

# 基于热传导方程和牛顿冷却定律的炉温曲线优化模型

## 摘 要

本文主要研究回焊炉各温区温度和分布在整个传送带的温区间隔温度对炉温曲线的影响，建立了基于热传导方程与牛顿冷却定律的温度分布模型。

对于问题一，首先研究炉前、炉内加热区、冷却区、炉后与间隙的温度分布，建立了电路板温度所满足的热传导方程和边界条件，又将其简化为基于牛顿冷却定律可以用于进行识别模型参数的温度分布模型。其次根据实验数据可以分析得到不同温区的模型参数是动态变化的，我们在四大温区中分别设定不同的冷却系数，段内相同、段间不同，并通过多元函数拟合确定了上述参数，得到炉温曲线和小温区 3、6、7 中点以及小温区 8 结束处焊接区域中心的温度，分别为 **130.78℃**（小温区 3 中点），**165.96℃**（小温区 6 中点），**188.02℃**（小温区 7 中点），**224.39℃**（小温区 8 结束处）。

对于问题二，建立了以最大过炉速度为目标的单目标优化模型，约束条件为满足问题一所建立的微分方程模型和工艺所要求的制程界限，并借助龙格-库塔算法进行求解得到最大传输速度为 **79.23cm/min**。

对于问题三，以衡量累计高温区域大小所对应的阴影面积最小为目标，建立了以各温区和过炉速度为决策变量的优化模型，约束条件包括制程界限、温度分布所满足的微分方程模型，采用了模拟退火算法，求得最小阴影面积为 **400.378℃·s**，此时过炉速度为 **92.77cm/min**，各温区温度分别为 **181.39℃**（小温区 1-5），**200.97℃**（小温区 6），**233.45℃**（小温区 7），**264.98℃**（小温区 8-9），**25℃**（小温区 10-11）。

对于问题四，首先给出了高温区炉温曲线对称性指标；其次，建立了以高温区炉温曲线对称性和高温累计区域为目标的多目标规划模型，采用动态综合加权法将多目标优化转化为单目标优化；最后，通过模拟退火算法求得最小阴影面积为 **410.791℃·s**，此时过炉速度 **90.37cm/min**，相应曲线两侧的对称度  $d$  为 **0.9947**，各温区温度分别为 **183.94℃**（小温区 1-5），**191.04℃**（小温区 6），**235.87℃**（小温区 7），**264.13℃**（小温区 8-9），**25℃**（小温区 10-11）。

最后给出了建模过程的误差分析和结果检验，本文结论正确合理，具有一定的应用价值和普适性。

**关键词：**热传导方程；牛顿冷却定律；模拟退火算法；优化模型；动态综合加权法

## 一、 问题重述

### 1.1 问题背景

在集成电路板等电子产品生产中，需要将安装有各种电子元件的印刷电路板放置在回焊炉中，通过加热，将电子元件自动焊接到电路板上。而在回焊炉内部则设置有若干个小温区，它们从功能上可分成 4 个大温区：预热区、恒温区、回流区、冷却区。电路板两侧搭在传送带上匀速进入炉内进行加热焊接。在这个生产过程中，让回焊炉的各部分保持工艺要求的温度，对产品质量至关重要。目前，这方面的许多工作是通过实验测试来进行控制和调整的。本题旨在通过机理模型来进行分析研究。

### 1.2 问题提出

现由题目所给已知数据与一些参数信息，需要我们解决的问题如下：

1. 请对焊接区域的温度变化规律建立数学模型。传送带过炉速度和各温区温度的设定值分别已知，求出焊接区域中心的温度变化情况，并列出自温区 3、6、7 中点及自温区 8 结束处焊接区域中心的温度，画出相应的炉温曲线，并将每隔 0.5 s 焊接区域中心的温度展示出来。
2. 改变各温区温度的设定值，再次确定允许的最大传送带过炉速度。
3. 考虑到在实际的焊接过程中，焊接区域中心的温度超过  $217^{\circ}\text{C}$  的时间不宜过长，峰值温度也不宜过高，所以理想的炉温曲线应使超过  $217^{\circ}\text{C}$  到峰值温度所覆盖的面积最小。由此确定在此要求下的最优炉温曲线，以及各温区的设定温度和传送带的过炉速度，并给出相应的面积。
4. 在焊接过程中，除满足制程界限外，还希望以峰值温度为中心线的两侧超过  $217^{\circ}\text{C}$  的炉温曲线应尽量对称。结合问题 3 对模型作适当修改后进一步给出最优炉温曲线，以及各温区设定的温度及传送带过炉速度，并求出相应的指标值。

