

所属类别	2022 年“华数杯”全国大学生数学建模竞赛	参赛编号
本科组		CM2204791

基于改进二次式回归和遗传算法的熔喷非织造材料性能控制

摘要

熔喷非织造材料是目前广泛应用的一种空气过滤材料,其纤维细、材料比表面积大、蓬松性好、孔隙多、过滤性能优异,驻极处理后可在不增加过滤阻力的条件下大大提高过滤效率。在此基础上插层熔喷非织造材料制备工艺可有效提高产品性能,但与此同时也会受到工艺参数和结构变量的复杂影响,因而通过合适的方法对三者构建出适当的关系模型至关重要,有良好的理论价值与实践意义。

对于问题 1, 需要我们研究插层这一变量对结构变量和产品性能的变化, 并且分析插层率的大小在这一变化过程中所起到的影响。为验证插层是否对结构变量和产品性能有影响, 我们利用配对样本 t 检验的方法验证样本之间的差异性。而为定量描述插层对其的影响效果, 我们利用引入 **L1 正则化的二次式回归**对未插层和插层后的结构变量与产品性能关系进行建模, 发现 **L1 正则化**能够有效降低离群点对方程的影响。而回归方程的表现均十分优秀, 变量的拟合 **R2 分数**都超过了 **0.95**。

对于问题 2, 我们使用改进二次式回归和三次样条插值两种方法进行了对比, 发现改进二次式回归的 **R2 分数**同样很高。厚度方程的 **R2 分数**为 **0.8735**, 孔隙率方程的 **R2 分数**为 **0.9181**, 压缩回弹性率方程的 **R2 分数**为 **0.7388**, 它们相比插值方法而言更具有一般性, 所以选择改进二次式回归作为我们最终的模型。

对于问题 3, 通过两项工艺参数作为桥梁构建其与结构变量与产品性能之间的关联, 以一种类似于参数方程的形式描述联系。与前面的问题类似, 同样可以使用带有 **L1 正则化项的二次式回归**, 回归方程的 **R2 分数**也都超过了 **0.95**。而为了求解使得过滤效率最高的解, 将过滤效率和工艺参数构成的回归方程利用二次规划求解, **最终解得的最优解为热风速度为 799.759r/min, 接收距离为 15.587cm。**

对于问题 4, 该题在增加了多个约束的同时需要考虑两个目标: 过滤效率尽可能高的同时过滤阻力尽可能小, 属于**多目标规划**问题。选用理想点法求解**多目标规划**, 在分别得到两个优化的最优解后, 通过到两个解距离之和最短的基本法则选取最优解。选择**遗传算法**进行多目标规划求解, **最终求解的最优工艺参数为接收距离 52.67cm, 热风速度 1312.56r/min。**

综合而言, 模型的形式并不复杂, 但经过 **L1 正则化**修正以后回归效果非常明显, 通过**多目标规划**与**遗传算法**的方法能够相对准确地求出综合最优解。

关键词: 二次式回归, L1 正则化, 三次样条插值, 多目标规划, 遗传算法

一、问题重述

1.1 问题背景

近年来我国大部分省市的大气污染状况越发严重，对空气进行净化显得尤为重要。熔喷非织造材料纤维直径小，比表面积大，孔隙率高，是一种良好的空气过滤材料，其过滤效果好、透过阻力小、重量轻、容量大、环保、价格适中等特点代表了未来过滤材料的主要发展方向。但其纤维很细，蓬松性不够好，因而科学家通过在聚丙烯（PP）熔喷制备过程中将涤纶（PET）短纤等纤维插入熔喷纤维流，制备出了“Z 型”结构的插层熔喷非织造材料。大概过程如图 1 所示。

插层熔喷非织造材料制备工艺可有效提高产品性能，但生产过程中会受到诸多因素的影响以及交互影响，因此，需要结合各个参数和变量，如热空气速度、压缩回弹性、过滤效率等，构建出通过工艺参数决定结构变量，从而进一步决定最终产品性能之间的关系模型。这一模型的提出对于提高产品性能控制机制、保障生产过程有着重要的理论和实践意义。

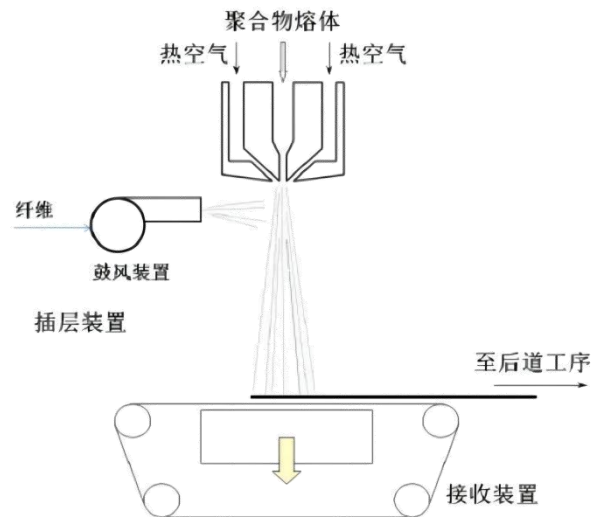


图 1 插层熔喷工艺流程示意图[1]

1.2 问题提出

根据不同的工艺参数设定（插层率、接收距离、热风速度、厚度、孔隙率、压缩回弹性率、过滤效率、过滤阻力、透气性），需要解决以下问题：

- （1）插层后结构变量、产品性能如何变化，并且这一变化如何收到插层率的影响。
- （2）根据表 1 所给的 8 个工艺参数组合，得出工艺参数与结构变量之间存在着怎样的关系，并且得出预测的结构变量值填入表 1。
- （3）结构变量与产品性能，以及结构变量之间、产品性能之间存在着怎样的关系；并且在上一问的基础上，求解产品过滤效率最高时的工艺参数值。
- （4）在一系列各方的条件和要求下（如接收距离、热风速率、厚度、压缩回弹性率等的限制），为使过滤效率尽可能高，过滤阻力尽可能小，工艺参数需要设置为多少。

二、问题分析

2.1 问题 1 的分析

问题 1 需要我们研究插层这一变量对结构变量和产品性能的变化，并且分析插层率的大小在这一变化过程中所起到的影响。需要将数据分为未插层的对照组和插层后的实验组。并且为了研究插层是否对结构变量和产品性能有影响，在验证这一点时需要控制插层率相同这一变量。加之分析插层前后样本的指标差异属于配对样本的差异性检验，使用配对样本 t 检验可以做到这一任务。而为探究插层率大小对结构变量和产品性能的影响，由于这 25 条样本不存在时间上的顺序性，故需要先探究结构变量之间的关系和产品性能之间的关系，然后引入结构变量重新修正方程。可以使用线性回归或多项式回归描述变量之间的关系。

2.2 问题 2 的分析

问题 2 需要研究工艺参数和结构变量之间的关系，除了延续问题 1 中的回归方法以外，还可以考虑使用三次样条插值的方法做对比。但问题并没有指定需要预测未插层样本还是插层样本，若预测插层样本则还需要控制插层率相同这一单一变量。

2.3 问题 3 的分析

问题 3 需要研究结构变量与产品性能之间的关系，还需要研究结构变量之间和产品性能之间的关系。在问题 1 当中其实已经探究过结构变量之间和产品性能之间的关系，这里需要探究结构变量与产品性能之间的关系。从问题 2 当中可以获得启发，通过两项工艺参数作为桥梁构建其与结构变量与产品性能之间的关联，以一种类似于参数方程的形式描述变量间的联系。而为了求解使过滤效率最高的解，则将过滤效率和工艺参数构成的回归方程作为一个函数，利用二次规划求解即可。

