

基于牛顿力学体系的港珠澳大桥安全通行模型

摘要

港珠澳大桥是国家重大工程，它由桥梁，人工岛，隧道三部分组成。本文通过建立二维数学模型，利用了受力分析的计算方法，从车辆自身的动力控制、牛顿动力学和宏观的交通控制三个角度提出了不同的模型，对车辆在弯道的转弯、风力对车速的影响和车辆的通行能力进行建模，并分析不同参数对于程序运行的影响，最后分析其性能。

针对问题一，主要解决两个问题：第一个问题是对总重量 1000kg-3000kg 的汽车在转向立交桥弯道处的行驶速度进行建模；第二个问题是给出在弯道处的汽车最大安全行驶速度。考虑汽车在斜面上的转弯、不同曲线的曲率半径、转弯过程中的上坡三种情况，基于牛顿力学体系可以提出**车辆转弯平衡模型**。并且可以通过 Matlab 编程计算，得出一系列临界速度与质量、半径、摩擦系数的变化关系曲线以及速度随半径变化曲线图。

针对问题二，主要讨论在不同级数的台风情况下，给出在整座大桥主体上汽车最大安全行驶速度和台风级数的关系。于是，通过引入风力对汽车的影响，可以提出基于流体力学的**气动力模型**，并得出最大安全行驶速度和台风级数呈负相关关系，且速度对台风级数的导数也在逐渐降低得越来越快。

针对问题三，考虑两个重要因素：第一是用道路的行车流量与密度来描述道路的通行能力，第二是考虑港珠澳大桥主段为不规则曲线并举例说明组合曲线的速度建模，从而计算出通行时长。对于问题三，**行车密度模型**对问题进行讨论是一条行之有效的方案，按照行车密度和行车流量两个目标分别进行优化。

在模型的改进中，考虑汽车本身的结构以及制动力，从车辆工程的相关知识衍生出了**改进阿克曼转向几何模型**作为问题一的补充。这一模型考虑到了汽车不同部分的运动有所不同，引入了一系列参量对问题一进行了进一步的补充。我们发现，考虑侧滑和侧翻两种不同的情况时侧滑的临界速度会更小，这在工程实际中有一定借鉴意义。

不同模型的相互补充，能够从不同角度解释机动车辆在港珠澳大桥上通行的状态，对于港珠澳大桥上的交通调度方案设计有一定参考价值。

关键字： 车辆转弯平衡模型 气动力模型 行车密度模型 改进阿克曼转向几何模型

目录

一、问题重述	3
1.1 引言	3
1.2 问题的提出	3
二、问题分析	3
三、模型假设	4
四、符号说明	4
五、问题一的建模与求解	6
5.1 考虑汽车在斜面上的转弯	6
5.2 考虑不同曲线的曲率半径	7
5.3 考虑转弯的过程中上坡	11
六、问题二的建模与求解	11
七、问题三的建模与求解	13
7.1 考虑建立车流密度与车速之间的模型	13
7.2 考虑路段呈现曲线形状	15
八、模型评价与改进	15
8.1 模型的评价	15
8.2 模型的改进——改进阿克曼转向几何模型	16
8.3 模型的改进——车路耦合防侧翻模型	17
九、总结	17
十、参考文献与引用	18
参考文献	18
十一附录	19

一、问题重述

1.1 引言

港珠澳大桥是中国近年来一项伟大的交通工程，具有重大意义与价值。它是中国交通史上技术最复杂，建设要求及标准最高的工程之一，也是世界上最长的跨海大桥，被英国《卫报》誉为“新世界七大奇迹”之一。

港珠澳大桥由桥梁，人工岛，隧道三部分组成，其中，岛隧工程是大桥的控制性工程，需要建设两座面积各十万平方米的人工岛和一条 6.7 公里的海底沉管隧道，实现桥梁与隧道的转换，是大桥建设技术最复杂，建设难度最大的部分，极具挑战性。珠澳大桥沉管隧道，是我国建设的第一座外海沉管隧道，也是世界上最长的公路沉管隧道和唯一的深埋沉管隧道。

对于如此大的一个工程，它在交通上有着重要作用。那么，对于港珠澳大桥上的机动车辆通行过程进行讨论与建模对于车辆的安全通行有重要意义。基于此，我们提出以下问题：

1.2 问题的提出

1. 对于总重量范围：1000kg—3000kg 的车辆在转向立交桥弯道处的行驶速度进行建模，并给出在弯道处的汽车最大安全行驶速度。
2. 假定最大台风不超过 16 级，汽车最大行驶速度是 100km/h。考虑不同风向的台风天气情况下，给出在整座大桥主体上汽车最大安全行驶速度和台风级数的关系。
3. 假定大桥主体工程全线设计通行最大速度为 100km/h, 考虑其它一些因素，对港珠澳大桥的通行能力进行建模。并在最大通行能力下给出机动车通过大桥的时长。

二、问题分析

问题一是一个典型的车辆转弯问题。对于这一问题，我们从两个角度出发考虑这一模型。第一，从轨迹的角度出发，弯道的组成部分主要由三类曲线构成：直线，圆弧和其它平滑曲线。但无论是怎样的曲线，我们都可以求解出对应的曲率半径，那么就可以根据曲率半径进行惯性离心力的表达；第二，我们从受力分析的角度出发，对于道路和桥梁，在汽车过弯道的时候道路并非平直道路而是有一定倾斜角度，尽管倾斜角非常小。那么对此进行受力分析即可建立速度与曲率半径之间的关系，从而进行建模求解。

问题二对受力分析要求更高，需要考虑风力影响。假设最高时速以后还需要对风力的作用面积进行讨论，这里讨论几种不同型号机动车的不同受力情况从而进行受力分析，再与风力建立函数关系模型。

问题三较为灵活，可供选择的考虑因素较多。我们考虑两个因素，一是车流密度与车速之间的关系，二是路段曲线形状对速度的影响。

三、模型假设

1. 在弯道处的坡面倾斜角度不超过 5 度，这一假设符合工程实际。
2. 在无风情况下汽车的运动可以视作质点，从而采用质点动力学的方式进行建模。
3. 汽车在桥面主段上行驶时，在保证足够安全的情况下，假设汽车匀速行驶。
4. 假定汽车运动过程中发动机的功率为恒定值。