## 二、 问题分析

### 2.1 问题一的分析

对于恒温区 1-9 我们可以由相应的热传导方程得到温度  $T$  随时间  $t$  的线性变化关系式，而在炉前炉后区域由于温度变化较大，则我们采用指数变化关系式来对其进行拟合。在物件由温度为  $T_1$  的区域进入到下一个温度为  $T_2$  的区域时，所可能的情况有以下三种，分别为  $T_1 > T_2$ ,  $T_1 < T_2$ ,  $T_1 = T_2$ 。

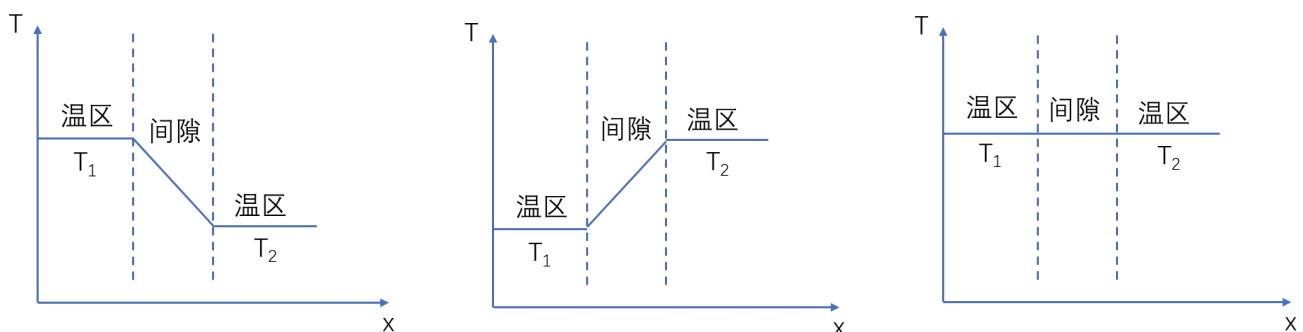


图 1 物件在温区间的温度变化情况

由给出的附件数据我们可以对其参数值进行拟合，然后套用问题一的温度信息，即可得到在各温区的温度变化以及炉温曲线图，由图像可以读出在每隔 0.5 s 焊接区域中心的温度值。

## 2.2 问题二的分析

在改变了初始温度后，我们建立了单目标寻优模型来寻求在制程范围内的最大传送带过炉速度，多次遍历，每次减小一定的步长后即可求解。

## 2.3 问题三的分析

我们列出相应的积分曲线面积表达式，结合前面求出的制程条件约束关系式，我们运用模拟退火算法来求得超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小的理想炉温曲线图，并在此前提下得到各温区对应的温度设定值。

## 2.4 问题四的分析

结合问题三中积分曲线面积最小的前提下，我们设置了两个权重参数  $w_1$  与  $w_2$  来衡量炉温曲线的对称情况，并且要同时满足  $\min S$  与  $\min \Delta w$ ，基于制程条件的约束我们建立了多目标组合优化模型来进行求解。

# 三、 模型假设

1. 假设我们研究的物件里温度变化只与其厚度有关，即热学中有关的三维问题可化简为一维问题来考虑。
2. 假设所给数据均是真实有效的。

# 四、 符号说明

表 1 各变量的符号说明

符号	说明	单位
$T_1$	小温区 1-5 的温度	°C
$T_2$	小温区 6 的温度	°C
$T_3$	小温区 7 的温度	°C
$T_4$	小温区 8-9 的温度	°C
$u$	电路板经过回焊炉时中心的温度	°C
$x$	电路板在炉内的位移	cm
$v$	传送带的过炉速度	cm/min
$k$	冷却系数	/
$S$	阴影部分面积	°C · s
$w$	权重系数	/
$t_0$	电路板温度第一次达到 217°C 的时间点	s
$t_{\max}$	电路板温度达到峰值温度的时间点	s
$d$	曲线两侧的对称度	/

