应用方程对二维 stewart 平台进行分析与求解

摘要

Stewart 平台并联机构在航空、航天、海底作业、地下开采、制造装配等行业有着广泛的应用。本文针对一个二维 Stewart 平台的运动问题进行了研究探讨。为解决问题，本文在此建立了相应模型，并用 matlab 软件进行了分析与求解。

针对问题一，我们先建立了一个不等式组初步估计，然而效果并不明显。接下来我们根据点之间的距离关系建立了方程组，求出使得方程组有解的参数范围。其解即为要求。

针对问题二和问题三，我们在第一问的基础上设计了相应的 matlab 程序，并初次尝试求解。模拟程度较高，效果较好。

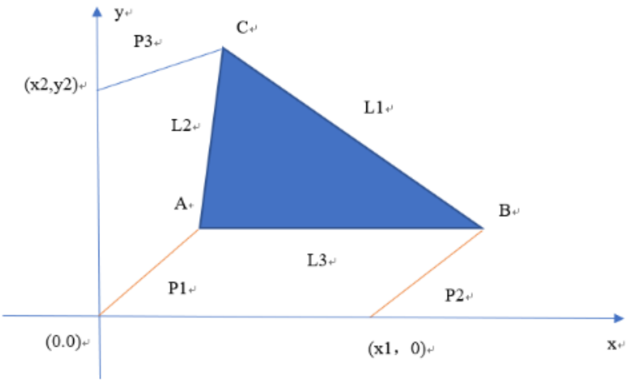
问题四则发生了一些变化：p2 的值成为了变参。这里我们的一个方程改变了身份成为了一个函数。那么，问题四实际上也就是一个多元函数解与性质探究的问题。

最后对建立的模型进行了评价和推广，对处理相关实际问题有一定的参考价值。

关键词：构建方程组，寻找几何关系，matlab 程序设计与求解

1. 问题重述

Stewart 平台在工程科学中有着重要意义。题目给出了一个二维状态下的 Stewart 平台。图 1-1 给出的是平面型 Stewart 平台示意图，其中有一个一个三角形平台（△ABC）位于一个由 3 条边（p_1，p_2和 p_3）控制的固定平面 xoy 中。图 1-1 中的三角形（△ABC）表示平面型 Stewart 平台，它的长度由 3 个参数 L_1，L_2，L_3确定。平台的具体位置由 3 个可变的参数 p_1，p_2，p_3控制。具体如图 1-1 所示：



（图 1-1.题目描述配图）

题目要求解决的问题：

1. 数学建模。在已知的 L_1，L_2，L_3，x_1，x_2，y_2条件下，在给定一组参数 p_1，p_2，p_3的值后，判断能否得到 Stewart 平台的一个位置，即能否得到 A 点坐标（x，y）和角度 θ 的值。如果能，则称它为 Stewart 平台的一个位姿，并建立模型，计算出一组固定参数下的全部位姿。

2. 模型检验。在问题 1 的基础上具体化，x_1=5，(x_2，y_2)=(0,6)，L_1=L_3=3，$L_2=3\sqrt{2}$，p_1=p_2=5，p_3=3，求 Stewart 平台的全部位姿。

3. 将问题 2 中的支柱长度 p_2=5 改为 p_2=7，其他条件不变，计算出 Stewart 平台的全部位姿。

4. 在问题 2 的基础上，确定问题 2 中 p_2 的长度，使得何时只存在两种位姿，何时没有位姿。

2. 问题分析

题目要求判断是否存在位姿，属于存在性问题。分析题目，首先要弄清楚“支柱”的概念。因为后面题目的要求是“在给定一组参数 p_1，p_2，p_3的值后，计算出 A 点的坐标（x，y）和角度 θ 的值”。坐标中没有高度 z，说明它只是一个二维平面。这里的支柱，实际上只是拥有长度的线段，并不是起把 Stewart 平面支撑到某高度的作用。所有的线，角，点，都在一个二维平面内。