四、符号说明

(符号的具体含义以正文中出现的位置对应解释为准)

符号	意义	补充说明
f	摩擦力	
μ	摩擦系数	通常不超过 1
F_x	所有力 x 方向上的合力	
F_y	所有力 y 方向上的合力	
m	车辆的质量	1000kg 到 3000kg
g	重力加速度	通常取 $9.8m/s^2$
v	车辆的速度	
G	汽车重力	
R	曲率半径	由曲线的一阶导数和二阶导数定义
α	坡面的角度	
y'	曲线的一阶导数	
y''	曲线的二阶导数	
a	椭圆的长半轴，或指双曲线的实半轴	
b	椭圆的短半轴，或指双曲线的虚半轴	

符号	意义	补充说明
p	抛物线的焦点到准线的距离	
P	汽车发动机的牵引功率	取 100kW
θ	上坡时速度方向延长线与水平面的夹角	
v_w	风速	风在垂直车速方向上的分量
ρ	空气密度	通常取 $1.225\text{kg}/\text{m}^3$
A	汽车侧面积	
β	风速与车速比值的反正切值	
k_{CS}	气动力系数与角度 β 的比值，通常为常数	
k	路面上的车辆密度	每公里的车辆数
k_f	车辆密度的最大值	此时发生严重交通瘫痪
v_f	路面上没有其他车辆时车辆的最大速度	
q	路面的车流量	单位时间内通过路面的车辆数
d_0	机动车的长度	
t_1	司机的反应时间	
h	质心至侧倾中心的距离	
h_g	车辆质心高度	
B	轮距	
Φ	车辆侧偏角	
L	前后轴距	
δ	前轮转向角	比较小
a_y	临界加速度	
K_Φ	车辆悬架等效侧倾刚度	取 $109300(N \times m/\text{rad})$
K	修正系数	取 0.95
LTR	横向载荷转移率	

五、问题一的建模与求解

5.1 考虑汽车在斜面上的转弯

考虑汽车在斜面上的转向过程中受到竖直向下的重力，垂直于斜面向上的支持力，沿轨迹切线方向的牵引力，在路面平面内的摩擦力，以及引入的惯性离心力为整个空间内的受力，这五个力存在受力平衡的关系。如图 1 所示：

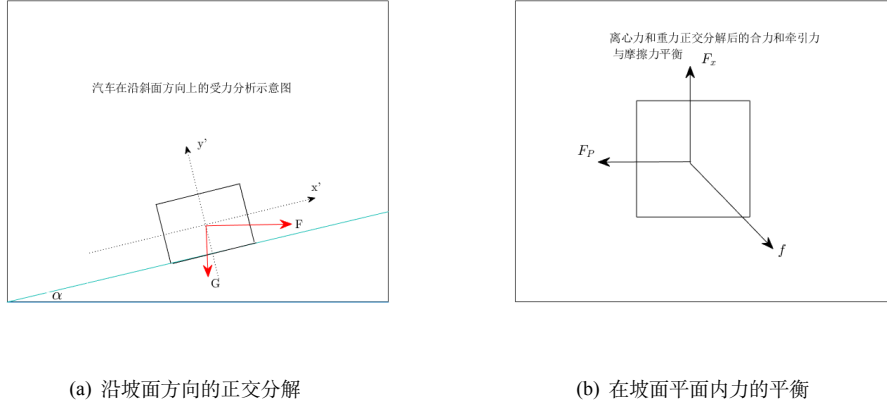


图 1 车辆在坡面上受力分析的示意图

在图 1(a) 中，求解沿斜面方向的合力和垂直斜面方向的合力时尝试进行正交分解：

$$\begin{cases} F_x = F \cos \alpha - G \sin \alpha \\ F_y = F \sin \alpha + G \cos \alpha \end{cases} \quad (1)$$

对于摩擦力，我们有

$$\vec{f} = \vec{F}_x + \vec{F}_p, f = \mu F_y \quad (2)$$

其中，牵引力

$$F_p = \frac{P}{v} \quad (3)$$

离心力

$$F = m \frac{v^2}{R} = \frac{Gv^2}{gR} \quad (4)$$

由于 α 比较小，我们可以近似认为 $\alpha = \sin \alpha = \tan \alpha$ 。那么对于 x 方向上的合力有：

$$F_x = G \left(\frac{v^2}{gR} - \alpha \right) \quad (5)$$

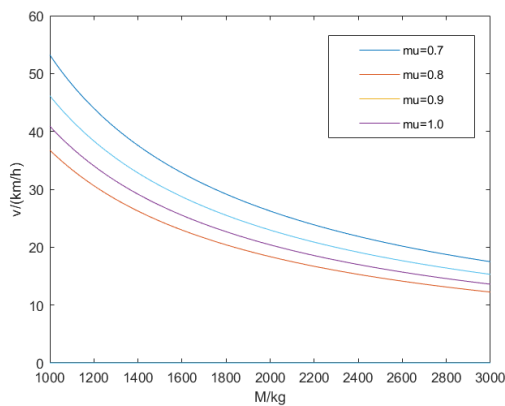
同样的，在 y 方向上

$$F_y = G \left(\frac{v^2}{gR} \alpha + 1 \right) \quad (6)$$

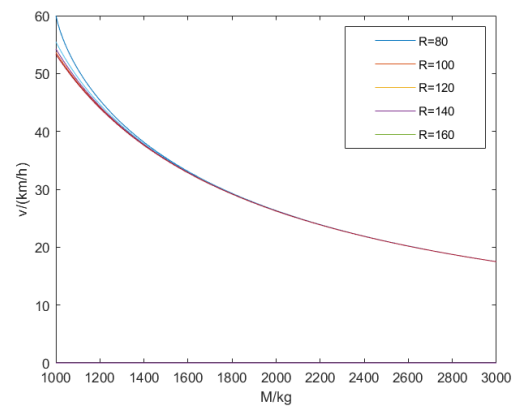
经求解，我们建立了速度 v 与其它参量之间的关系。首先讨论以机动车质量为自变量，分析不同参数对速度的影响。

