{v}_2+U$ ，同理可证 $\boldsymbol{v}_1+U\supseteq\boldsymbol{v}_2+U$ ，于是 $\boldsymbol{v}_1+U=\boldsymbol{v}_2+U$.

容易发现商空间 V/U 依然是线性空间, 从而我们可以将 $\boldsymbol{v}+U$ 视作 $\boldsymbol{v}$ 在商空间 V/U 中的化身, 此时所有与 $\boldsymbol{v}$ 相差一个 U 中元素的向量都被视为与 $\boldsymbol{v}$ 相同, 这使我们得以暂时忽略子整个空间 U 的存在.

商空间是线性空间　$\left(V/U, \mathbf{F}, +_{/U}, \cdot_{/U}\right)$ 是线性空间, 其中陪集加法和陪集数乘定义为

$$\forall\ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\in V\ :\ (\boldsymbol{v}_1+U)+_{/U}(\boldsymbol{v}_2+U) := (\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+U\ ,$$
$$\forall\ \lambda\in\mathbf{F}\ ,\ \boldsymbol{v}\in V\ :\ \lambda\cdot_{/U}(\boldsymbol{v}+U) := \lambda\boldsymbol{v}+U\ .$$

有限维线性空间 | 定义

有限维线性空间　线性空间 V <u>有限维</u>, 当且仅当 V 有有限的 Hamel 基. 否则 V <u>无限维</u>.

有限维线性空间的子空间　设 V 是有限维空间, U 是 V 的子空间, 则 U 是有限维空间.

证明 (流程)

若 $U=\{\mathbf{0}\}$, 则有 $\operatorname{span}(\,)=U$, 于是 U 为有限维空间.

若 $U\neq\{\mathbf{0}\}$, 则从 $p=1$ 开始依次考虑每个正整数 p. 由 $\operatorname{span}(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p-1}\neq U$ 我们可以找到一个 U 中的向量 $\boldsymbol{u}_p\notin\operatorname{span}(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p-1}$, **线性相关性引理**确保了向量组 $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p}$ 始终线性无关, 若 $\operatorname{span}(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p}=U$ 则此流程终止.

设向量组 $S=(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{n}$ 张成 V, 则必始终有 $p\leqslant n$, 这表明上述的流程一定会在某个 $p=m$ 后终止, 这就构造出了张成 U 的向量组 $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{m}$. □

具体考察 $p=m$ 时的情形, 假设此步骤后依然有 $\operatorname{span}(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{p}\neq U$, 则此流程会在 $p=m+1$ 时产生长度超过 S 且线性无关的向量组, 而这是不可能的.

下面给出无限维空间的判定准则, 注意任何有限维空间中的无关组都是有限的.

无限维线性空间的判定准则　若存在某个向量序列 $(\boldsymbol{v}_n)_{n=1}^{\infty}\in V^{\infty}$ 使得对一切正整数 n 都有向量组 $S_n=(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{n}$ 线性无关, 则 V 是无限维空间.

证明 (反证法)

假设 V 是**有限维空间**, 则存在张成 V 的向量组 S_n, 但我们有向量组 S_{n+1} 线性无关, 这与**替换定理**矛盾, 从而 V 必定是无限维空间. □

$\mathbf{F}$ 上的序列构成无限维线性空间　$\mathbf{F}^{\infty}$ 是无限维空间.

证明

构造无限序列序列 $(\boldsymbol{e}_n)_{n=1}^{\infty}$ 为 $\boldsymbol{e}_n:=(\boldsymbol{e}_m^{(n)})_{m=1}^{\infty}$, 其中对每个正整数 n 有

$$\boldsymbol{e}_m^{(n)}:=\begin{cases}1 & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}.$$

对任意正整数 n , 设存在 $(a_k)_{k=1}^n \in \mathbf{F}^n$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{u} \ ,$$

$$(a_1\,,\,\cdots,\,a_n\,,\,0\,,\,\cdots) = (0\,,\,0\,,\,\cdots) \ ,$$

于是 $a_1 = \cdots = a_n = 0$, 故 $\mathbf{F}^\infty$ 是无限维空间. □

有限维线性空间 中的设定

- 设 U , V , W 是有限维空间.

有限维线性空间 | 基 & 维数

有限维空间 V 的 **Hamel 基** 简称为 V 的基, 我们将会看到, **基于拓扑结构定义的基** 与 Hamel 基 **在有限维空间中等价**.

维数 有限维空间的任何基的索引集都是有限集且大小相同. 设 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^{n}$ 是 V 的基, 称 V 为 n 维线性空间并记其维数为 $\dim V = n$.

证明

设 $(\boldsymbol{e}_k^{(1)})_{k=1}^{n_1}$ 和 $(\boldsymbol{e}_k^{(2)})_{k=1}^{n_2}$ 都是 V 的基, 注意 $(\boldsymbol{e}_k^{(1)})_{k=1}^{n_1}$ 线性无关且 $(\boldsymbol{e}_k^{(2)})_{k=1}^{n_2}$ 张成 V , 由 **替换定理** 知 $n_1 \leqslant n_2$, 反过来又有 $n_1 \geqslant n_2$ 成立, 于是 $n_1 = n_2$. □

对于有限向量组 S , 我们称 $\dim \operatorname{span} S$ 为 S 的秩.

需要注意, 线性空间 V 与其所在域 $\mathbf{F}$ 有密切关系, 例如, 实线性空间 $\mathbf{R}^2$ 和复线性空间 $\mathbf{C}$ 这样的集合的维数是不同的, 即使它们在集合角度是完全同构的.

就直觉而言, 我们似乎可以通过对无关组/张成组进行缩减/扩充以得到线性空间的基, 下面的两则定理表明我们确实可以做到这一点.

基的缩减构造 若向量组 $(\boldsymbol{e}_k)_{k\in I}$ 张成 V , 则存在 $J \subseteq I$ 使得 $(\boldsymbol{e}_k)_{k\in J}$ 是 V 的基.

证明

从 $k = 1$ 开始, 依次考虑 S 中的每个向量 $\boldsymbol{v}_k$, 当且仅当 $\boldsymbol{v}_k \notin \operatorname{span}\{\cdots, \boldsymbol{v}_{k-1}\}$ 时将 $\boldsymbol{v}_k$ 保留于 B . 从而我们得到了一个新的向量组 B , 其与 S 等价因此满足 $\operatorname{span} B = V$, 并且 B 中任何一个向量都不能被表示为其之前的其它向量的线性组合, 即 B 线性无关, 故 B 是 V 的 Hamel 基. □

基的扩充构造 若向量组 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^{n}$ 线性无关, 则存在 $J \supseteq I$ 使得 $(\boldsymbol{e}'_k)_{k\in J}$ 是 V 的基并且 $\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}'_k$ 对一切 $k \in I$ 成立.

证明

因为 V 是一个有限维空间, 所以可以找到某个向量组 S' 使得 $\operatorname{span} S' = V$, 考虑对向量组 $S \cup S'$ 应用 **基的缩减构造** 的构造过程即可得 V 的 Hamel 基 B , 并且 $S \subseteq B$, 这是因为 S 线性无关, 其中的任何向量 $\boldsymbol{v}_k$ 都无法表示为其之前的向量的线性组合, 因此必定会被保留于 B . □

基的维数准则 若向量组 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^{\dim V}$ 线性无关或张成 V，则 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^{\dim V}$ 是 V 的基.

证明

当 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^{\dim V}$ 张成 V 时，由**基的缩减构造**可知存在 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^{\dim V}$ 的子组 $(\boldsymbol{e}'_k)_{k=1}^{n}$ 是 V 的基，又 $\dim V = n$，故必有 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^{\dim V} = (\boldsymbol{e}'_k)_{k=1}^{n}$.

当 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^{\dim V}$ 线性无关时，由**基的扩充构造**可知存在 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=\dim V+1}^{n}$ 使得 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^{n}$ 是 V 的基，又 $\dim V = n$，故必有 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^{\dim V} = (\boldsymbol{e}'_k)_{k=1}^{n}$. □

子空间的维数 设 U 是 V 的子空间，则

$$\dim U \leqslant \dim V ,$$

其中等号当且仅当 $U = V$ 时取得.

证明

将 U 的基看作 V 中线性无关的向量组，将 V 的基看作 V 中张成 V 的向量组，由**替换定理**即得该不等式.

现在考虑取等号的情形. 一方面，如果 $U = V$，则显然 $\dim U = \dim V$；另一方面，如果 $\dim U = \dim V$，设 B 是 U 的基，则由**基的维数准则**可知 $\operatorname{span} B = V$，故 $U = V$. □

有限维线性空间 | 维数公式

有限维线性空间 | 维数公式 中的设定

- 设 U , V_1 , $\cdots$, V_n 是 V 的子空间.

积空间的维数

$$\dim \prod_{k=1}^{n} V_n = \sum_{k=1}^{n} \dim V_n \ .$$

证明

对每个正整数 $k \leqslant n$, 设 $(\boldsymbol{v}_j^{(k)})_{j=1}^{\dim V_k}$ 是 V_k 的基, 则显然

$$\begin{gathered}\Big(\big(\boldsymbol{v}_1^{(1)}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}\big), \cdots\cdots, \big(\boldsymbol{v}_{\dim V_1}^{(1)}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}\big), \\ \big(\mathbf{0}, \boldsymbol{v}_1^{(2)}, \cdots, \mathbf{0}\big), \cdots\cdots, \big(\mathbf{0}, \boldsymbol{v}_{\dim V_2}^{(2)}, \cdots, \mathbf{0}\big), \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots, \\ \big(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \boldsymbol{v}_1^{(n)}\big), \cdots\cdots, \big(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \boldsymbol{v}_{\dim V_n}^{(n)}\big)\Big)\end{gathered}$$

是 $\prod_{k=1}^{n} V_n$ 的基. □

由此我们得到如下线性空间的同构关系:

$$\bigoplus_{k=1}^{n} V_n \cong \prod_{k=1}^{n} V_n \ .$$

商空间的维数 $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

证明

设 $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{m}$ 是 U 的基, 并**将其扩充**为 V 的基

$$B = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n) \ ,$$

下面我们将证明 $B' = (\boldsymbol{w}_1 + U, \cdots, \boldsymbol{w}_n + U)$ 是 V/U 的基, 从而完成证明.

先证 $\operatorname{span} B' = V/U$. 对任意 $\boldsymbol{v} + U \in V/U$, 存在 $\boldsymbol{v} \in V$ 使得

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{m} a_k \boldsymbol{u}_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \boldsymbol{w}_k \ ,$$

于是有

$$\boldsymbol{v}+U=\sum_{k=1}^{m}a_k\boldsymbol{u}_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\boldsymbol{w}_k+U=\sum_{k=1}^{n}b_k\left(\boldsymbol{w}_k+U\right) \ .$$

再证 B' 线性无关. 假设 $(c_k)_{k=1}^{n}\in\mathbf{F}^n$ 使得

$$\boldsymbol{v}=\sum_{k=1}^{n}c_k\left(\boldsymbol{w}_k+U\right)=\sum_{k=1}^{n}c_k\boldsymbol{w}_k+U \ ,$$

与此同时, 我们知道 $\operatorname{span}\left(\boldsymbol{u}_k\right)_{k=1}^{m}=U$ ，于是可以写出

$$\sum_{k=1}^{n}c_k\boldsymbol{w}_k=\sum_{k=1}^{m}d_k\boldsymbol{u}_k \ ,$$

由 B 线性无关可知所有的 c_k 和 d_k 均为 0 ，于是 B' 线性无关. □

子空间维数公式

$$\dim\left(V_1+V_2\right)=\dim V_1+\dim V_2-\dim\left(V_1\cap V_2\right) \ .$$

证明

设 $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n}$ 是 $V_1\cap V_2$ 的基, 进而可以**将其分别扩充**为 V_1 和 V_2 的基

$$B_1=\left(\boldsymbol{u}_1\,,\,\cdots\,,\,\boldsymbol{u}_n\,,\,\boldsymbol{v}_1\,,\,\cdots\,,\,\boldsymbol{v}_p\right)\quad\text{and}\quad B_2=\left(\boldsymbol{u}_1\,,\,\cdots\,,\,\boldsymbol{u}_n\,,\,\boldsymbol{w}_1\,,\,\cdots\,,\,\boldsymbol{w}_q\right) \ ,$$

于是有 $\dim\left(V_1\cap V_2\right)=n$ ，$\dim V_1=n+p$ ，$\dim V_2=n+q$. 下面我们将证明

$$B=\left(\boldsymbol{u}_1\,,\,\cdots\,,\,\boldsymbol{u}_n\,,\,\boldsymbol{v}_1\,,\,\cdots\,,\,\boldsymbol{v}_p\,,\,\boldsymbol{w}_1\,,\,\cdots\,,\,\boldsymbol{w}_q\right)$$

是 V_1+V_2 的基, 从而完成证明.

显然 $\operatorname{span}B=V_1+V_2$ ，于是只需证明 B 线性无关即可.

设存在 $(a_k)_{k=1}^{n}\in\mathbf{F}^n$ ，$(b_k)_{k=1}^{p}\in\mathbf{F}^p$ ，$(c_k)_{k=1}^{q}\in\mathbf{F}^q$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\boldsymbol{u}_k+\sum_{k=1}^{p}b_k\boldsymbol{v}_k+\sum_{k=1}^{q}c_k\boldsymbol{w}_k=\mathbf{0} \ ,$$

于是知

$$\sum_{k=1}^{q}c_k\boldsymbol{w}_k=-\sum_{k=1}^{n}a_k\boldsymbol{u}_k-\sum_{k=1}^{p}b_k\boldsymbol{v}_k\in V_1 \ ,$$

进一步得到

$$\sum_{k=1}^{q} c_k \boldsymbol{w}_k \in V_1 \cap V_2 \ ,$$

因而我们又可将其写作

$$\sum_{k=1}^{q} c_k \boldsymbol{w}_k = \sum_{k=1}^{n} d_k \boldsymbol{u}_k \ ,$$

由 B_2 线性无关知上述各 c_k 和 d_k 均为 0，再代入最初的设定有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{u}_k + \sum_{k=1}^{p} b_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \ ,$$

再由 B_1 线性无关知上述各 a_k 和 b_k 都等于 0 . 至此即完成了证明. □

和空间的维数

$$\dim \sum_{k=1}^{n} V_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \dim V_k \ ,$$

其中等号当且仅当 $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ 是直和时取得, 即

$$\dim \bigoplus_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} \dim V_k \ .$$

上述不等式的取等条件可以作为有限维子空间直和的一个 **判定准则** .

线性空间 线性映射 | 定义

线性映射 设 U 和 V 是线性空间, 映射 $T: U \to V$ 是线性映射, 当且仅当其满足条件

1. 可加性: 对任意 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ 都有 $T(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = T\boldsymbol{u}_1 + T\boldsymbol{u}_2$;

2. 齐次性: 对任意 $\lambda \in \mathbf{F}$ 和 $\boldsymbol{u} \in U$ 都有 $T(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda T\boldsymbol{u}$.

全体从 U 到 V 的线性映射构成的集合记为 $\mathcal{L}(U, V)$, 并且用 $\mathcal{L}(V)$ 来表示 $\mathcal{L}(V, V)$.

零映射 从 U 到 V 的零映射为 $\mathbf{0}: \boldsymbol{u} \mapsto \mathbf{0}_V$.

恒等映射 V 上的恒等映射为 $\boldsymbol{I}_V: \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}$.

在 $T(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda T\boldsymbol{u}$ 令 $\lambda = 0$ 即可得到如下结论:

零不变性 $T\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

线性扩张引理 设 $(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$ 是 n 维线性空间 U 的基, 则对任意 $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^n \in V^n$, 存在唯一的 $T \in \mathcal{L}(U, V)$ 使得 $T\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{v}_k$ 对一切正整数 $k \leqslant n$ 成立.

线性代数的主要研究对象即**有限维线性空间之间的线性映射**, 其中核心的原因是任何线性组合在线性映射的作用下都不变, 也即 $T\sum\boldsymbol{v} = \sum T\boldsymbol{v}$, 因此线性映射也可视为线性空间之间的同态映射.

作为两种特殊的线性映射, 从线性空间 V 到其自身和其所在域的映射将被赋予特别的名称, 即线性变换和线性泛函, 我们将在 **线性空间 线性变换** 和 **线性空间 线性泛函** 两章中详细讨论其性质.

同构 线性空间 U 和 V 同构并记作 $U \cong V$, 当且仅当存在同构映射 $T: U \to V$ 满足

1. 双射性: T 是双射.

2. 结构保持性: T 是线性映射.

同构空间的维数 设 U 和 V 是有限维空间, 则 $U \cong V$ 当且仅当 $\dim U = \dim V$.

线性空间 中的设定

- 对任意线性空间 U, V : 令 $\mathcal{L}(U, V)$ 表示全体从 U 到 V 的线性映射构成的集合.
- 对任意线性空间 V : 令 $\mathcal{L}(V)$ 表示 $\mathcal{L}(V, V)$.
- 不产生歧义时, 令 $\mathbf{0}$ 表示任何零映射.