2.4 问题 4 的分析

问题 4 在问题 3 的基础上增加了一些限制：对接收距离的约束、热空气速度的约束属于对自变量范围的界定；对厚度的约束、压缩回弹性率的约束以及过滤效率不可能超过 100% 属于非线性约束。问题同时需要考虑两个目标：过滤效率尽可能高的同时过滤阻力尽可能小，属于多目标规划问题。多目标规划问题通常的解决策略是将其转化为一个单目标规划问题求解。能够将多目标转化为单目标的方法有很多，包括将两个目标加权求和、作商等，这里选用理想点法求解多目标规划。它的基本原理是分别将两个优化的最优解求出来后，通过到两个解距离之和最短的基本法则选取最优解。另外，考虑到结构变量、产品性能和工艺参数之间的关系可能是多项式，甚至可能是嵌套的多项式，若传统的优化算法不奏效则可考虑用遗传算法求解。

三、模型假设

为了使问题得到简化，我们做出以下合理假设：

1. 不考虑实验过程中的测量误差或失误，即所有的样本实验数据都是真实可靠且有效的。这一假设的目的是为了数据的真实性，无需对数据进行异常检测后再进行分析。
2. 由于问题 2 意在研究工艺参数与结构变量之间的关系，属于本身既有性质的变化，故而在预测中无需考虑插层率因素。
3. 在实际生产过程中，还会有吸音性能、力学性能、纤维直径、保温性等变量的考虑，在本题中考虑到问题背景和对实际生产情况的简化，仅考虑问题中给出的因素。

四、符号说明

我们将问题中出现的变量及其解释意义列在下表中：

符号	说明
d	厚度（mm）
u	孔隙率（%）
k	压缩回弹性率（%）
f	过滤阻力（Pa）
η	过滤效率（%）
t	透气性（mm/s）
X	插层率（%）
s	接收距离（cm）
v	热风速度（r/min）
β	回归过程中的系数
H	二次项系数构成的二次型
b	一次项系数
c	常数项

五、问题建模与求解

5.1 问题 1 的建模与求解

根据所给定的实验数据，可以将插层前后的样本作为配对样本去进行进一步挖掘与研究。但 data1 中没有控制插层率大小相同，因而本文在实验组中选取了 data3 中重复试验的平均值，接下来绘制了配对样本的箱线图，以验证插层对样本的各项属性是否存在显著性影响，结果如图 2 所示。

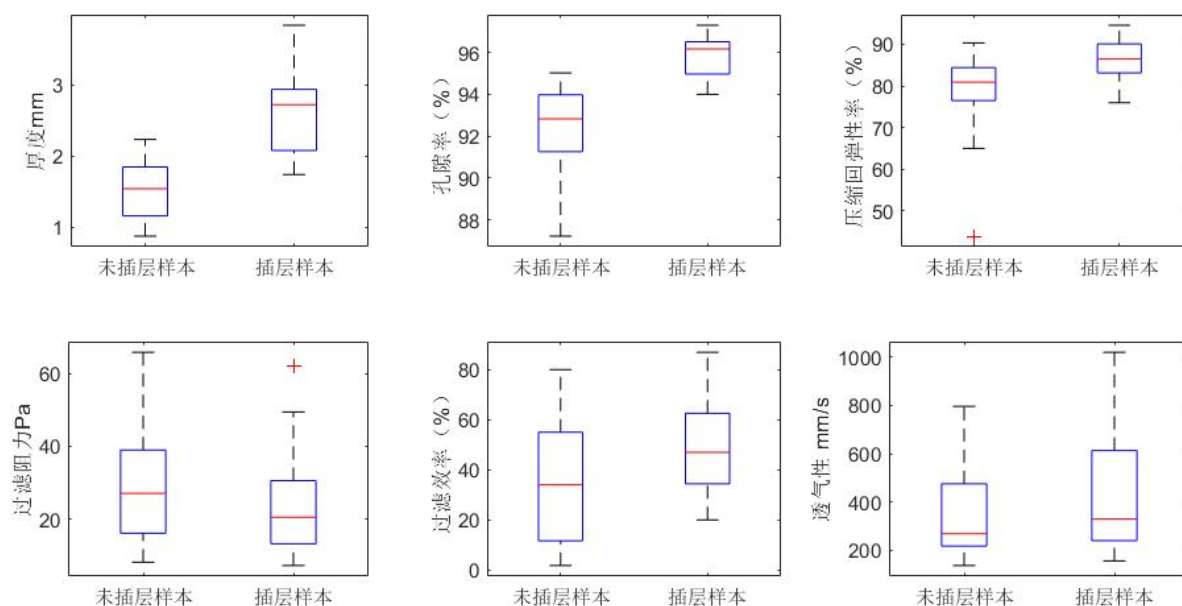


图 2 配对样本箱线图

从图 2 可以得出，未插层样本和插层样本之间的均值差异总体而言较大，尤其在厚度、孔隙率、压缩回弹性率等指标上尤为明显。但为了进一步量化这种差异，可通过配对样本 t 检验的方式来进行处理，其检验结果如表 1 所示。

表 1 配对样本 t 检验结果

检验统计量	厚度 mm	孔隙率 (%)	压缩回弹性率 (%)	过滤阻力 Pa	过滤效率 (%)	透气性 mm/s
t -value	-15.6067	-11.3059	-3.2215	7.8664	-7.6957	-5.6510
p 值	0.000	0.000	0.036	0.000	0.000	0.000
CI 下界	-1.2326	-4.1531	-11.7819	4.1507	-18.2551	-101.7507
CI 上界	-0.9446	-2.8709	-2.5805	7.1035	-10.5342	-47.3101
标准误	0.3488	1.5532	11.1457	3.5767	9.3524	65.9440

从配对样本 t 检验的结果中可以看出，无论是结构变量还是产品性能，实验组和对照组的六项指标均存在显著性差异（满足所设定的 0.05 显著性水平），即插层对结构变量和产品性能均有显著影响，能够降低过滤阻力，提高厚度、孔隙率、压缩回弹、过滤效率和透气性。

另外，这 25 组对照实验并无时间上的先后顺序，为探究插层率对各个变量的具体影响，需要先对变量之间的相关性进行相应的检验，以挖掘插层率与哪些变量联系最为密切，且变量与变量之间存在着怎样的相互作用。因此，我们绘制了本文数据中变量的相关系数热力图，如图 3 所示。