对于摩擦力，摩擦系数 μ 会对速度产生较大影响。通常而言，在其他条件不变的情况下，摩擦系数越大则摩擦力越大。取 $\alpha = 0.01$ ，半径恒定为 170m，可得速度随质量、摩擦系数的关系图如图 2(a) 所示，当摩擦系数越大时最大速度反而会变小，这是值得注意的一点。此外，随着车辆质量的增加，最大速度会逐渐降低，降低的速度也会逐步放慢。

再讨论改变半径，对行车速度的影响。取摩擦系数为 0.7，可得速度随半径、质量的变化关系曲线簇如图 2(b)。可以看到，当质量较小时车速会随半径差异相对大一些，但当车的质量较大时则差异并不明显，曲线系最终趋近于重合。半径的作用似乎没有摩擦系数那么大。



(a) 速度随质量、摩擦系数的变化图象



(b) 速度随质量、半径的变化图象

图 2 临界速度与质量、半径、摩擦系数的变化关系曲线簇

然后我们以半径作为自变量，考虑不同质量下随着半径的变化临界速度的变化模式。如图 3，可以发现，存在某个特殊半径会使得速度发生突变，这一特殊半径的值与质量有关。我们取摩擦系数为 0.7。

这一突变速度说明，某些情况下若两路段的曲率半径刚好在这一临界点两侧，则两路段允许的最大速度可能存在很大差异。若司机并未发现，则容易导致行车失误。这也为我们进行道路建设提供了很好的建议。如果在曲线的衔接点两侧曲线的曲率半径相同则不容易引起突变。

这样，我们建立起了行驶速度 v 与曲率半径之间的关系。下面我们来讨论不同情况下的曲率半径。

5.2 考虑不同曲线的曲率半径

曲线的曲率由曲线在某一点的一阶导数和二阶导数共同定义。杨国平等人总结了在物理中曲线曲率半径的求解方法，并将其用于曲线运动的惯性离心力求解 [1]

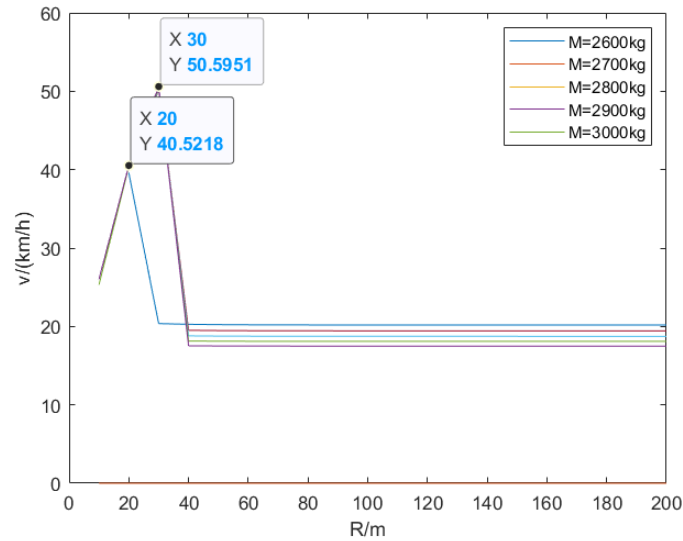


图3 速度随半径的变化

常见的弯道路段可能由多种曲线组合形成。对于一般曲线 $f(x, y) = 0$ ，定义其曲率半径为：

$$R = \left| \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \right| \quad (7)$$

很显然，圆的曲率半径即为它的半径，而直线的曲率半径为无穷大，也不存在惯性离心力。

图4描述了路段中常见的弯道曲线组成模式。

对于相同的平滑曲线（组）构成的对称S型曲线，其在衔接点处的曲率半径大小相等，惯性离心力方向相反。在上一个问题中我们已经讨论了曲率半径和速度大小的关系，曲线拐点两侧曲率半径相等的情况下速度不会发生突变，能够降低事故发生率。

而不同的平滑曲线构成的非对称性S型曲线虽然仍然可能在拐点处有着相同的曲率半径，但从工程力学的角度来讲结构并没有对称S型稳定。

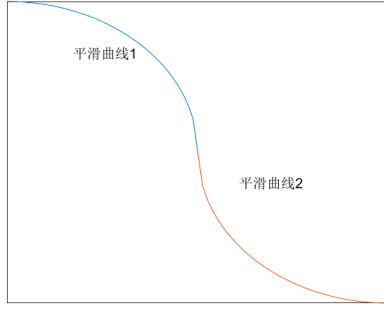
直线与曲线组合形成的组合曲线是交通中最为常见的曲线组合，从直线到弯道的过程中需要注意惯性离心力的问题。因为直线的曲率半径为无穷大，而一般曲线有着有限的曲率半径。

凸曲线由两个同向回缓和曲线直接衔接的组合形式。虽然凸曲线是连续曲线，但却不一定是圆弧。很多驾驶者以为是圆弧从而没有注意到曲率半径是变化的，引起交通事故发生。

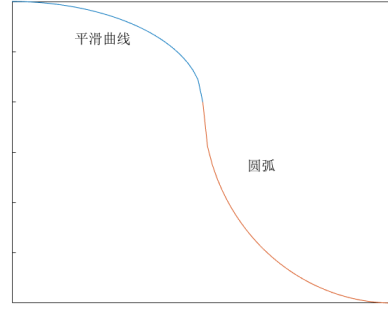
考虑在圆弧曲线中圆的半径大小对最大速度的影响

若取质量分别为 2500,2600,2700,2800,2900,3000kg, 摩擦系数 0.7, $\alpha = 0.01$ ，汽车的行车最大速度随半径变化的曲线如图3所示。在5.1中已经讨论过，不再重复。