## 五、模型的建立与求解

### 5.1 问题一模型的建立与求解

#### 5.1.1 模型的建立

查阅相关资料可知一维热传导方程如下，其中  $k_1$  为整个系统的导热率， $c$  为物体比热容， $\rho$  为物体密度

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad \alpha^2 = \frac{k_1}{c \cdot \rho} \quad (1)$$

则对于恒温区 1-9 我们可知在达到稳态后温度不再随时间的变化而变化，即有热传导方程等于 0，我们可以解出温度  $u$  与位置  $x$  的线性关系式如下

$$u(x,t) = hx + b \quad (2)$$

而对于炉前炉后温度，由于其和其他温区温度相差较大，故我们采用指数变化关系式来对其进行拟合，其中  $C$  为常数， $T_0$  为室温。

$$u(x,t) = C \cdot e^{-\lambda x} + T_0 \quad (3)$$

由于进入回焊炉前整体温度为  $25^\circ\text{C}$ ，故有  $u(x,0)=25$ ，而对于边界条件，我们则由牛顿冷却定律可得

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -k(u - u_{air}(t)) \quad (4)$$

其中  $k$  为冷却系数， $u_{air}(t)$  为系统外界温度。而在边界条件处由已知条件可得

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{x=0} = \delta(u(t) - u_{air}(t)) \\ \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{x=15} = -\delta(u(t) - u_{air}(t)) \end{cases} \quad (5)$$

故我们得到基于热传导方程和牛顿冷却定律的模型如下

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 25 \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{x=0} = \delta(u(t) - u_{air}(t)) \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{x=15} = -\delta(u(t) - u_{air}(t)) \end{array} \right. \quad (6)$$

### 5.1.2 模型的求解

在各温区设定的温度分别为 175°C (小温区 1~5)、195°C (小温区 6)、235°C (小温区 7)、255°C (小温区 8~9) 及 25°C (小温区 10~11) 和传送带的过炉速度为 70 cm/min 的情况下，我们由附件数据分析得到在各时间段的焊接区域中心温度变化函数关系图像和外界环境温度曲线图如下所示

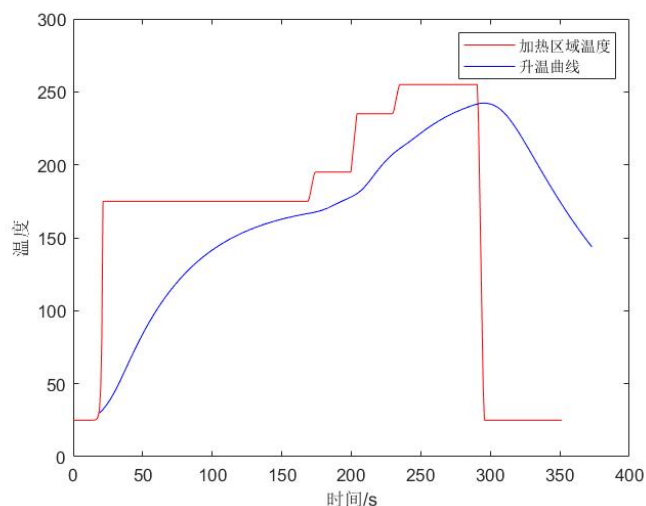


图2 外界环境区域与附件数据的温度变化

在问题一中修改初始条件后，我们对上面拟合得到的关系式进行一定量的修改后，可以得到在小温区 3、6、7 中点及小温区 8 结束处焊接区域中心的温度分别为：小温区 3 中点 130.78°C，小温区 6 中点 165.96°C，小温区 7 中点 188.02°C，小温区 8 结束处 224.39°C。对应修改后的炉温曲线图如下所示