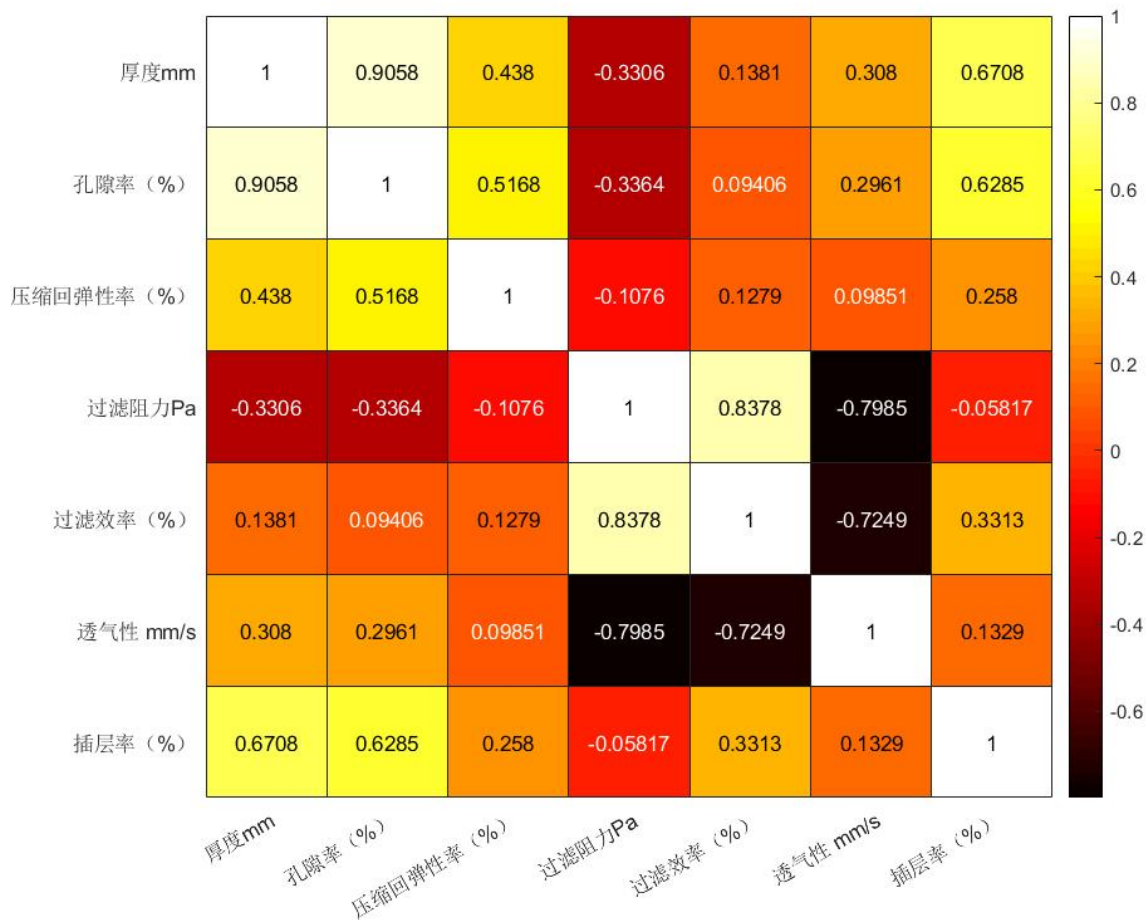


图3 变量间的相关系数热力图

由图3可得，变量的厚度与孔隙率相关性最高，且均为正相关；并且过滤阻力、过滤效率、透气性这三个变量相关性也具有较高的相关性；压缩回弹性率与其他变量的相关系数并不高，最高的相关系数仅为与孔隙率之间的相关系数值0.5168。插层率与厚度和孔隙率关联程度最高，说明插层率对厚度和孔隙率影响最为直接和显著。

综合上述分析，我们认为分析插层率对其他变量的影响作用应该建立在原有变量的作用机理基础上，这也是由于本身插层熔喷非织造材料的制备工艺是在传统熔喷工艺的基础上加入的插层装置，增加了横向室温气流，进而形成三维网状结构，从而对产品的各项性能产生影响[2]。因而本文接下来分为两个部分对影响效应的量化进行建模。

5.1.1 插层率对厚度与孔隙率关系的调节

为探究插层率对厚度与孔隙率间关系的调节作用，绘制了如图4的插层前后孔隙率与厚度的散点图。

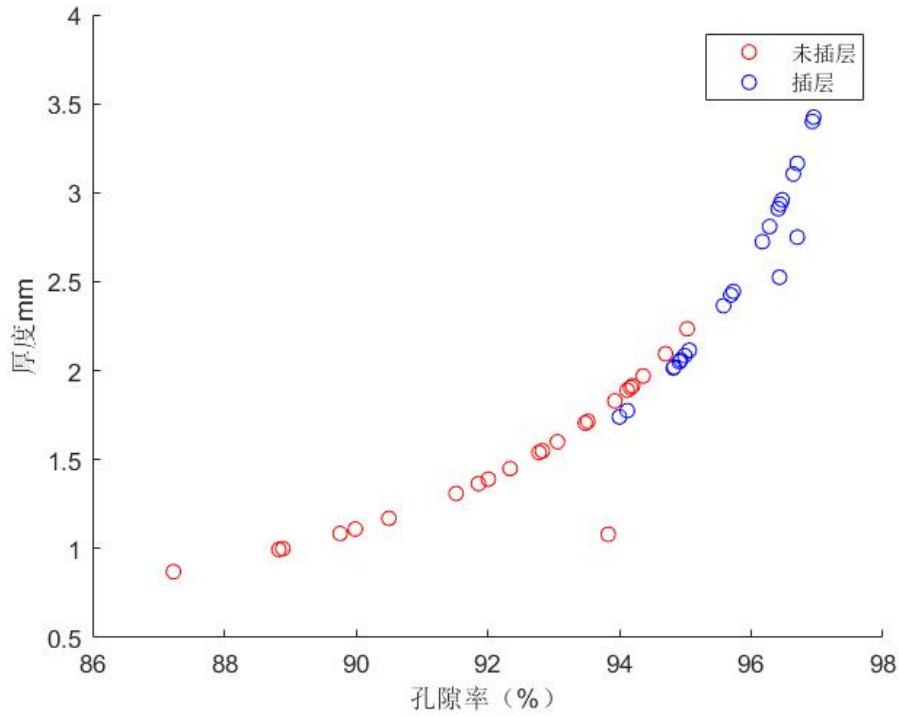


图4 孔隙率与厚度分布图

由上图可得，在未插层之前孔隙率与厚度之间呈现出类似于二次曲线的变化规律。因而对于未进行插层之前的孔隙率与厚度，本文认为它们服从这样的规律：

$$\hat{d} = \beta_2 u + \beta_1 u + \beta_0 \quad (1)$$

但由图4也可以看出，尽管数据大体上服从二次式分布，但也存在极少数的离群点。这些离群点的存在会影响最终回归方程的效果和可解释性，因此我们应使用更鲁棒的回归模型。

正则化可以控制模型空间，通过收缩的方式，限制模型的大小，用样本内误差变大作为代价，减小参数误差，使得样本外的预测效果变好，是一种防止模型过拟合的有效手段。除了泛化原因，奥卡姆剃刀原理和贝叶斯估计也都支持着正则化[3]。为使拟合的结果更鲁棒，特此在模型的损失函数中添加了L1正则化项。其基本形式如(2)式所示，并且最优的拟合结果需要满足如(3)式所示条件。

$$L = \sum_{i=1}^n (\hat{d} - d)^2 + |\beta_2| + |\beta_1| + |\beta_0| \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \beta_2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \beta_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \beta_0} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

在此基础上，我们对比了不同拟合模型的效果，并将拟合曲线绘制在图 5 中。

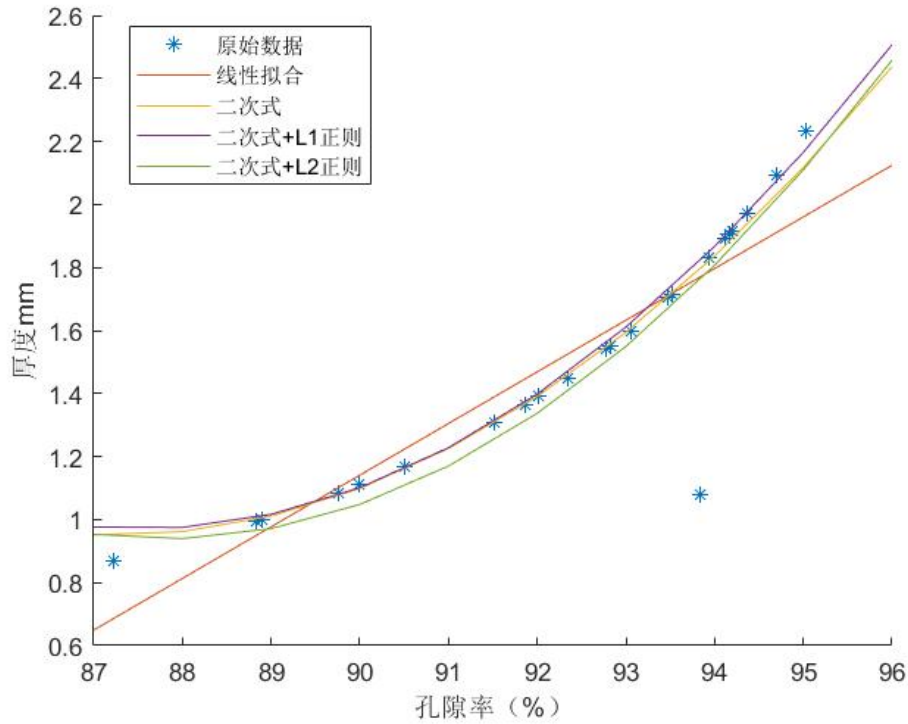


图 5 不同模型拟合曲线示意图

根据图 5 中的拟合结果可以发现，在二次多项式拟合的基础上运用 L1 正则化得到的模型 R2 分数最高，达到了 0.9605。之前本文已经得出，插层能够同时对厚度和孔隙率造成影响，故而插层率 X 对厚度和孔隙率间交互效应的影响规律应与(1)式类似，即都为二次式，其具体公式如下所示。

$$d = \beta_{11}u^2 + \beta_{12}uX + \beta_{22}X^2 + \beta_1u + \beta_2X + \beta_0 \quad (4)$$