线性空间 线性映射 | 线性映射空间

对于任意非空子集 S 和线性空间 V , 容易验证 V^S 是线性空间, 但我们一般考虑的是其中全体线性映射构成的子空间.

$\mathcal{L}(U,V)$ 是线性空间 $(\mathcal{L}(U,V), \mathbf{F}, +, \cdot)$ 是线性空间, 其中加法和数乘定义为

$$\forall\, S, T \in \mathcal{L}(U,V) \;:\; S+T : \boldsymbol{u} \mapsto S\boldsymbol{u} + T\boldsymbol{u}\,,$$
$$\forall\, \lambda \in \mathbf{F}\,,\, T \in \mathcal{L}(U,V) \;:\; \lambda \cdot T : \boldsymbol{u} \mapsto \lambda T\boldsymbol{u}\,.$$

证明

显然将 $\mathbf{0}$ 作为 $\mathcal{L}(U,V)$ 的加法幺元.

对任意 $S, T \in \mathcal{L}(U,V)$ 和 $\mu \in \mathbf{F}$, 我们有

$$\begin{aligned}
\forall\, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U \;:\; (S+T)(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2) &= S(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2) + T(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2) \\
&= S\boldsymbol{u}_1 + S\boldsymbol{u}_2 + T\boldsymbol{u}_1 + T\boldsymbol{u}_2 \\
&= S\boldsymbol{u}_1 + T\boldsymbol{u}_1 + S\boldsymbol{u}_2 + T\boldsymbol{u}_2 \\
&= (S+T)\boldsymbol{u}_1 + (S+T)\boldsymbol{u}_2\,, \\
\forall\, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U \;:\; (\mu T)(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2) &= \mu \cdot T(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2) \\
&= \mu \cdot (T\boldsymbol{u}_1 + T\boldsymbol{u}_2) \\
&= \mu \cdot T\boldsymbol{u}_1 + \mu \cdot T\boldsymbol{u}_2 \\
&= (\mu T)\boldsymbol{u}_1 + (\mu T)\boldsymbol{u}_2\,, \\
\forall\, \boldsymbol{u} \in U\,,\, \lambda \in \mathbf{F} \;:\; (S+T)(\lambda\boldsymbol{u}) &= S(\lambda\boldsymbol{u}) + T(\lambda\boldsymbol{u}) \\
&= \lambda S\boldsymbol{u} + \lambda T\boldsymbol{u} \\
&= \lambda \cdot (S\boldsymbol{u} + T\boldsymbol{u}) \\
&= \lambda \cdot (S+T)\boldsymbol{u}\,, \\
\forall\, \boldsymbol{u} \in U\,,\, \lambda \in \mathbf{F} \;:\; (\mu T)(\lambda\boldsymbol{u}) &= \mu \cdot T(\lambda\boldsymbol{u}) \\
&= \mu \cdot (\lambda \cdot T\boldsymbol{u}) \\
&= \lambda \cdot (\mu \cdot T\boldsymbol{u}) \\
&= \lambda \cdot (\mu T)\boldsymbol{u}\,,
\end{aligned}$$

于是 $S+T$ 和 μT 都是线性映射. 从而完成了证明. □

线性映射空间的维数

1. 若 $U=\{\mathbf{0}\}$ 或 $V=\{\mathbf{0}\}$, 则 $\dim\mathcal{L}(U,V)=0$;

2. 若 U 和 V 是有限维空间, 则 $\dim\mathcal{L}(U,V)=\dim U\dim V$;

3. 若 U 是非零有限维空间且 V 是无限维空间, 则 $\mathcal{L}(U,V)$ 是无限维空间;

$_{\text{AC}}$**4.** 若 V 是非零有限维空间且 U 是无限维空间, 则 $\mathcal{L}(U,V)$ 是无限维空间.

1 证明

当 $\dim U=0$ 时, $U=\{\mathbf{0}\}$, 由线性映射的**零不变性**知 $\mathbf{0}$ 是 $\mathcal{L}(U,V)$ 中唯一的元素.

当 $\dim V=0$ 时, $V=\{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{0}$ 亦是 $\mathcal{L}(U,V)$ 中唯一的元素.

因此无论 $\dim U=0$ 或 $\dim V=0$, 都有 $\dim\mathcal{L}(U,V)=0$ 成立. □

任取 U 的某个基 $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^n$, **线性扩张引理**为我们建立了 $V^{\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}}$ 与 $\mathcal{L}(U,V)$ 间的双射, 这表明任何线性映射本质上等同于 U 的基到 V 中向量组的映射, 因此我们可以选取 $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^n\in V^n$, 并通过形式

$$T\ :\ \sum_{k=1}^n a_k\boldsymbol{u}_k\mapsto\sum_{k=1}^n a_k\boldsymbol{v}_k$$

来定义任何线性映射 $T\in\mathcal{L}(U,V)$.

在 **有限维线性空间 矩阵表示 | <UnknownSection>** 中我们将进一步看到: 当线性空间的基被选定后, 任何线性映射 $T\in\mathcal{L}(U,V)$ 都可以用 $\dim V\times\dim U$ 型矩阵来唯一确定.

线性空间 线性映射 | 核 & 像

核 我们定义线性映射 T 的核为

$$\ker T := \{\boldsymbol{u} \in U \mid T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\} \ ,$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 是 V 的加法幺元.

核是线性空间 $\ker T$ 是 U 的子空间.

证明

首先, 由 $T\mathbf{0} = \mathbf{0}$ 可知 $\mathbf{0} \in \ker T$.

其次, 对任意 $\lambda, \mu \in \mathbf{F}$ 和 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \ker T$, 我们有

$$T(\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v}) = T(\lambda\boldsymbol{u}) + T(\mu\boldsymbol{v}) = \lambda T\boldsymbol{u} + \mu T\boldsymbol{v} = \lambda\mathbf{0} + \mu\mathbf{0} = \mathbf{0} \ ,$$

于是 $\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v} \in \ker T$. 从而完成了证明. □

对于 $T \in \mathcal{L}(U, V)$, 一般我们将 U 在 T 下的像 $T(U)$ 称为 T 的像并记为 $\operatorname{im} T$, 这是为了与**核**的概念形成对偶.

像是线性空间 $\operatorname{im} T$ 是 V 的子空间.

证明

首先, 由 $T\mathbf{0} = \mathbf{0}$ 可知 $\mathbf{0} \in \operatorname{im} T$.

其次, 假设 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{im} T$, 则存在 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ 使得 $T\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1$, $T\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2$, 我们有 $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in U$ 并且

$$T(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = T\boldsymbol{u}_1 + T\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \ ,$$

假设 $\lambda \in \mathbf{F}$, $\boldsymbol{v} \in \operatorname{im} T$, 则存在 $\boldsymbol{u} \in U$ 使得 $T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, 我们有 $\lambda\boldsymbol{u} \in U$ 并且

$$T(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda \cdot T\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{v} \ ,$$

于是 T 对加法和数乘运算封闭. □

类似地, 我们可以得到如下结论.

子空间的像&逆像是线性空间

1. 设 U' 是 U 的子空间, 则 $T(U')$ 是 V 的子空间;

2. 设 V' 是 V 的子空间, 则 $T^{-1}(V')$ 是 U 的子空间.

线性空间当且仅当线性映射 T 的像最大, 即当 $\operatorname{im} T = V$ 时, T 是满射. 类似地, 当且仅当 T 的核最小时 T 是单射.

单射的等价条件 T 是单射当且仅当 $\ker T = \{\mathbf{0}\}$.

$\Longrightarrow$ 证明

我们知道 $T\mathbf{0} = \mathbf{0}$, 因此由 T 是单射知 $\ker T = \{\mathbf{0}\}$. □

$\Longleftarrow$ 证明

假设存在 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ 使得 $T\boldsymbol{u}_1 = T\boldsymbol{u}_2$, 则

$$T(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) = T\boldsymbol{u}_1 - T\boldsymbol{u}_2 = 0 ,$$

另一方面, 我们有 $\ker T = \{0\}$, 于是 $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = \mathbf{0}$, 从而 $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$, 即 T 是单射. □

线性空间 线性映射 | 复合

线性空间 线性映射 | 复合 中的设定

- 设 $S \in \mathcal{L}(V, W)$.

接下来我们将证明, 线性映射的复合也是线性映射, 并且其具有许多良好的代数性质, 这为我们后续对线性变换多项式的研究设下基础.

复合线性映射 $S \circ T \in \mathcal{L}(U, W)$.

证明

$$\begin{aligned} \forall\, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U \;:\; (S \circ T)(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) &= S(T\boldsymbol{u}_1 + T\boldsymbol{u}_2) \\ &= S(T\boldsymbol{u}_1) + S(T\boldsymbol{u}_2) \\ &= (S \circ T)\boldsymbol{u}_1 + (S \circ T)\boldsymbol{u}_2 \,, \end{aligned}$$

$$\forall\, \boldsymbol{u} \in U \,,\; \lambda \in \mathbf{F} \;:\; (S \circ T)(\lambda \boldsymbol{u}) = S(\lambda T\boldsymbol{u}) = \lambda S(T\boldsymbol{u}) = \lambda (S \circ T)\boldsymbol{u} \,. \qquad \square$$

线性映射复合的性质

1. 复合幺元: $T \circ \boldsymbol{I}_U = \boldsymbol{I}_V \circ T = T$.

2. 复合结合律: 设 U_0, U_1, U_2, U_3 是线性空间, 则

$$(T_3 \circ T_2) \circ T_1 = T_3 \circ (T_2 \circ T_1)$$

对一切 $T_1 \in \mathcal{L}(U_0, U_1)$, $T_2 \in \mathcal{L}(U_1, U_2)$ 和 $T_3 \in \mathcal{L}(U_2, U_3)$ 成立.

3. 左分配律:

$$S \circ (T_1 + T_2) = S \circ T_1 + S \circ T_2$$

对一切 $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(U, V)$ 成立.

4. 右分配律:

$$(S_1 + S_2) \circ T = S_1 \circ T + S_2 \circ T$$

对一切 $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ 成立.

线性空间 线性映射 | 逆

逆映射 称 $S \in \mathcal{L}(V, U)$ 是 T 的逆并记作 T^{-1} 当且仅当 $ST = \boldsymbol{I}$ 且 $TS = \boldsymbol{I}$.

逆映射的唯一性 任何线性映射至多有一个逆映射.

证明

假设 $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(V, U)$ 都是 T 的逆映射, 则

$$S_1 = S_1\boldsymbol{I} = S_1(TS_2) = (S_1T)S_2 = \boldsymbol{I}S_2 = S_2 . \qquad \square$$

T 可逆 $\Longleftrightarrow$ T 是双射 T 可逆当且仅当 T 是双射.

$\Longrightarrow$ 证明

假设有 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ 满足 $T\boldsymbol{u}_1 = T\boldsymbol{u}_2$, 则 $\boldsymbol{u}_1 = T^{-1}T\boldsymbol{u}_1 = T^{-1}T\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2$, 于是 T 是单射; 另一方面, 对任何 $\boldsymbol{v} \in V$ 有 $\boldsymbol{v} = TT^{-1}\boldsymbol{v}$, 这表明 T 是满射. 从而 T 是双射. $\square$

$\Longleftarrow$ 证明

由 T 是双射知存在 $T^{-1} \in U^V$ 使得 $T^{-1}T = \boldsymbol{I}$ 且 $TT^{-1} = \boldsymbol{I}$. 现在我们证明 T^{-1} 是线性映射, 对任意 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$, 我们有

$$\begin{aligned} T^{-1}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) &= T^{-1}\left(TT^{-1}\boldsymbol{v}_1 + TT^{-1}\boldsymbol{v}_2\right) \\ &= T^{-1}T\left(T^{-1}\boldsymbol{v}_1 + T^{-1}\boldsymbol{v}_2\right) \\ &= T^{-1}\boldsymbol{v}_1 + T^{-1}\boldsymbol{v}_2 , \end{aligned}$$

对任意 $\lambda \in \mathbf{F}$ 和 $\boldsymbol{v} \in V$, 我们有

$$T^{-1}(\lambda\boldsymbol{v}) = T^{-1}\left(\lambda \cdot TT^{-1}\boldsymbol{v}\right) = T^{-1}T\left(\lambda \cdot T^{-1}\boldsymbol{v}\right) = \lambda \cdot T^{-1}\boldsymbol{v} ,$$

这就证明了 T 可逆. $\square$

逆映射的性质 设 $a \in \mathbf{F}$ 并且 $S \in \mathcal{L}(V, W)$ 和 $T \in \mathcal{L}(U, V)$ 可逆, 则下列各性质成立:

- 恒等逆: $\boldsymbol{I}^{-1} = \boldsymbol{I}$.
- 对合律: $\left(T^{-1}\right)^{-1} = T$.
- 数乘分配律: $(aT)^{-1} = a^{-1}T^{-1}$.
- 反序分配律: $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

有限维线性空间 | 秩—零化度定理

现在我们将要给出**有限维线性空间**中考察线性映射性质的重要工具.

秩—零化度定理 设 $T \in \mathcal{L}(U, V)$，则

$$\dim\ker T + \dim\operatorname{im} T = \dim U\ .$$

证明 I

设 $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^m$ 是 $\ker T$ 的基, 并**将其扩充**为 U 的基

$$B = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n)\ ,$$

下面我们将证明 $B' = (T\boldsymbol{w}_1, \cdots, T\boldsymbol{w}_n)$ 是 $\operatorname{im} T$ 的基, 从而完成证明.

先证 $\operatorname{span} B' = \operatorname{im} T$. 对任意 $\boldsymbol{v} \in \operatorname{im} T$, 存在 $\boldsymbol{u} \in U$ 使得 $T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, 又由 B 是 U 的基知存在 $(a_k)_{k=1}^m \in \mathbf{F}^m$ 和 $(b_k)_{k=1}^n \in \mathbf{F}^n$ 使得

$$\boldsymbol{v} = T\boldsymbol{u} = T\left(\sum_{k=1}^m a_k\boldsymbol{u}_k + \sum_{k=1}^n b_k\boldsymbol{w}_k\right) = \sum_{k=1}^m a_kT\boldsymbol{u}_k + \sum_{k=1}^n b_kT\boldsymbol{w}_k = \sum_{k=1}^n b_kT\boldsymbol{w}_k\ .$$

再证 B' 线性无关. 假设 $(c_k)_{k=1}^n \in \mathbf{F}^n$ 使得

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^n c_kT\boldsymbol{w}_k = T\left(\sum_{k=1}^n c_k\boldsymbol{w}_k\right)\ ,$$

与此同时, 我们知道 $\operatorname{span}(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^m = \ker T$, 于是可以写出

$$\sum_{k=1}^n c_k\boldsymbol{w}_k = \sum_{k=1}^m d_k\boldsymbol{u}_k\ ,$$

由 B 线性无关可知所有的 c_k 和 d_k 均为 0 , 于是 B' 线性无关. □

证明 II

考虑映射 $\widetilde{T} : U/\ker T \to \operatorname{im} T$, $\boldsymbol{u} + \ker T \mapsto T\boldsymbol{u}$, 这是良定义的, 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 + \ker T = \boldsymbol{u}_2 + \ker T &\implies \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \in \ker T\\ &\implies T(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) = \mathbf{0}\\ &\implies T\boldsymbol{u}_1 = T\boldsymbol{u}_2\ ,\end{aligned}$$

T 是线性映射保证了 $\widetilde{T}$ 也是线性映射.

一方面, 对任意 $\boldsymbol{v} \in \operatorname{im} T$, 若 $\widetilde{T}(\boldsymbol{u}+\ker T)=\mathbf{0}$, 则 $T\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$, 于是有 $\boldsymbol{u} \in \ker T$, 即 $\boldsymbol{u}+\ker T=\mathbf{0}+\ker T$, 这表明 $\widetilde{T}$ 是单射.

另一方面, 对任意 $\boldsymbol{v} \in \operatorname{im} T$, 存在 $\boldsymbol{u} \in U$ 使得 $T\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$, 进而

$$\widetilde{T}(\boldsymbol{u}+\ker T)=T\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v} ,$$

这表明 $\widetilde{T}$ 是满射.

至此, 我们证明了 $U/\ker T \cong \operatorname{im} T$, 于是 $\dim\ker T+\dim\operatorname{im} T=\dim U$. □

该定理表明, 定义域的一部分在线性映射作用下形成核, 剩下的部分则形成像.

秩—零化度定理的推论　设 $T \in \mathcal{L}(U, V)$, 则

1. 若 T 是单射, 则 $\dim U \leqslant \dim V$;

2. 若 T 是满射, 则 $\dim U \geqslant \dim V$;

3. 若 $\dim U=\dim V$, 则 T 是单射当且仅当 T 是满射.

秩—零化度定理的逆定理　无限维空间上不存在核和像都是有限维空间的线性映射.

当定义域和陪域的维数相同时, 我们可以对逆映射的判定准则进行如下优化.

逆映射的判定准则　设 $S \in \mathcal{L}(V, U)$, 并且 $\dim U=\dim V$, 若 $ST=\boldsymbol{I}$, 则 $S=T^{-1}$.