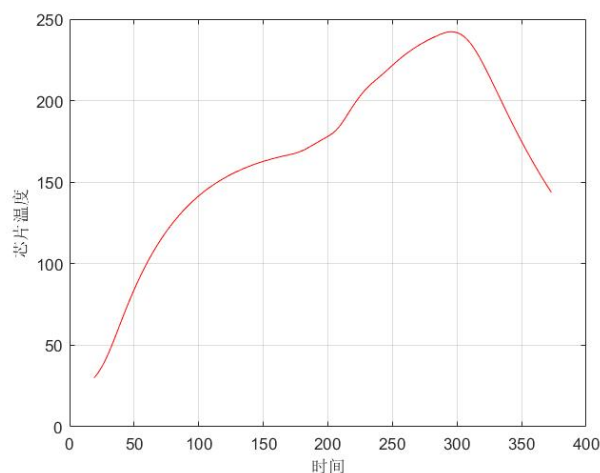


图3 问题一的炉温曲线图

结合图线和所求解得到的数值解我们可以得到在每隔 0.5s 焊接区域中心的温度变化，结果存入 result.csv 文件中，可以在我们的支撑材料中查看结果

## 5.2 问题二模型的建立与求解

### 5.2.1 模型的建立

当再次改变初始给定温度后，由分析可知，如果传送带过炉速度过快，则会使电路板升温降温所需时间很少，使温度上升与下降斜率变大，超过所给定的制程界限，降低生产效率。所以我们建立基于一定制程约束条件下的单目标寻优模型。

### 5.2.2 模型的求解

在给定温度的条件下，需要求出此情况下的最大过炉速度，所以我们的优化目标为  $\max v$ 。由题目中已知的条件我们可以列出以下制程条件关系式

$$\left\{ \begin{array}{l} -3 \leq \frac{du}{dt} \leq 3 \\ 60 \leq t|_{150 \leq u \leq 190} \leq 120 \\ 40 \leq t|_{u \geq 270} \leq 90 \\ 240 \leq u_{\max} \leq 250 \\ 65 \leq v \leq 100 \\ \frac{du}{dt} = -k(u - u_{air}(t)) \end{array} \right. \quad (1)$$

综上所述，所以我们需要求解的是在特定温度条件下的传送带过炉速度最大值。单目标寻优模型如下

$$\begin{aligned}
& \text{目标函数} \quad \max v \\
& s.t \quad \left\{ \begin{aligned}
& \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\
& u(x,0) = 25 \\
& \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{x=0} = \delta(u(t) - u_{air}(t)) \\
& \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{x=15} = -\delta(u(t) - u_{air}(t)) \\
& -3 \leq \frac{du}{dt} \leq 3 \\
& 60 \leq t|_{150 \leq u \leq 190} \leq 120 \\
& 40 \leq t|_{u \geq 270} \leq 90 \\
& 240 \leq u_{\max} \leq 250 \\
& 65 \leq v \leq 100 \\
& \frac{du}{dt} = -k(u - u_{air}(t))
\end{aligned} \right. \quad (2)
\end{aligned}$$

结合牛顿冷却定律和单目标寻优算法求解得到的  $v_{\max}=79.23\text{cm/min}$ 。

### 5.3 问题三模型的建立与求解

#### 5.3.1 模型的建立

我们由前面问题求解得到的小温区 8-9 的温度变化函数关系式，并以电路板第一次到达温度为  $217^\circ\text{C}$  的时间点为积分下限，以到达峰值温度的时间点为积分上限，则可以列出阴影部分面积的积分曲线表达式，并在满足一定约束条件下进行寻优。

#### 5.3.2 模型的求解

假设温区 1-5，温区 6，温区 7，温区 8-9，温区 10-11 的温度分别为  $T_1$ 、 $T_2$ 、 $T_3$ 、 $T_4$ 、 $T_5$ ，传送带过炉速度为  $v$ ，电路板初次到达温度为  $217^\circ\text{C}$  时间点为  $t_0$ ，到达峰值温度时间点为  $t_{\max}$ ，则列出阴影部分面积的积分曲线表达式如下

$$S = \int_{t_0}^{t_{\max}} (u(t) - 217) dt \quad (1)$$

在此情况下各温区要满足的约束条件如下

$$\left\{ \begin{array}{l} 65 \leq v \leq 100 \\ 165 \leq T_1 \leq 185 \\ 185 \leq T_2 \leq 205 \\ 225 \leq T_3 \leq 245 \\ 245 \leq T_4 \leq 265 \end{array} \right. \quad (2)$$

