

基于微分方程模型与元启发算法的波浪能最大功率求解

摘 要

波浪能作为一种清洁可再生能源，其利用是能源研究应用的关键之一。由浮子、振子、中轴以及能量输出系统构成的波浪能装置的储能转化过程中受到多种力的作用。如何对这些力进行动力学分析从而获得其能量转化功率的最优解是一个值得探讨的问题。基于这一背景，我们展开了以下工作：

对于问题一，在只考虑垂荡运动的情况下，浮子和振子都作一维运动。通过针对两种不同的情况分析二者的受力，在波浪的激励作用下分析二者的受力，通过牛顿第二定律构造了浮子与振子质心位置变化的动力学方程。而这一系统是一个二阶常微分方程组，通过改进欧拉法对方程组进行数值推演，并解得二者在 40 个波浪周期的位移与速度关系呈现周期运动。结果详见正文与附件。

问题二是对问题一的延伸，更换对应参数后求解 40 个波浪周期的总功和平均功率。在时间间隔为 0.2s 的情况下利用离散的求和代替连续的积分可以得到两种情况下功率与阻尼系数、幂指数的关系。而对于非常规数值函数的数值最优解，可以采用遗传算法或模拟退火算法等元启发算法进行求解。经对比，模拟退火算法的收敛速度最快并且可以得到：情形一的最优功率为 **228.89W**，对应最优阻尼系数 37000；情形二的最优功率为 **235W**，对应最优阻尼系数比值 41800,幂指数 0.05。

而问题三在前面问题的基础上增加了纵摇运动，振子与浮子的两种运动形式构成一个有机整体，除了利用牛顿第二定律外还需要应用角动量定理构造方程。对于这一多元二阶常微分方程组，难点问题在于当浮子旋转时其浮力变化并不方便求解，因为需要求解二重积分。对于浮子的浮力，通过蒙特卡洛模拟的方法多次采样取平均值求解得到浮力与倾角和浮子质心高度之间的关系。同样解得二者在 40 个波浪周期内垂荡运动的位移、速度与纵摇运动的转动角度和角速度，详细结果见正文与附件。

问题四是对问题三的衍生，此时功率由直线阻尼器和旋转阻尼器二者的功率相加得到。同样利用遗传算法和模拟退火算法求解，可以得到最优功率为 **364.5W**，直线阻尼器阻尼系数为 61400，旋转阻尼器阻尼系数为 100000。

与此同时，通过对问题中其他参数进行灵敏度分析，发现振子的质量与弹簧的弹性系数对最优功率有显著影响。适当减小振子的质量或弹簧弹性系数都可以使最优功率提升至 300W 以上。

我们认为构建的二阶常系数微分方程组是趋向于稳定的动力系统，在数值求解上保证了一定精度的同时不失稳定性和一般性，与实际的物理过程相契合，具有一定的参考价值。

关键词：二阶常系数微分方程，改进欧拉法，遗传算法，模拟退火算法，蒙特卡洛模拟

一、问题重述

1.1 问题背景

随着经济和社会的发展，绿色能源技术正在得到大力发展。波浪能作为一种清洁可再生能源，储能丰富，业务前景广泛，波浪能源的利用是能源研究应用的关键之一。由浮子、振子、中轴以及能量输出系统（PTO，包括弹簧和阻尼器）构成的波浪能装置，其中振子、中轴及 PTO 被密封在浮子内部，浮子在线性周期微幅波作用下会受到波浪激励力、附加惯性力、兴波阻尼力和静水恢复力等。

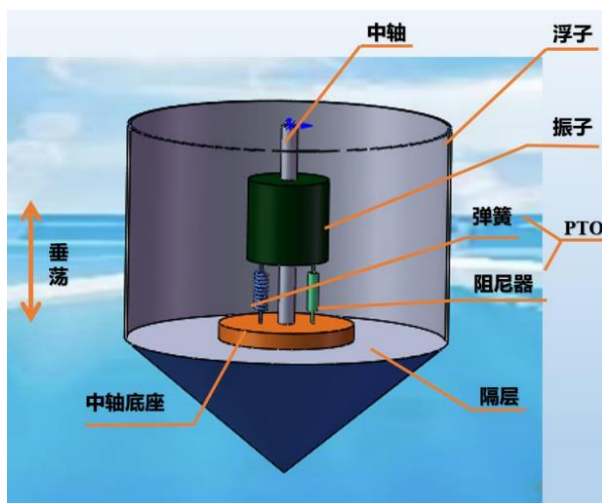


图 1 浮子与振子结构示意图

1.2 问题提出

需要根据系统的动力过程及其参数解决以下问题：

（1）浮子和振子都只在竖直方向上作一维振动，计算浮子和振子在两种情况下在波浪激励力作用下前 40 个波浪周期内时间间隔为 0.2 s 的垂荡位移和速度，并填入附件表中。

（2）仍考虑浮子在波浪中只做垂荡运动，分别对两种情况建立确定直线阻尼器的最优阻尼系数的数学模型，使得 PTO 系统的平均输出功率最大及其对应的阻尼系数也就是最优解。

（3）考虑浮子和振子除了一维方向上的振动还存在平面内的摆动，海浪的输入除了波浪激励力提供振动外还会提供一个波浪激励力矩提供摆动。除了直线阻尼器，在转轴上还安装了旋转阻尼器和扭转弹簧，直线阻尼器和旋转阻尼器共同做功输出能量。计算浮子与振子在波浪激励力和波浪激励力矩作用下前 40 个波浪周期内时间间隔为 0.2 s 的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度。

（4）考虑浮子在波浪中只做垂荡和纵摇的情形，针对直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数均为常量的情况，建立确定直线阻尼器和旋转阻尼器最优阻尼系数的数学模型，并确定功率的最优解及其对应的系数。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

对于问题一，这是一个动力学系统的建模问题。对于浮子与振子整体构成的系统而言，系统受到的外力包括浮力、波浪激励力、兴波阻尼力和附加惯性力的共同作用，提供了浮子和振子系统的加速度。而浮力与系统重力之间的差实际上就是静水恢复力。而对振子而言，振子受到的力只有重力、阻尼力和弹簧弹力，初始状况下因为系统静止初始阻尼力为 0，弹簧弹力与振子重力平衡，在运动过程中三者合力提供合加速度。通过解二阶微分方程组即可对整体的动力学情况进行模拟，对不同的阻尼系数仅需分类讨论即可^[1]。求解微分方程组的方法可以使用龙格库塔法或改进欧拉法^[2]。

2.2 问题二的分析

问题二是问题一的延续。阻尼器的能量转换实际上就是阻尼力的做功，做功与时间的商即平均功率^[3]。当阻尼系数为常数的时候，它是一个一元函数寻优过程；而当阻尼系数可变时，依照问题条件，这个问题是一个二元函数寻优过程。由于变量在指数上，可以对功率取对数再求极值。但由于浮子和振子的位移求解是数值解，所得到的函数往往也是数值形式的函数，对于数值类的寻优模拟除了传统的优化方法比如内点法、梯度下降等，我们也可以使用一些元启发优化算法例如遗传算法或模拟退火算法等求解^[4]。

2.3 问题三的分析

问题三相比于问题一考虑了转动问题，为研究方便起见我们把运动分解为沿轴方向的垂荡运动和平面内的纵摇摆动^[6]。纵摇与垂荡的方程其实非常类似，本质上是外力矩提供了振子和浮子的角速度。但相对比较难的是浮力变化量也就是静水平衡力和静水平衡力矩的求解，因为当浮子旋转时浮子浸没在水中的部分相当于一个斜面截一个旋转体^[7]，这个部分的体积也就是二重积分是较难求解的。为了求解方便，可以采用蒙特卡洛模拟的方法求数值解^[8]，对于每个角度都可以进行蒙特卡洛模拟以得到淹没体积与倾斜角度之间的关系^{[9][10]}。