证明

假设存在 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ 使得 $T\boldsymbol{u}_1=T\boldsymbol{u}_2$, 则

$$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{I}\boldsymbol{u}_1=ST\boldsymbol{u}_1=ST\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{I}\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}_2 ,$$

从而 T 是单射, 由**秩—零化度定理的推论**进一步知 T 是双射, 即 T 可逆, 于是

$$S=S\boldsymbol{I}=STT^{-1}=\boldsymbol{I}T^{-1}=T^{-1} ,$$

因此 $TS=\boldsymbol{I}$, 这就证明了 $S=T^{-1}$. □

线性空间 多重线性型 | 定义

多重线性型 映射 $f: V^m \to \mathbf{F}$ 是线性空间 V 上的 m 重线性型, 当且仅当其满足:

- 多重可加性:

$$f\left(\cdots, \underset{\text{第 } p \text{ 个}}{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}, \cdots\right) = f\left(\cdots, \underset{\text{第 } p \text{ 个}}{\boldsymbol{u}}, \cdots\right) + f\left(\cdots, \underset{\text{第 } p \text{ 个}}{\boldsymbol{v}}, \cdots\right)$$

对一切 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ 和正整数 $p \leqslant m$ 成立.

- 多重齐次性:

$$f\left(\cdots, \underset{\text{第 } p \text{ 个}}{\lambda\boldsymbol{v}}, \cdots\right) = \lambda f\left(\cdots, \underset{\text{第 } p \text{ 个}}{\boldsymbol{v}}, \cdots\right)$$

对一切 $\lambda \in \mathbf{F}$, $\boldsymbol{v} \in V$ 和正整数 $p \leqslant m$ 成立.

全体 V 上的 m 重线性型构成的集合记为 $\mathcal{L}^m(V;\mathbf{F})$.

$\mathcal{L}^m(V;\mathbf{F})$ 是线性空间 $(\mathcal{L}^m(V;\mathbf{F}), \mathbf{F}, +, \cdot)$ 是 n^m 维线性空间, 其中加法和数乘定义为

$$\begin{gathered}\forall\, f, g \in \mathcal{L}^m(V;\mathbf{F}) \;:\; f+g : (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m) \mapsto f(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m) + g(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)\,, \\ \forall\, \lambda \in \mathbf{F}\,,\; f \in \mathcal{L}^m(V;\mathbf{F}) \;:\; \lambda \cdot f : (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m) \mapsto \lambda f(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)\,.\end{gathered}$$

证明

显然零映射 $\mathbf{0} : (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m) \mapsto 0$ 作为加法右幺元. 1 作为乘法单位. 另外, 对于任意 $f \in \mathcal{L}^m(V;\mathbf{F})$, 其加法右逆元定义为 $-f : (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m) \mapsto -f(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)$. 域 $\mathbf{F}$ 的结合律和分配律保证了 $\mathcal{L}^m(V;\mathbf{F})$ 作为线性空间的两则结合律和分配律成立.

线性空间 多重线性型 | 对称型

对称多重线性型　m 重线性型 ρ 是对称型, 当且仅当其满足:

- 对称性:

$$\rho\left(\cdots,\underset{\text{第 }p\text{ 个}}{\boldsymbol{u}},\cdots,\underset{\text{第 }q\text{ 个}}{\boldsymbol{v}},\cdots\right)=\rho\left(\cdots,\underset{\text{第 }p\text{ 个}}{\boldsymbol{v}},\cdots,\underset{\text{第 }q\text{ 个}}{\boldsymbol{u}},\cdots\right)$$

对一切 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$ 和正整数 $p\leqslant q\leqslant m$ 成立.

全体 V 上的对称 m 重线性型构成的集合记为 $\mathcal{L}^m_{\mathrm{sym}}(V;\mathbf{F})$.

对称多重线性型构成线性空间

1. $n=0$ 时: $\mathcal{L}^m_{\mathrm{sym}}(V;\mathbf{F})=\{\mathbf{0}\}$.

2. $n\neq 0$ 时: $\left(\mathcal{L}^m_{\mathrm{sym}}(V;\mathbf{F}),\mathbf{F},+,\cdot\right)$ 是 $\mathcal{L}^m(V;\mathbf{F})$ 的 C^m_{n+m-1} 维子空间.

线性空间 多重线性型 | 交错型

交错多重线性型　m 重线性型 α 是交错型，当且仅当其满足：

- 交错性：

$$\alpha\Big(\cdots,\underset{\text{第 }p\text{ 个}}{\boldsymbol{v}},\cdots,\underset{\text{第 }q\text{ 个}}{\boldsymbol{v}},\cdots\Big)=0$$

对一切 $\boldsymbol{v}\in V$ 和正整数 $p\leqslant q\leqslant m$ 成立.

全体 V 上的交错 m 重线性型构成的集合记为 $\mathcal{L}^m_{\text{alt}}(V;\mathbf{F})$.

交错多重线性型的剪切不变性　设 α 是交错 m 重线性型，则

$$\alpha\Big(\cdots,\underset{\text{第 }p\text{ 个}}{\boldsymbol{u}},\cdots,\underset{\text{第 }q\text{ 个}}{\boldsymbol{v}},\cdots\Big)=\alpha\Big(\cdots,\underset{\text{第 }p\text{ 个}}{\boldsymbol{u}},\cdots,\underset{\text{第 }q\text{ 个}}{\boldsymbol{v}+a\boldsymbol{u}},\cdots\Big)$$

对一切 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, $a\in\mathbf{F}$ 和正整数 $p\leqslant q\leqslant m$ 成立.

交错多重线性型的反对称性　设 α 是交错 m 重线性型，则

$$\alpha\Big(\cdots,\underset{\text{第 }p\text{ 个}}{\boldsymbol{u}},\cdots,\underset{\text{第 }q\text{ 个}}{\boldsymbol{v}},\cdots\Big)=-\alpha\Big(\cdots,\underset{\text{第 }p\text{ 个}}{\boldsymbol{v}},\cdots,\underset{\text{第 }q\text{ 个}}{\boldsymbol{u}},\cdots\Big)$$

对一切 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$ 和正整数 $p\leqslant q\leqslant m$ 成立.

证明

$$\begin{aligned}&\alpha\Big(\cdots,\underset{\text{第 }p\text{ 个}}{\boldsymbol{u}},\cdots,\underset{\text{第 }q\text{ 个}}{\boldsymbol{v}},\cdots\Big)+\alpha\Big(\cdots,\underset{\text{第 }p\text{ 个}}{\boldsymbol{v}},\cdots,\underset{\text{第 }q\text{ 个}}{\boldsymbol{u}},\cdots\Big)\\=&\,\alpha\Big(\cdots,\underset{\text{第 }p\text{ 个}}{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}},\cdots,\underset{\text{第 }q\text{ 个}}{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}},\cdots\Big)\\=&\,0\,.\end{aligned}$$

□

交错多重线性型的重排列　设 α 是交错多重线性型，σ 是 $\{1,\cdots,m\}$ 上的置换，则

$$\alpha\big(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)},\cdots,\boldsymbol{v}_{\sigma(m)}\big)=\operatorname{sgn}\sigma\cdot\alpha(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m)\ .$$

交错多重线性型下的线性相关组　设 α 是交错多重线性型，若 $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^m$ 线性相关，则

$$\alpha(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m)=0\ .$$

证明

由**线性相关性引理**知存在 $\boldsymbol{v}_p$ 和 $(a_1, \cdots, a_{p-1}, a_{p+1}, \cdots, a_m) \in \mathbf{F}^{m-1}$ 使得

$$\boldsymbol{v}_p = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant m \\ k \neq p}} a_k \boldsymbol{v}_k \ ,$$

则

$$\alpha(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m) = \alpha\left(\cdots, \underset{\text{第 } p \text{ 个}}{\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant m \\ k \neq p}} a_k \boldsymbol{v}_k}, \cdots\right) = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant m \\ k \neq p}} a_k \alpha\left(\cdots, \underset{\text{第 } p \text{ 个}}{\boldsymbol{v}_k}, \cdots\right) = 0 \ . \quad \square$$

交错多重线性型构成线性空间

1. $m > n$ 时: $\mathcal{L}_{\text{alt}}^m(V; \mathbf{F}) = \{\mathbf{0}\}$.

2. $m \leqslant n$ 时: $(\mathcal{L}_{\text{alt}}^m(V; \mathbf{F}), \mathbf{F}, +, \cdot)$ 是 $\mathcal{L}^m(V; \mathbf{F})$ 的 C_n^m 维子空间.

线性空间 双线性型 | 对称交错分解

双线性型的对称交错分解

$$\mathcal{L}^2(V;\mathbf{F}) = \mathcal{L}^2_{\text{sym}}(V;\mathbf{F}) \oplus \mathcal{L}^2_{\text{alt}}(V;\mathbf{F}) \ .$$

证明

对任意 $\beta \in \mathcal{L}^2(V;\mathbf{F})$，定义 $\rho : V^2 \to \mathbf{F}$ 和 $\alpha : V^2 \to \mathbf{F}$ 为

$$\rho(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{\beta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})}{2} \quad \text{and} \quad \alpha(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{\beta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - \beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})}{2} \ ,$$

显然 $\rho \in \mathcal{L}^2_{\text{sym}}(V;\mathbf{F})$，$\alpha \in \mathcal{L}^2_{\text{alt}}(V;\mathbf{F})$，于是 $\mathcal{L}^2(V;\mathbf{F}) = \mathcal{L}^2_{\text{sym}}(V;\mathbf{F}) + \mathcal{L}^2_{\text{alt}}(V;\mathbf{F})$，又因为

$$\dim \mathcal{L}^2(V;\mathbf{F}) = n^2 = \mathrm{C}^2_{n+1} + \mathrm{C}^2_n = \dim \mathcal{L}^2_{\text{sym}}(V;\mathbf{F}) + \dim \mathcal{L}^2_{\text{alt}}(V;\mathbf{F}) \ ,$$

因此 $\mathcal{L}^2(V;\mathbf{F}) = \mathcal{L}^2_{\text{sym}}(V;\mathbf{F}) \oplus \mathcal{L}^2_{\text{alt}}(V;\mathbf{F})$. $\square$

域 矩阵 | 定义

域 矩阵 中的设定

- 设 m, n 是正整数, $\lambda, \mu \in R$.

矩阵 我们称映射 $\boldsymbol{A}:\{1,\cdots,m\}\times\{1,\cdots,n\}\to R$ 为 R 上的 $m\times n$ 型矩阵, 并记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}(1,1) & \cdots & \boldsymbol{A}(1,n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}(m,1) & \cdots & \boldsymbol{A}(m,n) \end{pmatrix}.$$

上述每个 $A_{i,j}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 第 i 行第 j 列的元素. m 和 n 分别称为 $\boldsymbol{A}$ 的行数和列数. 当 $\boldsymbol{A}$ 的行数和列数均为 n 时, 我们称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵. 另外, 我们称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 同型, 当且仅当其均为 $m\times n$ 型矩阵.

一般地, 所有元素均为 0 的矩阵称为零矩阵并记作 $\boldsymbol{O}$, 对角上的元素均为 1 而其余元素均为 0 的矩阵称为单位阵, 例如

$$\boldsymbol{I}_1:=\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}\quad,\quad \boldsymbol{I}_2:=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad,\quad\cdots\quad,\quad \boldsymbol{I}_n:=\underbrace{\begin{pmatrix}1&\cdots&0&\cdots&0\\ \vdots&1&&&\vdots\\ 0&&\ddots&&0\\ \vdots&&&1&\vdots\\ 0&\cdots&0&\cdots&1\end{pmatrix}}_{n\times n}.$$

矩阵的行与列 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行 $\boldsymbol{A}_{i:}$ 和第 j 列 $\boldsymbol{A}_{:j}$ 定义为 $1\times n$ 型矩阵和 $m\times 1$ 型矩阵

$$\boldsymbol{A}_{i:}\ :\ (1,j)\mapsto\boldsymbol{A}(i,j)\quad\text{and}\quad \boldsymbol{A}_{:j}\ :\ (i,1)\mapsto\boldsymbol{A}(i,j)\ ,$$

即

$$\begin{pmatrix}A_{1,1}&\cdots&A_{1,n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{m,1}&\cdots&A_{m,n}\end{pmatrix}_{i:}:=\begin{pmatrix}A_{i,1}&\cdots&A_{i,n}\end{pmatrix}\ \text{和}\ \begin{pmatrix}A_{1,1}&\cdots&A_{1,n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{m,1}&\cdots&A_{m,n}\end{pmatrix}_{:j}:=\begin{pmatrix}A_{1,j}\\ \vdots\\ A_{m,j}\end{pmatrix}.$$

矩阵加法 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是 $m \times n$ 型矩阵, 我们定义 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为 $m \times n$ 型矩阵

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} : (i, j) \mapsto \boldsymbol{A}(i, j)+B(i, j) ,$$

即

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m,1} & \cdots & B_{m,n} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{1,1}+B_{1,1} & \cdots & A_{1,n}+B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1}+B_{m,1} & \cdots & A_{m,n}+B_{m,n} \end{pmatrix} .$$

矩阵数乘 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 型矩阵, 我们定义 $\lambda \boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 型矩阵

$$\lambda \boldsymbol{A} : (i, j) \mapsto \lambda \boldsymbol{A}(i, j) ,$$

即

$$\lambda \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} & \cdots & \lambda A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{m,1} & \cdots & \lambda A_{m,n} \end{pmatrix} .$$

我们定义 $-\boldsymbol{A} := (-1)\boldsymbol{A}$, 并且可由此定义矩阵减法为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} := \boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$, 即

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m,1} & \cdots & B_{m,n} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_{1,1}-B_{1,1} & \cdots & A_{1,n}-B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1}-B_{m,1} & \cdots & A_{m,n}-B_{m,n} \end{pmatrix} .$$

注意只有同型矩阵才可进行加法/减法和数乘运算, 因为不同型矩阵的定义域不同.

矩阵加法 & 数乘运算律 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 是 R 上的 $m \times n$ 型矩阵, 令 $\boldsymbol{O}$ 表示零矩阵, 则对于矩阵加法 & 数乘有如下性质成立:

1. 加法幺元: $\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$.

2. 数乘幺元: $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

3. 数乘零元: $0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

4. 加法逆元: $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

5. 加法交换律: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

6. 加法结合律: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

7. 左分配律: $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

8. 右分配律: $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$.

9. 数乘结合律: $\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$.

转置矩阵 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 型矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的转置定义为 $n\times m$ 型矩阵

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ :\ (i,j)\mapsto\boldsymbol{A}(j,i)\ ,$$

即

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} := \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,m} \end{pmatrix} .$$

转置矩阵的性质 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 R 上的 $m\times n$ 型矩阵, 则对于转置矩阵有如下性质成立:

1. 对合性: $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

2. 可加性: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

3. 齐次性: $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

对称 & 反对称矩阵 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $\boldsymbol{A}$ 是

- 对称矩阵, 当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.
- 反对称矩阵, 当且仅当 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

反对称矩阵的主对角线 反对称矩阵的主对角线元素均为 0 .

域 矩阵 | 积

域 矩阵 | 积 中的设定

- 设 m, n, l 是正整数.

矩阵乘法 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times l$ 型矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $l \times n$ 型矩阵, 我们定义 $\boldsymbol{AB}$ 为 $m \times n$ 型矩阵

$$\boldsymbol{AB} : (i, j) \mapsto \sum_{k=1}^{l} \boldsymbol{A}(i, k) \boldsymbol{B}(k, j) ,$$

即

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{l,1} & \cdots & B_{l,n} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{l} A_{1,k} B_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^{l} A_{1,k} B_{k,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{l} A_{m,k} B_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^{l} A_{m,k} B_{k,n} \end{pmatrix} .$$

上述采用的 **矩阵乘法的定义** 即矩阵乘法的元素观点, 我们也可以将矩阵乘法考虑为 **线性映射** 对向量的作用, 这就导出了下面所示的两种观点.

矩阵乘法的列观点 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times l$ 型矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $l \times n$ 型矩阵, 则对任意正整数 $j \leqslant n$ 有

$$(\boldsymbol{AB})_{:j} = \sum_{k=1}^{l} B_{k,j} \boldsymbol{A}_{:k} .$$

矩阵乘法的行观点 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times l$ 型矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $l \times n$ 型矩阵, 则对任意正整数 $i \leqslant m$ 有

$$(\boldsymbol{AB})_{i:} = \sum_{k=1}^{l} A_{i,k} \boldsymbol{B}_{k:} .$$

矩阵乘法运算律 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 型矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times l$ 型矩阵, $\boldsymbol{C}$ 是 $l \times p$ 型矩阵, 则对于矩阵乘法有如下性质成立:

1. 幺元: $\boldsymbol{I}_m \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A}$.

2. 零元: $\boldsymbol{O}_{l \times m} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}_{l \times n}$, $\boldsymbol{A} \boldsymbol{O}_{n \times p} = \boldsymbol{O}_{m \times p}$.

3. 结合律: $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

4. 左分配律: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$.

5. 右分配律: $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$.