但插层率 X 在这一过程中的独立调节是否存在多项式成分并不确定，即方程当中可能不存在 X 的二次项，只需要 X 的一次项和 X 与孔隙率之间的交互效应即可。所以我们对添加了 X² 前后对模型的变化，发现无 X 的二次项模型拟合结果会更好，其 R2 分数达到了 0.9873。

方程的解析式如(5)式。

$$d = 0.0233u^2 + 0.009162uX - 4.099u - 0.8725X + 181 \quad (5)$$

该方程说明插层率对厚度的影响更多通过与孔隙率之间的交互效应来调节。因为从事实上看，插层率的升高能够增加材料厚度，因此系数为负的 X 一次项即 X 的独立作用并没有占据主导因素。另外，X 的独立作用和孔隙率的独立作用都呈负相关，本文认为这是由于插层率对孔隙率的作用为线性正相关，因此二者具有相同的作用效益，并且无二次项成分。拟合可以采取曲面拟合的形式[4]，效果如图 6 所示。

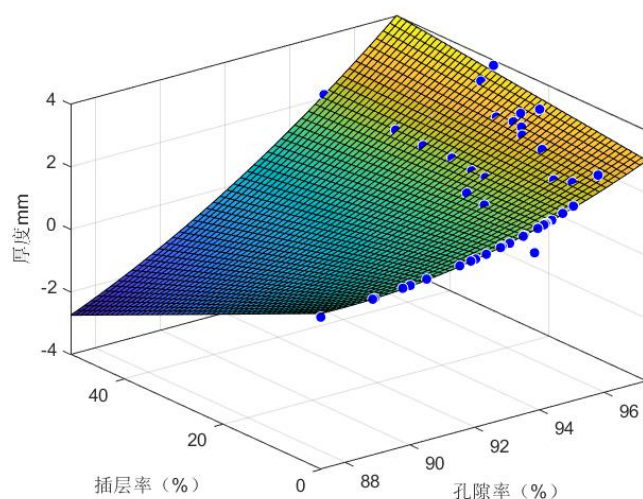


图6 插层率对孔隙率与厚度关系的影响示意图

5.1.2 插层率对产品性能的调节

为探究插层率对产品性能的调节作用，我们绘制了插层前后过滤阻力与过滤效率、透气性的散点图，如图7所示。

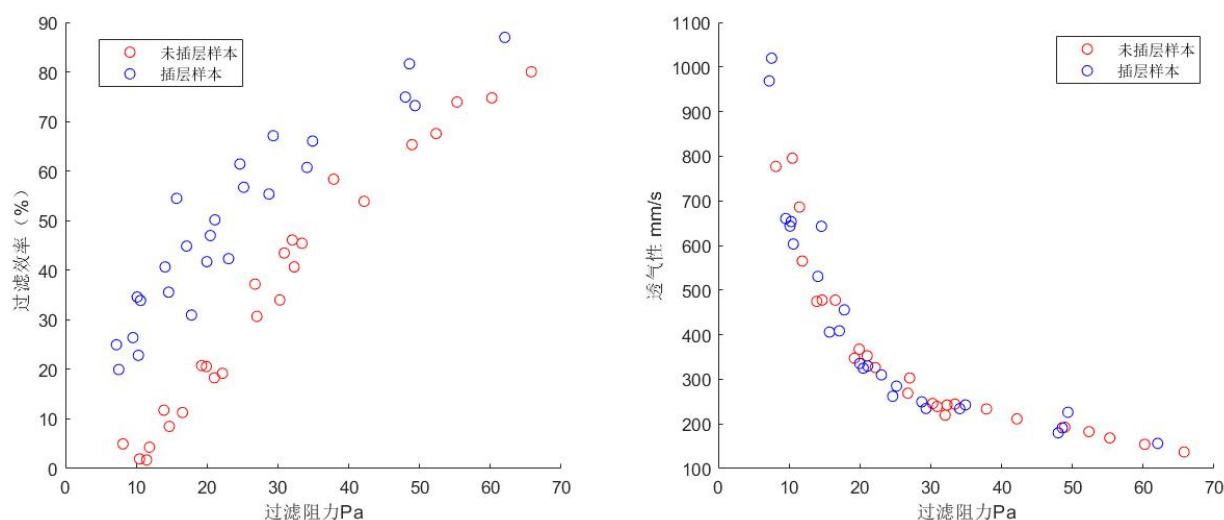


图7 过滤阻力与过滤效率、透气性散点图

由图7可以看出，过滤阻力和过滤效率、透气性之间的关系较为明显。对于过滤阻力与过滤效率，插层样本的水平明显比未插层样本的水平更高。而未插层样本的过滤阻力与过滤效率呈现出非常显著的线性相关关系。利用 regress 工具得到未插层样本的过滤阻力与过滤效率之间的回归 R2 分数为 0.9668，具有很强的线性关系；而过滤阻力和透气性的关系则类似于分式函数。

因此，我们不妨对透气性取倒数，并假设未插层样本过滤阻力与透气性的关系如下。

$$f = \beta_2 \frac{1}{t^2} + \beta_1 \frac{1}{t} + \beta_0 \quad (1)$$

在此基础上，分别验证线性回归和二次回归下过滤阻力与透气性倒数的关系，发现同样在 L1 正则化下，线性回归的 R2 分数为 0.9489，而二次回归的 R2 分数为 0.9942，明显优于线性回归。但考虑到过滤效率与过滤阻力之间存在着相关关系，也就是说，二者可能存在交互效应，所以对未插层样本而言三者的建模关系应该为：

$$f = \beta_{22} \frac{1}{t^2} + \beta_{21} \frac{\eta}{t} + \beta_2 \eta + \beta_1 \frac{1}{t} + \beta_0 \quad (2)$$

根据插层率在结构变量当中的作用机理，考虑插层率在方程当中的作用时不需要考虑二次项，而只需考虑线性作用和交互项即可，故而得到(3)式。

$$f = \beta_{22} \frac{1}{t^2} + \beta_{21} \frac{\eta}{t} + \beta_{32} \frac{X}{t} + \beta_{31} X\eta + \beta_3 X + \beta_2 \eta + \beta_1 \frac{1}{t} + \beta_0 \quad (3)$$

经回归分析，方程的 R2 系数为 0.9892，因而该模型十分成功。插层率在阻力方程当中和厚度方程一样没有出现二次项，而是以一次项和与另外两个变量的交互效应起作用，这反映了其对于产品性能的影响。

另外，为了进一步深入描述过滤效率与透气性之间的交互效应，以及插层率在这一交互效应当中的影响机理，我们仿照(4)式给出下面的方程：

$$\eta = \beta_{11} \frac{1}{t^2} + \beta_{12} \frac{1}{t} X + \beta_{22} X^2 + \beta_1 \frac{1}{t} + \beta_2 X + \beta_0 \quad (4)$$

这一方程的拟合结果与前面恰恰相反，X 的二次项在方程当中能有效提高拟合的 R2 分数。最后得到的 R2 分数为 0.9366，说明拟合水平相对较高。得到如下方程。

$$\eta = -468000 \frac{1}{t^2} - 99.45 \frac{1}{t} X - 0.02772 X^2 + 18410 \frac{1}{t} + 2.085 X - 24.96 \quad (5)$$