并结合问题二中的约束条件（9），我们需要求解的是  $\min S$ ，故我们建立的面积优化模型如下

$$\text{目标函数 } \min S = \int_{t_0}^{t_{\max}} (u(t) - 217) dt \quad (3)$$

$$s.t \left\{ \begin{array}{l} -3 \leq \frac{du}{dt} \leq 3 \\ 60 \leq t|_{150 \leq u \leq 190} \leq 120 \\ 40 \leq t|_{u \geq 270} \leq 90 \\ 240 \leq u_{\max} \leq 250 \\ 65 \leq v \leq 100 \\ \frac{du}{dt} = -k(u - u_{air}(t)) \\ 65 \leq v \leq 100 \\ 165 \leq T_1 \leq 185 \\ 185 \leq T_2 \leq 205 \\ 225 \leq T_3 \leq 245 \\ 245 \leq T_4 \leq 265 \end{array} \right. \quad (4)$$

考虑到需要寻找全局最优结果，则我们考虑使用模拟退火算法来寻找。模拟退火算法的基本思想如下



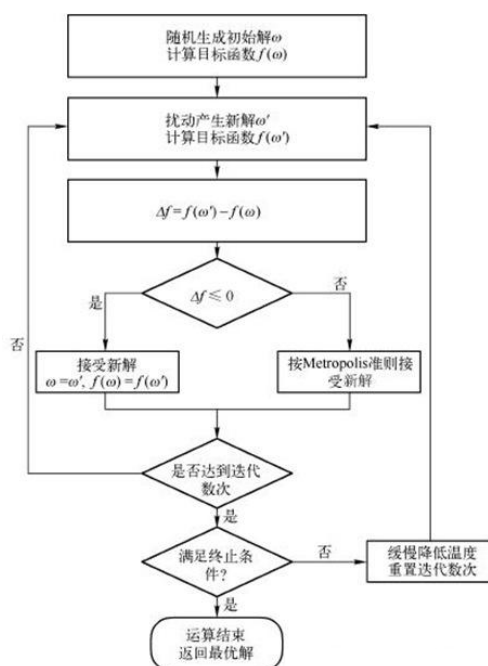


图 4 模拟退火算法流程

算法过程如下

(1) 初始化：初始温度  $T$  (充分大)，初始解状态  $S$  (是算法迭代的起点)，每个  $T$  值的迭代次数  $L$

(2) 对  $k=1, \dots, L$  做第(3)至第 6 步：

(3) 产生新解  $S'$

(4) 计算增量  $\Delta T = C(S') - C(S)$ ，其中  $C(S)$  为评价函数

(5) 若  $\Delta T < 0$  则接受  $S'$  作为新的当前解，否则以概率  $\exp(-\Delta T/T)$  接受  $S'$  作为新的当前解

(6) 如果满足终止条件则输出当前解作为最优解，结束程序。(终止条件通常取为连续若干个新解都没有被接受时终止算法)

(7)  $T$  逐渐减少，且  $T$  趋近于 0，然后转第 2 步。

利用模拟退火算法可以求解得到以下结果

表 2 面积最小情况下的各参数值

$T_1/^{\circ}\text{C}$	$T_2/^{\circ}\text{C}$	$T_3/^{\circ}\text{C}$	$T_4/^{\circ}\text{C}$	$T_5/^{\circ}\text{C}$	$v/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	$S/^{\circ}\text{C}\cdot\text{s}$
181.39	200.97	233.45	264.98	25	92.77	400.378