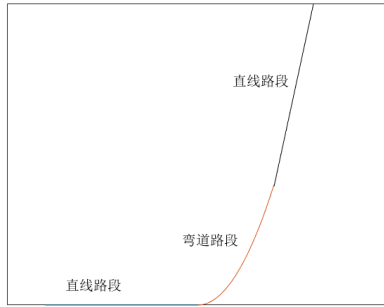
考虑三类典型圆锥曲线不同位置的曲率半径



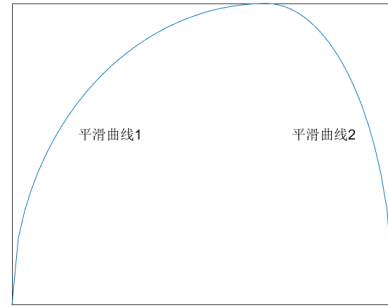
(a) 相同的平滑曲线构成的对称 S 型曲线



(b) 不同的平滑曲线构成的非对称 S 型曲线



(c) 直线与曲线形成的组合路段



(d) 平滑曲线组成的凸曲线

图 4 常见路段的组合模式

对于椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，由于它关于原点对称且关于两坐标轴对称，所以只考虑其在第一象限的情况。即 x 的取值范围为 $[0, a]$ 。将椭圆方程用其参数形式表示，进行隐函数求导可得曲率半径随坐标的变化关系：

$$R_1 = \frac{[a^2b^4 + a^2y^2(a^2 - b^2)]^{3/2}}{a^4b^4} \quad (8)$$

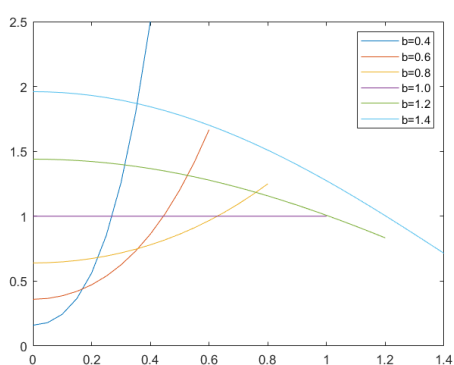
对于双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，由于它关于原点对称且关于两坐标轴对称，所以只考虑其在第一象限的情况。即 x 的取值范围为 $[a, +\infty]$ 。同样的，进行隐函数求导可得曲率半径随坐标的变化关系：

$$R_2 = \frac{[a^2b^4 + a^2y^2(a^2 + b^2)]^{3/2}}{a^4b^4} \quad (9)$$

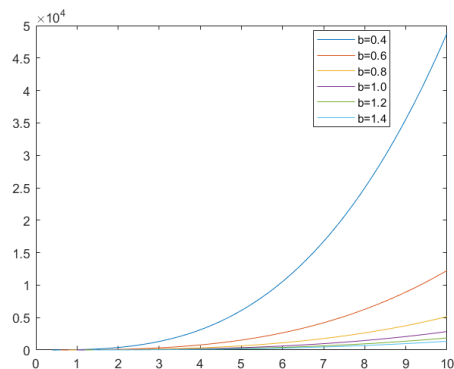
对于抛物线方程 $y^2 = 2px$ ，由于它关于原点对称且关于两坐标轴对称，所以只考虑其在第一象限的情况。即 x 的取值范围为 $[0, +\infty]$ 。类似地，进行隐函数求导可得曲率半径随坐标的变化关系：

$$R_3 = \frac{(y^2 + p^2)^{3/2}}{p^2} \quad (10)$$

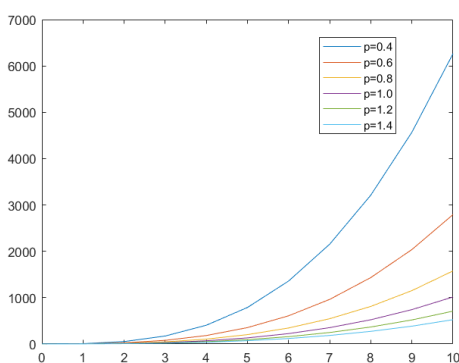
若弯道路段由多个曲率半径不同的曲线段组成，则在相切点的最大速度为二者的曲率半径对应的临界速度中更小的那一个。从图 3 可以看出，两路段之间的速度可能存在



(a) 椭圆的曲率半径随 y 的变化



(b) 双曲线的曲率半径随 y 的变化



(c) 抛物线的曲率半径随 y 的变化

图 5 圆锥曲线的曲率半径随着 y 的变化

较大差异，若驾驶员未反应过来则容易造成交通事故。为避免这一事故发生，可对相邻的两曲线段进行限制：

$$\begin{cases} y'_1 = y'_2 \\ y''_1 = y''_2 \end{cases} \quad (11)$$

即曲线整体足够平滑，一阶导数和二阶导数值均连续，这也保证了曲率半径连续变化，不易引起突变。

对于椭圆和双曲线，令 $a=1$ ，改变 b ；抛物线中改变 p ，三种圆锥曲线的曲率半径随着 y 的变化规律如图 5 所示。对于双曲线和抛物线，改变参数 b 和参数 p ，随着参数的增加曲率的增长率也会逐渐增加，随着 y 值增加曲率也会增大。而对于椭圆而言，固定 a 以后，不同的 b 会影响椭圆的形状，所以也会有不同的曲率半径曲线。当 $\frac{b}{a} < 1$ 时曲率半径会随 y 增大而增大；当 $\frac{b}{a} > 1$ 时，曲率半径会随着 y 增大而减小（此时长轴位于 y 轴）。特别地， $a = b$ 时长轴和短轴相等，曲线成为一个圆，曲率半径为一个固定值。