2.4 问题四的分析

问题四是问题三的延续。阻尼器的能量转换实际上就是阻尼力的做功，除了直线阻尼器还有旋转阻尼器。这一过程与问题二采取类似的办法就可以求解。

整体的建模流程如图 2 所示：

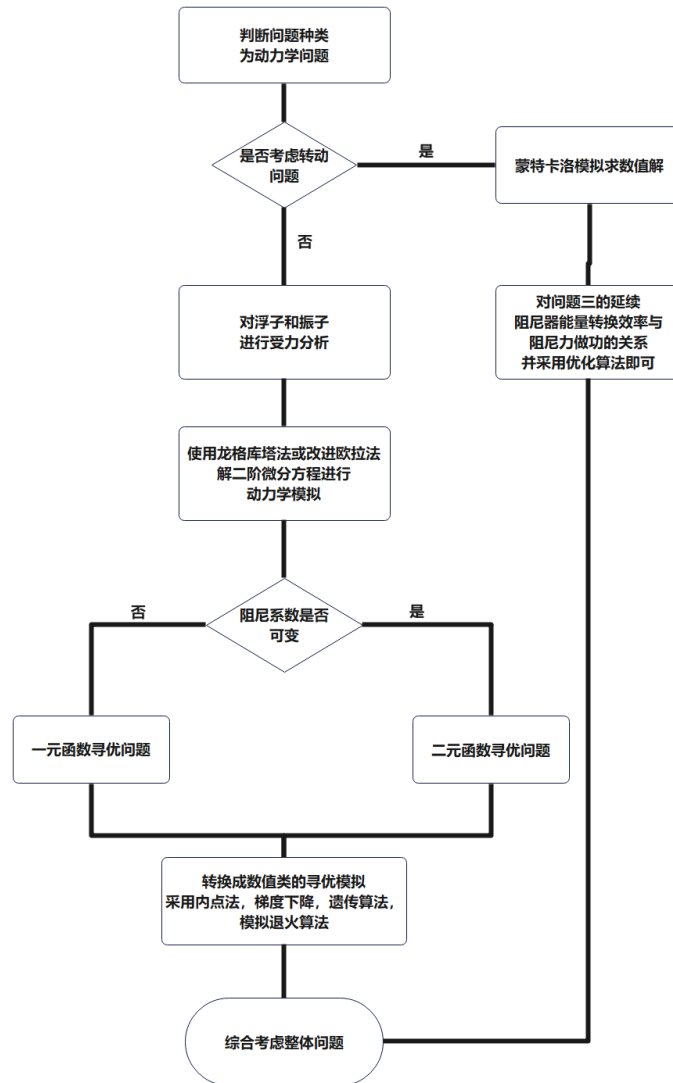


图 2 整体建模流程图

三、模型假设

为使问题得到简化，我们适当进行如下假设：

1. 假设计算过程中不计浮子外壳的厚度，这一假设有助于我们去求解浮子的转动惯量，对几何问题的描述也更加方便。
2. 假设浮子和振子的质量分布都是均匀的，这一假设保证阿基米德原理、转动惯量等公式是可以应用的，当质量分布不均匀时质量密集区域与稀疏区域的动力学过程可能会有影响。
3. 假设海平面高度不会发生变化，这一假设保证在未知海平面变化幅度的情况下浮子浸没在水面下方的体积值和体积变化量是可解的。
4. 假设不考虑系统内部的摩擦例如转轴摩擦、弹簧摩擦和空气阻力等，这一假设保证系统的受力没有那么复杂，适当对问题进行了简化。
5. 假设阻尼器做功能够全部被转化为能量，没有能量损耗。
6. 不考虑弹簧、阻尼器、轮盘、杆的质量，这一假设为问题给定。

7. 海水是一种理想流体，无黏无旋，这一假设为问题给定。

四、符号说明

我们对正文中出现的符号进行一些说明，文中所使用的符号及其定义如表 1 所示：

表 1 符号说明及表示

符号	说明
m	振子质量
M	浮子质量
m_0	附加惯性质量
g	重力加速度
V_0	初始状态下浸没在海面下方的体积
ρ	海水密度
η	直线阻尼器的阻尼系数
$x_{1,2}$	浮子与振子的位置
$\theta_{1,2}$	浮子与振子的倾角
ψ	兴波阻尼力系数
λ	兴波阻尼力矩系数
K	扭转弹簧刚度
L	力臂长度
$J_{1,2}$	浮子与振子的转动惯量
J_0	附加转动惯量
W	阻尼器做功
P	阻尼器平均功率
ϵ	静水恢复力矩系数

五、模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 平衡状态下浮子与振子的位置关系

浮子与振子在平衡状态下若构成一个系统，系统的浮力与二者的重力相平衡。而在系统内部，弹簧弹力和阻尼器的阻尼力作为系统内力，但由于平衡状态下浮子与振子的相对速度为 0 故阻尼器不提供阻尼力。在这一状态下，弹簧弹力与振子重力平衡，阻尼器由于速度差为 0 不提供阻尼力。由胡克定律可得：

$$mg - kl_0 = 0 \quad (1)$$

带入 $k=80000\text{N/m}$ ，可以得到初始弹簧的初始压缩量 l_0 为 0.2980m 。

初始状态下因为浮力与系统重力平衡，由阿基米德原理，浮力等于“排出液体的重力”，于是有：

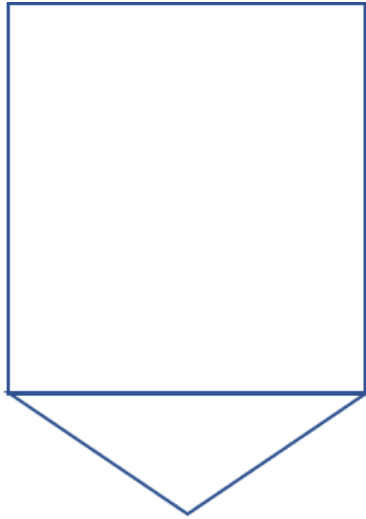
$$\rho g V_0 = (m + M)g \quad (2)$$

可以解得初始平衡态下浮子浸没在水面下的体积为 7.1210m^3 。而在已知浮子几何参数的情况下可以求解其浸没在水面下方的深度。经求解，锥体部分的体积为 0.8378m^3 ，而柱体部分半径为 1m ，解得柱体淹没在水面下方的深度为 2m ，加上锥体高 0.8m ，故整体淹没在水面下方的高度为 2.8m 。

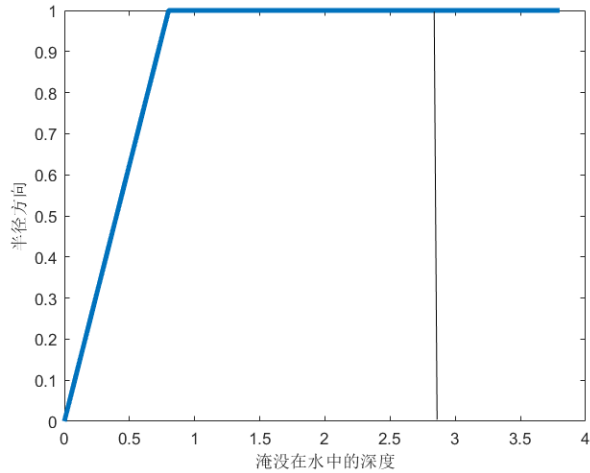
由于浮子的几何形状为一个旋转体，可以研究它的截面。图 3(a)为旋转体截面，下方是一个三角形而上方是一个矩形；而以锥体顶点为原点以中轴为 x 轴建立坐标系，如图 3(b)所示，曲线的方程为：

$$z = \begin{cases} \frac{5}{4}x, & 0 < x \leq 0.8 \\ 1, & 0.8 < x \leq 3.8 \end{cases} \quad (3)$$

那么浮子淹没在水面内的体积及其变化量也就可以抽象为将曲线 z 进行绕 x 轴旋转后求旋转体的定积分即可。



(a) 旋转体的截面



(b) 依据截面构建坐标系

图 3 浮子淹没在水面内的体积及其变化量

5.1.2 垂荡状态下系统的动力学分析

若想使系统进入垂荡状态，需要给浮子一个初始的速度或加速度。而波浪为系统提供了动力，但由于波浪在提供动力的同时也为其周围的海水提供了动能，海水反过来作用与浮子上，于是产生了附加惯性力。所以附加惯性力作用对象为海水，它对应的虚拟质量也和浮子一起以相同的加速度运动。运动过程中，取竖直向上为正方向，浮子和振子的位移分别为 x_1 和 x_2 ，那么，对振子而言，它的受力始终只有弹簧的弹

力、阻尼器的阻尼力和自身重力。由牛顿第二定律可以得到振子的运动：

$$k(l_0 + x_1 - x_2) + \eta \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) - mg = m \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad (4)$$

其中振子的初始速度和加速度都为 0。而又由于初始状态下弹簧的弹力与振子重力相平衡，可以简化方程为：

$$k(x_1 - x_2) + \eta \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) = m \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad (5)$$

将振子与浮子看作一个系统，阻尼器提供的阻尼力与弹簧弹力成为系统内力。而又由系统的牛顿第二定律，系统外力包括波浪激励力提供动力、兴波阻尼力提供阻力、系统在水下受到的浮力和系统重力。考虑虚拟质量提供的惯性力，它作用在浮子上，所以在计算加速度时需要考虑虚拟质量。合力提供了浮子、振子与虚拟质量的加速度：

$$\rho g V + f \cos \omega t - \psi \frac{dx_1}{dt} - (m + M)g = (M + m_0) \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad (6)$$

而由于初始的平衡状态下浮力与系统重力平衡，那么运动状态中浮力与重力的差值也就是静水恢复力等于浸没在水下体积的变化量对应的重力：

$$\rho g V - (m + M)g = \rho g \int_d^{x_1} \pi z^2(h) dh \quad (7)$$

那么，方程(7)可以简化为：

$$\rho g \int_d^{x_1} \pi z^2(h) dh + f \cos \omega t - \psi \frac{dx_1}{dt} = (M + m_0) \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad (8)$$