介于此，本文对各个小问作出如下分析：

问题一：能否求解位姿，是一个求参数取值范围问题。首先题目中有许多边，这就使得我们可以构造三角形三边关系对范围进行初步缩小。然而这还

不够，因为一个三角形形状改变时不同的三角形相互关联也会相应的发生变化，所以需要进一步细化。那么，我们可以根据“求解”这一环节进行模型构建。待求量为 A 的坐标（x,y）和θ，这里我们有一个重要思想，即：用一(几)个量表示所有量。根据参数方程的知识，可以解得 B 的坐标为：($x+L_3\cos\theta, y+L_3\sin\theta$）。而 B 到点 S 的距离已知，则可构建一个等式方程。同样的方法，点 C 与点 T 距离已知，又可以构建一个等式方程。能否求出位姿就是求方程组是否有解。结果用计算机设计程序求解即可。

问题二，三：均是对问题一中所建立的模型的应用与模拟检验

问题四：此时 p_2 的值发生了改变，已经从方程变成了函数。那么这里成为了一个由方程限制了定义域的多元函数零点问题。将 p_2^2 表示为 x, y, θ 的函数。这里元数太多，我们便将 x, y 用参数形式表示，然后用**计算机程序设计**研究二元函数的图像与性质。

3. 模型假设与符号说明

3.1 模型假设

针对本问题，作出如下假设：

（1）所有点、线都在一个平面内；

（2）A 点和 B 点可以在任意一个象限；

（3）三角形 ABC 形状固定，（x_1, 0），(x_2, y_2)是定点。

3.2 符号说明

A, B, C	分别表示二维 Stewart 平台的三个端点
S, T	分别表示（x_1, 0），(x_2, y_2)两点
p_1, p_2, p_3	分别表示 OA, BS, CT 的长度
L_1, L_2, L_3	分别表示 BC, AC, AB 的长度
x, y	分别表示点 A 的横纵坐标
θ	表示直线 AB 与 x 轴的夹角
θ_1	表示直线 AB 的倾斜角，满足 $\theta=\|\theta_1\|$
Φ	表示直线 OA 的倾斜角
α，β	分别表示∠SOT, ∠BAC

(表 3-1.符号的意义)

注：其余符号及含义见正文出现处的说明

运算关系：

（1）$\theta=|\theta_1|$

（2）$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OS}\cdot\overrightarrow{OT}}{|\overrightarrow{OS}||\overrightarrow{OT}|}=\frac{X_1X_2}{X_1\sqrt{X_2^2+Y_2^2}}$(向量夹角公式)

（3）$\cos\beta=\frac{L_2^2+L_3^2-L_1^2}{2L_2L_3}$（余弦定理）

4. 思路建立

那么，这道题的思路其实非常明确。首先，当参数确定有解时，我们完全可以根据距离寻找**几何关系**。首先，OA 距离是非常明确的，而且这里的 A 坐标题目中已经设了出来。那么我们可以思考一下，BC 两点的坐标应该如何表示？回顾中学阶段极坐标与参数方程的知识，只要有偏角和长度，我们就可以写出 BC 坐标的参数式。然后，我们根据 CT,BS 长度**构建方程组**即可非常方便地进行求解。

5. 模型的建立与求解

5.1 建模前的准备

问题的模型抽象

待求量为 A（x,y）和θ，根据参数方程的知识，可以解得 B 的坐标为：（$x+L_3\cos\theta$, $y+L_3\sin\theta$）。而 B 到点 S 的距离已知，则可构建一个方程。同样的方法，点 C 与点 T 距离已知，又可以构建一个方程。问题即为求解方程组。而题目最后，p_2的值发生了改变，已经从方程变成了函数。那么这里成为了一个由方程限制了定义域的多元函数零点问题。这样就把一个几何问题抽象成了一个参数范围-方程求解-函数零点的一个代数综合问题

5.2 模型构建与算法设计

⑴问题 1

首先，初步估计三个参数 x,y,θ的范围。

让 OA 转动，势必会影响到 AT 与 AS 的长度。显然，AS∈[$|x_1-p_1|$, x_1+p_1],AT∈[$|p_1-\sqrt{x_2^2+y_2^2}|$, $p_1+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$].而 AS,AT 又可以与 L_2, L_3, p_2, p_3建立关系。