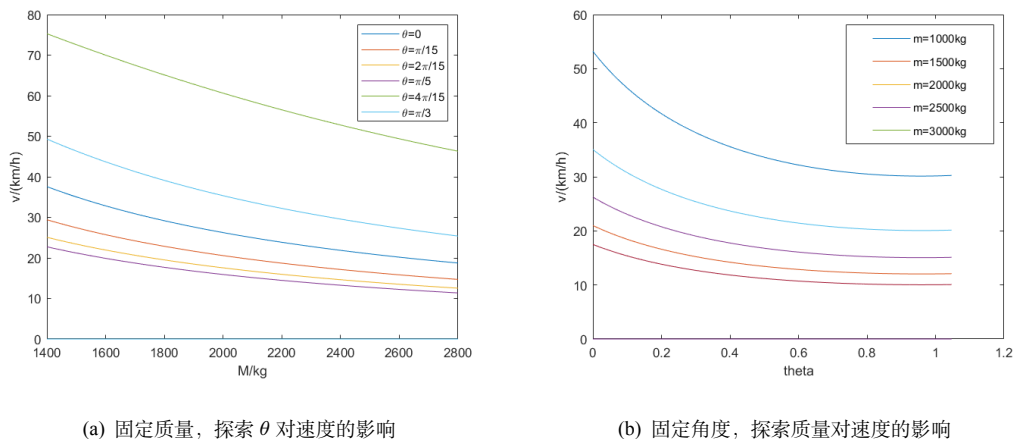


图 6 质量、 θ 对速度的影响

5.3 考虑转弯的过程中上坡

这里值得注意的是，转向的立交桥除了转弯过弯道，还存在上下坡的问题。根据港珠澳大桥的设计方案，两条道路变道时呈现“麻花”状，有一条道是架在另一条道路上的。所以，引入上坡这一因素。

假设汽车上坡过程中速度方向在三维直角坐标系中，与水平面形成夹角为 θ ，那么相对于路面来说，汽车的重力在垂直路面的分量只有 $G \cos \theta$ ，而沿路面有 $G \sin \theta$ 的分量作为阻力的一部分。那么，模型将变为：

$$\begin{cases} F_x = F \cos \alpha - G \sin \alpha \cos \theta \\ F_y = F \sin \alpha + G \cos \alpha \cos \theta \\ F_P = \frac{P}{v} - G \sin \theta \\ f = \mu F_y \\ \vec{f} = \vec{F}_P + \vec{F}_x \end{cases} \quad (12)$$

我们在其他条件不变的情况下，探索速度与质量和 θ 的关系，如图 6 所示。显然，随着角度的增大最大行驶速度是减小的。原因在于重力在沿运动方向上的分量增加起到了更大的阻碍作用，而为了削弱阻碍就需要更强的牵引力。在功率恒定的情况下，提升牵引力的方法就是降低速度。

六、问题二的建模与求解

考虑到风力对车的影响，我们需要在受力分析的过程中引入风力对汽车的影响。那么此时汽车将不能再被视作一个质点。我们以大众的帕萨特系列汽车为例，该型号的汽车长度为 4.6m，宽 1.7m，高 1.4m，重达 1290kg，符合题设要求，可以用于建模过程。

在空气流体力学中，气动力系数的建模对风力计算有着重要意义。哈尔滨工业大学的彭晓刚等人对气动力系数建模进行了总结，并提出使用小波神经网络进行气动力系数辨识方面的研究 [2]。在进行气动力模型建模之前，需要先确定气动力系数的模型结构，从而进行相关参数的估计。而确定模型结构的方法就是对其进行受力分析。

根据流体力学知识，风力对车辆的影响与风速有关。而风力在沿汽车速度方向上的分量对车辆是平动的阻碍或者推动作用，而在垂直于速度方向上的分量则可能使得车辆发生偏移甚至翻转。根据风速大小不同，我们把风力效应划分为三类：

1. 风速度较低时，车辆的气动力系数会因为风力作用变大，但侧压力不大。可能影响行车稳定性，但对安全性影响不大。
2. 风速度较高时，会形成脉冲风速效应，即风在侧向的振动频率和汽车的震动频率相近，会产生共振效应。
3. 高速风效应，当车辆行驶过程中遇到高速测风，车辆可能受侧风的侧向推力引起侧翻。

根据流体力学知识，车辆在行进过程中有气动力的六个分量, 如表 1 所示：

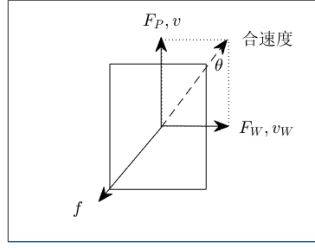
表 1 气动力六个分量对应的系数

分量	系数	表达式
C_D	阻力系数	$\frac{D}{\frac{1}{2}\rho AU^2}$
C_S	侧力系数	$\frac{S}{\frac{1}{2}\rho AU^2}$
C_L	升力系数	$\frac{L}{\frac{1}{2}\rho AU^2}$
C_{MR}	侧倾力矩系数	$\frac{M_R}{\frac{1}{2}\rho LAU^2}$
C_{MP}	俯仰系数	$\frac{M_P}{\frac{1}{2}\rho LAU^2}$
C_{MY}	横摆系数	$\frac{M_Y}{\frac{1}{2}\rho LAU^2}$

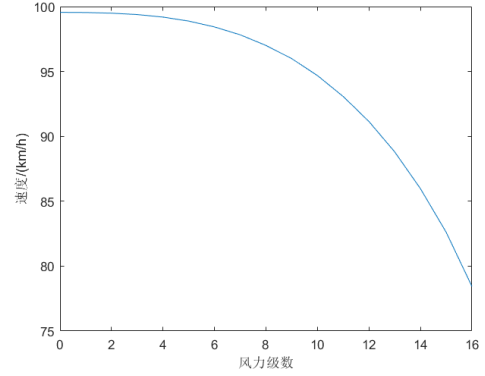
侧向力对汽车的行驶影响最大，故主要考虑风力在侧面的分量作用。记风速 v_w ，车速与侧向风速的比值取反正切，得到角度 β 。侧向力系数 C_S 与 β 成正比，比值记作 k_{CS} 。可以求出侧向风压：

$$F_S = \frac{1}{2}\rho A k_{CS} \arctan \frac{v_w}{v} (v_w^2 + v^2) \quad (13)$$