对于这一一元积分，我们可以通过符号计算解得其积分表达式为：

$$\int_d^{x_1} \pi z^2(h) dh = \begin{cases} \frac{25}{48} \pi x_1^3 - V_0, 0 < x \leq 0.8 \\ \pi \left(x_1 - \frac{8}{15} \right) - V_0, 0.8 < x \leq 3.8 \end{cases} \quad (9)$$

而对于下面两种不同的情况，阻尼器的阻尼系数不同。

情形一：阻尼器的阻尼系数为常数：

$$\eta = 10000 \quad (10)$$

情形二：阻尼器的阻尼系数与速度差的绝对值有关，幂指数为 0.5：

$$\eta = 10000 \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right)^{0.5} \quad (11)$$

5.1.3 利用改进欧拉法求解浮子与振子的位移

基于一种利用离散模拟连续的思想，为了对这一二阶常微分方程组进行数值求解，我们利用改进欧拉法设计数值方法。在欧拉法中，对于某个函数 y ，直接使用该点的切线 $y(x_k)$ 当做直线的斜率会造成一个明显的结果，即对于 $y(x_{k+1})$ 的求解一定会有误差，当且仅当 $y(x)$ 为直线时，结果才是准确的。在 (x_k, y_k) 已知的情况下，可以利用拉格朗日中值定理确定直线斜率，确保恰好经过待估测点 (x_{k+1}, y_{k+1}) [11]。

在 (x_k, x_{k+1}) 区间内存在一点，使得等式 $f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(c)(x_{k+1} - x_k)$ 成立，所以准确的直线方程即为：

$$y(x) = y(x_k) + y'(c)(x - x_k) = y(x_k) + y'(x_k + \theta h)(x - x_k) \quad (12)$$

如果等间距取值，即 $x_{k+1} - x_k = h$ ，则有：

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k + \theta h) \cdot h \quad (13)$$

其中 $\theta \in (0, 1)$ ，这种方法可以确保估测的 $y(x_{k+1})$ 准确，而另 $\theta = 0$ 时即为欧拉法。也可以使用改进欧拉法。而直接使用端点处 $y(x_k)$ 的斜率不准确，可以考虑使用两个端点斜率取平均，即：

$$y'(c) = \frac{y'(x_k) + y'(x_{k+1})}{2} \quad (14)$$

值得注意的是， $f(x_{k+1}, y_{k+1})$ 中 y_{k+1} 是未知的，待求的，此处的 y_{k+1} 可以用欧拉法来估计，即：

$$y_{k+1} = y_k + y'(x_k) \cdot h = y_k + K_1 h \quad (15)$$

由于波浪频率为 1.4005 s^{-1} ，所以我们可以解得 40 个波浪周期约为 100s 左右。取平衡态下圆锥顶点的位置为原点，可以求解浮子的质心与振子的质心位置变化。由于振子是实心的规则圆柱体，其质心高度位于锥体高度、弹簧压缩后长度和振子高的一半三者之和，也就是 1.2916 m；而浮子由于其为一个均匀的圆柱壳体和圆锥壳体组合而成，经计算，它的初始质心高度为 2.2298 m。

以情形一为例，当阻尼系数为常数时通过改进欧拉法模拟，我们可以得到振子和浮子质心的位置变化如图 4 所示：

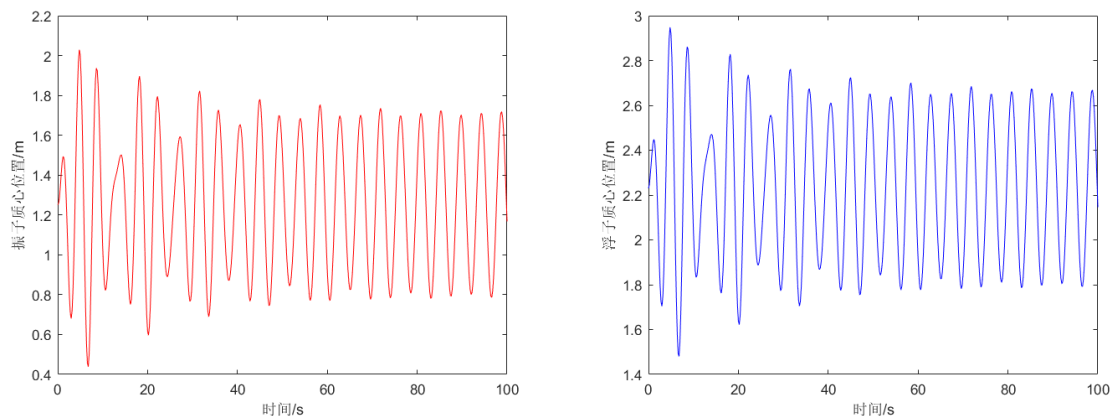


图 4 振子和浮子质心位置的变化曲线

需要注意的是，在图 4 中我们是以振子与浮子质心的高度为初始值送入微分方程中求解，所以图 4 描述的是二者的位置。而位移是相对位置变化，求解位移曲线时需要减去初始平衡态下二者的高度。

从图 4 中可以看到，在运动初期振子和浮子在前期有较明显的位移差，且二者均不会高于总高度（3.8m），到 20s 之后均达到稳定状态，稳定状态下浮子与振子的相对位移其振幅大约为 0.12m，呈现一定的周期性。开始运动时波浪冲激力提供浮子一个向上的初始加速度，浮子开始向上运动，弹簧和阻尼器被进一步压缩从而对振子产生更大的斥力，振子向上起振。但在系统趋于稳定后，二者虽然大体上波形相似但均不是简谐振动，并且存在一定的相位差。这是由于二者的运动受到多个力影响，一方面弹簧和阻尼器的系数提供的频率成分与波浪频率都各自提供了不同的频率成分，若想对成分进行进一步分析也可以进行傅里叶变换。

通过解动力系统还可以得到振子和浮子的速度变化曲线如图 5 所示：

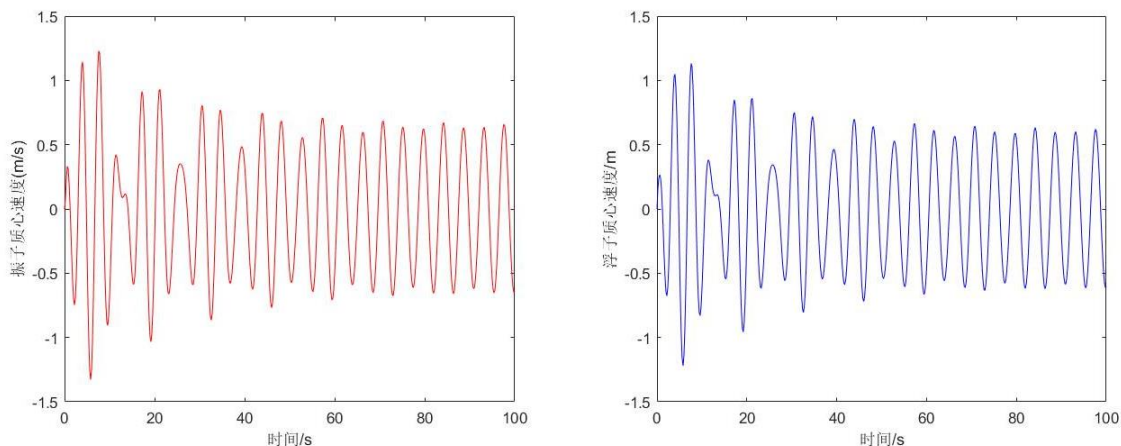


图 5 振子与浮子的速度变化曲线

从图 5 中可以看到振子与浮子速度差虽然并不大但的确存在一定差异，并且速度系统也是周期变化直到系统稳定，符合问题一的要求。

我们将情形一和情形二的位移变化和速度变化数据都放在附件表格中。经模拟，在几个重要时间节点对应的位移和速度如表 2 所示：

表 2 部分时间点对应的位移和速度

	时间/t	振子位移/ x_1	振子速度/ v_1	浮子位移/ x_2	浮子速度/ v_2
情形一	10	-0.2095	-0.68609	-0.1887	-0.63376
	20	-0.6353	-0.25794	-0.5914	-0.22761
	40	0.2961	0.345772	0.2852	0.324357
	60	-0.3344	-0.50377	-0.3171	-0.46863
	100	-0.0844	-0.63986	-0.0839	-0.60128
情形二	10	-0.2381	-0.69607	-0.2092	-0.64928
	20	-0.6660	-0.27403	-0.6154	-0.25098
	40	0.2751	0.313174	0.2644	0.29631
	60	-0.3526	-0.52902	-0.3300	-0.49332
	100	-0.0958	-0.65217	-0.0905	-0.61164

5.2 问题二模型的建立与求解

5.2.1 阻尼器做功求解

阻尼器的功本质上是阻尼力对相对位移的做功。当阻尼器的阻尼系数为常数时，它从 0 到 T 时刻所做的功为：

$$W = \int_0^T \eta \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) dx \quad (16)$$

可以计算得到其平均功率为：

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \eta \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right)^2 dt \quad (17)$$

考虑下面两种不同的情况：

情形一：阻尼器的阻尼系数为常数，此时问题变成一个一元函数求极值的问题。对于一元函数求极值的算法，由于这一函数的值与方程的数值解有关，是一个非初等数值函数，我们可以对比遗传算法和模拟退火进行求解。