6. 数乘结合律: $\lambda(\boldsymbol{AB}) = (\lambda \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\lambda \boldsymbol{B})$.

需要注意, 矩阵乘法的幺元和零元都不是唯一的. 另外, 乘法交换律一般不成立.

对于方阵, 我们可以利用矩阵乘法进一步定义方阵的幂.

矩阵幂 设 $n \in \mathbf{N}$ 并且 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶方阵, 我们定义 $\boldsymbol{A}^n$ 为 m 阶方阵

$$\boldsymbol{A}^n := \underbrace{\boldsymbol{A} \cdots \boldsymbol{A}}_{n\text{个}\boldsymbol{A}} .$$

另外, 我们定义 $\boldsymbol{A}^0$ 为 m 阶单位阵.

矩阵幂的性质 设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵, 则对于矩阵幂有如下性质成立:

1. $\boldsymbol{A}^m \boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}^{m+n}$.

2. $(\boldsymbol{A}^m)^n = \boldsymbol{A}^{mn}$.

矩阵积的转置 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times l$ 型矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $l \times n$ 型矩阵, 则 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

证明

注意 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 均为 $n \times m$ 型矩阵, 对任意正整数 $i \leqslant n$ 和 $j \leqslant m$ 有

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}(i,j) = (\boldsymbol{AB})(j,i) = \sum_{k=1}^{l} \boldsymbol{A}(j,k)\boldsymbol{B}(k,i) ,$$

$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})(i,j) = \sum_{k=1}^{l} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(i,k)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k,j) = \sum_{k=1}^{l} \boldsymbol{B}(k,i)\boldsymbol{A}(j,k) ,$$

这就证明了 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. □

域 行列式 | 定义

域 行列式 | 定义 中的设定

- 令 S_n 表示 $\{1, \cdots, n\}$ 上全体置换构成的集合.
- 设 n 是正整数, $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵.

行列式 $\boldsymbol{A}$ 的行列式定义为

$$\det \boldsymbol{A} := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}(k, \sigma(k)) ,$$

或者记作

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)} .$$

对于交错型, 我们知道 $\dim \mathcal{L}_{\text{alt}}^{\dim V}(V; \mathbf{F}) = 1$, 下面的定理进一步刻画了 V 上的任何交错 $\dim V$ 重线性型, 注意等式右侧与各 $\boldsymbol{v}_k$ 相关的部分只有行列式, 这表明任何 α 都可以通过行列式乘相应的系数得到.

交错 $\dim V$ 重线性型的刻画 设 V 是以 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^n$ 为基的线性空间, 则

$$\forall\ (\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^n \in V^n \ :\ \alpha(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & \cdots & a_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{(n)} & \cdots & a_n^{(n)} \end{vmatrix} \cdot \alpha(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) .$$

其中 $(a_k^{(m)})_{k=1}^n$ 表示 $\boldsymbol{v}_m$ 在 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^n$ 下的坐标.

证明

$$\begin{aligned} \alpha(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) &= \alpha\left(\sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1}^{(1)} \boldsymbol{e}_{k_1}, \cdots, \sum_{k_n=1}^{n} a_{k_n}^{(n)} \boldsymbol{e}_{k_n}\right) \\ &= \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} \left(\prod_{m=1}^{n} a_{k_m}^{(m)}\right) \alpha(\boldsymbol{e}_{k_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}) , \end{aligned}$$

我们可以要求上述 k_m 各不相同, 否则就有 $\alpha(\boldsymbol{e}_{k_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}) = 0$, 因此我们可以进一步将 $k_1, \cdots, k_n$ 视作 $\{1, \cdots, n\}$ 上的某个置换 σ , 于是

$$
\begin{aligned}
\alpha(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{m=1}^{n} a_{\sigma(m)}^{(m)} \right) \alpha\left(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}\right) \\
&= \alpha(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \left(\prod_{m=1}^{n} a_{\sigma(m)}^{(m)} \right) \\
&= \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & \cdots & a_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{(n)} & \cdots & a_n^{(n)} \end{vmatrix} \cdot \alpha(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \ . \qquad \square
\end{aligned}
$$

域 行列式 | 基本性质

行列式的规范性 $\det \boldsymbol{I} = 1$.

行列式的交错多重线性

1. 多重可加性:

$$\begin{vmatrix} & \vdots & \\ a_1+b_1 & \cdots & a_n+b_n \\ & \vdots & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & \vdots & \\ a_1 & \cdots & a_n \\ & \vdots & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & \vdots & \\ b_1 & \cdots & b_n \\ & \vdots & \end{vmatrix} ,$$

$$\begin{vmatrix} & a_1+b_1 & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ & a_n+b_n & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & a_1 & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ & a_n & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & b_1 & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ & b_n & \end{vmatrix} .$$

2. 多重齐次性:

$$\begin{vmatrix} & \vdots & \\ ka_1 & \cdots & ka_n \\ & \vdots & \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} & \vdots & \\ a_1 & \cdots & a_n \\ & \vdots & \end{vmatrix} ,$$

$$\begin{vmatrix} & ka_1 & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ & ka_n & \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} & a_1 & \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ & a_n & \end{vmatrix} .$$

3. 交错性:

$$\begin{vmatrix} & \vdots & \\ a_1 & \cdots & a_n \\ & \vdots & \\ a_1 & \cdots & a_n \\ & \vdots & \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\begin{vmatrix} & a_1 & & a_1 & \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ & a_n & & a_n & \end{vmatrix} = 0 .$$

1 证明

$$
\begin{vmatrix}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\
 & \vdots & \\
a_{m-1,1} & \cdots & a_{m-1,n} \\
a_1+b_1 & \cdots & a_n+b_n \\
a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,n} \\
 & \vdots & \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
= \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}\sigma \left(a_{\sigma(m)} + b_{\sigma(m)} \right) \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq m}} a_{k,\sigma(k)} \right)
$$

$$
= \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}\sigma\, a_{\sigma(m)} \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq m}} a_{k,\sigma(k)} \right) + \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}\sigma\, b_{\sigma(m)} \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq m}} a_{k,\sigma(k)} \right)
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\
 & \vdots & \\
a_{m-1,1} & \cdots & a_{m-1,n} \\
a_1 & \cdots & a_n \\
a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,n} \\
 & \vdots & \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\
 & \vdots & \\
a_{m-1,1} & \cdots & a_{m-1,n} \\
b_1 & \cdots & b_n \\
a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,n} \\
 & \vdots & \\
a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix},
$$

另一个等式可由完全相似的方式证出. □

2 证明

$$
\begin{vmatrix}
a_{1,1} & & a_{1,m-1} & ka_1 & a_{1,m+1} & & a_{1,n} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n,1} & & a_{n,m-1} & ka_n & a_{n,m+1} & & a_{n,n}
\end{vmatrix}
= \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}\sigma\, k a_{\sigma(m)} \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq m}} a_{k,\sigma(k)} \right)
$$

$$
= k \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}\sigma\, a_{\sigma(m)} \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq m}} a_{k,\sigma(k)} \right)
$$

$$
= k \begin{vmatrix}
a_{1,1} & & a_{1,m-1} & a_1 & a_{1,m+1} & & a_{1,n} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n,1} & & a_{n,m-1} & a_n & a_{n,m+1} & & a_{n,n}
\end{vmatrix},
$$

另一个等式可由完全相似的方式证出. □

3 证明

对于任意给定的正整数 $p \leqslant q \leqslant n$, 我们定义关于 p 和 q 的对换映射 $\mathcal{A} : S_n \to S_n$ 为

$$(\mathcal{A}\sigma)(k) := \begin{cases} \sigma(q) & k = p \\ \sigma(p) & k = q \\ \sigma(k) & k \neq p \text{ 且 } k \neq q \end{cases} ,$$

显然 $\mathcal{A}$ 是双射. 若 $\boldsymbol{A}(p, k) = \boldsymbol{A}(q, k)$ 对一切正整数 $k \leqslant n$ 成立, 则

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}(k, (\mathcal{A}\sigma)(k)) &= \boldsymbol{A}(p, (\mathcal{A}\sigma)(p)) \boldsymbol{A}(q, (\mathcal{A}\sigma)(q)) \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq p \text{且} k \neq q}} \boldsymbol{A}(k, (\mathcal{A}\sigma)(k)) \\ &= \boldsymbol{A}(p, \sigma(q)) \boldsymbol{A}(q, \sigma(p)) \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq p \text{且} k \neq q}} \boldsymbol{A}(k, \sigma(k)) \\ &= \boldsymbol{A}(q, \sigma(q)) \boldsymbol{A}(p, \sigma(p)) \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq p \text{且} k \neq q}} \boldsymbol{A}(k, \sigma(k)) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}(k, \sigma(k)) , \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}(k, \sigma(k)) + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\mathcal{A}\sigma) \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}(k, (\mathcal{A}\sigma)(k)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}(k, \sigma(k)) + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\mathcal{A}\sigma) \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}(k, \sigma(k)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma + \operatorname{sgn}(\mathcal{A}\sigma)) \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}(k, \sigma(k)) \\ &= 0 , \end{aligned}$$

另一个等式可由完全相似的方式证出. □

上述性质表明行列式作为映射

$$\det_{\text{column}} : (\mathbf{F}^n)^n \to \mathbf{F} , \ \left((a_k^{(1)})_{k=1}^n , \cdots , (a_k^{(n)})_{k=1}^n \right) \mapsto \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & \cdots & a_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{(n)} & \cdots & a_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

和

$$\det_{\text{row}} : (\mathbf{F}^n)^n \to \mathbf{F}\,,\ \left((a_1^{(k)})_{k=1}^n\,,\cdots,\,(a_n^{(k)})_{k=1}^n\right) \mapsto \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & \cdots & a_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{(n)} & \cdots & a_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

是**交错 n 重线性型**, 由此可以得到下面的诸多结论.

行列式的剪切不变性

$$\begin{vmatrix} & \vdots & \\ a_1 & \cdots & a_n \\ & \vdots & \\ b_1 & \cdots & b_n \\ & \vdots & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & \vdots & \\ a_1 & \cdots & a_n \\ & \vdots & \\ b_1 + ca_1 & \cdots & b_n + ca_n \\ & \vdots & \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} & a_1 & & b_1 & \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ & a_n & & b_n & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & a_1 & & b_1 + ca_1 & \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ & a_n & & b_n + ca_n & \end{vmatrix}.$$

行列式的反对称性

$$\begin{vmatrix} & \vdots & \\ a_1 & \cdots & a_n \\ & \vdots & \\ b_1 & \cdots & b_n \\ & \vdots & \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} & \vdots & \\ b_1 & \cdots & b_n \\ & \vdots & \\ a_1 & \cdots & a_n \\ & \vdots & \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} & a_1 & & b_1 & \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ & a_n & & b_n & \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} & b_1 & & a_1 & \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ & b_n & & a_n & \end{vmatrix}.$$

奇异矩阵的行列式 $\boldsymbol{A}$ 是奇异矩阵当且仅当 $\det \boldsymbol{A} = 0$.

从 $\boldsymbol{I}_n$ 的最后一行出发, 依次向上逐行应用行列式的**多重齐次性**和**剪切不变性**即可得任意上三角矩阵的行列式.

上三角矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & & * \\ 0 & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \ .$$

转置矩阵的行列式 $\det \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \det \boldsymbol{A}$.

证明

$$\begin{aligned}
\det \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k, \sigma(k)) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}(\sigma(k), k) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}\left(k, \sigma^{-1}(k)\right) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}(k, \sigma(k)) \\
&= \det \boldsymbol{A} \ .
\end{aligned}$$

□

行列式的可乘性 $\det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$.

证明

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{AB}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{AB}(k, \sigma(k)) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \boldsymbol{A}(k, l) \boldsymbol{B}(l, \sigma(k)) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \sum_{1 \leqslant l_1, \ldots, l_n \leqslant n} \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}(k, l_k) \boldsymbol{B}(l_k, \sigma(k)) \\
&= \sum_{1 \leqslant l_1, \ldots, l_n \leqslant n} \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}(k, l_k) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{B}(l_k, \sigma(k)) \ ,
\end{aligned}$$

考虑矩阵

$$\boldsymbol{B}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}(l_1, 1) & \cdots & \boldsymbol{B}(l_1, n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{B}(l_n, 1) & \cdots & \boldsymbol{B}(l_n, n) \end{pmatrix},$$

则上面的结果可写作

$$\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \sum_{1 \leqslant l_1, \ldots, l_n \leqslant n} \det \boldsymbol{B}' \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}(k, l_k),$$

我们可以要求上述 l_k 各不相同，否则就有 $\det \boldsymbol{B}' = 0$，因此我们可以进一步将 $l_1, \cdots, l_n$ 视作 $\{1, \cdots, n\}$ 上的某个置换 τ，此时又有 $\det \boldsymbol{B}' = \operatorname{sgn}\tau \det \boldsymbol{B}$，于是

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) &= \sum_{\tau \in S_n} \det \boldsymbol{B}' \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}(k, \tau(k)) \\ &= \det \boldsymbol{B} \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}\tau \prod_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}(k, \tau(k)) \\ &= \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}. \end{aligned}$$

□

逆矩阵的行列式　若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right) = (\det \boldsymbol{A})^{-1}$.

证明

$$\det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \frac{\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\right)}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{\det \boldsymbol{I}}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}.$$

□

有限维线性空间 | 广义特征空间分解

广义特征空间分解 若 T 的特征多项式分裂, 则

$$V=\bigoplus_{k=1}^{n}E_T^*\left(\lambda_k\right),$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 T 的全部互异特征值, 各 $E_T^*\left(\lambda_k\right)$ 是 T 下的不变子空间.

证明 (强归纳法)

我们已经证明了**全体广义特征空间有直和**, 下面我们将证明其等于 V, 也即证明存在 V 的一组由广义特征向量构成的基. 注意这必将对应 T 的全部互异特征值, 否则全体广义特征空间的和将成为 V 的一个维数大于 $\dim V$ 的子空间.

当 $\dim V=1$ 时, 此时 $V=E_T\left(\lambda_1\right)$, 显然待证结论成立.

假设 $\dim V<m$ 时待证结论成立. 考虑 $\dim V=m$ 时的情形, 设 λ_1 我们有

$$V=\ker\left(T-\lambda\boldsymbol{I}\right)^m\oplus\operatorname{im}\left(T-\lambda\boldsymbol{I}\right)^m,$$

注意这两者**都是不变子空间**, 我们为其选取各选取基 $B_{\ker}=\left(\boldsymbol{v}_k\right)_{k=1}^{p}$ 和 $B_{\operatorname{im}}=\left(\boldsymbol{v}_k\right)_{k=p+1}^{q}$, 记 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为线性变换 $T\big|_{\ker(T-\lambda\boldsymbol{I})^m}$ 和 $T\big|_{\operatorname{im}(T-\lambda\boldsymbol{I})^m}$ 在 $B_{\ker}$ 和 B_{im} 下的矩阵, 则 T 在基 $B_V=\left(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p,\boldsymbol{v}_{p+1},\cdots,\boldsymbol{v}_q\right)$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix},$$

这就表明 $T\big|_{\operatorname{im}(T-\lambda\boldsymbol{I})^m}$ 的特征多项式整除 T 的特征多项式, 从而任何 $T\big|_{\operatorname{im}(T-\lambda\boldsymbol{I})^m}$ 的特征值都是 T 的特征值, 进一步地任何 $T\big|_{\operatorname{im}(T-\lambda\boldsymbol{I})^m}$ 的广义特征向量都是 T 的广义特征向量.

现在我们对线性变换 $T\big|_{\operatorname{im}(T-\lambda\boldsymbol{I})^m}$ 应用归纳假设, 可以得到 $\operatorname{im}\left(T-\lambda\boldsymbol{I}\right)^m$ 的一组由 $T\big|_{\operatorname{im}(T-\lambda\boldsymbol{I})^m}$ 的广义特征向量构成的基 $B_{\operatorname{im}}'=\left(\boldsymbol{v}_{p+1}',\cdots,\boldsymbol{v}_q'\right)$, 此时

$$B_V'=\left(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p,\boldsymbol{v}_{p+1}',\cdots,\boldsymbol{v}_q'\right)$$

就是我们所需要的基, 从而待证结论对一切正整数 $\dim V$ 成立.

最后, 显然各 $E_T^*\left(\lambda_k\right)$ 是 T 下的不变子空间, 这就完成了证明. □

有限维线性空间 | 幂零循环空间分解

幂零循环空间分解 若 T 是幂零变换, 则存在 V 中的向量组 $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^n$ 使得

$$V=\bigoplus_{k=1}^{n} C_T\left(\boldsymbol{v}_k\right) \ ,$$

其中 $n=\dim\ker T$, 各 $C_T\left(\boldsymbol{v}_k\right)$ 是在 T 下不变的幂零循环空间.