经分析，可以建立不等式组：

$$\begin{cases} |x_1-p_1|\geqslant|L_3-p_2|,\quad x_1+p_1\leqslant L_3+p_2 \\ |p_1-\sqrt{x_2^2+y_2^2}|\geqslant|L_2-p_3|,\quad p_1+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\leqslant L_2+p_3 \\ |x_1-p_2|\geqslant|p_1-L_2|,\quad x_1-p_2\leqslant p_1-L_2 \\ |p_3-\sqrt{x_2^2+y_2^2}|\geqslant|L_3-p_1|,\quad p_3+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\leqslant L_3+p_1 \end{cases}$$

解这个不等式组，可以得到参数的一个初步范围。

但即便如此，这就是参数的一个范围了吗？并不是。因为参数间的变化势必互相牵制，相互影响。要想得到一个真正的范围，需要进一步分析。当然，这个不等式组也并非完全没有意义。至少，它帮我们缩小了参数的范围。

参数间的牵制关系如何表示?这就需要建立一个合理的数量关系。

对于 B 点，我们可以写出它的坐标（$x+L_3\cos\theta, y+L_3\sin\theta$），由 BS 的距离可构建一个方程。可写出 C 的坐标为（$x+L_2\cos(\theta+\beta), y+L_2\sin(\theta+\beta)$）,CT 距离又可以建立一个方程。于是我们可以得到如下的**方程组**：

$$\begin{cases} (x+L_3\cos\theta-x_2)^2+(y+L_3\sin\theta-y_2)^2=p_3^2 \\ x^2+y^2=p_1^2 \\ (x+L_2\cos(\theta+\beta)-x_1)^2+(y+L_2\sin(\theta+\beta))^2=p_2^2 \end{cases}$$

求使得这个**方程组**有解的参数范围即可

如果要求出**方程组**的所有解，一旦知道所有常量和参数的值，我们可以编辑 **matlab 程序求解**。

⑵问题 2

问题 2 对题目中的各个参数进行了赋值。那么，我们可以根据问题 1 中的方法进行模型构建，且有 S(5,0),T(0,6).

同样的方法，我们对两点坐标具体化：

$B(x+3\cos(\theta), y+3\sin(\theta)), C(x+3\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4}), y+3\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4}))$

由 BS 距离为 $p_2=5$, CT 距离为 $p_3=3$, 可以**构建方程组**：

$$\begin{cases} (x+3\cos\theta-5)^2+(y+3\sin\theta)^2=25 \\ x^2+y^2=25 \\ (x+3\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4}))^2+(y+3\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-6)^2=9 \end{cases}$$

由三角函数的和角公式可知，$\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=\cos\theta-\sin\theta$，$\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\sin\theta+\cos\theta$

我们可以编写如下 **matlab 程序**：

```
>> syms x y z(这里的 z 就是待求的θ)
>> eq1=(x+3*cos(z)-5)^2+(y+3*sin(z))^2-25;
>> eq2=(x+3*cos(z)-3*sin(z))^2+(y+3*sin(z)+3*cos(z)-6)^2-9;
```

```
>> eq3=x^2+y^2-25;
>> s=solve(eq1,eq2,eq3,'x','y','z')
```

运行结果如下：

```
>> syms x y z
eq1=(x+3*cos(z)-5)^2+(y+3*sin(z))^2-25;
eq2=(x+3*cos(z)-3*sin(z))^2+(y+3*sin(z)+3*cos(z)-6)^2-9;
eq3=x^2+y^2-25;
s=solve(eq1,eq2,eq3,'x','y','z')
警告: Do not specify equations and variables as character vectors. Instead, create symbolic variables with syms.
> In solve>getEqns (line 446)
  In solve (line 226)

s =

  包含以下字段的 struct:

    x: [1×1 sym]
    y: [1×1 sym]
    z: [1×1 sym]
```

（图 5-1.问题 2 的程序）

```
>> double(s.x)

ans =

   -1.3784

>> double(s.y)

ans =

    4.8063

>> double(s.z)

ans =

   -0.7208
```