其中对过滤阻力和过滤效率分别的拟合效果示意图如图 8 所示：

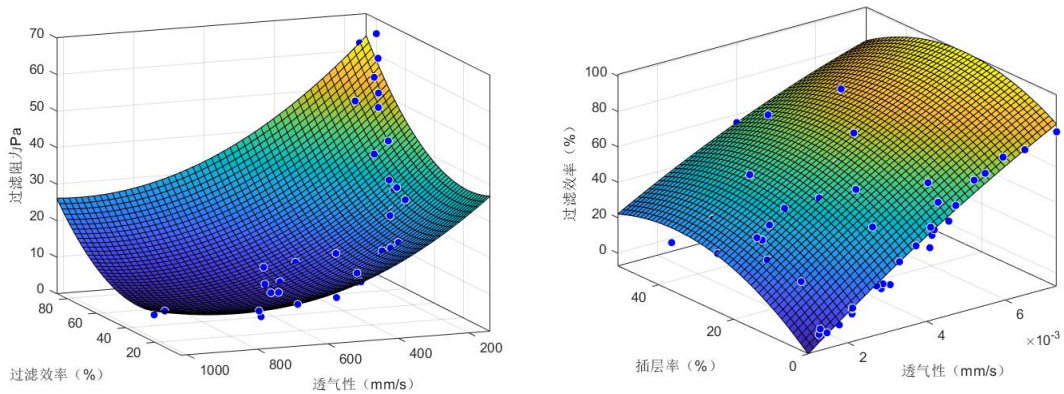


图 8 过滤阻力和过滤效率拟合效果示意图

综上所述，由配对样本可以观察到，插层对结构变量和产品性能都有显著影响，它可以降低过滤阻力，加大厚度，提升产品的孔隙率，压缩回弹，过滤效率和透气性。其中，通过绘制变量间的相关系数热力图，发现插层率与厚度和孔隙率关联程度最高，说明插层率对这两者的影响最为显著。根据散点图和模型的损失函数中添加的 T1 正则化项，得到拟合效果最好的解析式，该方程说明插层率对厚度的影响更多通过其与孔隙

率之间的交互效应来调节；并且利用 regress 工具，由类似方法可得插层率以线性方式对过滤阻力和过滤效率的交互效应起作用。

5.2 问题 2 的建模与求解

对于问题 2，我们以接收距离和热风速度为自变量，将三项结构变量作为因变量进行建模。为了形成对比，除了使用在问题 1 当中应用到的二次式回归以外，我们还可以使用三次样条插值法。这是目前使用较为广泛的一种方法，因为三次样条插值由分段三次曲线连接而成，在连接点处二阶可导，具有良好的光滑性，能够准确反应插层熔喷非织造材料制造过程的真实特性，并且具有较高的精度和稳定性[5]。由于数据表 1 中没有控制插层率相同这一变量，我们在进行建模时应用的数据不包括进行插层的对照组数据以及数据表 3 中控制插层率相同的数据。

三次样条插值的目的是将区间点之间的部分用三次函数光滑地填充。具体而言，就是将原始长序列分割成若干段构造多个三次函数（每段一个），使得分段的衔接处具有二阶导数连续的性质。三次样条插值的两段三次式之间需要满足这样一个基本要求：

$$\begin{cases} a_i x_i^3 + b_i x_i^2 + c_i x_i + d_i = a_{i+1} x_i^3 + b_{i+1} x_i^2 + c_{i+1} x_i + d_{i+1} \\ 3a_i x_i^2 + 2b_i x_i + c_i = 3a_{i+1} x_i^2 + 2b_{i+1} x_i + c_{i+1} \\ 6a_i x_i + 2b_i = 6a_{i+1} x_i + 2b_{i+1} \end{cases} \quad (1)$$

利用二次式回归，若以厚度为例，我们的方程模型如下。

$$d = \beta_{11} s^2 + \beta_{12} sv + \beta_{22} v^2 + \beta_1 s + \beta_2 v + \beta_0 \quad (2)$$

在孔隙率的方程模型中，我们对比了线性方程和二次式回归两种形式。经过拟合，厚度和孔隙率的回归效果都较好。对于厚度而言，带有 L1 正则的二次式回归效果最优，但对于孔隙率而言，线性的方程拟合效果却远远优于非线性的拟合方程。在未插层样本中，R2 分别可以达到 0.8735 和 0.9181，因而该模型具有合适的方程式以及较好的回归效果。二者的方程分别为：

$$\begin{aligned} d = & 0.001131s^2 + 6.1 \times 10^{-6}sv - 3.2 \times 10^{-6}v^2 \\ & - 0.01967s + 0.008059v - 2.855 \end{aligned} \quad (3)$$

$$u = 1.7s + 0.6772v + 91.88 \quad (4)$$

但对于压缩回弹性率而言，该拟合性较差，即使引入 L1 正则化项 R2 分数仍然仅有 0.57，也就是说对于压缩回弹性率而言，其与接收距离和热风速度之间可能并不存在明显的回归方程。这可能是由于压缩回弹性率与厚度和孔隙率之间的关系还未被探究。结合问题 1 中给出的方程形式，我们依然考虑用二次式对三者进行回归。得到的回归方程如下。

$$k = \beta_{11} d^2 + \beta_{12} du + \beta_{22} u^2 + \beta_1 d + \beta_2 u + \beta_0 \quad (5)$$

经过 L1 正则化后的二次式回归，解得 R2 分数为 0.7388，该结果相对较好。得到的方程形式为：

$$k = 9.177d^2 - 12.15du + 1.619u^2 + 1120d - 283u + 12390 \quad (6)$$

由于厚度和孔隙率也能够用 s 和 v 进行建模，我们便可以推导出 k 的数值。拟合的结果如图 9 所示，可以看到数据点分布均较为贴合拟合方程。

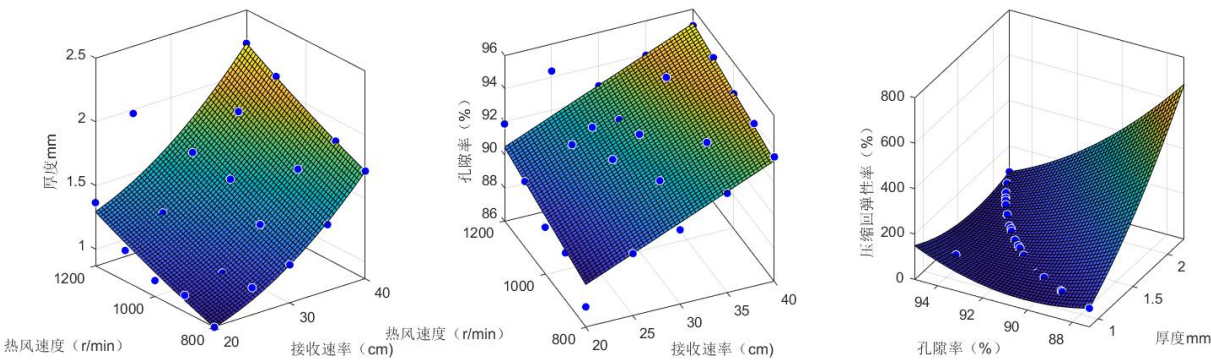


图 9 二次式回归拟合结果示意图

我们还可以对比插值方法，从而与前面的方法形成对照。三次样条插值不仅能够经过所有的数据点，而且在数据点生成的网格内部能够连续且自然地填充数据，这一插值方法相对而言更接近真实情况，且具有良好的准确性与可靠性[6]。但三次样条插值是在数据生成的网格区间内填充，如果需要进行小幅度外推则需要利用边界上的三次式方程进行预测。