本质上我们对于功率这一数值积分的求解，可以基于利用离散模拟连续的思想，通过将每个微元上的微分转化为差分对问题进行数值计算。即对于情形一：

$$P(\eta) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \eta \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \quad (18)$$

情形二：阻尼器的阻尼系数与速度差有关，此时问题变成一个二元函数求极值的问题。对于多元非初等数值函数求极值的算法，我们同样可以对比遗传算法和模拟退火进行求解。即对于情形二：

$$P(\alpha, \eta) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \eta \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right)^{2+\alpha} \quad (19)$$

由于每个时间步上的秒数为 0.2s，对每个 0.2s 内的阻尼力与位移差进行乘积再求和即可得到总功，由于总的模拟时间为 100s，为求解方便这里也以 100s 内的总功求平均功率。

5.2.2 优化问题的算法

对于问题中给定的功率寻优，这个函数是非常规数值函数需要寻找数值最优解，传统的内点法、分支定界法等已经很难求解此类问题。为对问题进行合理求解，可以使用一些元启发优化算法进行建模设计。

遗传算法是一类借鉴生物界自然选择和自然遗传机制的随机搜索算法，通过模拟生物的遗传、变异等自然现象搜索函数极值。其主要特点是直接对结构对象进行操作，不存在求导和函数连续性的限定；具有更好的全局寻优能力；不需要确定的规则就能自动获取和指导优化的搜索空间，自适应地调整搜索方向^{[5][12]}。

遗传算法借鉴了生物学的概念，首先需要对问题进行编码，通常是将函数编码为二进制代码以后，随机产生初始种群作为初始解。随后是遗传算法的核心操作之一——选择，通常选择首先要计算出个体的适应度，根据适应度不同来采取不同选择方法进行选择，常用方法有适应度比例法、期望值法、排位次法、轮盘赌法等。

在自然界中，基因的突变与染色体的交叉组合是常见现象，这里也需要在选择以后按照一定的概率发生突变和组合。不断重复上述操作直到收敛，得到的解即最优。遗传算法基本思想如图 6 所示：

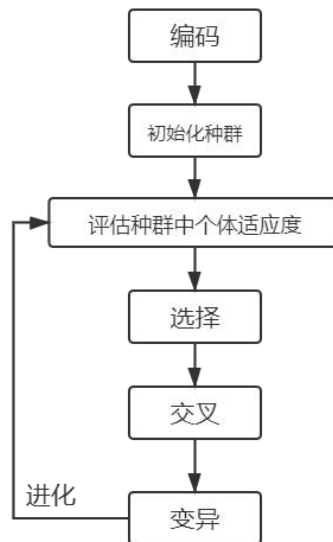


图 6 遗传算法的基本思想

模拟退火算法由 Kirkpatrick 等提出，能有效的解决局部最优解问题。模拟退火算法来源于晶体冷却的过程，如果固体不处于最低能量状态，给固体加热再冷却，随着温度缓慢下降，固体中的原子按照一定形状排列，形成高密度、低能量的有规则晶体，对应于算法中的全局最优解。而如果温度下降过快，可能导致原子缺少足够的时间排

列成晶体的结构，结果产生了具有较高能量的非晶体，这就是局部最优解。因此就可以根据退火的过程，给其在增加一点能量，然后在冷却，如果增加能量，跳出了局部最优解，本次退火就是成功的^[13]。

模拟退火算法包含两个部分即 Metropolis 准则和退火过程。Metropolis 准则以概率来接受新状态，而不是使用完全确定的规则，称为 Metropolis 准则^[14]，计算量较低。从某一个解到新解本质上是衡量其能量变化，若能量向递减的方向跃迁则接受这一次迭代，若能量反而增大，并不是一定拒绝而是以一定的采样概率接受。这一概率值满足 Metropolis 定义：

$$P = e^{-\frac{E(n+1) - E(n)}{T}} \quad (20)$$

直接使用 Metropolis 算法 可能会导致寻优速度太慢，以至于无法实际使用，为了确保在有限的时间收敛，必须设定控制算法收敛的参数，在上面的公式中，可以调节的参数就是 T，T 如果过大，就会导致退火太快，达到局部最优值就会结束迭代，如果取值较小，则计算时间会增加，实际应用中采用退火温度表，在退火初期采用较大的 T 值，随着退火的进行，逐步降低^[15]。模拟退火的过程如图 7 所示：

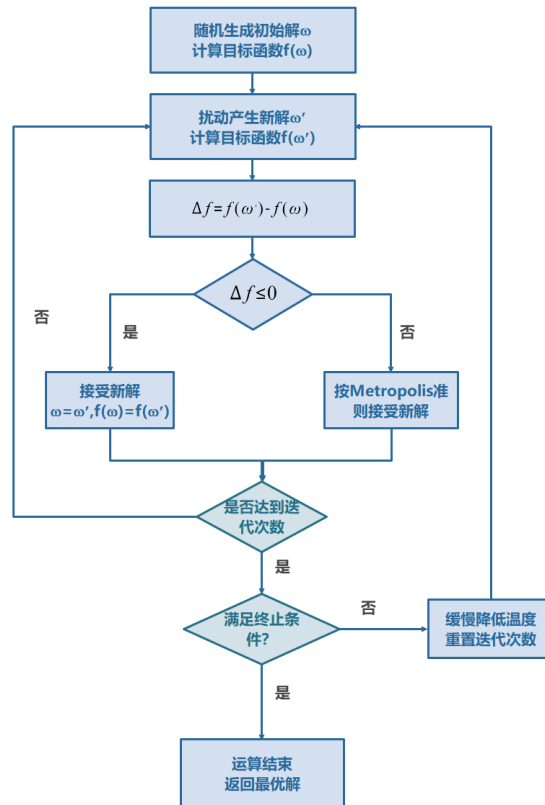


图 7 模拟退火算法流程图

5.2.3 优化问题的求解

对于情形一，在更改参数后利用问题一中的常微分方程组和功率的离散化公式可以得到其变化曲线如图 8 所示：

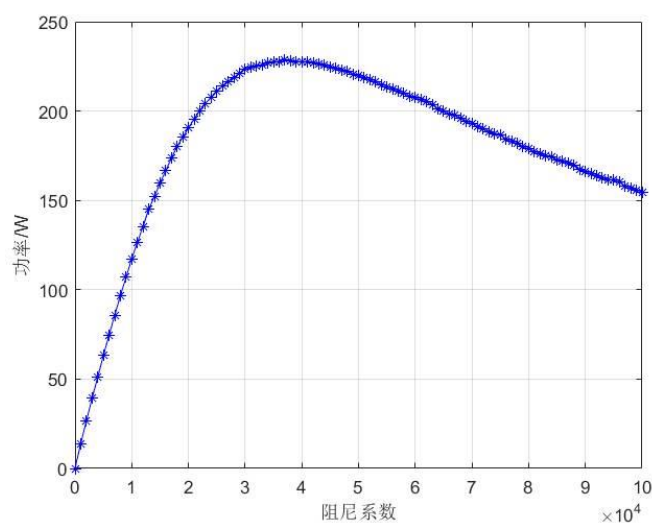


图 8 功率与阻尼系数的变化关系图

从图 8 中可以看到对于这一一元搜索问题，功率随着阻尼系数先增后降。经过遗传算法和模拟退火算法求解均可以得到，当阻尼系数取值为 37000 时其功率最大，可以达到 228.94 W。

而对于情形二，由于变量为二元，我们并不方便去分析其一元变化。并且由于次数可变，求解时间上也有很大要求。故遗传算法和模拟退火算法等元启发优化方法在数值函数的数值最优解求解过程中起到了较好的作用。遗传算法和模拟退火算法的迭代曲线如图 9 所示：

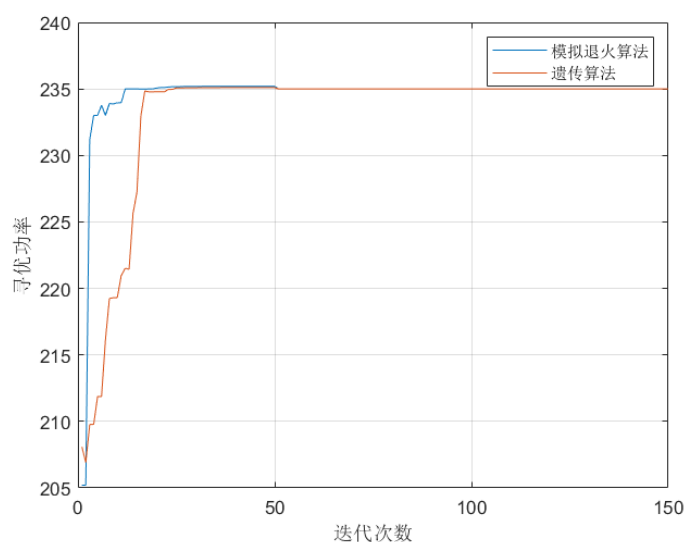


图 9 两种算法下寻求的最大功率

可以看到同样是经过 150 次迭代，相较于遗传算法而言模拟退火算法能够更快收敛到最优解。对于情形二求解得到的最优结果为，当比例系数为 41800，次数为 0.05 时功率最大，可以达到 234.47W。