在主道行驶时汽车的受力分析如图 7(a)（此时没有弯道，也没有斜坡），摩擦力和风力、牵引力三力平衡，沿合速度的反方向。不考虑升力对摩擦力的影响，可以得到方



(a) 汽车在平稳道路上受力分析



(b) 车速随风力级数的变化曲线

图 7 水平路面的风力对车速影响建模

程：

$$\mu G \sin \beta = \frac{1}{2} \rho A k_{CS} \beta \frac{v_w^2}{\sin^2 \beta} \quad (14)$$

取 μ 为 0.8, k_{CS} 为 0.7, 以每一级的最大风速代入方程 (13), 可以得到速度随着风力级数的变化曲线如图 7(b) 所示。很明显, 考虑侧向风力时, 风力越大则运行最大速度越低, 且速度对台风级数的导数也在逐渐降低得越来越快。这也符合我们的常规认知。

七、问题三的建模与求解

7.1 考虑建立车流密度与车速之间的模型

交通调度问题中, 车流密度是一个影响通行能力的重要因素。清华大学的卢树等人对道路通行能力进行过数据调查与建模分析, 分析了机非干扰情况、车道宽度、车流密度对行驶车速的影响, 以及信号配时、车流密度对路口停车延误的影响 [3]。

根据工程经验, 车流密度越高则速度越慢, 当车流密度达到临界值时便会发生交通拥堵形成交通故障。若速度与车流密度呈线性关系, 那么

$$v = v_f \left(1 - \frac{k}{k_f}\right) \quad (15)$$

由此, 车流量

$$q = k v_f \left(1 - \frac{k}{k_f}\right) \quad (16)$$

刹车距离分成两个阶段, 第一阶段是司机的反应阶段, 这一阶段通常处于匀速状态。距离与司机的反应时间有关。第二阶段是刹车阶段, 摩擦力做负功使动能降为 0, 即动能定理:

$$d_1 = v t_1, -f d_2 = 0 - \frac{1}{2} m v^2 \quad (17)$$

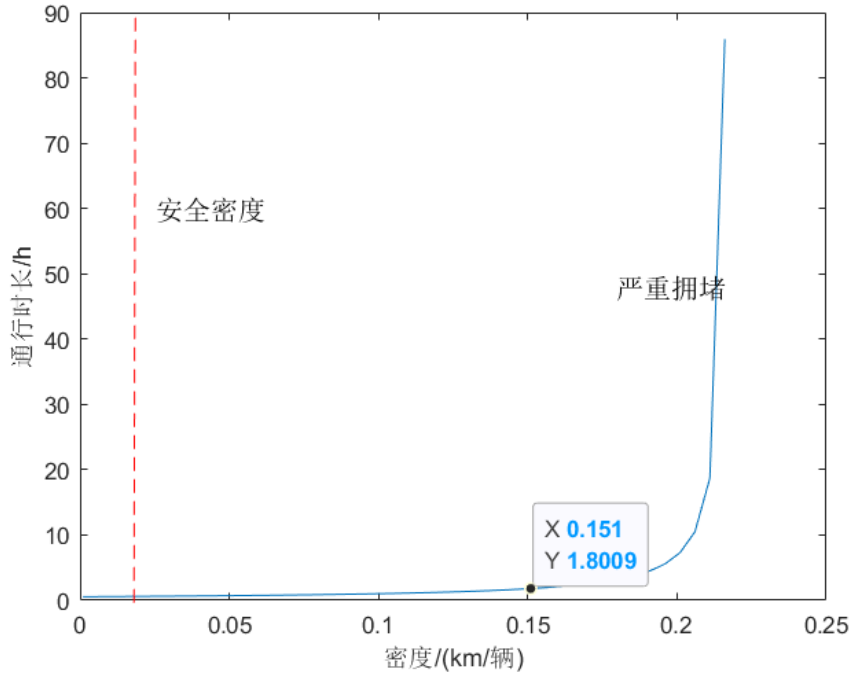


图 8 通行时间与密度的图像

解得两车头之间的安全距离为

$$d = d_0 + vt_1 + \frac{v^2}{2\mu g} \quad (18)$$

假设车队匀速行驶，取时间微元 dt ，在这一微元中车队行进了 v ，那么这一时刻的车流量和车密度为

$$\begin{cases} q = \frac{v}{d_0 + vt_1 + \frac{v^2}{2\mu g}} \\ k = \frac{1}{d_0 + vt_1 + \frac{v^2}{2\mu g}} \end{cases} \quad (19)$$

最大车流密度时速度为 0，汽车靠得比较紧凑几乎是车头接车尾， $k_f = \frac{1}{d_0}$ 。但最大密度不一定是安全的密度，每两辆车之间的车头间距不应该小于 d 。所以，我们根据上面的公式，列出关于密度的方程：

$$k(d_0 + v_f t_1 (1 - \frac{k}{k_f}) + \frac{v_f^2}{2\mu g} (1 - \frac{k}{k_f})^2) = 1 \quad (20)$$

若使得保证安全的情况下密度最大，那么可以解得安全密度值，以这个值代入即可求得最大速度。取司机反应时间 0.7 秒，摩擦系数 0.7，可以解得最大速度 93.6km/h。通行时间大约 0.5876h。