经过三次样条插值的结果如图 10 所示。可以看到，填充结果相较于普通的回归拟合而言更贴近原始数据，并且插值结果连续且处处可导，属于自然插值。

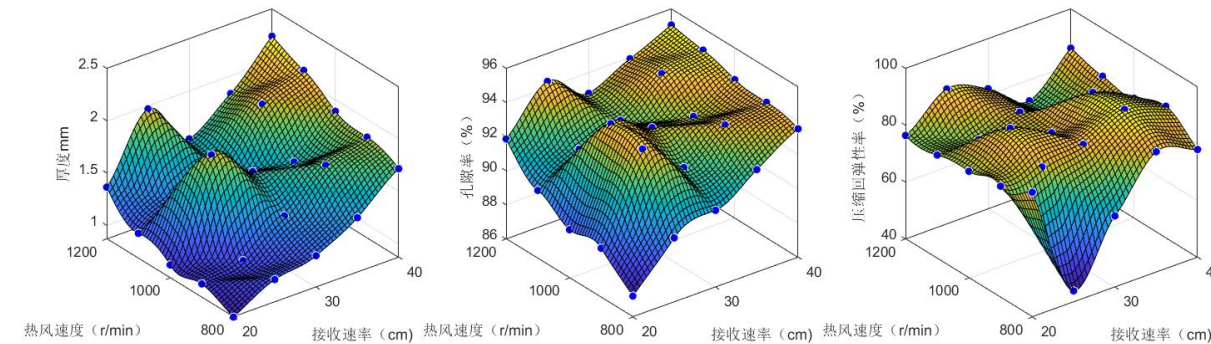


图 10 三次样条插值的结果

但热风速度 1250r/min 并不在数对照组据网格中，这是因为该处使用的二次式回归的方法比三次样条插值法得到的结果可能更具一般性。压缩回弹性率的数值可以由厚度和孔隙率进行回归计算。

综上，问题 2 中未插层样本预测的结构变量数据结果如下表所示。

表 2. 问题 2 的结果

接收距离 (cm)	热风速度 (r/min)	厚度 mm	孔隙率(%)	压缩回弹性率(%)
38	850	1.6414	93.0561	85.5357
33	950	1.4713	92.3477	82.8864

28	1150	1.4859	92.1086	89.1722
23	1250	1.4381	91.4003	98.8255
38	1250	2.1718	94.9328	82.8915
33	1150	1.7244	93.2861	88.3852
28	950	1.2449	91.1703	76.9461
23	850	0.9803	89.5236	62.4125

综上所述，以接收距离和热风速度为自变量，将三项结构变量作为因变量进行建模。利用 L1 正则化后的二次回归得到拟合方程，并用三次样条插值与该方法对照。三次样条插值在数据点生成的网格内可以连续自然地填充数据，使得回归拟合更加贴近原始数据，由此得到预测的结构变量数据，结果如表 2 所示。

5.3 问题 3 的建模与求解

在问题 1 和问题 2 当中已经讨论过结构变量之间的关系以及产品性能之间的关系，因而接下来本文将探讨结构变量与产品性能之间的关系。

我们以三项结构变量（厚度、孔隙率、压缩回弹性）为自变量，以三项性能变量（过滤阻力、过滤效率、透气性）为因变量进行回归测试，分别测试了线性回归和二次式回归的效果，发现其分布都相当分散，R2 分数都没有超过 0.1。这也说明，我们无法直接用结构变量对产品性能进行回归。而问题 2 当中提供的工艺参数拟合为本题提供了一个很好的思路，即可以以工艺参数为中间变量，从而形成结构变量与性能变量之间的桥梁效应。

对于工艺参数与结构变量之间的回归效果在问题 2 中已有相关结论（三项结构变量与工艺参数之间均存在明确的回归方程），因此需要进一步探究工艺参数对产品性能的回归效果。

本题中同样采取带有 L1 正则项的二次式回归对过滤阻力、过滤效率和透气性进行拟合。以阻力这一变量为例，我们的拟合方程如下。

$$f = \beta_{11}s^2 + \beta_{12}sv + \beta_{22}v^2 + \beta_1s + \beta_2v + \beta_0 \quad (1)$$

结果发现对于产品性能而言，工艺参数与产品性能的拟合效果均成效显著，过滤阻力的 R2 分数达到了 0.9733，过滤效率的 R2 分数可以达到 0.9515，而透气性的 R2 分数也有 0.9552，回归模型均取得相当好的表现。最终得到的拟合方程如下。

$$f = 0.03473s^2 - 0.003673sv + 1.45 \times 10^{-5}v^2 - 0.2523s + 0.1457v - 45.63 \quad (2)$$

$$\eta = 0.02237s^2 - 0.003868sv + 3.307 \times 10^{-5}v^2 - 0.273s + 0.1604v - 57.31 \quad (3)$$

$$t = 0.6564s^2 - 0.04577sv + 0.0006081v^2 + 25.71s - 0.5868v + 294.1 \quad (4)$$

对应的拟合曲面图如图 11 所示：

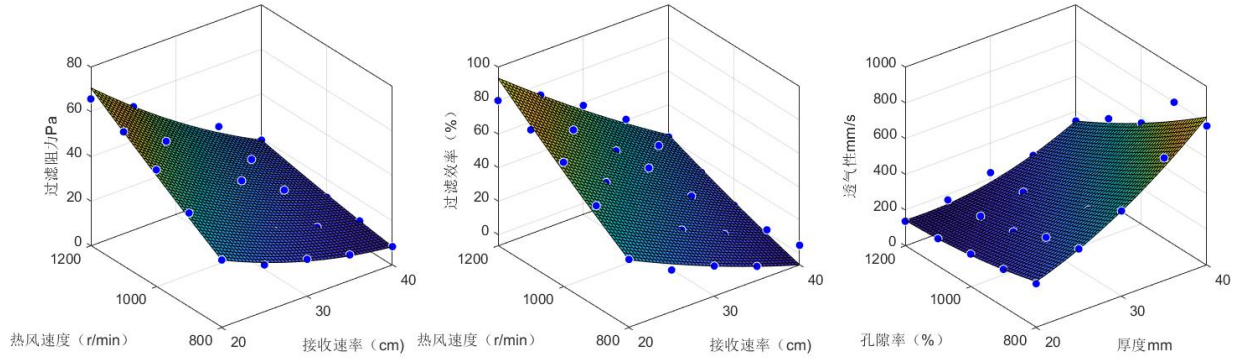


图 11 产品性能的拟合效果示意图

从图 11 中可见，数据点都大致分布在回归方程曲面附近。通过对结构变量和产品性能这两个变量的拟合，我们能够以接收速率和热风速度为中间变量，搭建这六个变量（厚度、孔隙率、压缩回弹性率、过滤阻力、过滤效率、透气性）之间的桥梁。变量之间的联系作用如图 12 所示。

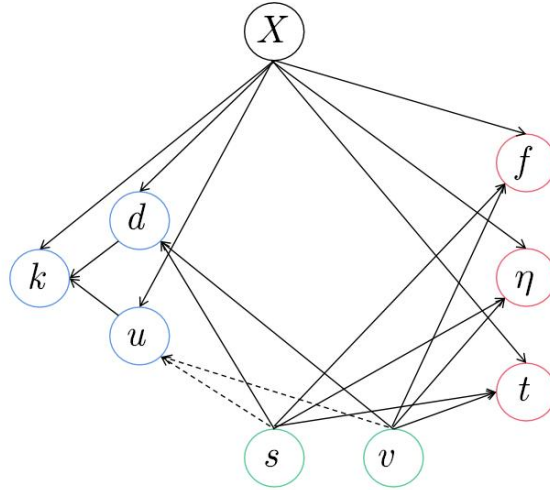


图 12 变量之间作用示意图

图 12 中实线代表以二次式进行回归效果更好，虚线代表以一次方程的形式进行回归效果更好。变量通过图 12 中的网络相互联系，构成了一个统一的整体。而对于过滤效率的最大值对应的工艺参数，我们将其抽象为一个二次规划问题来进行求解。由于工艺参数的值不可能取负，且效率最多为 100%，得到优化问题的形式如下：

$$\begin{aligned} \max_{x=[s,v]} \eta(x) &= \frac{1}{2} x^T H x + c^T x + b \\ s.t. \quad &\begin{cases} s, v \geq 0 \\ \eta(x) \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

其中，优化问题中的二次型 H 、一次项系数 c 和常数项 b 都在前面的回归过程当中得到了求解。通过优化器求解得到的最优解为：当热风速度为 799.759r/min，接收距离为 15.587cm 时得到最优解，将近 99.999%。

事实上，能够让效率逼近 100%的 (s,v) 的解不止一组，但在使得效率更高的基础上，还需要考虑到工艺条件是否简单易行。热风速度在 800r/min 左右而接收距离为 15.587cm 这一条件相对而言是最容易满足的解，所以选择此解作为最优解。我们将使效率能够接近 100%的解构造为一个隐函数，如图 13 所示。