证明 (流程)

不妨记 N 是使得 $T^N=\mathbf{0}$ 成立的最小正整数, 考虑映射

$$\begin{aligned}\widetilde{T}: \bigcup_{k=1}^{N-1} \ker T^{k+1}/\ker T^k &\to \ker T \cup \bigcup_{k=1}^{N-2} \ker T^{k+1}/\ker T^k \ , \\ \boldsymbol{v}+\ker T^k &\mapsto \begin{cases} T\boldsymbol{v}+\ker T^{k-1} & k>1 \\ T\boldsymbol{v} & k=1 \end{cases} \ ,\end{aligned}$$

注意到 $\widetilde{T}$ 是单射, 因为

$$\begin{aligned} k>1: \quad T\boldsymbol{v}_1+\ker T^{k-1}=T\boldsymbol{v}_2+\ker T^{k-1} &\implies T\left(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\right)\in\ker T^{k-1} \\ &\implies \boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\in\ker T^k \\ &\implies \boldsymbol{v}_1+\ker T^k=\boldsymbol{v}_2+\ker T^k \ , \\ k=1: \quad T\boldsymbol{v}_1=T\boldsymbol{v}_2 \implies \boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\in\ker T &\implies \boldsymbol{v}_1+\ker T=\boldsymbol{v}_2+\ker T \ ,\end{aligned}$$

并且记号 $\widetilde{T}^m:=\underbrace{\widetilde{T}\cdots\widetilde{T}}_{m\text{ 个 }\widetilde{T}}$ 是有意义的, 于是

$$\widetilde{T}^{N-1}\left(\ker T^N/\ker T^{N-1}\right)\subseteq\cdots\subseteq\widetilde{T}\left(\ker T^2/\ker T\right)\subseteq\ker T \ ,$$

令 $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n_1}$ 是 $\widetilde{T}^{N-1}\left(\ker T^N/\ker T^{N-1}\right)$ 的基, 再令

$$(\boldsymbol{v}_k+\ker T^{N-1})_{k=1}^{n_1}\in\ker T^N/\ker T^{N-1}$$

是唯一使得 $\widetilde{T}^{N-1}\left(\boldsymbol{v}_k+\ker T^{N-1}\right)=\boldsymbol{u}_k$ 对一切 $k\leqslant n_1$ 成立的向量组, 然后从 $m=1$ 开始依次考虑每个正整数 $m<N$, 我们可以将 $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n_m}$ 扩充为

$$\widetilde{T}^{N-m-1}\left(\ker T^{N-m}/\ker T^{N-m-1}\right)$$

的基 $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n_{m+1}}$, 如此直至得到 $\ker T$ 的基 $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n}$ 为止.

下面我们证明 $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{n}$ 是符合要求的向量组. 容易发现对于每个自然数 $m<N$ 都有

$$\begin{gathered}\left(T^{m-1}\boldsymbol{v}_1+\ker T^{N-m}\,,\,\cdots\,,\,T^{m-1}\boldsymbol{v}_{n_1}+\ker T^{N-m}\,,\right.\\ T^{m-2}\boldsymbol{v}_{n_1+1}+\ker T^{N-m}\,,\,\cdots\,,\,T^{m-2}\boldsymbol{v}_{n_2}+\ker T^{N-m}\,,\\ \cdots\cdots\,,\\ \left.\boldsymbol{v}_{n_{m-1}+1}+\ker T^{N-m}\,,\,\cdots\,,\,\boldsymbol{v}_{n_m}+\ker T^{N-m}\right)\end{gathered}$$

是 $\ker T^{N-m+1}/\ker T^{N-m}$ 的基, 因为一方面, 该向量组是线性无关的, 否则对其中各向量作用 $\widetilde{T}^{N-m}$ 就会与 $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{n_m}$ 的线性无关性产生矛盾, 另一方面, 由 $\widetilde{T}^{N-m}$ 是单射可知

$$\dim\left(\ker T^{N-m+1}/\ker T^{N-m}\right)=\dim\widetilde{T}^{N-m}\left(\ker T^{N-m+1}/\ker T^{N-m}\right)=n_m\ .$$

令 $n_0=0$, 依 **<UnknownBlock>** 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\dim C_T\left(\boldsymbol{v}_k\right)&=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=n_m+1}^{n_{m+1}}\dim C_T\left(\boldsymbol{v}_k\right)\\&=\sum_{m=0}^{N-1}\left(n_{m+1}-n_m\right)\left(N-m\right)\\&=n_1+\cdots+n_{N-1}+n\\&=\sum_{m=1}^{N}\dim\left(\ker T^{N-m+1}/\ker T^{N-m}\right)\\&=\sum_{m=1}^{N}\dim\ker T^{N-m+1}-\dim\ker T^{N-m}\\&=\dim\ker T^{N}\\&=\dim V\ ,\end{aligned}$$

因此我们只需证明 $C_T\left(\boldsymbol{v}_1\right)+\cdots+C_T\left(\boldsymbol{v}_n\right)=V$ 即可.

给定任意的 $\boldsymbol{v} \in V$, 置 $\boldsymbol{w}^{(0)} = \boldsymbol{v}$, 现在从 $m = 1$ 开始依次考虑每个正整数 $m \leqslant N$, 我们知道 $\boldsymbol{w}^{(m-1)} \in \ker T^{N-m+1}$, 因此

$$\boldsymbol{w}^{(m-1)} + \ker T^{N-m} \in \ker T^{N-m+1} / \ker T^{N-m} \ ,$$

于是可由上面得到的 $\ker T^{N-m+1} / \ker T^{N-m}$ 的基给出一组标量 $(a_k^{(m)})_{k=1}^{n_m} \in \mathbf{F}^{n_m}$ 使得

$$\boldsymbol{w}^{(m-1)} + \ker T^{N-m} = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=n_l+1}^{n_{l+1}} a_k^{(m)} \left(T^{m-l-1} \boldsymbol{v}_k + \ker T^{N-m}\right) \ ,$$

进一步置

$$\boldsymbol{w}^{(m)} = \boldsymbol{w}^{(m-1)} - \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=n_l+1}^{n_{l+1}} a_k^{(m)} T^{m-l-1} \boldsymbol{v}_k \ ,$$

根据上式有 $\boldsymbol{w}^{(m)} \in \ker T^{N-m}$ 成立, 由此可继续执行该流程. 当考虑完所有的正整数 m 后, 我们有 $\boldsymbol{w}^{(N)} = \mathbf{0}$, 同时得到了

$$\left(a_1^{(1)}, \cdots, a_{n_1}^{(1)}, a_1^{(2)}, \cdots, a_{n_2}^{(2)}, \cdots\cdots, a_1^{(N)}, \cdots, a_n^{(N)}\right) \in \mathbf{F}^{\dim V}$$

使得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \sum_{m=1}^{N} \left(\boldsymbol{w}^{(m-1)} - \boldsymbol{w}^{(m)}\right) \\
&= \sum_{m=1}^{N} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=n_l+1}^{n_{l+1}} a_k^{(m)} T^{m-l-1} \boldsymbol{v}_k \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=l+1}^{N} \sum_{k=n_l+1}^{n_{l+1}} a_k^{(m)} T^{m-l-1} \boldsymbol{v}_k \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=n_l+1}^{n_{l+1}} \underbrace{\sum_{m=l+1}^{N} a_k^{(m)} T^{m-l-1} \boldsymbol{v}_k}_{\in C_T(\boldsymbol{v}_k)} \ ,
\end{aligned}$$

因此

$$V = \bigoplus_{k=1}^{n} C_T\left(\boldsymbol{v}_k\right) \ .$$

最后, 显然各 $C_T\left(\boldsymbol{v}_k\right)$ 是 T 下的不变子空间, 这就完成了证明. □

有限维线性空间 矩阵表示 | Jordan 标准型

Jordan 块 设 $\boldsymbol{J}$ 是 $\mathbf{F}$ 上的 n 阶方阵, $\boldsymbol{J}$ 是对应于 $\lambda \in R$ 的 Jordan 块当且仅当

$$\boldsymbol{J}:(i,j)\mapsto\begin{cases}\lambda & i=j\\ 1 & i+1=j\\ 0 & i+1<j \text{ 或 } i>j\end{cases},$$

即

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \cdots & & 0\\ 0 & \lambda & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 1 & \\ & & & & \lambda & 1\\ 0 & & \cdots & & 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Jordan 标准型 存在 V 的某个基使得 T 在该基下的矩阵为 T 的 Jordan 标准型

$$\boldsymbol{J}_T=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & \boldsymbol{O} & & \cdots & & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{J}_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & & \\ & & & & \boldsymbol{J}_{n-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & & \cdots & & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{J}_n\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{J}_1,\cdots,\boldsymbol{J}_n$ 是 Jordan 块.

证明 I

对 V 作**广义特征空间分解**和**幂零循环空间分解**, 记 $T_m=(T-\lambda_m\boldsymbol{I})\big|_{E_T^*(\lambda_m)}$, 则

$$V=\bigoplus_{m=1}^{M}E_T^*(\lambda_m)=\bigoplus_{m=1}^{M}\bigoplus_{k=1}^{K_m}C_{T_m}\left(\boldsymbol{v}_k^{(m)}\right),$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_M$ 是 T 的全部互异特征值, $K_m=\dim\ker T_m$, 注意各 $E_T^*(\lambda_m)$ 在 T 下的不变性保证了该直和分解的有效性.

记 $N_{m,k}=\dim C_{T_m}\left(\boldsymbol{v}_k^{(m)}\right)$, 我们知道

$$\left(\boldsymbol{v}_k^{(m)},T_m\boldsymbol{v}_k^{(m)},\cdots,T_m^{N_{m,k}-1}\boldsymbol{v}_k^{(m)}\right)$$

即为**幂零循环空间** $C_{T_m}\left(\boldsymbol{v}_k^{(m)}\right)$ **的基**, 下面我们证明

$$
\begin{gathered}
\Big(T_1^{N_{1,1}-1}\boldsymbol{v}_1^{(1)}\,,\,\cdots\,,\,T_1\boldsymbol{v}_1^{(1)}\,,\,\boldsymbol{v}_1^{(1)}\,,\,\cdots\cdots\,,\,T_1^{N_{1,K_1}-1}\boldsymbol{v}_{K_1}^{(1)}\,,\,\cdots\,,\,T_1\boldsymbol{v}_{K_1}^{(1)}\,,\,\boldsymbol{v}_{K_1}^{(1)}\,,\\
T_2^{N_{2,1}-1}\boldsymbol{v}_1^{(2)}\,,\,\cdots\,,\,T_2\boldsymbol{v}_1^{(2)}\,,\,\boldsymbol{v}_1^{(2)}\,,\,\cdots\cdots\,,\,T_2^{N_{2,K_2}-1}\boldsymbol{v}_{K_2}^{(2)}\,,\,\cdots\,,\,T_2\boldsymbol{v}_{K_2}^{(2)}\,,\,\boldsymbol{v}_{K_2}^{(2)}\,,\\
\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\,,\\
T_M^{N_{M,1}-1}\boldsymbol{v}_1^{(M)}\,,\,\cdots\,,\,T_M\boldsymbol{v}_1^{(M)}\,,\,\boldsymbol{v}_1^{(M)}\,,\,\cdots\cdots\,,\,T_M^{N_{M,K_M}-1}\boldsymbol{v}_{K_M}^{(M)}\,,\,\cdots\,,\,T_M\boldsymbol{v}_{K_M}^{(M)}\,,\,\boldsymbol{v}_{K_M}^{(M)}\Big)
\end{gathered}
$$

就是使得 T 的矩阵表示为 **Jordan 标准型** 的基.

令 $n = K_1 + \cdots + K_M$, 对任意正整数 $m \leqslant M$, $k \leqslant K_m$ 和 $j < N_{m,k}$:

1. 当 $j = N_{m,k} - 1$ 时, 我们知道 $T_m\left(T_m^j\boldsymbol{v}_k^{(m)}\right) = T_m^{N_{m,k}}\boldsymbol{v}_k^{(m)} = \mathbf{0}$, 因此有

$$T\left(T_m^j\boldsymbol{v}_k^{(m)}\right) = (T - \lambda_m\boldsymbol{I})\left(T_m^j\boldsymbol{v}_k^{(m)}\right) + (\lambda_m\boldsymbol{I})\left(T_m^j\boldsymbol{v}_k^{(m)}\right) = \lambda_m T_m^j\boldsymbol{v}_k^{(m)}\ .$$

2. 当 $j < N_{m,k} - 1$ 时, 我们有

$$T\left(T_m^j\boldsymbol{v}_k^{(m)}\right) = (T - \lambda_m\boldsymbol{I})\left(T_m^j\boldsymbol{v}_k^{(m)}\right) + (\lambda_m\boldsymbol{I})\left(T_m^j\boldsymbol{v}_k^{(m)}\right) = T_m^{j+1}\boldsymbol{v}_k^{(m)} + \lambda_m T_m^j\boldsymbol{v}_k^{(m)}\ .$$

这就完成了证明. □

从证明I中容易得出如下关于 **Jordan 标准型** 的结论.

Jordan 标准型的性质　设 $\boldsymbol{J}_T$ 是 T 的 Jordan 标准型, 则

1. $\boldsymbol{J}_T$ 中对应于 λ 的最大 Jordan 块阶数等于 λ 的指数.

2. $\boldsymbol{J}_T$ 中对应于 λ 的各 Jordan 块阶数之和等于 λ 的代数重数.

3. $\boldsymbol{J}_T$ 中对应于 λ 的 Jordan 块数量等于 λ 的几何重数.

赋范空间 | 定义

赋范空间 设 $(V\,,\mathbf{F}\,,+\,,\cdot)$ 是一个线性空间, 则 $((V\,,\mathbf{F}\,,+\,,\cdot)\,,||\cdot||)$ 是赋范空间, 当且仅当其范数 $||\cdot||:V\to\mathbf{R}$ 满足如下性质:

1. 定性:

$$\forall\ \boldsymbol{v}\in V\ :\ \ ||\boldsymbol{v}||=0\implies \boldsymbol{v}=\mathbf{0}\ ;$$

2. 线性:

$$\forall\ \boldsymbol{v}\in V\ ,\ \lambda\in\mathbf{F}\ :\ \ ||\lambda\boldsymbol{v}||=|\lambda|\,||\boldsymbol{v}||\ \ ;$$

3. 三角不等式:

$$\forall\ \boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{v}\in V\ :\ \ ||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}||\leqslant||\boldsymbol{u}||+||\boldsymbol{v}||\ \ .$$

从 **赋范空间** 的定义中还可以得到如下信息:

范数的基本性质

1. 正性:

$$\forall\ \boldsymbol{v}\in V\ :\ \ ||\boldsymbol{v}||\geqslant 0\ .$$

2. 反向三角不等式:

$$\forall\ \boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{v}\in V\ :\ \ |\,||\boldsymbol{u}||-||\boldsymbol{v}||\,|\leqslant||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}||\ \ .$$

3. 广义三角不等式:

$$\forall\ (\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^n\in V^n\ \ :\ \ \left|\left|\sum_{k=1}^n\boldsymbol{v}_k\right|\right|\leqslant\sum_{k=1}^n||\boldsymbol{v}_k||\ \ .$$

一般地, 我们把赋范空间中的线性映射称为线性算子.

赋范空间诱导度量空间 若 $(V\,,||\cdot||)$ 是赋范空间, 则 $\left(V\,,d_{||\cdot||}\right)$ 是度量空间, 其中 $d_{||\cdot||}$ 定义为

$$d_{||\cdot||}:V^2\to\mathbf{R}\ ,\ (\boldsymbol{x}\,,\boldsymbol{y})\mapsto||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||\ \ .$$

赋范空间诱导拓扑空间 若 $(V\,,||\cdot||)$ 是赋范空间, 则 $\left(V\,,\tau_{||\cdot||}\right)$ 是拓扑空间, 其中 $\tau_{||\cdot||}$ 定义为度量 $d_{||\cdot||}$ 诱导的拓扑.

内积空间 | 定义

内积空间 设 $(V, \mathbf{F}, +, \cdot)$ 是一个实线性空间或复线性空间, 则 $((V, \mathbf{F}, +, \cdot), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是内积空间, 当且仅当其内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \to \mathbf{F}$ 满足如下性质:

1. 正定性:

$$\forall\, \boldsymbol{v} \in V \ :\ \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geqslant 0\,,$$

其中等号当且仅当 $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ 时成立;

2. 共轭对称性:

$$\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \ :\ \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle}\,;$$

3. 第一元线性:

$$\langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \quad \text{and} \quad \langle \lambda \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$$

对一切 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ 和 $\lambda \in \mathbf{F}$ 成立.

当 V 为实线性空间时, 对应的内积空间称为Euclid 空间, 此时共轭对称性退化为对称性 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle$; 当 V 为复线性空间时, 对应的内积空间称为酉空间. 我们不会对建立在 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 之外的域上的线性空间讨论内积, 因此在 **内积空间** 中将默认 $\mathbf{F} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$.

第二元共轭线性 设 V 是一个内积空间, 则

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle \quad \text{and} \quad \langle \boldsymbol{u}, \lambda \boldsymbol{v} \rangle = \overline{\lambda} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$$

对一切 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ 和 $\lambda \in \mathbf{F}$ 成立.