5.3 问题三模型的建立与求解

5.3.1 系统摇荡运动过程中的状态方程

系统在摇荡过程中既有沿着自身轴方向的垂荡运动又有在一个平面内的纵摇运动。系统运动过程中各部分受力如图 10 所示：

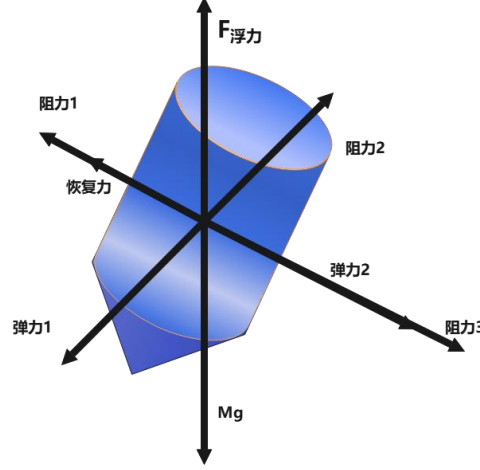


图 10 系统运动过程的各部分受力示意图

取竖直方向为纵摇运动的平衡位置，平衡态下圆锥顶点为原点。对于振子而言，其自身的运动可以分解为沿杆的垂荡分量和平面内的纵摇分量两个部分。对于垂荡方向上的运动而言，各自以其沿着自身轴向为正方向，同样满足类似于问题一中的关系式。但重力沿杆方向存在一个分量，这一分量与其摆动角度有关：

$$k(l_0 + x_1 - x_2) + \eta \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + mg(1 - \cos\theta_2) = m \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad (21)$$

而对于其纵摇方向上而言，重力在垂直于杆的方向上提供力矩，加上弹簧的扭矩和旋转阻尼力矩，可以得到基于角动量定理的表达式：

$$K(\theta_2 - \theta_1) + \lambda \left(\frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_1}{dt} \right) - mgL_2 \sin\theta_2 = J_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} \quad (22)$$

对于浮子和振子构成的系统而言，类似于问题一可以得到垂荡运动的表达：

$$\rho g V \cos\theta_1 + f \cos\omega t - \psi \frac{dx_1}{dt} - (mg \cos\theta_2 + Mg \cos\theta_1) = (M + m_0) \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad (23)$$

由于静水恢复力矩可以在海水中做纵摇运动时，使浮体转正，且其大小与浮体相对于静水面的转角成正比，比例系数称为静水恢复力矩系数，所以我们认为静水恢复力矩，总重力力矩和浮力力矩三者矢量和为 0：

$$\rho g V x_1 \sin \theta_1 - (m g L_2 \sin \theta_2 + M g L_1 \sin \theta_1) = \epsilon \cdot \theta_1 \quad (24)$$

其中 ϵ 为静水恢复力矩系数。而就其纵摇方向上而言，同样是浮力和重力在垂直于竖直方向上提供力矩，加上外部的波浪激励力矩和兴波阻尼力矩：

$$\epsilon \cdot \theta_1 + L \cos \omega t - \phi \frac{d\theta_1}{dt} = (J_1 + J_0) \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + J_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} \quad (25)$$

对于二者而言，振子和浮子对应的力矩 J_1 ， J_2 分别如图 11 的三个分解图形得到：

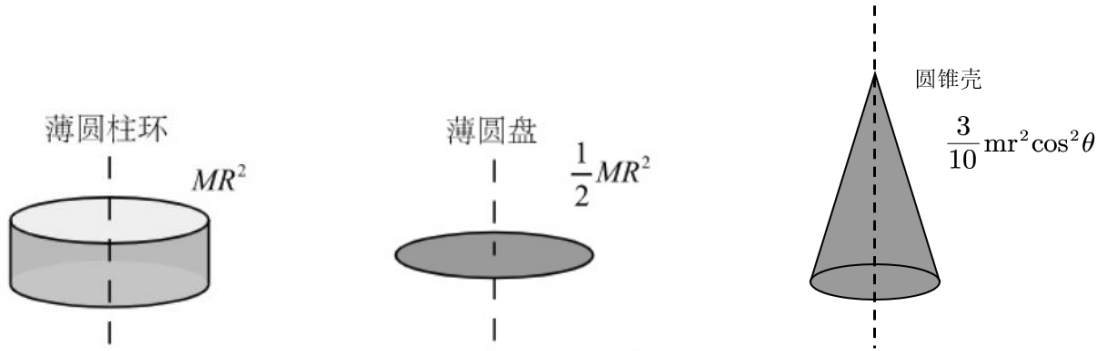
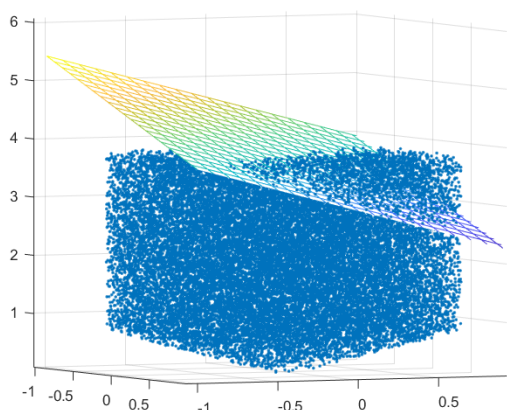


图 11 三个基本图形的转动惯量

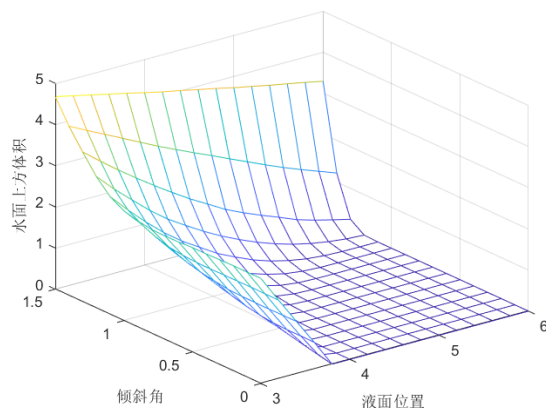
现阶段旋转阻尼器的阻尼系数为常数 1000 N m s ，直线阻尼器的系数为 10000 N s/m ，但浮子浸没在水面下方的体积是比较难以求解的。本质上我们需要以一个倾斜的平面去截取旋转体，并求其二重积分。这一积分的求解过程相对比较困难，为简便起见我们采用蒙特卡洛模拟的方法去求解这一数值积分的值。

5.3.2 利用蒙特卡洛模拟求解数值积分

由于整个浮子在海水中做垂荡运动和纵摇运动，会发生旋转，所以我们求取其浸没在海水中部分的体积时采用蒙特卡洛模拟法来求取。通过遍历倾斜角 θ 与液面位置 x ，使用二重积分求得水面下方体积如图 12(a)所示。



(a) 利用蒙特卡洛方法截取的案例



(b) 水面上方体积与倾斜角、液面的关系

图 12 波浪平面与浮子顶面相交的情况及所形成的的截面图

经模拟，我们也对不同的液面位置与浮子倾角对水面上方体积的影响进行了模拟，得到了图 12(b)所示的拟合曲面。利用多项式曲面拟合的方法可以得到体积与倾斜角和液面位置的关系式。最终在求解微分方程时可以利用其进行数值模拟。