在此要求下的最优炉温曲线如下所示

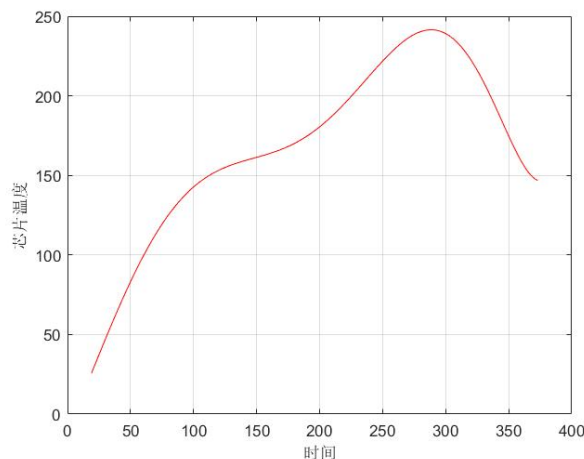


图 5 问题三的炉温曲线

## 5.4 问题四模型的建立与求解

### 5.4.1 模型的建立

由于需要考虑到峰值温度两侧曲线的对称性情况，且要保证要满足问题三中阴影部分面积尽量小的前提下，所以我们利用权重向量来对两侧面积进行约束，建立多目标组合优化模型。

### 5.4.2 模型的求解

记图中从峰值温度到再次达到  $217^{\circ}\text{C}$  的曲线面积为  $S'$ ，由对称性的值  $S'$  的计算式如下

$$S' = \Delta S = \int_{t_0}^{t_{\max}} |u(2t_{\max} - t) - u(t)| dt \quad (1)$$

则总面积  $S_{\text{总}}$  为  $S + S'$

$$S_{\text{总}} = \omega_1 \cdot \frac{S}{S_{\max}} + \omega_2 \cdot \frac{S'}{S_{\max}} \quad (\text{其中 } \omega_1 + \omega_2 = 1) \quad (2)$$

所以我们建立的多目标组合优化模型如下

$$\text{目标函数} \begin{cases} \min S = \int_{t_0}^{t_{\max}} (u(t) - 217) dt \\ \min \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \end{cases} \quad (3)$$

$$s.t \left\{ \begin{array}{l} -3 \leq \frac{du}{dt} \leq 3 \\ 60 \leq t|_{150 \leq u \leq 190} \leq 120 \\ 40 \leq t|_{u \geq 270} \leq 90 \\ 240 \leq u_{\max} \leq 250 \\ 65 \leq v \leq 100 \\ \frac{du}{dt} = -k(u - u_{air}(t)) \\ 65 \leq v \leq 100 \\ 165 \leq T_1 \leq 185 \\ 185 \leq T_2 \leq 205 \\ 225 \leq T_3 \leq 245 \\ 245 \leq T_4 \leq 265 \end{array} \right. \quad (4)$$

由此我们求解得到的温度和速度的指标值如下表所示

表 3 曲线图尽量对称情况下的参数值

$T_1/^{\circ}\text{C}$	$T_2/^{\circ}\text{C}$	$T_3/^{\circ}\text{C}$	$T_4/^{\circ}\text{C}$	$T_5/^{\circ}\text{C}$	$v/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	$S_{\text{总}}/^{\circ}\text{C}\cdot\text{s}$	$d$
183.94	191.04	235.87	264.13	25	90.37	410.791	0.9947