内积空间 中的设定

- 设 U, V 是内积空间.
- 对任意线性空间 U, V: 令 $\mathcal{L}(U, V)$ 表示从 U 到 V 的线性映射空间.
- 不产生歧义时, 令 $\boldsymbol{O}$ 和 $\boldsymbol{I}$ 表示任何零矩阵和单位矩阵.
- 对任意内积空间 V: 令 $\boldsymbol{I}_V$ 表示 V 上的恒等映射.
- 不产生歧义时, 用 $\mathbf{R}^n$ 代表内积空间 $((\mathbf{R}^n, \mathbf{R}, +, \cdot), \cdot)$, 其中 $\cdot$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上的点积.

内积空间 | 范数

我们要求任何内积都满足正定性，这确保每一种内积运算都能诱导出一种范数.

范数 设 V 是一个内积空间, 则对任意 $\boldsymbol{v} \in V$, 定义 $\boldsymbol{v}$ 的范数为

$$\|\boldsymbol{v}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle} .$$

范数的基本性质 设 V 是一个内积空间, 则对任意的 $\boldsymbol{v} \in V$ 有

1. 正定性:

$$\forall\, \boldsymbol{v} \in V \;:\; \|\boldsymbol{v}\| \geqslant 0 ,$$

其中等号当且仅当 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ 时成立.

2. 线性:

$$\forall\, \boldsymbol{v} \in V ,\; \lambda \in \mathbf{F} \;:\; \|\lambda \boldsymbol{v}\| = |\lambda|\, \|\boldsymbol{v}\| .$$

余弦定理 设 V 是一个内积空间, 则

$$\forall\, \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 \in V \;:\; \|\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\|^2 = \|\boldsymbol{v}_1\|^2 + \|\boldsymbol{v}_2\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 \rangle .$$

证明

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\|^2 &= \langle \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 , \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_1 \rangle + \langle \boldsymbol{v}_2 , \boldsymbol{v}_2 \rangle + \langle \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 \rangle + \overline{\langle \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 \rangle} \\
&= \|\boldsymbol{v}_1\|^2 + \|\boldsymbol{v}_2\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 \rangle .
\end{aligned}$$

□

平行四边形恒等式 设 V 是一个内积空间, 则

$$\forall\, \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 \in V \;:\; \|\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\|^2 + \|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\|^2 = 2\left(\|\boldsymbol{v}_1\|^2 + \|\boldsymbol{v}_2\|^2\right) .$$

证明

内积空间 中的设定

- 对任意内积空间 V 和任意 $\boldsymbol{v} \in V$: 令 $\|\boldsymbol{v}\|$ 表示 $\boldsymbol{v}$ 的范数.

内积空间 | 基本性质

内积的连续性 设 V 是内积空间, 并且 $(\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{\infty}$, $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{\infty}$ 是 V 中的序列, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n , y_n \rangle = \langle x , y \rangle \ .$$

证明

$$\begin{aligned} |\langle x_n , y_n \rangle - \langle x , y \rangle| &= |\langle x_n , y_n \rangle - \langle x_n , y \rangle + \langle x_n , y \rangle - \langle x , y \rangle| \\ &\leqslant |\langle x_n , (y_n - y) \rangle| + |\langle (x_n - x) , y \rangle| \\ &\leqslant ||x_n|| \, ||y_n - y|| + ||x_n - x|| \, ||y|| \ , \end{aligned}$$

于是由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ 可得结论成立. □

事实上, **内积空间诱导第一可数空间**, 因此上述定理**刻画了内积作为连续映射的特性**.

内积作为连续映射 设 V 是内积空间, 则

1. 对任意 $\boldsymbol{u} \in V$, $\langle \cdot , \boldsymbol{u} \rangle : V \to \mathbf{F}$, $\boldsymbol{v} \mapsto \langle \boldsymbol{v} , \boldsymbol{u} \rangle$ 是连续映射.

2. 对任意 $\boldsymbol{u} \in V$, $\langle \boldsymbol{u} , \cdot \rangle : V \to \mathbf{F}$, $\boldsymbol{v} \mapsto \langle \boldsymbol{u} , \boldsymbol{v} \rangle$ 是连续映射.

3. $\langle \cdot , \cdot \rangle : V^2 \to \mathbf{F}$, $(\boldsymbol{u} , \boldsymbol{v}) \mapsto \langle \boldsymbol{u} , \boldsymbol{v} \rangle$ 是连续映射.

Cauchy—Schwarz 不等式 设 V 是一个内积空间, 则

$$\forall \ \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 \in V \ : \ ||\boldsymbol{v}_1|| \, ||\boldsymbol{v}_2|| \geqslant |\langle \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 \rangle| \ ,$$

其中等号当且仅当 $(\boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2)$ 线性相关时取得.

证明 I

当 $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}$ 时, 该不等式成立并且等式成立;

当 $\boldsymbol{v}_2 \neq \boldsymbol{u}$ 时, 我们可以对 $\boldsymbol{v}_1$ 进行正交分解

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\langle \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 \rangle}{||\boldsymbol{v}_2||^2} \boldsymbol{v}_2 + \left(\boldsymbol{v}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 \rangle}{||\boldsymbol{v}_2||^2} \boldsymbol{v}_2 \right) \ ,$$

于是由**勾股定理**有

$$\begin{aligned}||\boldsymbol{v}_2||^2\,||\boldsymbol{v}_1||^2 &= ||\boldsymbol{v}_2||^2\left(\left|\left|\frac{\langle\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2\rangle}{||\boldsymbol{v}_2||^2}\boldsymbol{v}_2\right|\right|^2+\left|\left|\boldsymbol{v}_1-\frac{\langle\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2\rangle}{||\boldsymbol{v}_2||^2}\boldsymbol{v}_2\right|\right|^2\right)\\ &= |\langle\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2\rangle|^2+||\boldsymbol{v}_2||^2\left|\left|\boldsymbol{v}_1-\frac{\langle\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2\rangle}{||\boldsymbol{v}_2||^2}\boldsymbol{v}_2\right|\right|^2\\ &\geqslant |\langle\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2\rangle|^2\ ,\end{aligned}$$

不等式两侧同时取根号即可，其中等式当且仅当存在 $a\in\mathbf{F}$ 使得 $\boldsymbol{v}_1=a\boldsymbol{v}_2$ 时成立，因为只要 $\boldsymbol{v}_1=a\boldsymbol{v}_2$ 即有

$$\langle\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2\rangle=\langle a\boldsymbol{v}_2\,,\,\boldsymbol{v}_2\rangle=a\,||\boldsymbol{v}_2||^2\ ,$$

于是 $a=\langle\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2\rangle/||\boldsymbol{v}_2||^2$.

综上所述，该不等式成立且等号当且仅当 $(\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2)$ 线性相关时取得. □

三角不等式 设 V 是一个内积空间，则

$$\forall\ \boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2\in V\ :\ \ \big|\,||\boldsymbol{v}_1||-||\boldsymbol{v}_2||\,\big|\leqslant||\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2||\leqslant||\boldsymbol{v}_1||+||\boldsymbol{v}_2||\ ,$$

其中第一个等号当且仅当 $(\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2)$ 线性相关且 $\langle\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2\rangle<0$ 时取得，第二个等号当且仅当 $(\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2)$ 线性相关且 $\langle\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2\rangle>0$ 时取得.

证明

$$\begin{aligned}\big|\,||\boldsymbol{v}_1||-||\boldsymbol{v}_2||\,\big|^2 &= ||\boldsymbol{v}_1||^2+||\boldsymbol{v}_2||^2-2\,||\boldsymbol{v}_1||\,||\boldsymbol{v}_2||\\ &\leqslant ||\boldsymbol{v}_1||^2+||\boldsymbol{v}_2||^2-2\,|\langle\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2\rangle|\\ &= ||\boldsymbol{v}_1||^2+||\boldsymbol{v}_2||^2-2\,|\langle\boldsymbol{v}_1\,,\,-\boldsymbol{v}_2\rangle|\\ &\leqslant ||\boldsymbol{v}_1||^2+||\boldsymbol{v}_2||^2-2\,\mathrm{Re}\,\langle\boldsymbol{v}_1\,,\,-\boldsymbol{v}_2\rangle\\ &= ||\boldsymbol{v}_1||^2+||\boldsymbol{v}_2||^2+2\,\mathrm{Re}\,\langle\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2\rangle\\ &= ||\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2||^2\ ,\\ ||\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2||^2 &= ||\boldsymbol{v}_1||^2+||\boldsymbol{v}_2||^2+2\,\mathrm{Re}\,\langle\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2\rangle\\ &\leqslant ||\boldsymbol{v}_1||^2+||\boldsymbol{v}_2||^2+2\,|\langle\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2\rangle|\\ &\leqslant ||\boldsymbol{v}_1||^2+||\boldsymbol{v}_2||^2+2\,||\boldsymbol{v}_1||\,||\boldsymbol{v}_2||\\ &= (||\boldsymbol{v}_1||+||\boldsymbol{v}_2||)^2\ ,\end{aligned}$$

其中第一个等号当且仅当

$$||\boldsymbol{v}_1||\,||\boldsymbol{v}_2|| = |\langle \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 \rangle| = \mathrm{Re}\langle \boldsymbol{v}_1 , -\boldsymbol{v}_2 \rangle$$

时, 也即 $(\boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2)$ 线性相关且 $\langle \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 \rangle < 0$ 时取得, 第二个等号当且仅当

$$||\boldsymbol{v}_1||\,||\boldsymbol{v}_2|| = |\langle \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 \rangle| = \mathrm{Re}\langle \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 \rangle$$

时, 也即 $(\boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2)$ 线性相关且 $\langle \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 \rangle > 0$ 时取得. $\square$

至此, 结合 **范数的基本性质** 和 **三角不等式**, 我们证明了

内积空间诱导赋范空间 若 $(V , \langle \cdot , \cdot \rangle)$ 是内积空间, 则 $(V , ||\cdot||)$ 是赋范空间.

内积空间诱导度量空间 若 $(V , \langle \cdot , \cdot \rangle)$ 是内积空间, 则 $\left(V , d_{\langle \cdot,\cdot \rangle}\right)$ 是度量空间, 其中 $d_{\langle \cdot,\cdot \rangle}$ 定义为内积 $\langle \cdot , \cdot \rangle$ 诱导的度量.

内积空间诱导拓扑空间 若 $(V , \langle \cdot , \cdot \rangle)$ 是内积空间, 则 $\left(V , \tau_{\langle \cdot,\cdot \rangle}\right)$ 是拓扑空间, 其中 $\tau_{\langle \cdot,\cdot \rangle}$ 定义为度量 $d_{\langle \cdot,\cdot \rangle}$ 诱导的拓扑.

内积空间诱导第一可数空间 $\left(V , \tau_{\langle \cdot,\cdot \rangle}\right)$ 是第一可数空间.

内积空间 | 极化恒等式

作为一种证明内积相关结论的重要技巧，极化恒等式允许我们用 $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$ 和 $\langle T\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$ 的形式来表示一般形式的内积 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ 和 $\langle T\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$.

范数极化恒等式（Euclid 空间） 设 V 是 Euclid 空间，则

$$\forall\ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V\ :\ \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \frac{\|\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\|^2 - \|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\|^2}{4}\ .$$

证明

由余弦定理有

$$\frac{\|\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\|^2 - \|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\|^2}{4} = \frac{2\,\mathrm{Re}\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle - 2\,\mathrm{Re}\langle \boldsymbol{v}_1, -\boldsymbol{v}_2 \rangle}{4} = \mathrm{Re}\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle\ . \qquad \square$$

范数极化恒等式（酉空间） 设 V 是酉空间，则

$$\forall\ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V\ :\ \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \frac{\|\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\|^2 - \|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\|^2}{4} + \frac{\|\boldsymbol{v}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2\|^2 - \|\boldsymbol{v}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2\|^2}{4}\mathrm{i}\ .$$

证明

由余弦定理进一步有

$$\frac{\|\boldsymbol{v}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2\|^2 - \|\boldsymbol{v}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2\|^2}{4} = \frac{2\,\mathrm{Re}\langle \boldsymbol{v}_1, \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2 \rangle - 2\,\mathrm{Re}\langle \boldsymbol{v}_1, -\mathrm{i}\boldsymbol{v}_2 \rangle}{4} = \mathrm{Im}\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle\ . \qquad \square$$

算子极化恒等式（酉空间） 设 V 是酉空间，则

$$\forall\ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V\ :\ \langle T\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \frac{\langle T\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_1' \rangle - \langle T\boldsymbol{v}_2', \boldsymbol{v}_2' \rangle}{4} + \frac{\langle T\boldsymbol{v}_3', \boldsymbol{v}_3' \rangle - \langle T\boldsymbol{v}_4', \boldsymbol{v}_4' \rangle}{4}\mathrm{i}\ ,$$

其中 $(\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \boldsymbol{v}_3', \boldsymbol{v}_4') = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2)$.

证明

利用内积的可加性展开右式，容易验证

$$\begin{aligned}\frac{\langle T\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_1' \rangle - \langle T\boldsymbol{v}_2', \boldsymbol{v}_2' \rangle}{4} &= \frac{\langle T\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle + \langle T\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{2}\ ,\\ \frac{\langle T\boldsymbol{v}_3', \boldsymbol{v}_3' \rangle - \langle T\boldsymbol{v}_4', \boldsymbol{v}_4' \rangle}{4}\mathrm{i} &= \frac{\langle T\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle - \langle T\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{2}\ .\end{aligned} \qquad \square$$

内积空间 正交性 | 定义

正交性　设 V 是一个内积空间, 则两个向量 $\boldsymbol{v}_1\,,\boldsymbol{v}_2 \in V$ 正交并记作 $\boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{v}_2$, 当且仅当 $\langle\,\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2\,\rangle = 0$.

注意定义中 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的顺序是不必要的, 这由内积的共轭对称性所保证.

下面的定理是**余弦定理**的一个直接推论.

勾股定理　设 V 是一个内积空间, 则

$$\forall\,\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2 \in V \;:\; \boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{v}_2 \implies \|\,\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\,\|^2 = \|\,\boldsymbol{v}_1\,\|^2 + \|\,\boldsymbol{v}_2\,\|^2\ .$$

勾股定理表明: 当两个向量正交时, 其范数具有平方可加性. 这启发我们对任何 $\boldsymbol{v} \in V$ 进行分解, 从而得到两个正交的部分. 考虑 $\boldsymbol{v}\,,\boldsymbol{v}_0 \in V$, 我们希望找到某个 $a \in \mathbf{F}$ 使得 $a\boldsymbol{v}_0 \perp (\,\boldsymbol{v} - a\boldsymbol{v}_0\,)$, 根据内积的第一元线性与第二元共轭线性, 我们可以解得

$$\langle\,a\boldsymbol{v}_0\,,\,\boldsymbol{v} - a\boldsymbol{v}_0\,\rangle = 0 \implies a = \frac{\langle\,\boldsymbol{v}\,,\,\boldsymbol{v}_0\,\rangle}{\|\,\boldsymbol{v}_0\,\|^2}\ ,$$

此即 $\boldsymbol{v}$ 关于 $\boldsymbol{v}_0$ 的正交分解.

内积空间 正交性 | 规范正交组

Kronecker 记号

$$\delta_{a,b} := \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases} .$$

规范正交组 设 $S = (\boldsymbol{e}_k)_{k \in I}$ 是内积空间 V 中的一个向量组, S 规范正交当且仅当对所有 $p, q \in I$ 均有 $\langle \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_q \rangle = \delta_{p,q}$.

若有限维空间 V 的某个基 B 规范正交, 则我们称 B 为 V 的规范正交基.

规范正交性引理 设 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^n$ 是一个规范正交向量组, 则

$$\forall\ (a_k)_{k=1}^n \in \mathbf{F}^n \ : \ \left\| \sum_{k=1}^n a_k \boldsymbol{e}_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |\, a_k \,|^2 .$$

证明 I

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \boldsymbol{e}_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^n a_k \boldsymbol{e}_k , \sum_{k=1}^n a_k \boldsymbol{e}_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \overline{a_j} \delta_{i,j} = \sum_{k=1}^n |\, a_k \,|^2 . \qquad \square$$

证明 II (数学归纳法)

当 $n = 1$ 时. 我们有 $\|a_1 \boldsymbol{e}_1\| = |\, a_1 \,|\, \|\boldsymbol{e}_1\| = |\, a_1 \,|$.

假设 $n = m$ 时上述命题成立. 由 **勾股定理** 有

$$\left\| \sum_{k=1}^{m+1} a_k \boldsymbol{e}_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{m} a_k \boldsymbol{e}_k \right\|^2 + \|a_{m+1} \boldsymbol{e}_{m+1}\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\, a_k \,|^2 + |\, a_{m+1} \,|^2 = \sum_{k=1}^{m+1} |\, a_k \,|^2 ,$$

于是 $n = m + 1$ 时上述命题成立, 进而其对一切正整数 n 成立. $\square$

规范正交组的线性无关性 任何有限规范正交向量组都线性无关.