5.3.3 求解振子与浮子的位移与偏角

选取初始平衡状态下圆锥顶点为原点，并记此高度为 0。经过数值求解，可以得到振子和浮子质心的高度如图 13 所示：

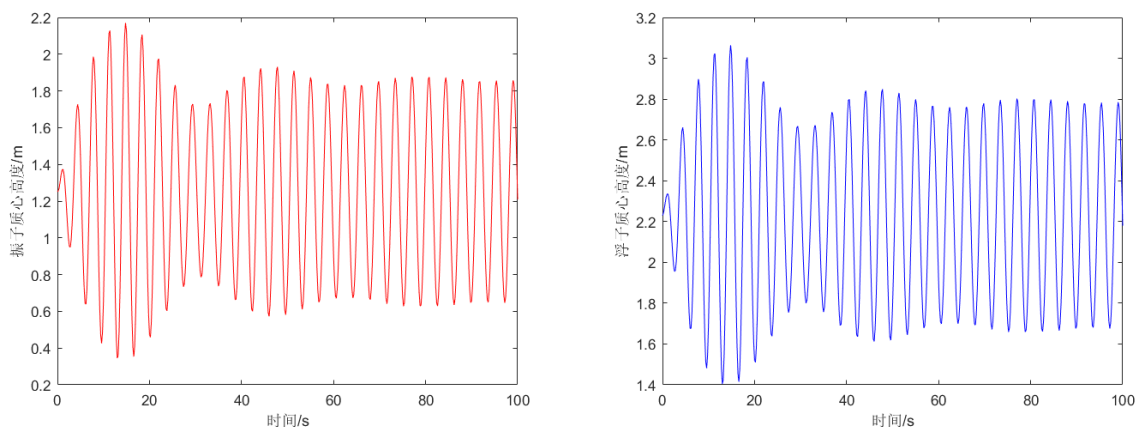


图 13 振荡过程中振子和浮子质心高度

从图 13 中观察发现振子和浮子质心高度的变化过程是比较接近的。为了进一步放大其变化过程，分析其相对位移的变化如图 14 所示：

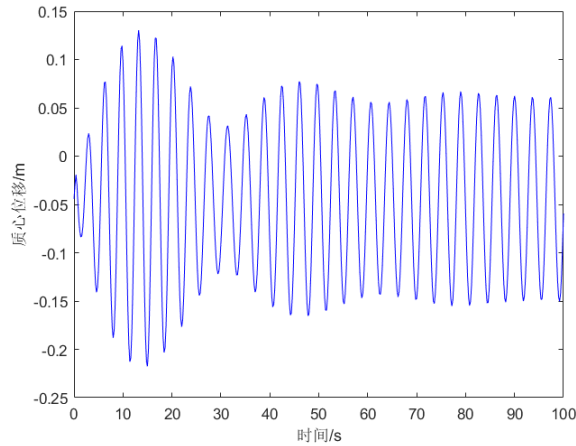


图 14 相对位移的变化过程

结合图 13 和图 14 可以分析得到在摇荡过程中二者位移差最大值不会超过 0.15m，40s 之后稳定在 0.05 m，一个周期内仍有小幅度波动。初始状况下相对位移的波动受到冲激影响较大振幅大一些，但在后期经过两次冲激后逐渐趋向于稳定。其波形与问题一中的波形不同，主要是由于重力在各自垂荡方向上的分量是有变化而且是周期性变化所导致。

值得注意的是，与问题一当中类似，图 13 所描述的是振子和浮子质心的高度随时间变化的曲线，并且初始状况下是以平衡态浮子的锥顶高度为基准 0 高度，而位移是相对变化量，所以在实际求解中需要减去初始高度。

振子和浮子速度如图 15 所示，从图 15 可以发现浮子运动速度较振子变化幅度大，上下速度波动范围介于 -1.5 至 1.5 m/s。速度差异虽然不大，但可以看到振子的速度是可以突破 1.5m/s 而浮子速度不会超过 1.5m/s，所以二者速度虽然波形相似但有一定波动，并且存在一定相位差。

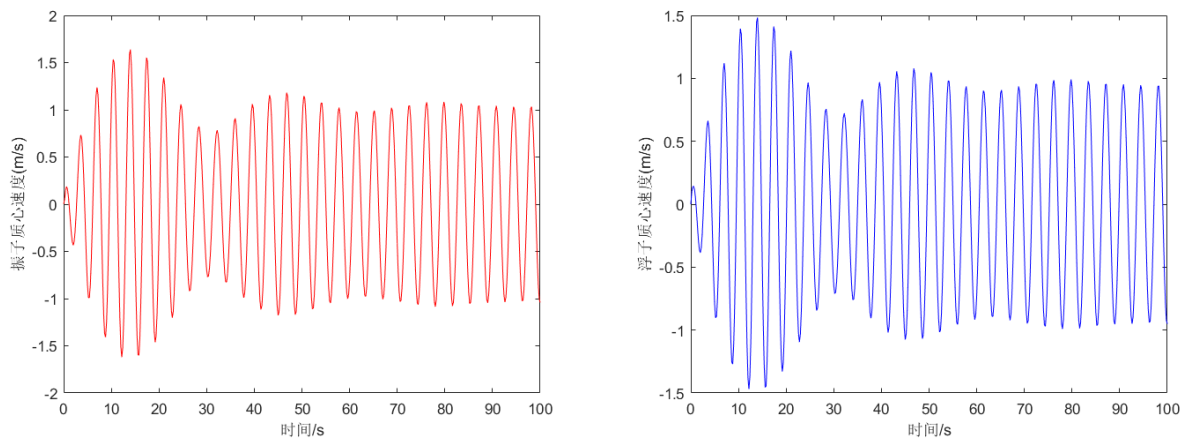


图 15 振子和浮子的速度

而对于其纵摇运动，我们同样可以分析振子和浮子的转动情况。以竖直方向为平衡位置，若开始二者均逆时针方向运动并以此方向为正方向。物体的纵摇运动与垂荡运动构成了一个整体，不能单独对纵摇或垂荡进行孤立求解因为重力的分量不同，并且这一分量的变化规律是周期性变化的。摆动角度如图 16 所示：

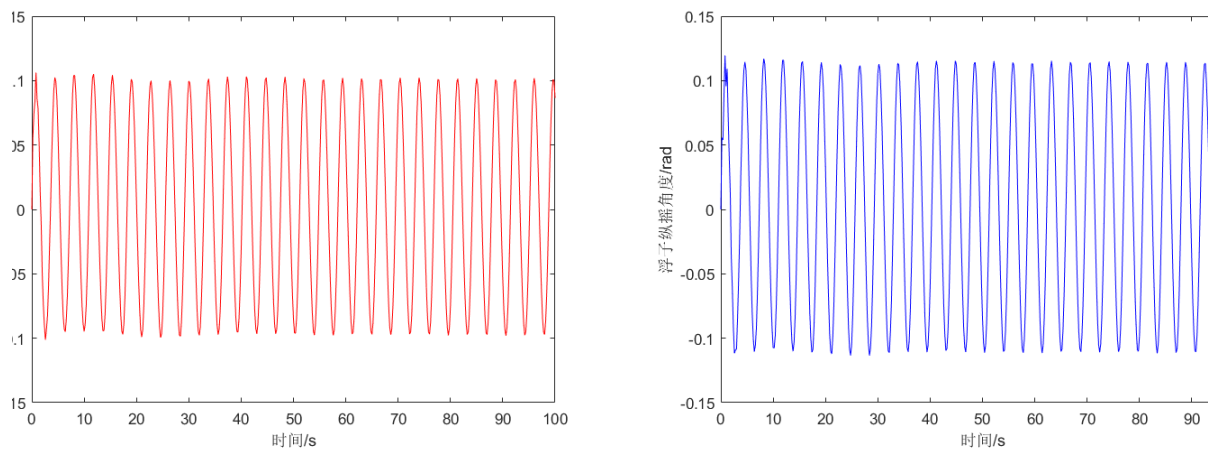


图 16 振子和浮子的纵摇角度

从图 16 中可以看到浮子和振子纵摇角度最大值为 0.10 rad 与 0.13 rad，二者均呈现出一定的周期性， $T=3.5$ s。作出其纵摇角速度如图 17 所示：

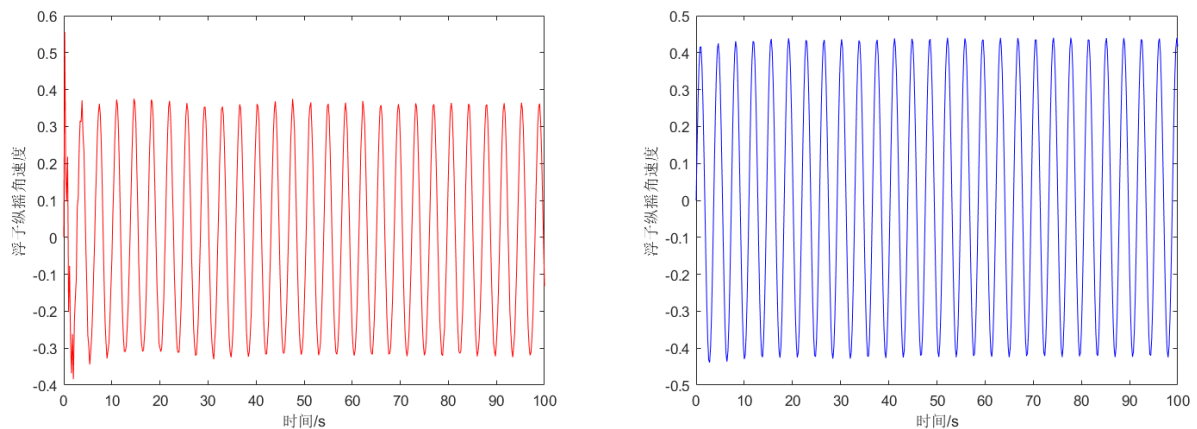


图 17 振子和浮子的纵摇角速度

从图 17 中可以看到初始状况下浮子的纵摇角速度会突然增大，而振子才是缓慢增大。这是因为海浪给予其初始的力矩较大，浮子开始获得了一个较大的角加速度。在模拟过程中，由于 $t=0.2$ s 这一时间元可能略长导致模拟的速度初始情况下增长非常之快。而浮子旋转压缩弹簧和阻尼器，它们提供的弹力又迫使振子与浮子保持同样的旋转方向运动。