（图 5-2.问题 2 的结果）

那么，A 点的坐标为（-1.3784, 4.8063），角度为-0.7208（弧度），负号表示斜向下。

不难发现模拟效果良好，应证了模型的正确性。

(3)问题 3

更改数据后，设计程序：

```
>> syms x y z
eq1=(x+3*cos(z)-5)^2+(y+3*sin(z))^2-49;
eq2=(x+3*cos(z)-3*sin(z))^2+(y+3*sin(z)+3*cos(z)-6)^2-9;
eq3=x^2+y^2-25;
s=solve(eq1,eq2,eq3,'x','y','z')
警告: Do not specify equations and variables as character vectors. Instead, create symbolic variables with syms.
> In solve>getEqns (line 446)
  In solve (line 226)

s =

  包含以下字段的 struct:

    x: [1×1 sym]
    y: [1×1 sym]
    z: [1×1 sym]
```

(图 5-3.问题 3 的程序)

运行结果：

```
>> double(s.x)

ans =

   -4.3148

>> double(s.y)

ans =

    2.5264

>> double(s.z)

ans =

   -0.6732
```

(图 5-4.问题 3 的结果)

也就是说，A 点的坐标(-4.3148,2.5264),角度θ为-0.6732（弧度），负号表示斜向下。模拟效果依然很好。

(4)问题 4

这里，我们的情况似乎有一点变化。因为我们的参数发生了一些变化。我们需要重新构建一下我们的**方程组**：

$$\begin{cases}(x+3\cos\theta-5)^2+(y+3\sin\theta)^2=p_2^2,\\ x^2+y^2=25,\\ (x+3\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4}))^2+(y+3\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-6)^2=9,\end{cases}$$

那么这里，p_2^2是一个函数。由于元的数量较多，这里使用 A 的参数方程进行消元：

$$\begin{cases}X=5\cos\Phi\\ Y=5\sin\Phi\end{cases}\quad（\Phi\text{是 OA 的偏转角}）$$

那么，定义域由方程$(5\cos\Phi+3\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4}))^2+(5\sin\Phi+3\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-6)^2=9$确定，目标函数$p_2^2$的表达式为：

$$p_2^2=(5\cos\Phi+3\cos\theta-5)^2+(5\sin\Phi+3\sin\theta)^2,$$

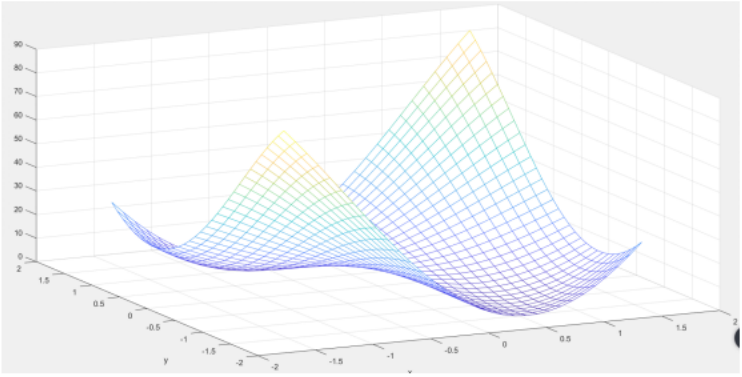
设计程序，研究一下这个函数的图象：

```
>> clear;
x1=[-1.57:0.1:1.57];
y1=[-1.57:0.1:1.57 ];
[x y]=meshgrid(x1,y1);
z=(5*cos(x)+3*cos(y)-5).^2+(5*sin(x)+3*sin(y)).^2;
figure
mesh(x,y,z);
xlabel('x');
ylabel('y');
```


```
>> clear;
x1=[-1.57:0.1:1.57];
y1=[-1.57:0.1:1.57 ];
[x y]=meshgrid(x1,y1);
z=(5*cos(x)+3*cos(y)-5).^2+(5*sin(x)+3*sin(y)).^2;
figure
mesh(x,y,z);
xlabel('x');
ylabel('y');
>>
```