证明

给定任意规范正交向量组 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^n$, 设 $(a_k)_{k=1}^n \in \mathbf{F}^n$ 使得 $a_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n \boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}$, 则由 **规范正交性引理** 有

$$\sum_{k=1}^n |\, a_k \,|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n a_k \boldsymbol{e}_k \right\|^2 = \|\mathbf{0}\|^2 = 0 ,$$

这表明所有 a_k 均为 0 , 于是 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^n$ 线性无关. $\square$

在规范正交基上可以很容易地对向量或内积进行展开.

规范正交展开 设 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^n$ 是 V 的一个规范正交基, 则

$$\forall\, \boldsymbol{v} \in V \;:\; \boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{n} \langle\, \boldsymbol{v}\,,\, \boldsymbol{e}_k \,\rangle\, \boldsymbol{e}_k \;,$$

$$\forall\, \boldsymbol{v}_1\,,\, \boldsymbol{v}_2 \in V \;:\; \langle\, \boldsymbol{v}_1\,,\, \boldsymbol{v}_2 \,\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle\, \boldsymbol{v}_1\,,\, \boldsymbol{e}_k \,\rangle\, \overline{\langle\, \boldsymbol{v}_2\,,\, \boldsymbol{e}_k \,\rangle} \;.$$

证明

先证第一个等式. 由 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^n$ 是 V 的基, 我们可以设 $(a_k)_{k=1}^n \in \mathbf{F}^n$ 使得

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k \;,$$

于是对任意的正整数 $1 \leqslant m \leqslant n$ 有

$$a_m = \sum_{k=1}^{n} a_k \,\langle\, \boldsymbol{e}_k\,,\, \boldsymbol{e}_m \,\rangle = \left\langle\, \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k\,,\, \boldsymbol{e}_m \,\right\rangle = \langle\, \boldsymbol{v}\,,\, \boldsymbol{e}_m \,\rangle \;.$$

再证第二个等式. 由第一个等式可知

$$\langle\, \boldsymbol{v}_1\,,\, \boldsymbol{v}_2 \,\rangle = \left\langle\, \boldsymbol{v}_1\,,\, \sum_{k=1}^{n} \langle\, \boldsymbol{v}_2\,,\, \boldsymbol{e}_k \,\rangle\, \boldsymbol{e}_k \,\right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle\, \boldsymbol{v}_1\,,\, \boldsymbol{e}_k \,\rangle\, \overline{\langle\, \boldsymbol{v}_2\,,\, \boldsymbol{e}_k \,\rangle} \;. \qquad \square$$

Bessel 不等式（有限形式） 设 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^n$ 是一个规范正交向量组, 则

$$\forall\, \boldsymbol{v} \in V \;:\; \sum_{k=1}^{n} |\langle\, \boldsymbol{v}\,,\, \boldsymbol{e}_k \,\rangle|^2 \leqslant ||\,\boldsymbol{v}\,||^2 \;,$$

其中等号当且仅当 $\boldsymbol{v} \in \operatorname{span}(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^n$ 时取得.

证明

记

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{n} \langle\, \boldsymbol{v}\,,\, \boldsymbol{e}_k \,\rangle\, \boldsymbol{e}_k \;,$$

注意到对任意正整数 $1 \leqslant k \leqslant n$ 有

$$\langle\, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\,,\, \boldsymbol{e}_k \,\rangle = \langle\, \boldsymbol{v}\,,\, \boldsymbol{e}_k \,\rangle - \langle\, \boldsymbol{v}\,,\, \boldsymbol{e}_k \,\rangle\, \langle\, \boldsymbol{e}_k\,,\, \boldsymbol{e}_k \,\rangle = 0 \;,$$

这意味着 $\langle\, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\,,\, \boldsymbol{u} \,\rangle = 0$, 于是由 **勾股定理** 有

$$||\,\boldsymbol{v}\,||^2 = ||\,\boldsymbol{u}\,||^2 + ||\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\,||^2 \geqslant ||\,\boldsymbol{u}\,||^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle\, \boldsymbol{v}\,,\, \boldsymbol{e}_k \,\rangle|^2 \;,$$

其中等号当且仅当 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ 时取得, **规范正交展开** 表明此条件等价于 $\boldsymbol{v} \in \operatorname{span}(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^{n}$. □

Bessel 不等式 设 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^{\infty}$ 是一个规范正交向量组, 则

$$\forall\, \boldsymbol{v} \in V \;:\; \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \boldsymbol{v}\,,\, \boldsymbol{e}_k \rangle|^2 \leqslant ||\boldsymbol{v}||^2 \;,$$

其中等号当且仅当 $\boldsymbol{v} \in \overline{\operatorname{span}(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^{\infty}}$ 时取得.

该不等式可以视为向量的不完全规范正交展开.

内积空间 正交性 | Gram — Schmidt 过程

Gram — Schmidt 过程 设 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ 是内积空间 V 的基, 定义

$$\forall\, m \in \{1, \cdots, n\} \;:\; \boldsymbol{e}_m := \frac{\boldsymbol{v}_m - \sum_{k=1}^{m-1} \langle \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{e}_k \rangle \boldsymbol{e}_k}{\left\| \boldsymbol{v}_m - \sum_{k=1}^{m-1} \langle \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{e}_k \rangle \boldsymbol{e}_k \right\|},$$

是有意义的, 并且 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 是 V 的规范正交基.

证明 (数学归纳法)

当 $n = 1$ 时. 由 $(\boldsymbol{v}_1)$ 线性无关知 $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{u}$, 于是 $\|\boldsymbol{v}_1\| \neq 0$, 因此定义 $\boldsymbol{e}_1 := \boldsymbol{v}_1 / \|\boldsymbol{v}_1\|$ 是有意义的. 又有 $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle = \|\boldsymbol{e}_1\|^2 = 1$, 由**基的维数准则**知 $(\boldsymbol{e}_1)$ 是 V 的规范正交基.

假设 $n = m$ 时上述命题成立. 由 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ 线性无关知

$$\boldsymbol{v}_m - \sum_{k=1}^{m-1} \langle \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{e}_k \rangle \boldsymbol{e}_k \neq \boldsymbol{u},$$

于是

$$\left\| \boldsymbol{v}_m - \sum_{k=1}^{m-1} \langle \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{e}_k \rangle \boldsymbol{e}_k \right\| \neq 0,$$

因此上述递归定义始终是有意义的.

现在证明向量组 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{m+1})$ 规范正交, 任意给定正整数 $p, q \leqslant m+1$:

1. 当 $p, q \leqslant m$ 时, 规范正交性由归纳假设保证;

2. 当 $p = q = m+1$ 时, 显然有 $\langle \boldsymbol{e}_{m+1}, \boldsymbol{e}_{m+1} \rangle = \|\boldsymbol{e}_{m+1}\|^2 = 1$;

3. 当 $p \leqslant m$ 且 $q = m+1$ 时, 由归纳假设知 $\langle \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_k \rangle = \delta_{p,k}$ 对一切正整数 $k \leqslant m$ 成立, 我们有

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_q \rangle &= \left\| \boldsymbol{v}_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \langle \boldsymbol{v}_{m+1}, \boldsymbol{e}_k \rangle \boldsymbol{e}_k \right\|^{-1} \left\langle \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{v}_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \langle \boldsymbol{v}_{m+1}, \boldsymbol{e}_k \rangle \boldsymbol{e}_k \right\rangle \\
&= \left\| \boldsymbol{v}_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} \langle \boldsymbol{v}_{m+1}, \boldsymbol{e}_k \rangle \boldsymbol{e}_k \right\|^{-1} \left(\langle \boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{v}_{m+1} \rangle - \overline{\langle \boldsymbol{v}_{m+1}, \boldsymbol{e}_p \rangle} \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

4. 当 $p=m+1$ 且 $q\leqslant m$ 时, 我们有

$$\langle \boldsymbol{e}_p\,,\,\boldsymbol{e}_q\,\rangle=\overline{\langle\,\boldsymbol{e}_q\,,\,\boldsymbol{e}_p\,\rangle}=0\ .$$

综上所述, $\langle\,\boldsymbol{e}_p\,,\,\boldsymbol{e}_q\,\rangle=\delta_{p,q}$, 从而 $n=m+1$ 时上述命题成立. 这就完成了证明. $\square$

由上面的证明可知: 对任意的正整数 $m\leqslant n$, $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^m$ 都是 $\operatorname{span}(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^m$ 的规范正交基, 这说明如果 $(\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^m$ 在线性变换 T 下不变, 那么 $(\boldsymbol{e}_k)_{k=1}^m$ 也在 T 下不变, 因此我们可以将任何上三角矩阵规范正交化.

上三角矩阵的规范正交化 设 $T\in\mathcal{L}(V)$ 在 V 的某个基下有上三角矩阵, 那么 T 在 V 的某个规范正交基下有上三角矩阵.

内积空间 | 极小化向量

下面的定理给出了唯一确定非空完备凸集中与外部某向量距离极小的向量的方法. 虽然其表述不涉及内积, 但是其证明过程 **只对可内积化的赋范空间空间成立** .

极小化向量 设 V 的非空子集 M 是完备凸集, 则对任意 $\boldsymbol{v} \in V$ 存在唯一的 $\boldsymbol{v}_0 \in M$ 使得

$$||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0|| = \inf\{||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{m}|| : \boldsymbol{m} \in M\} \ .$$

存在性 **证明**

令 δ 表示 $\{||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{m}|| : \boldsymbol{m} \in M\}$ 的下确界, 在该集合中 **可以构造收敛于 δ 的序列** , 即存在 $(\boldsymbol{m}_n)_{n=1}^{\infty} \in M^{\infty}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} ||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{m}_n|| = \delta \ .$$

现在我们来证明 $(\boldsymbol{m}_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列. 给定任意 $\varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} ||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{m}_n||^2 = \delta^2$ 知对 $\varepsilon/2$ 存在自然数 N 使得对一切 $n > N$ 有 $\delta^2 \leqslant ||\boldsymbol{m}_n-\boldsymbol{v}||^2 < \delta^2+\varepsilon/2$, 于是对任意正整数 $p, q > N$, 依 **平行四边形恒等式** 有

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{m}_p-\boldsymbol{m}_q||^2 &= ||(\boldsymbol{m}_p-\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{m}_q-\boldsymbol{v})||^2 \\ &= 2\,||\boldsymbol{m}_p-\boldsymbol{v}||^2 + 2\,||\boldsymbol{m}_q-\boldsymbol{v}||^2 - ||\boldsymbol{m}_p+\boldsymbol{m}_q-2\boldsymbol{v}||^2 \\ &< 4\delta^2+\varepsilon-4\left|\left|\frac{\boldsymbol{m}_p+\boldsymbol{m}_q}{2}-\boldsymbol{v}\right|\right|^2 \\ &< \varepsilon \ , \end{aligned}$$

其中 $(\boldsymbol{m}_p+\boldsymbol{m}_q)/2 \in M$.

由于 M 是完备集, 所以存在 $\boldsymbol{v}_0 \in M$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{m}_n = \boldsymbol{v}_0$, 依 **<UnknownBlock>** 即有

$$||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0|| = \left|\left|\boldsymbol{v}-\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{m}_n\right|\right| = \lim_{n\to\infty}||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{m}_n|| = \delta \ . \qquad \square$$

唯一性 **证明**

令 $\delta = \inf\{||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{m}|| : \boldsymbol{m} \in M\}$. 假设存在 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in M$ 使得

$$||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_1|| = ||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_2|| = \delta \ ,$$

则由平行四边形恒等式知

$$\begin{aligned}||\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2||^2 &= ||(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v})||^2\\ &= 2||\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}||^2+2||\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}||^2-||\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2-2\boldsymbol{v}||^2\\ &= 4\delta^2-4\left|\left|\frac{\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2}{2}-\boldsymbol{v}\right|\right|^2\\ &\leqslant 0\,,\end{aligned}$$

其中 $(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)/2\in M$ ，于是显然有 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$. □

正交极小化向量 设 U 是 V 的完备子空间，则对任意 $\boldsymbol{v}\in V$ 存在唯一的 $\boldsymbol{v}_0\in U$ 使得

$$||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0||=\inf\{\,||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}||:\boldsymbol{u}\in U\,\}\,,$$

并且 $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0$ 对一切 $\boldsymbol{u}\in U$ 成立.

证明（反证法）

我们已经在**上一个定理**中证明了满足第一个条件的 $\boldsymbol{v}_0$ 的存在性和唯一性，现在我们只需确认其满足正交性的条件即可，为此我们可以考虑在与 $\boldsymbol{u}_0$ 正交的方向上对 $\boldsymbol{v}'$ 正交分解.

记 $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0$. 假设存在 $\boldsymbol{u}_0\in U$ 使得 $\boldsymbol{u}_0\perp\boldsymbol{v}'$ 不成立，则显然 $\boldsymbol{u}_0\neq\boldsymbol{0}$ ，并且

$$\begin{aligned}&\left|\left|\boldsymbol{v}'-\frac{\langle\boldsymbol{v}',\boldsymbol{u}_0\rangle}{||\boldsymbol{u}_0||^2}\boldsymbol{u}_0\right|\right|^2\\ &=\left\langle\boldsymbol{v}'-\frac{\langle\boldsymbol{v}',\boldsymbol{u}_0\rangle}{||\boldsymbol{u}_0||^2}\boldsymbol{u}_0\,,\,\boldsymbol{v}'-\frac{\langle\boldsymbol{v}',\boldsymbol{u}_0\rangle}{||\boldsymbol{u}_0||^2}\boldsymbol{u}_0\right\rangle\\ &=||\boldsymbol{v}'||^2-\frac{\langle\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}'\rangle}{||\boldsymbol{u}_0||^2}\langle\boldsymbol{v}',\boldsymbol{u}_0\rangle-\frac{\langle\boldsymbol{v}',\boldsymbol{u}_0\rangle}{||\boldsymbol{u}_0||^2}\left(\langle\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}'\rangle-\frac{\langle\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}'\rangle}{||\boldsymbol{u}_0||^2}||\boldsymbol{u}_0||^2\right)\\ &=||\boldsymbol{v}'||^2-\frac{|\langle\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}'\rangle|^2}{||\boldsymbol{u}_0||^2}\\ &<||\boldsymbol{v}'||^2\,,\end{aligned}$$

从而产生了另一个使得 $||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}||$ 取得最小值的 $\boldsymbol{u}$ ，即

$$\boldsymbol{v}_0+\frac{\langle\boldsymbol{v}',\boldsymbol{u}_0\rangle}{||\boldsymbol{u}_0||^2}\boldsymbol{u}_0\in U\,,$$

这就导出了矛盾. □

内积空间 正交补 | 定义

内积空间 正交补 中的设定

- 令 $\mathbf{0}$ 表示 V 的加法幺元.
- 设 $M \subseteq V$.

正交补 M 的正交补定义为

$$M^{\perp} := \{ \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V , \boldsymbol{m} \perp \boldsymbol{v} \text{ 对一切 } \boldsymbol{m} \in M \text{ 成立} \} .$$

$\{\mathbf{0}\}$ 的正交补 $M = \{\mathbf{0}\} \iff M^{\perp} = V$.

V 的正交补 $V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

对于无限维线性空间, 一般我们无法从 $M^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ 推出 $M = V$.

正交补是闭子空间

1. $M^{\perp}$ 是 V 的子空间.

2. $M^{\perp}$ 是闭集.

1 证明

我们知道 $\boldsymbol{m} \perp \mathbf{0}$ 对一切 $\boldsymbol{m} \in M$ 成立, 所以 $\mathbf{0} \in M^{\perp}$.

对任意 $\lambda, \mu \in \mathbf{F}$ 和 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in M^{\perp}$, 我们有

$$\forall\, \boldsymbol{m} \in M \ : \ \langle \lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v} , \boldsymbol{m} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{u} , \boldsymbol{m} \rangle + \mu \langle \boldsymbol{v} , \boldsymbol{m} \rangle = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0 ,$$

于是 $\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v} \in M^{\perp}$, 从而完成了证明. □

2 证明 I

对于任意给定的 $\boldsymbol{m} \in M$, 令 $f_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v} , \boldsymbol{m} \rangle$, 我们知道 $f_{\boldsymbol{m}}$ **是连续映射**, 因此有 $f_{\boldsymbol{m}}^{-1}(\{0\})$ 是闭集, 进而

$$M^{\perp} = \bigcap_{\boldsymbol{m} \in M} f_{\boldsymbol{m}}^{-1}(\{0\})$$

是闭集. □

2 证明 II

因为拓扑空间 V 是第一可数空间, 只需证明对任意 $\boldsymbol{v} \in V$ 和收敛于 $\boldsymbol{v}$ 的序列 $(\boldsymbol{v}_n)_{n=1}^{\infty} \in \left(M^{\perp}\right)^{\infty}$ 有 $\boldsymbol{v} \in M^{\perp}$ 即可.

对于任意给定的 $\boldsymbol{m} \in M$ 有 $\langle \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{m} \rangle = 0$ 成立, 故由**内积的连续性**知 $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{m} \rangle = 0$, 也即 $\boldsymbol{v} \in M^{\perp}$, 这就完成了证明. □

显然我们总有 $M \subseteq \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$ 成立, 但其中等号的取得**需要 M 满足一些其它的性质**.