在此要求下的最优炉温曲线如下所示

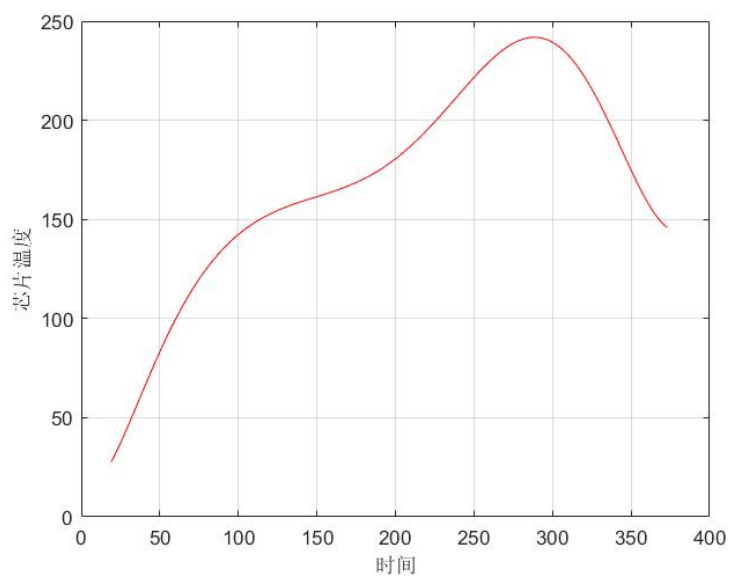


图 6 问题四的炉温曲线

## 六、 模型的评价与推广

### 6.1 模型的优点

1.在不同问题的要求下，我们建立了多种不同的模型来对其分别进行求解，并且使用了智能算法来使结果更加准确。

2.综合考虑到实际生产生活中情况，给出一定的误差范围，让结果与真实值之间相差较少。

### 6.2 模型的缺点

1.问题三、四求解过程中代码运行耗时较多，占用空间较大，曲线拟合情况不是很好。

### 6.3 模型的推广

本文对回焊炉中电路板的加热过程做了较为完整的分析，综合考虑了回焊炉中可能对炉温曲线带来影响的多种因素，所以对于实际生产过程有一定的借鉴意义。拓展到其他方面，如生产调度问题，材料选用问题等，本文中运用的一些算法模型也可以为它们提供一些新的思路。

## 七、 参考文献

- [1] 汤宗健,谢炳堂,梁革英.回流焊炉温曲线的管控分析[J].电子质量,2020(08):15-19+23.
- [2] 王明泉,周心如,李博文.基于热力学原理的炉温曲线调控模型[J].科学技术创新,2021(01):1-3.
- [3] 丛铭智,李琪,刘斌,王杰铃,刘靖宇.一种基于机理预测的 PCB 板回流焊炉温控制方法研究[J].电子技术与软件工程,2020(24):67-69.
- [4] 李楠,王晓杰,杜咏昊.最优炉温曲线与确定其工艺参数问题[J].电子测试,2021(01):48-50.
- [5] 方灏航.基于传热学的炉温曲线研究[J].现代信息科技,2020,4(20):18-22.
- [6] 郑博升,黄马乐,谢雨烽.炉温曲线的分析与控制[J].科学技术创新,2021(17):157-158.

## 附录

```
function y=create_temp_x(x)
    if x>=-25 & x<=0
        y=25+150*exp(x);
    elseif x<=172.5
        y=175;
    elseif x<=177.5
        y=4*(x-177.5)+195;
    elseif x<=208
        y=195;
    elseif x<=213
        y=8*(x-208)+195;
    elseif x<=243.5
        y=235;
    elseif x<=248.5
        y=4*(x-243.5)+235;
    elseif x<=314.5
        y=255;
    elseif x<=319.5
        y=-(230/5)*(x-314.5)+255;
    else
        y=25;
    end
end
```

```
function du=odefun(newt,u)
    Temp_air;
    du = zeros(1,1);
    du(1) = u(1)-T(newt);
end
```

```
function pdex11
```

```
m = 0;
x = linspace(0,1,15);
t = linspace(0,1,15);

sol = pdepe(m,@pdex1pde,@pdex1ic,@pdex1bc,x,t);
% Extract the first solution component as u.
u = sol(:,1);
```

```
% A surface plot is often a good way to study a solution.
surf(x,t,u)
title('Numerical solution computed with 225 mesh points.')
xlabel('Distance x')
ylabel('Time t')
```

```
% A solution profile can also be illuminating.
```

```
figure
plot(x,u(end,:))
title('Solution at t = 2')
xlabel('Distance x')
ylabel('u(x,2)')
% -----
function [c,f,s] = pdex1pde(x,t,u,DuDx)
c = 1;
f = DuDx;
s = 0;
% -----
function u0 = pdex1ic(x)
u0 = 25;
% -----
function [pl,ql,pr,qr] = pdex1bc(xl,ul,xr,ur,t)
T = 25;
pl = 0;
ql = 1*(ul-T);
pr = 15;
qr = -1*(ur-T);
```

```
function T1=T1(t)
    T1 = [];
    v = 70/60;
    for x = v*t-25
        T1 = [T1 create_temp_x(x)];
    end
    for i = 1:length(t)
        T1(i) = -exp(-i)*T1(i);
    end
end
```

```
T = [];
for x = -25 : 385.5
    T = [T create_temp_x(x)];
```

```
end  
x = -25 : 385.5;  
v = 70/60;  
t = x/v;  
plot(t,T);
```