经求解，几个重要时间节点的垂荡运动和纵摇运动情况如表 3 所示：

表 3 部分时间点对应相关变量值表

时间	振子位移	振子速度	浮子位移	浮子速度	振子角度	振子转速	浮子角度	浮子转速
10	-0.6011	1.03572	-0.5304	0.967735	-0.09478	-0.06143	-0.12004	-0.42972
20	-0.7771	-0.32783	-0.7092	-0.27699	0.006437	-0.2998	0.058911	0.102609
40	0.3908	0.846431	0.3677	0.758981	-0.03276	0.297417	-0.08612	-0.19523
60	-0.3456	-0.80354	-0.3245	-0.72538	0.051601	-0.257	0.107388	0.297089
100	-0.0425	-1.04104	-0.0501	-0.95072	0.08645	-0.13198	0.13164	0.416538

5.4 问题四模型的建立与求解

5.4.1 阻尼器做功求解

类似问题二，对于垂荡阻尼器而言，它从 0 到 T 时刻所做的功为：

$$W = \int_0^T \eta \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) dx \quad (26)$$

可以计算得到直线阻尼器的平均功率为：

$$P_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \eta \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right)^2 dt \quad (27)$$

在垂荡阻尼器做功的基础上增加了纵摇阻尼器做功：

$$W = \int_0^T \lambda \left(\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} \right) d\theta \quad (28)$$

可以得到纵摇阻尼器平均功率为：

$$P_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \lambda \left(\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} \right)^2 dt \quad (29)$$

总体功率为二者之和 $P_1 + P_2$ 。此时问题变成一个二元函数求极值的问题。

5.4.2 优化问题的求解

利用遗传算法和模拟退火进行求解。得到的迭代曲线如图 18 所示：

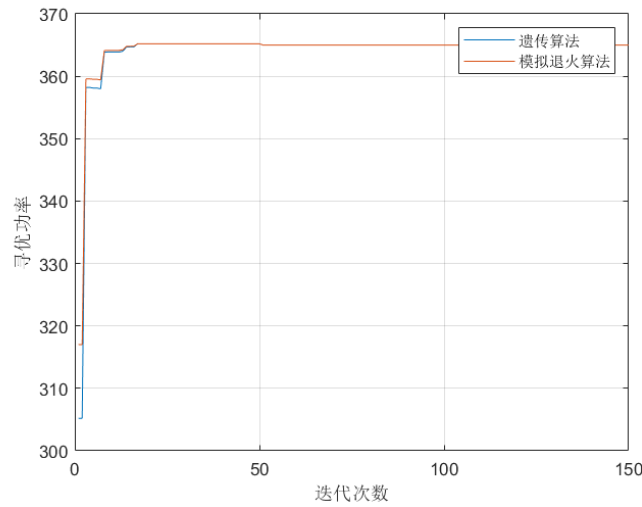


图 18 两种算法下寻求的最大功率

对这一问题二者迭代速度都比较快。这是因为两个功率成分是独立的两个函数，所以问题看似是一个二元函数优化但实际上是两个一元函数优化，降低了问题的难度。最终解得最优功率为 364.5W，直线阻尼器的阻尼系数为 61400，旋转阻尼器的阻尼系数为 100000。

为了方便观察二者的变化规律，我们将功率与直线阻尼器系数和旋转阻尼器系数的关系以曲面图和曲线图的形式绘制在图 19 中：

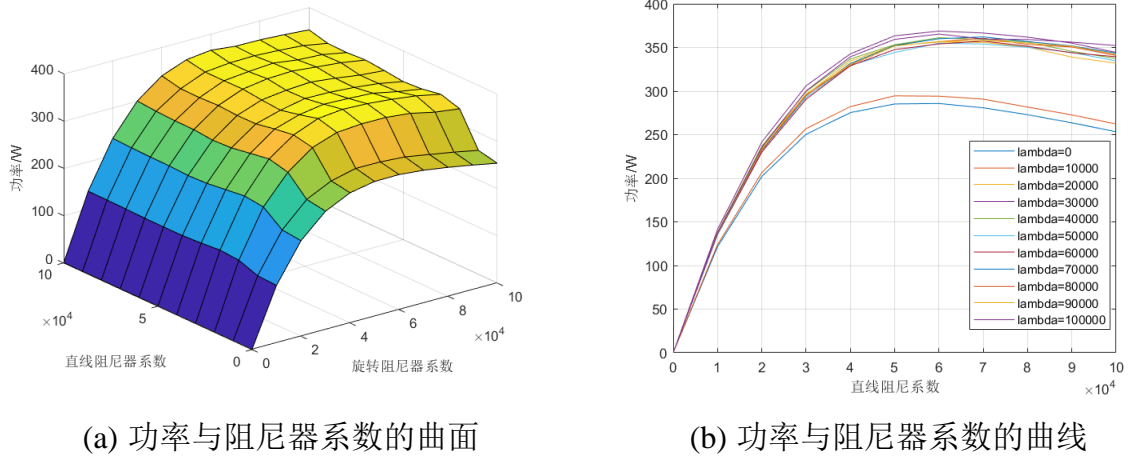


图 19 功率与两个阻尼器系数之间的关系

从图 19 中可以观察到，对每一个旋转阻尼系数的取值，功率随直线阻尼系数的变化都是先以一个较快的速度增长后以一个比较小的速度衰减。而旋转阻尼系数的最优取值则靠近边界值，故形成了所得到的启发式最优解。

六、模型的检验与分析

6.1 模型的定性分析

我们对模型的合理性进行进一步的定性分析，从稳定性来看，系统在起初的波动较大，但随着时间推演系统的变化无论是位移、角度还是速度、角速度都逐渐趋向于稳定，说明这是一个稳定系统。而在 0.2s 的时间间隔内系统没有发生逸散，说明这一时间间隔内的系统稳定性有所保证，可以利用改进欧拉法等数值方法求解得到一个相对准确的结果。

振子与浮子的振幅差异和速度差异并不大，二者波形相似但不完全相同，存在一定程度的频率差异从而导致存在反相情况。这是由于系统内部的作用力有弹簧弹力和阻尼器的阻尼力两种，系统外力的驱动和阻碍因素则更多。但在一个复杂系统中系统仍然呈现出一定周期规律但并不简谐。

最后，对于装置的功率，目前工业界应用的 PTO 系统当半径在 1m 大小时的功率大概在 50-400W 之间，问题的求解结果符合实际情况。加上我们对模型环境做出的一系列合理假设与仿真模拟，我们认为模型是准确而简洁的。

6.2 模型的灵敏度分析

为了进一步衡量模型的鲁棒性与泛化性能，以问题二中的功率曲线为例，我们做了一些参数相关的灵敏性分析。在问题二中只考虑浮子与振子的垂荡运动。假定只考虑情形一，即阻尼系数为常数的情况下需要进行寻优，我们对弹簧的弹性系数与振子

的质量进行灵敏度分析。得到如图 20 所示的灵敏性曲线：

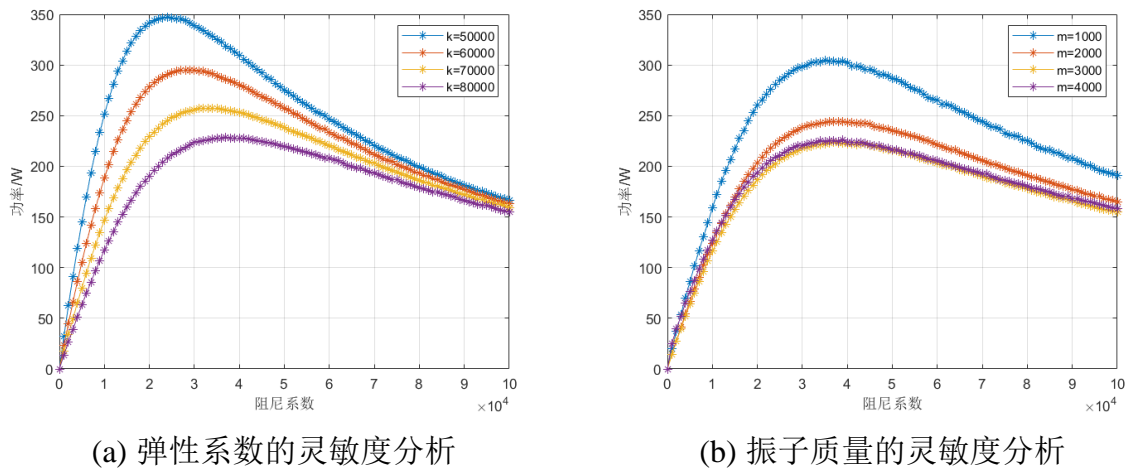


图 20 对弹簧弹性系数和振子质量的灵敏度分析

对于弹簧的弹性系数而言，根据上述曲线集，我们可以得出：在 $K=50000\text{N/m}$ ， 60000N/m ， 70000N/m ， 80000N/m 不同的弹性系数的条件下，图像的极值点变化幅度在 10%~20%之间，相对于其他模型来说该模型对该弹簧的弹性系数较为灵敏。

而对于振子的质量而言，本论文针对不同的参数 $m=1000\text{kg}$ ， 2000kg ， 3000kg ， 4000kg ，本文发现相对于其他模型来说该模型对振子质量较为灵敏。与此同时，本文还发现随着振子的质量不断地增大，该模型对振子质量的灵敏度逐渐的减少。