（图 5-5.研究目标函数图象）

图象如图：



（图 5-6.目标函数图象）

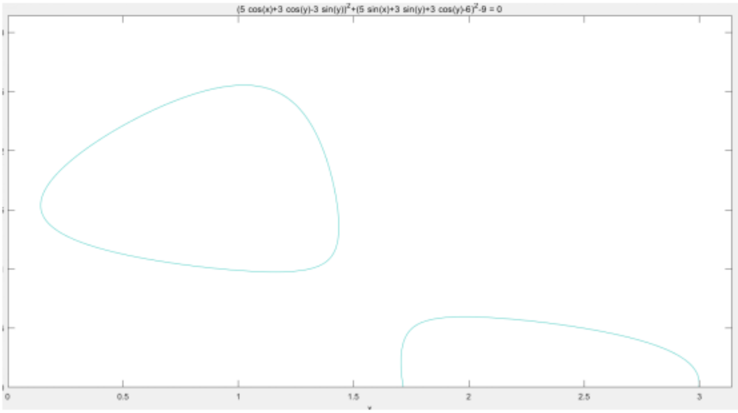
那么，再对唯一的方程 $(5\cos\Phi+3\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4}))^2+(5\sin\Phi+3\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-6)^2=9$ 绘制曲线：

程序指令：

```
>> syms x y
ezplot('(5*cos(x)+3*cos(y)-3*sin(y)).^2+(5*sin(x)+3*sin(y)+3*cos(y)-6).^2-9',[0,pi,0,pi])
```

(这里的 x,y 分别表示Φ，θ)

图象：



（图 5-7. 限定条件的图像）

我们在图中取出了相应的 φ - θ 值并绘制表格

φ	0.5027	0.7037	0.9048	1.1059	1.3070	1.4582	1.7588	1.8095
θ sma	1.2569	1.0048	0.9550	0.9048	0.8545	0.8540	1.3075	1.1560
θ big	1.3900	1.5724	1.7090	1.7592	1.7650	1.6590	1.3100	1.3050

（表 5-1. φ - θ 的值，每一个 φ 对应两个 θ，较小的为第二行，较大的为第三行）

最后计算得结果大概为 5.5677.

6. 模型缺点指正与推广应用

6.1 模型没有实现的地方

在问题一的求解中，我们的确知道了解决问题所需要的方程与不等式，但是本文并未在此对结果进行求解，只是纯粹地建立了一个模型。具体如何求解有待进一步探究。

在模型四的求解中，无法对限制条件下的二元函数之间直接作图。有待进一步学习。

6.2 模型有缺点的地方

此题是用 **matlab 设计程序**求解的。那么，受到计算机运行效果的限制，其结果亦可能由于有效数字位数问题产生误差。当然，由于问题 2，3，4 的结果我们已经精确到了 0.0001，我们可以把误差控制在±0.0005 的范围内。更为精确的模型有待探究。

6.3 模型的优点

首先，我们将这个装置的几何结构抽离出来，并将之视为平面几何问题。随后，我们对图形中所蕴涵的**几何关系**进行了分析求解**构建方程组**。那么，这一个模型的一大优点就在于它的简洁性，简单但是较为精准，而且合乎理论。

列出方程，要想求解的话使用 **matlab 编写程序**即可迅速求解。那么，它的第二个优点在于易解性。

方程法解决平面几何关系问题实际上并不只是 Stewart 平台的专利，构建平面几何中的数量关系（方程式，函数式）应该说是一种基本操作与素养。所以，这个模型的第三个优点在于它的广泛性。

6.4 模型适用的地方

模型适用于二维平面内的**几何关系**构建。在二维平面内，存在着错综复杂的**几何关系**。边，角之间的运算关系，点线面的位置关系，为我们提供了方程的来源。应用此法，可以解决二维平面下的求值问题，动点问题，范围问题等一系列复杂问题。

7. 参考文献

（注：以下书籍皆为学习用书，本文并未引用）

[1] 姜启源，谢金星著，2019 版《数学模型》，高等教育出版社

[2] 卓金武等著，《matlab 在数学建模中的应用》2019 版，北京航空航天大学出版社