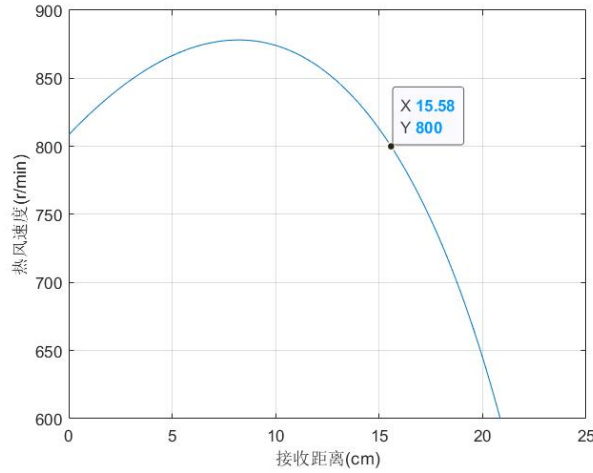


图 13 最优效率下接收距离和热风速度间关系示意图

综上所述，在研究结构变量和产品性能之间的关系时，以三项结构变量为自变量，以三项性能变量为因变量进行回归测试，以工艺参数为中间中间变量，形成结构变量与性能变量之间的桥梁效应。采用带有 L1 正则项的二次回归对过滤阻力，过滤效率和透气性进行拟合，发现工艺参数与产品性能的拟合效果均成效显著，并得到具有相当明确回归关系的拟合方程，最后绘制出变量之间的作用示意图如图 12 所示，相互联系构成统一整体。

5.4 问题 4 的建模与求解

问题 4 在问题 3 的基础上增加了约束条件，主要是对厚度、压缩回弹性率的约束和对距离、热风速度自身的约束。但是在本题中除了需要优化过滤效率外，还需要最小化过滤阻力，即：

$$\begin{aligned}
 \max_{x=[s,v]} \eta(x) &= \frac{1}{2} x^T H_1 x + c_1^T x + b_1 \\
 \min_{x=[s,v]} f(x) &= \frac{1}{2} x^T H_2 x + c_2^T x + b_2 \\
 s.t. \quad &\begin{cases} 0 \leq s \leq 100 \\ 0 \leq v \leq 2000 \\ 0 \leq \eta(x) \leq 1 \\ 0 \leq d(s,v) \leq 3 \\ 0 \leq k(s,v) \leq 0.85 \end{cases} \quad (1)
 \end{aligned}$$

因而这是一个典型的多目标规划问题。对于这一多目标规划问题，我们选择将其转

化为单目标规划问题后使用遗传算法求解。遗传算法是一类借鉴生物界自然选择和自然遗传机制的随机搜索算法，通过模拟生物的遗传、变异等自然现象搜索函数极值[7]。其主要特点是直接对结构对象进行操作，不存在求导和函数连续性的限定；具有更好的全局寻优能力；不需要确定的规则就能自动获取和指导优化的搜索空间，自适应地调整搜索方向[8,9]。

遗传算法借鉴了生物学的概念，首先需要对问题进行编码，通常是将函数编码为二进制代码以后，随机产生初始种群作为初始解。随后是遗传算法的核心操作之一——“选择”，通常选择首先要计算出个体的适应度，根据适应度不同来采取不同选择方法进行选择，常用方法有适应度比例法、期望值法、排位次法、轮盘赌法等[10]。

在自然界中，基因的突变与染色体的交叉组合是常见现象，这里也需要在选择以后按照一定的概率发生突变和组合。不断重复上述操作直到收敛，得到的解即最优。遗传算法基本思想如图 14 所示。

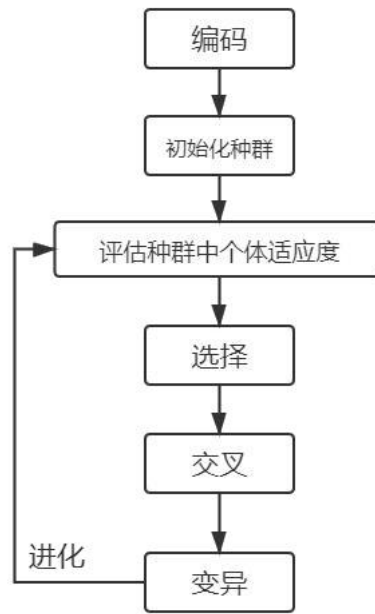


图 14 遗传算法基本思想示意图

我们分别对效率函数和阻力函数求最小值，得到了两个最优解 (s_1, v_1) 和 (s_2, v_2) 。为将多个目标综合为单一目标并求出综合最优解，本文采取理想点法求解。它基于这样一个事实：与最优解越近的点，其目标函数值往往也越接近最优值。所以在可行域内可以分别求两个目标的最优解，然后再在可行域内找点，让这个点到两个目标最优解的距离之和最小。其表达式如下所示。

$$\min_{x=[s,v]} \sqrt{(s-s_1)^2 + (v-v_1)^2} + \sqrt{(s-s_2)^2 + (v-v_1)^2}$$

$$s.t. \begin{cases} 0 \leq s \leq 100 \\ 0 \leq v \leq 2000 \\ 0 \leq \eta(x) \leq 1 \\ 0 \leq d(s,v) \leq 3 \\ 0 \leq k(s,v) \leq 0.85 \end{cases} \quad (2)$$

上面的优化同样可以应用遗传算法求解。我们将三次遗传算法的迭代曲线和三个最优解的关系绘制在图 15 中，可以看到模型的结果在逐渐收敛，误差的波动也在逐渐下降。使得效率最优的解往往是让工艺参数向更小的方向走；而使得阻力最优的解却对工艺参数要求较高；这里综合的最优解实际上就是两个目标解的中点。

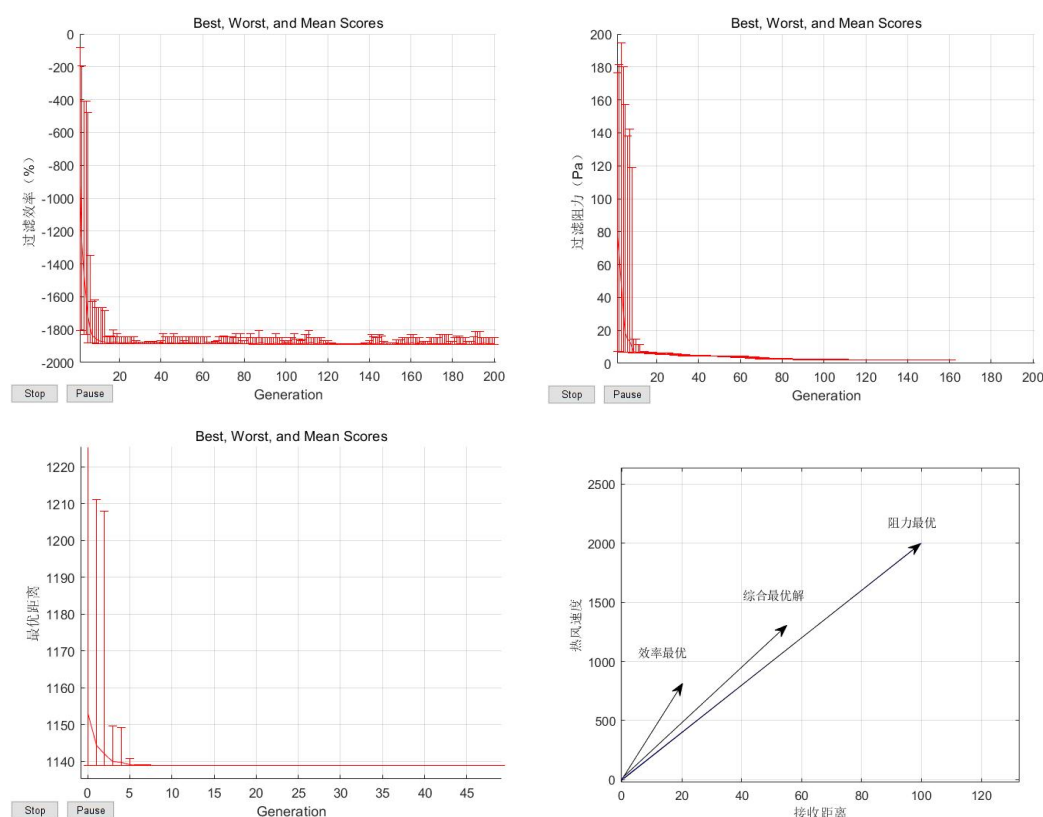


图 15 遗传算法的迭代曲线和最优解

综上所述可以得出，为了防止熔喷非织造过滤材料因过滤阻力大使得大量颗粒堵塞孔隙而致使过滤效率迅速下降的现象发生，最优工艺参数应为接收距离 52.67cm，热风速度 1312.56r/min，能够使得过滤效率尽可能高的同时过滤阻力尽可能小。