通行时间随着密度的变化图象如图 8 所示，可以发现，当密度超过 0.15 (km/辆) 时不仅不安全，还会发生较为严重的拥堵。

若优化目标为流量，那么对 q 取极值，容易解得

$$v_m = \sqrt{2\mu g d_0} \quad (21)$$

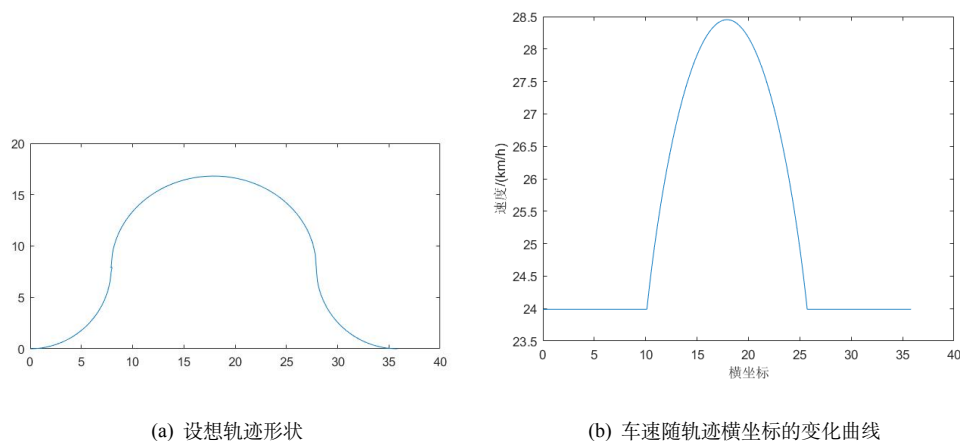


图9 曲线形状对车速影响建模

最优速度为 28.6 (km/h) ,通行时间约 1.92 小时。

7.2 考虑路段呈现曲线形状

实际上,港珠澳大桥并非一条直线而是设计成曲线的形状,来减小浪潮的冲击,符合流体力学原则。我们考虑一种曲线模式,即:“1/4 圆弧-半椭圆-1/4 圆弧”模式。椭圆的半长轴为 10km,半短轴为 8.8973km,圆半径为 7.916km 时利用曲线积分容易推知曲线周长刚好为 55km,也就是港珠澳大桥的全长。轨迹如图 9(a) 所示。

在每一点根据式 (8) 求出对应的曲率半径(圆可以看作是半长轴和半短轴相等的椭圆),再利用半径求解对应的速度,如图 9(b) 所示,曲线的横坐标表示汽车行驶的位置在图 9(a)x 轴上的投影。由于在开始和最后的两个 $\frac{1}{4}$ 圆弧中曲率半径为常数,故最大速度也是常数。在中间的半椭圆中,曲率半径随着运动里程先增大后减小,最大值为 11.23km。而在曲率半径最大时车速刚好也达到最大值 28.5km/h。计算得到平均通行时间 1.92h。

八、模型评价与改进

8.1 模型的评价

模型优点:

1. 模型复杂度不高,均为工程实际应用中常见的物理学定理与受力分析模型。
2. 考虑情况较多,对交通速度模型考虑了较多的影响因素。
3. 讨论了多个因素变化对结果的影响,验证了模型的灵敏度。
4. 模型具有一定泛化能力,除了港珠澳大桥,对于一般道路的交通通行也是适用的。

模型缺点:

1. 对于车辆行驶过程中的行为变化尚未进行充分讨论。
2. 模型考虑到的是一些主要影响因素，对于相对不那么重要的次要因素并未进行讨论。

8.2 模型的改进——改进阿克曼转向几何模型

对于问题一，原有模型的一大缺陷就是没有考虑车辆自身的制动能力，而 Rajamami 等人根据车辆自身的特性提出了改进的阿克曼转向几何模型 [4]。这里对阿克曼模型进行了改进。

图 10 为改进阿克曼转向几何模型受力的后视图模型。图中车的倾斜角度 Φ 会比 α 更大。

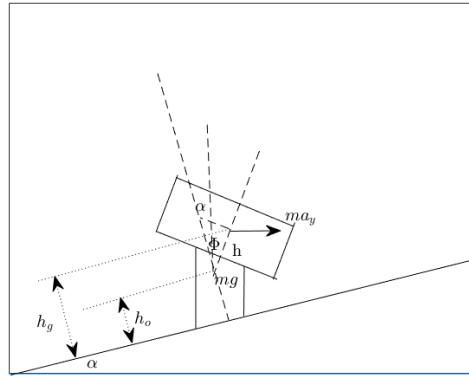


图 10 改进阿克曼转向几何模型示意图（后视）

若车身存在一定的侧翻而且侧翻角度为 Φ ，考虑坡面倾斜角 α 和侧翻角度较小，经过分析，每个轮胎的载荷为：

$$\begin{cases} F_{1L} = \frac{bg}{LB}(\frac{mB}{2} + mh_g\alpha) - \frac{ba_y}{LB}(\frac{mh_g - mB\alpha}{2}) - \frac{bm_g h\Phi}{LB} \\ F_{1R} = \frac{bg}{LB}(\frac{mB}{2} - mh_g\alpha) + \frac{ba_y}{LB}(\frac{mh_g + mB\alpha}{2}) + \frac{bm_g h\Phi}{LB} \\ F_{2L} = \frac{ag}{LB}(\frac{mB}{2} + mh_g\alpha) - \frac{aa_y}{LB}(\frac{mh_g - mB\alpha}{2}) - \frac{am_g h\Phi}{LB} \\ F_{2R} = \frac{ag}{LB}(\frac{mB}{2} - mh_g\alpha) + \frac{aa_y}{LB}(\frac{mh_g + mB\alpha}{2}) + \frac{am_g h\Phi}{LB} \end{cases} \quad (22)$$

此处的 a 和 b 分别表示前后轮到质心的距离。

车辆在弯道行驶过程中，若车轮横向附着力小于路面与轮胎之间的横向摩擦阻力时，则会产生侧滑。车辆前后轴同时发生侧滑的情况很少，只要前后轴中的一轴发生侧滑，可视为发生了侧滑。根据受力分析可知，车辆前后轴的临界侧滑条件为

$$\begin{cases} [ma_{y1} \cos \alpha - mg \sin \theta] \frac{b}{L} = (\phi F_{1R} + \phi_y F_{1L}) \cos \delta \\ [ma_{y2} \cos \alpha - mg \sin \theta] \frac{a}{L} = (\phi F_{2R} + \phi_y F_{2L}) \end{cases} \quad (23)$$

由于外侧的轮胎垂直作用力大于内侧，那么内侧的车轮由于载荷较小导致地面提供的侧向反作用力有限，会先发生侧滑。在工程实际中，我们通常取 $\phi_y = 0.8\phi$ 。同时，车辆的侧倾角 Φ 可以表示为：

$$\Phi = \frac{a_y}{g} R_\Phi = \frac{a_y}{g} \frac{1}{\frac{K_\Phi}{m_s g h} - 1} \quad (24)$$