内积空间 正交补 | 投影定理

内积空间 正交补 | 投影定理 中的设定

- 设 U 是 V 的子空间, 并且 U 是完备集.

投影定理 $V = U \oplus U^{\perp}$.

证明

对任意 $\boldsymbol{v} \in V$, 存在**正交极小化向量** $\boldsymbol{u} \in U$ 和 $\boldsymbol{u}^{\perp} \in U^{\perp}$ 使得 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^{\perp}$, 于是就有 $V = U + U^{\perp}$. 另一方面, 显然有 $U \cap U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, 因为只有 $\mathbf{0}$ 与自身正交. □

正交补的维数 设 W 是 V 的子空间,

1. 若 V 是有限维空间, 则 $\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W$.

2. 若 V 是无限维空间, W 是有限维空间, 则 $W^{\perp}$ 是无限维空间.

正交补的对合律 $U = \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

证明

$U \subseteq \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ 是显然的, 因此我们只需证明对任意 $\boldsymbol{w} \in \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ 都有 $\boldsymbol{w} \in U$ 成立即可. 在 $\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ 中对完备子空间 U 应用**投影定理**可得 $\boldsymbol{u} \in U$ 和 $\boldsymbol{v} \in U^{\perp}$ 使得 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, 由 $\boldsymbol{u} \in U \subseteq \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ 知 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{u} \in \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$, 于是

$$\boldsymbol{v} \in U^{\perp} \cap \left(U^{\perp}\right)^{\perp} \implies \boldsymbol{v} = \mathbf{0} ,$$

这就证明了 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$, 即 $\boldsymbol{w} \in U$. □

V 的正交补判定准则 $U^{\perp} = \{\mathbf{0}\} \implies U = V$.

内积空间 | Riesz 表示定理

内积空间 | Riesz 表示定理 中的设定

- 不产生歧义时, 令 $\mathbf{0}$ 同时表示 V 的加法幺元和 V 上的零泛函 $\boldsymbol{v} \mapsto 0$.

下面的定理使我们可以把任何有界的线性泛函 f 简单地等效为与某个向量 $\boldsymbol{v}_f$ 的内积运算, 并且 $\boldsymbol{v}_f$ 与 f 有相同的范数.

Riesz 表示定理（线性泛函） 设 $f \in \mathcal{L}(V, \mathbf{F})$ 是有界线性泛函, 则其有唯一的 Riesz 表示 $\boldsymbol{v}_f \in V$ 使得

$$\forall\, \boldsymbol{v} \in V \;:\; f(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_f \rangle \;.$$

唯一性 **证明**

假设 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ 都是使得 $f(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_f \rangle$ 对一切 $\boldsymbol{v} \in V$ 成立的 $\boldsymbol{v}_f$, 那么

$$||\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|| = \langle \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle - \langle \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle = f(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) - f(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = 0 \;,$$

于是 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$. □

注意到 $f(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_f \rangle$ 的必要条件是 $\boldsymbol{v}_f \in (\ker f)^{\perp}$, 而我们知道除非 f 是零映射, 否则始终有 $\dim(\ker f)^{\perp} = 1$, 这就意味着我们可以随意选取某个 $(\ker f)^{\perp}$ 的非零向量, 然后使之与某个适当的标量相乘从而得到 $\boldsymbol{v}_f$, 这样的想法就导出了下面的证明.

存在性 **证明**

当 $f = \mathbf{0}$ 时, 取 $\boldsymbol{v}_f = \mathbf{0}$ 即可.

当 $f \neq \mathbf{0}$ 时, 我们有 $\ker f \neq V$, 于是由 **V 的正交补判定准则** 可知 $(\ker f)^{\perp} \neq \{\mathbf{0}\}$, 随意选取某个非零向量 $\boldsymbol{v}_0 \in (\ker f)^{\perp}$, 令

$$\boldsymbol{v}_f = \frac{\overline{f(\boldsymbol{v}_0)}}{||\boldsymbol{v}_0||^2} \boldsymbol{v}_0 \;,$$

显然 $\boldsymbol{v}_f$ 也是 $(\ker f)^{\perp}$ 中的非零向量, 并且注意到

$$f(\boldsymbol{v}_f) = \frac{|f(\boldsymbol{v}_0)|^2}{||\boldsymbol{v}_0||^2} = ||\boldsymbol{v}_f||^2 \;,$$

于是

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_f \rangle &= \left\langle \left(\boldsymbol{v} - \frac{f(\boldsymbol{v})}{f(\boldsymbol{v}_f)} \boldsymbol{v}_f \right) + \frac{f(\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}_f\|^2} \boldsymbol{v}_f , \boldsymbol{v}_f \right\rangle \\
&= \left\langle \boldsymbol{v} - \frac{f(\boldsymbol{v})}{f(\boldsymbol{v}_f)} \boldsymbol{v}_f , \boldsymbol{v}_f \right\rangle + \left\langle \frac{f(\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}_f\|^2} \boldsymbol{v}_f , \boldsymbol{v}_f \right\rangle \\
&= \frac{f(\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}_f\|^2} \langle \boldsymbol{v}_f , \boldsymbol{v}_f \rangle \\
&= f(\boldsymbol{v}) ,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\boldsymbol{v} - \frac{f(\boldsymbol{v})}{f(\boldsymbol{v}_f)} \boldsymbol{v}_f \in \ker f \implies \left\langle \boldsymbol{v} - \frac{f(\boldsymbol{v})}{f(\boldsymbol{v}_f)} \boldsymbol{v}_f , \boldsymbol{v}_f \right\rangle = 0 . \qquad \square
$$

Riesz 表示的范数 设 $\boldsymbol{v}_f \in V$ 是 f 的 Riesz 表示, 则 $\|f\| = \|\boldsymbol{v}_f\|$.

证明

当 $f = \mathbf{0}$ 时, $\boldsymbol{v}_f = \mathbf{0}$, 显然 $\|f\| = \|\boldsymbol{v}_f\| = 0$. 下面我们考虑 $f \neq \mathbf{0}$ 时的情形, 此时必然有 $\boldsymbol{v}_f \neq \mathbf{0}$ 成立.

一方面, 对于任意满足 $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ 的 $\boldsymbol{v} \in V$, 由 **Cauchy—Schwarz 不等式** 有

$$
f(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_f \rangle \leqslant \|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{v}_f\| = \|\boldsymbol{v}_f\| ,
$$

于是 $\|f\| \leqslant \|\boldsymbol{v}_f\|$.

另一方面, 令 $\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}_f\|^{-1} \boldsymbol{v}_f$, 则 $\|\boldsymbol{v}\| = 1$, 并且有

$$
f(\boldsymbol{v}) = \left\langle \frac{\boldsymbol{v}_f}{\|\boldsymbol{v}_f\|} , \boldsymbol{v}_f \right\rangle = \|\boldsymbol{v}_f\| ,
$$

于是 $\|f\| \geqslant \|\boldsymbol{v}_f\|$.

综上所述, 我们有 $\|f\| = \|\boldsymbol{v}_f\|$. $\square$

有限维 Riesz 表示 设 V 是有限维空间, $\boldsymbol{v}_f$ 是 f 的 Riesz 表示, 则

$$
\boldsymbol{v}_f = \sum_{k=1}^{n} \overline{f(\boldsymbol{e}_k)} \boldsymbol{e}_k .
$$

证明

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{v}) &= f\left(\sum_{k=1}^{n}\langle \boldsymbol{v}\,,\,\boldsymbol{e}_k\rangle \boldsymbol{e}_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\langle \boldsymbol{v}\,,\,\boldsymbol{e}_k\rangle f(\boldsymbol{e}_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left\langle \boldsymbol{v}\,,\,\overline{f(\boldsymbol{e}_k)}\boldsymbol{e}_k\right\rangle \\
&= \left\langle \boldsymbol{v}\,,\,\sum_{k=1}^{n}\overline{f(\boldsymbol{e}_k)}\boldsymbol{e}_k\right\rangle\ .
\end{aligned}
$$

□

除了线性性质, 我们也可以利用 **内积的共轭线性** 来表示一些具有相同特征的有界泛函. 若同时利用这两则性质, 则可以得到更加广泛的结论

Riesz 表示定理 (共轭线性泛函) 设 $f : V \to \mathbf{F}$ 是有界共轭线性泛函, 即有如下性质成立, 则存在唯一的 $\boldsymbol{v}_f \in V$ 使得

$$
f : \boldsymbol{v} \mapsto \langle \boldsymbol{v}_f\,,\,\boldsymbol{v}\rangle\ .
$$

1. 可加性:

$$
\forall\ \boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{v}_2 \in V\ \ :\ \ f(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1)+f(\boldsymbol{v}_2)\ .
$$

2. 共轭齐次性:

$$
\forall\ \lambda \in \mathbf{F}\,,\ \boldsymbol{v} \in V\ \ :\ \ f(\lambda\boldsymbol{v}) = \overline{\lambda} f(\boldsymbol{v})\ .
$$

3. 有界性: 存在 $C \in \mathbf{R}$ 使得

$$
\forall\ \boldsymbol{v} \in V\ \ :\ \ ||f\boldsymbol{v}|| \leqslant C\,||\boldsymbol{v}||\ .
$$

内积空间 伴随映射 | 定义

伴随映射 若存在 $S \in \mathcal{L}(V, U)$ 使得对任意 $\boldsymbol{u} \in U$ 和 $\boldsymbol{v} \in V$ 有

$$\langle T\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, S\boldsymbol{v} \rangle ,$$

则称 S 是 T 的伴随映射, 记作 T^* .

对于伴随映射, 容易验证有如下性质成立:

伴随映射的性质 设 $a \in \mathbf{R}$ 并且 $S, T \in \mathcal{L}(U, V)$ 都有伴随映射, 则有如下性质成立:

- 零伴随: $\mathbf{0}^* = \mathbf{0}$.
- 恒等伴随: $\boldsymbol{I}_V^* = \boldsymbol{I}_V$.
- 可加性: $(S+T)^* = S^* + T^*$.
- 共轭齐次性: $(aT)^* = \overline{a}T^*$.
- 反序分配律: $(ST)^* = T^*S^*$.
- 对合律: $(T^*)^* = T$.
- 逆: 若 T 可逆, 则 T^* 可逆, 并且 $(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$.
- 映射类型: T 是单射当且仅当 T^* 是满射, T 是满射当且仅当 T^* 是单射.

伴随映射的核 若 T 有伴随映射, 则 $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$.

证明

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \in \ker T^* &\iff T^*\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \\
&\iff \langle \boldsymbol{u}, T^*\boldsymbol{v} \rangle = 0 \text{ 对一切 } \boldsymbol{u} \in U \text{ 成立} \\
&\iff \langle T\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \text{ 对一切 } \boldsymbol{u} \in U \text{ 成立} \\
&\iff \boldsymbol{v} \in (\operatorname{im} T)^\perp ,
\end{aligned}$$

由此可得 $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$.

伴随映射的范数 若 T 有伴随映射, 则 $||T^*|| = ||T||$.

内积空间 伴随映射 | 有限维性质

下面我们聚焦于有限维空间中的伴随映射.

有限维伴随映射的存在性 & 唯一性 设 U, V 是有限维空间, 则任何 $T \in \mathcal{L}(U, V)$ 都有唯一的伴随映射.

证明

这由 **Riesz 表示定理** 保证. □

事实上, 即使不要求线性, 满足条件 $\langle T\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, S\boldsymbol{v} \rangle$ 的映射 S 也是唯一的.

由 **伴随映射的核** 可以导出如下与之对偶的性质, 我们只需确保 $\operatorname{im} T$ 是 V 的有限维子空间并应用正交补的对合律即可.

有限维伴随映射的像 设 U 和 V 是有限维空间, 则 $\operatorname{im} T^* = (\ker T)^{\perp}$.

有限维伴随映射的特征值 设 V 是有限维空间并且 λ 是 $T \in \mathcal{L}(V)$ 的特征值, 则 $\overline{\lambda}$ 是 T^* 的特征值.

证明 I

设 $\boldsymbol{A}$ 为 T 在某个基下的矩阵, 则

$$\det\left(\overline{\boldsymbol{A}}^{T} - \overline{\lambda}\boldsymbol{I}\right) = \det\left(\overline{\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}}\right) = \overline{\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})} = 0 ,$$

因此 $\overline{\lambda}$ 是 T^* 的特征值. □

证明 II

由 λ 是 T 的特征值知 $T - \lambda\boldsymbol{I}_V$ 不是满射, 于是

$$\operatorname{im}(T - \lambda\boldsymbol{I}_V) \neq V \implies (\operatorname{im}(T - \lambda\boldsymbol{I}_V))^{\perp} \neq \{\boldsymbol{0}\} \implies \ker\left(T^* - \overline{\lambda}\boldsymbol{I}_V\right) \neq \{\boldsymbol{0}\} ,$$

于是 $T^* - \overline{\lambda}\boldsymbol{I}_V$ 不是单射, 即 $\overline{\lambda}$ 是 T^* 的特征值. □

伴随映射的矩阵 设 U 和 V 分别是以 $B_U = (\boldsymbol{u}_k)_{k=1}^{m}$ 和 $B_V = (\boldsymbol{v}_k)_{k=1}^{n}$ 为规范正交基的非零有限维空间, 记 $\boldsymbol{A}$ 为 T 在 B_U 和 B_V 下的矩阵, $\boldsymbol{A}'$ 为 T^* 在 B_V 和 B_U 下的矩阵, 则 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}'$.

证明

对每个 $T\boldsymbol{u}_k$ 应用**规范正交展开**可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \langle T\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{v}_1\,\rangle & \cdots & \langle T\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{v}_1\,\rangle & \cdots & \langle T\boldsymbol{u}_m\,,\,\boldsymbol{v}_1\,\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle T\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{v}_j\,\rangle & \cdots & \langle T\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{v}_j\,\rangle & \cdots & \langle T\boldsymbol{u}_m\,,\,\boldsymbol{v}_j\,\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle T\boldsymbol{u}_1\,,\,\boldsymbol{v}_n\,\rangle & \cdots & \langle T\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{v}_n\,\rangle & \cdots & \langle T\boldsymbol{u}_m\,,\,\boldsymbol{v}_n\,\rangle \end{pmatrix}\,,$$

同理可得

$$\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix} \langle T^*\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{u}_1\,\rangle & \cdots & \langle T^*\boldsymbol{v}_j\,,\,\boldsymbol{u}_1\,\rangle & \cdots & \langle T^*\boldsymbol{v}_n\,,\,\boldsymbol{u}_1\,\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle T^*\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{u}_i\,\rangle & \cdots & \langle T^*\boldsymbol{v}_j\,,\,\boldsymbol{u}_i\,\rangle & \cdots & \langle T^*\boldsymbol{v}_n\,,\,\boldsymbol{u}_i\,\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle T^*\boldsymbol{v}_1\,,\,\boldsymbol{u}_m\,\rangle & \cdots & \langle T^*\boldsymbol{v}_j\,,\,\boldsymbol{u}_m\,\rangle & \cdots & \langle T^*\boldsymbol{v}_n\,,\,\boldsymbol{u}_m\,\rangle \end{pmatrix}\,,$$

其中对任意正整数 $1\leqslant i\leqslant m$ 和 $1\leqslant j\leqslant n$ 有

$$\overline{\langle T\boldsymbol{u}_i\,,\,\boldsymbol{v}_j\,\rangle}=\langle\,\boldsymbol{v}_j\,,\,T\boldsymbol{u}_i\,\rangle=\langle\,T^*\boldsymbol{v}_j\,,\,\boldsymbol{u}_i\,\rangle\,,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 第 j 行第 i 列的元素的共轭等于 $\boldsymbol{A}'$ 第 i 行第 j 列的元素, 这就证明了 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}'$. □

内积空间 | Moore—Penrose 广义逆

Moore—Penrose 广义逆 设 $T^\dagger \in \mathcal{L}(V, U)$, $T^\dagger$ 是 T 的 Moore—Penrose 广义逆, 当且仅当其满足如下性质:

1. $TT^*T = T$;

2. $T^*TT^* = T^*$;

3. $\left(T^\dagger T\right)^* = T^\dagger T$;

4. $\left(T^\dagger T\right)^* = T^\dagger T$.

上面四则性质表明: TT^* 和 T^*T 分别是不会改变 T 和 T^* 的作用效果的自伴算子.

在下面的陈述中, 我们简称 **Moore—Penrose 广义逆** 为 Moore 广义逆.

有限维 Moore 广义逆的存在性 & 唯一性 设 U 是有限维空间, 则 T 有唯一的 Moore—Penrose 广义逆, 并且

$$T^\dagger = \left(T\big|_{(\ker T)^\perp}\right)^{-1} P_{\operatorname{im} T} \ .$$

域 Field

域 矩阵

域 行列式

线性空间 Linear Space

线性空间

线性空间 子空间

线性空间 向量组

线性空间 线性映射

有限维线性空间 Finite Dimensional Linear Space

有限维线性空间

有限维线性空间 矩阵表示

赋范空间 Normed Space

赋范空间

内积空间 Inner Product Space

内积空间

内积空间 正交性

内积空间 正交补

内积空间 伴随映射