六、模型的优缺点分析

6.1 模型的优点

综合上述的模型建立与求解，我们认为，我们的模型有如下优点：

1. 利用带有 L1 正则化的二次式回归相比传统回归而言能够更好地处理偏离平均水平较大的数据，修正异常点带来的影响使结构更具一般性。
2. 将三项结构变量与三项产品性能指标之间的具体联系进行了探索和建模，对插层前后的样本进行了明确区分和研究，实验结果更具科学性，也在图 12 中以更直观的方式揭示了变量之间的作用机理。
3. 多目标规划的求解使用遗传算法进行搜索，相比传统算法而言提升了速度。并且这一想法可以扩展到任意高维自变量的函数极值求解。

6.2 模型的缺点

尽管模型已经表现出比较良好的特征，但仍存在一些问题：

1. 利用二次式回归的预测结果是有一定偏差的，并且难以预测发生突发情况导致的结构变量和产品性能的变化。
2. 遗传算法在求解过程中可能并不能严格满足约束条件，由于初始化种群的随机性以及变异、重组操作的随机性，得到的结果可能不完全一致。这时需要人工进行一些微调，耗费精力。

6.3 展望

自上世纪 80 年代起，全球的熔喷非织造材料快速增长，以年增长率 10%~20%突飞猛进地发展。插层熔喷复合非织造可用于过滤、吸音以及保温领域，不同的工艺条件对产品具有不同性能方面的影响。尤其在环境污染愈发受到关注的今天，熔喷非织造材料作为口罩生产的重要原材料，加之其所拥有的良好过滤性能、生产工艺简单、成本低、质量轻等优势，受到国内外企业的广泛关注。通过数学建模的方式对复杂的工艺参数的作用及其交互影响进行定量描述，有利于明晰产品性能的调控机制，从而在生产实践中更好地进行相应安排。本文对这些变量和参数间建立了定量的关系模型，并对相关结构变量数据进行了预测，同时也在相应条件下得出了工艺参数的最优解，因而具有良好的理论价值与实践意义，所运用的模型方法在实际应用中也具有着较好的推广价值，可在一定程度上作为参考。

参考文献

- [1]邹志伟. 插层熔喷气流场模拟及生产工艺参数的优化[D]. 天津工业大学, 2020.
- [2]武辉. 插层熔喷气流场模拟及其过滤材料性能的研究[D].天津工业大学, 2018.
- [3]周志华, 王珏. 机器学习及其应用 2009[M], 北京: 清华大学出版社, 2009.
- [4]张婷. 一元二元三次样条空间上的曲线曲面拟合[D]. 大连理工大学, 2019.
- [5]宋又廉.基于三次样条插值的采样数据光滑曲线形成法[J].数据采集与处理, (02): 63-66, 1999.
- [6]牛志辉, 陈波, 卜春尧. 基于L1 正则化逻辑回归模型的速度大脉冲预测及影响因素分析[J]. 地震工程学报, 44(02):306-320, 2022.
- [7]马永杰,云文霞. 遗传算法研究进展[J].计算机应用研究, 29(04): 1201-1206, 2012.
- [8] 史峰. MATLAB 智能算法 30 个案例分析[M], 北京: 北京航空航天大学出版社, 2010.
- [9] 吴渝, 唐红, 刘洪涛. 网络群体智能与涌现计算[M], 北京: 科学出版社, 2012.
- [10]李士勇, 李研, 林永茂. 智能优化算法与涌现计算[M], 北京: 清华大学出版社, 2020.

附录

附录 1：问题 2 的三次样条插值

```
ft = 'cubicinterp';

% Fit model to data.
[fitresult1, gof] = fit( [tx, ty], t1, ft, 'Normalize', 'on' );

subplot(1,3,1)
plot( fitresult1, [tx,ty], t1 );
xlabel( '接收速率 (cm)' );
ylabel( '热风速度 (r/min)' );
zlabel( '厚度 mm' );

% Fit model to data.
[fitresult2, gof] = fit( [tx, ty], t2, ft, 'Normalize', 'on' );

subplot(1,3,2)
plot( fitresult2, [tx,ty], t2 );
xlabel( '接收速率 (cm)' );
ylabel( '热风速度 (r/min)' );
zlabel( '孔隙率 (%)' );

% Fit model to data.
[fitresult3, gof] = fit( [tx, ty], t3, ft, 'Normalize', 'on' );

subplot(1,3,3)
plot( fitresult3, [tx,ty], t3 );
xlabel( '接收速率 (cm)' );
ylabel( '热风速度 (r/min)' );
zlabel( '压缩回弹性率 (%)' );
```

附录 2：问题 2 的经过 L1 正则化的二次回归

```
options=gaoptimset('PlotFcns', {@gaplotrange}, 'Generations', 50);
[x, fval]=ga(@distance, 2, [], [], [], [], [20, 800], [100, 2000], [], options)
function e=opt_eta(x)
    s=x(1);v=x(2);
    e=0.2237*s^2-0.003868*s*v+(3.307e-5)*v^2-0.273*s+0.1604*v-151.31;
```

```

    e=-e;
end
function [g, h]=cons(x)
    g=[opt_d(x)-3; opt_k(x)-0.85];
    h=[];
end
function d=opt_d(x)

d=0.001131*x(1)^2+(6.1e-6)*x(1)*x(2)-(3.2e-6)*x(2)^2-0.01967*x(1)+0.008059*
x(2)-2.855;
end
function u=opt_u(x)
    u=1.7*x(1)+0.6722*x(2)+91.88;
end
function k=opt_k(x)
    d=opt_d(x); u=opt_u(x);
    k=9.177*d^2-12.15*d*u+1.619*u^2+1120*d-283*u+12390;
end
function f=opt_f(x)

f=0.03473*x(1)^2-0.003673*x(1)*x(2)+(1.45e-5)*x(2)^2+0.2523*x(1)+0.1457*x(2)
)+15;
end
function dis=distance(x)
    dis=sqrt((x(1)-100)^2+(x(2)-861)^2)+sqrt((x(1)-100)^2+(x(2)-2000)^2);
end

```

附录 3：插层率对孔隙率和厚度关系的影响

```

%CREATEFIT(U, X, D)
% Create a fit.
%
% Data for 'untitled fit 1' fit:
%     X Input : u
%     Y Input : X
%     Z Output: d
% Output:
%     fitresult : a fit object representing the fit.
%     gof : structure with goodness-of fit info.
%
% 另请参阅 FIT, CFIT, SFIT.

```

```
% 由 MATLAB 于 05-Aug-2022 12:28:34 自动生成

%% Fit: 'untitled fit 1'.
[xData, yData, zData] = prepareSurfaceData( u, X, d );

% Set up fittype and options.
ft = fittype( 'poly21' );
opts = fitoptions( 'Method', 'LinearLeastSquares' );
opts.Robust = 'LAR';

% Fit model to data.
[fitresult, gof] = fit( [xData, yData], zData, ft, opts );

% Plot fit with data.
h = plot( fitresult, [xData, yData], zData );
% Label axes
xlabel( '孔隙率 (%) ' );
ylabel( '插层率 (%) ' );
zlabel( '厚度 mm' );
grid on
```