联立式 (22)-(24)，可以解得

$$a_y = a_{y1} = a_{y2} = \frac{Bg\alpha + [0.2h_g\alpha + 0.9B]g\Phi}{B + [0.2(h_g + hR_\Phi) - 0.9B\alpha]\Phi} \quad (25)$$

从而 $v = \sqrt{a_y R}$ 。在实际工程中，小型轿车质心至前轴距离通常取 1.02m，后轴到质心的距离通常取 1.56m，质心高度 0.52m，质心高度至侧倾中心距离取 0.12m。车辆悬架等效侧倾刚度 $K_\Phi = 109300(N \times m/rad)$ ， $B=1.54m$ 。此型号汽车质量 1416kg，簧载质量 1274kg。

临界加速度最终与侧倾角有关。而汽车侧倾角需要略大于 α 。我们取 $\Phi = 0.015$ ，代入数值，可以求解得到临界加速度为： $0.2349m/s^2$ 。若同样取轨道的曲率半径为 170m，则临界速度为 22.75km/h。

8.3 模型的改进——车路耦合防侧翻模型

为考虑到车辆侧翻的影响，武汉理工大学杨俊儒等人提出了车路耦合防侧翻模型对阿克曼转向模型进行进一步改进 [5]。

在改进阿克曼转向模型的基础上，引入横向载荷转移率 (LTR)。发生侧翻的小汽车速度为

$$a_y = \frac{gh_g\alpha + LTR \times gB/2}{h_g + hR_\Phi - LTR \times gB/2} \quad (26)$$

当车辆发生侧翻时，内侧车轮的垂向载荷全部转移至外侧车轮，此时 $LTR=1$ 。同时，考虑到车辆在受力作用下，轮胎接地中心向内偏移，使临界车速有所减少。因此，引入修正系数 K ， $K=0.95$ ，则临界速度 $v=K\sqrt{a_y R}$

带入数值，可以解出这一情况下的临界速度为 92.844km/h，相对于模型二大了很多。这也说明，汽车发生侧滑会比发生侧翻更容易，实际工程上需要更重视侧滑。

九、总结

本文在基本工程分析理论的基础上，对汽车在港珠澳大桥上的行驶过程进行了动力学分析。从车辆自身的动力控制、牛顿动力学和宏观的交通控制三个角度提出不同的模型，对车辆在弯道的转弯、风力对车速的影响和车辆的通行能力进行建模，所用方法均为牛顿力学体系中的常见受力分析方法以及工程实际中常用方法。若能在工程实际中获得更多数据进行支撑，那么理论模型将得到更好的验证。

十、参考文献与引用

参考文献

- [1] 杨国平. 曲率半径的求解方法 [J]. 物理通报, 2013(08):52-55.
- [2] 彭晓刚. 飞行器气动力系数小波网络建模研究 [D]. 哈尔滨工业大学, 2006.
- [3] 卢树, 陆化普, 唐忠华, 卢建刚. 城市道路行程车速影响因素分析 [J]. 公路交通科技, 2003(01):89-92.
- [4] Rajamani R . Vehicle Dynamics and Control[M]. Springer Science, 2006.
- [5] 杨俊儒, 褚端峰, 王维锋, 万剑, 邓泽健, 吴超仲. 弯道安全车速建模及影响因素分析 [J]. 交通信息与安全, 2018, 36(06):1-8.

十一、附录

编程环境: OS: Windows10+CPU: intel i7+GPU: GEFORCE GTX 1650+MATLAB 2019a

文件清单

1. T1.m
2. T2.m
3. T3.m
4. main.tex

部分代码:

T1.m

```
1 function x=rv1(R,x)
2     P=100000;%(W)
3     %m=(1.4:0.01:2.8)*1000;%(kg)
4     M=3000;
5     %Theta=0:0.001:pi/3;
6     theta=0;
7     mu=0.7;
8     alpha=0.01;
9     %R=10:10:200;
10    %r=170;
11    g=9.8;%(kg*m/s^2)
12    %x=zeros(length(R));
13
14    for i=1:length(R)
15        r=R(i);
16        fx=@(v)(g*sin(alpha)-v.^2/r*cos(alpha))*M;
17        fy=@(v)P./v;
18        fun=@(v)(mu*(M*g*cos(alpha)+M*v.^2/r*sin(alpha)).^2-fx(v).^2-fy(v).^2);
19        x(i)=fzero(fun,10);
20        %x(i)
21    end
22    plot(1:363,x*3.6);
23    xlabel('横坐标');
24    ylabel('v/(km/h)');
25    %legend(['mu=',num2str(mu),' alpha=',num2str(alpha),' R=',num2str(R)]);
26    hold on;
27 end
```

T2.m

```
1 clear
2 mu=0.8;
3 g=9.8;%(kg*m/s^2)
```

```

4 M=1290;%(kg)
5 A=1.7*1.4;%(m^2)
6 rho=1.225;
7 k=0.7;
8 uw=[0.2 1.5 3.3 5.4 7.9 10.7 13.8 17.1 20.7 24.4 28.4 32.6 36.9 41.4 46.1...
9      50.9 56];
10 sright=rho*A*k.*uw.^2/(2*mu*M*g);
11 f=@(theta,sright) sin(theta)^3-sright*theta;
12 theta=zeros(1,17);
13 for j=1:17
14     theta(j)=fzero(@(theta) f(theta,sright(j)),1);
15 end
16 v=uw./tan(abs(theta));
17 plot(0:16,v);
18 xlabel("风力级数");
19 ylabel("速度");
20 hold on;

```

T3.m

```

1 clc;clear;
2 d0=4.6;
3 g=9.8;
4 mu=0.7;
5 t1=0.7;
6 kf=1/d0;
7 vf=100/3.6;
8 f=@(k) k*(d0+vf*t1*(1-k/kf)+(vf^2/(2*mu*g))*(1-k/kf)^2)-1;
9 k=fzero(f,1)

```