七、模型的评价

7.1 模型的优点

综合上述的模型建立与求解，我们认为，我们的模型有如下优点：

1. 利用遗传算法，搜索从群体出发，具有潜在的并行性，可以进行多个个体的同时比较，与问题领域无关联快速随机的搜索能力。搜索使用评价函数启发，过程简单，使用概率机制进行迭代，具有随机性。

2. 我们使用求解最大输出功率及最优阻尼系数时使用元启发优化算法，初始解与最终解都是随机选取的，它们毫无关联，因此具有很好的鲁棒性，以一定的概率接受较差解，从而避免局部最优解。

3. 我们使用蒙特卡罗法求解整体淹没体积时设定方法的误差与问题的维数无关，降低运算成本，对于具有统计性质问题可以直接进行解决，及对于连续性的问题不必进行离散化处理。

4. 模型合理，考虑到了较多的可能情况的同时模型不失简洁。利用改进欧拉法求解模型的数值解是相对更为准确的。

7.2 模型的缺点

尽管模型已经表现出比较良好的特征，但仍存在一些问题：

1. 在遗传算法中三个算子的实现也有许多参数，如交叉率和变异率，并且这些参数的选择严重影响解的品质，而目前这些参数的选择大部分是依靠经验，不是很准确。

2. 没有能够及时利用微分方程模型的反馈信息，故模型的搜索速度比较慢，要得

要较精确的解需要较多的训练时间。

八、参考文献

- [1] 陈佳,兰飞,郭昊霖,黎静华.波浪能发电控制技术研究综述[J/OL].电力自动化设备:1-20[2022-09-18].DOI:10.16081/j.epae.202208025.
- [2] 夏海南,王项南,李强,贾宁,常皓,赵智坤.波浪能发电装置现场测试中波浪参数比测分析[J].太阳能学报,2022,43(06):251-255.DOI:10.19912/j.0254-0096.tynxb.2021-1081.
- [3] 常皓,王项南,张金凤,夏海南.基于 SWAN 模式的波浪能发电装置输入能量计算方法研究[J].海洋技术学报,2022,41(01):65-74.
- [4] 薛钢,刘延俊,薛祎凡,刘大辉.内置偏心转子式波浪能发电装置的动力学研究[J].天津大学学报(自然科学与工程技术版),2022,55(02):191-198.
- [5] 马世拓,张誉馨,肖渝楠,王新宇,王然.基于微博数据挖掘的突发事件灾害链建模[C]//.2021 年(第七届)全国大学生统计建模大赛获奖论文(一).[J],2021:314-351.DOI:10.26914/c.cnkihy.2021.041769.
- [6] 赖文斌.摇臂式波浪能发电装置的设计与实验研究[D].浙江海洋大学,2020.DOI:10.27747/d.cnki.gzjhy.2020.000302.
- [7] 杨翠竹,黄淑旖,肖美群,黄子强,盛杰,童元正.浅谈波浪能发电过程中存在的问题[J].新技术新工艺,2020(09):5-9.DOI:10.16635/j.cnki.1003-5311.2020.09.002.
- [8] 杜亚震.沙漏型 FPSO 浮体垂荡和纵摇非线性运动特性研究[D].大连理工大学,2019.DOI:10.26991/d.cnki.gdllu.2019.004380.
- [9] 徐学军.深海 Spar 平台垂荡一纵摇耦合非线性运动响应研究[D].中国海洋大学,2011.
- [10] 姜宗玉,宗智,贾敬蓓.迎浪状态下三体船垂荡和纵摇运动参数[J].中国造船,2010,51(04):11-20.
- [11] 吴静萍,王仁康.双体船纵摇和垂荡运动的理论计算[J].船海工程,2003(06):16-18.
- [12] 马永杰,云文霞.遗传算法研究进展[J].计算机应用研究,2012,29(04):1201-1206+1210.
- [13] MATLAB 中文论坛. MATLAB 智能算法 30 个案例分析[M]. 北京航空航天大学出版社, 2010. P17-P22
- [14] 吴渝,唐红,刘洪涛.网络群体智能与涌现计算[M]. 科学出版社, 2012.
- [15] 李士勇,李研,林永茂.智能优化算法与涌现计算[M]. 清华大学出版社, 2020, P115-118.





附录

软件：MATLAB 2019a

环境：Windows 10+ intel i7+ NVIDIA GTX1650

附录文件列表：

包括 result1-1.xlsx, result1-2.xlsx, result3.xlsx, question1.m, question2.m, question3.m, question4.m, p1.m, p2.m, monte_caro.m, F_float.m

名称	修改日期	类型	大小
 F_float.m	2022/9/18 18:32	MATLAB Code	1 KB
 monte_caro.m	2022/9/18 18:32	MATLAB Code	2 KB
 p1.m	2022/9/18 18:32	MATLAB Code	1 KB
 p2.m	2022/9/18 18:32	MATLAB Code	1 KB
 psense.m	2022/9/18 18:32	MATLAB Code	1 KB
 q0.m	2022/9/18 18:32	MATLAB Code	1 KB
 question1.m	2022/9/18 18:32	MATLAB Code	1 KB
 question2.m	2022/9/18 18:32	MATLAB Code	1 KB
 question3.m	2022/9/18 18:32	MATLAB Code	2 KB
 question4.m	2022/9/18 18:32	MATLAB Code	1 KB
 sensitivity.m	2022/9/18 18:32	MATLAB Code	1 KB
 result1-1 (1).xlsx	2022/9/18 18:56	Microsoft Excel ...	44 KB
 result3 (1).xlsx	2022/9/18 18:56	Microsoft Excel ...	46 KB
 result1-2 (1).xlsx	2022/9/18 18:56	Microsoft Excel ...	30 KB

附录：部分代码

```
%问题一
M = 4866;
R = 1;
H_pyr = 0.8;
H_col = 3;
m = 2433;
r = 0.5;
h = 0.5;
rho = 1025;
g = 9.8;
k = 80000;
l = 0.5;
l0=m*g/k;
x_flt = ((7+sqrt(1.64))*pi/2-sqrt(1.64)*pi)/(2*pi)+0.8;
x_vib = 0.8+l-l0+0.25;
x_cent = (x_flt*M+x_vib*m)/(M+m);
w = 1.4005;
f = 6250;
m_i = 1335.535;
psi = 656.3616;
```



```

eta = 10000;
move=@(t,x)[x(2);
    (k*(x(3)-x(1)-(x_flt-x_vib)+l0)+eta*(x(4)-x(2))^1.5-m*g)/m;
    x(4);
    (f*cos(w*t)+F_float(-x(3)+x_flt+2.8)-M*g-psi*x(4)-(k*(x(3)-x(1)-(x_flt-
x_vib)+l0)+eta*(x(4)-x(2))^1.5))/(M+m_i)];

x0=[x_vib,0,x_flt,0]';
[t,x]=ode15s(move,0:0.2:100,x0);

lstr = { 'VibX', 'VibV','FltX','FltV' };
for i=1:length(lstr)
    subplot(2,2,i)
    plot(t, x(:,i));
    xlabel('Time')
    ylabel( lstr{i} )
end
x=real(x);
P=mean(eta*(x(:,2)-x(:,4)).^2.5);

```

```

%问题二
figure()
P1=[];
for eta=0:1000:100000
    P1=[P1 p1(0,eta)];
end
plot(0:1000:100000,23*P1/25,'b*-')
xlabel("阻尼系数")
ylabel("功率/W")
grid()
%P2=[];
figure()
for alpha=0:0.2:0.8
    P2=[];
    for eta=0:10000:100000
        P2=[P2 p1(alpha,eta)];
    end
    plot(P2);hold on;
end

```

```

%问题三
M = 4866;
R = 1;r = 0.5;
H_pyr = 0.8;
H_col = 3;
m = 2433;

```

```

J2=m*r^2;J1=0.9*M*R^2;
lambda=1000;
h = 0.5;
rho = 1025;
g = 9.8;
k = 80000;K=250000;N=8890.7;
l = 0.5;
l0=m*g/k;
x_flt = ((7+sqrt(1.64))*pi/2-sqrt(1.64)*pi)/(2*pi)+0.8;
x_vib = 0.8+l-l0+0.25;
x_cent = (x_flt*M+x_vib*m)/(M+m);
w = 1.7152;
f = 3640;L=1690;
m_i = 1028.876;Ji=7001.914;
psi = 683.4558;fi=654.3383;
eta = 10000;
%x(5)=theta2,x(7)=theta1
move=@(t,x)[x(2);
    (k*(x(3)-x(1)-(x_flt-x_vib)+l0)+eta*(x(4)-x(2))-m*g*(cos(x(5))))/m;
    x(4);
    (f*cos(w*t)+F_float(-x(3)+x_flt+2.8)-M*g-m*g*(1-cos(x(5)))-psi*x(4)-(k*(x(3)-
x(1)-(x_flt-x_vib)+l0)+eta*(x(4)-x(2))^1))/(M+m_i);
    x(6);
    (K*(x(7)-x(5))+lambda*(x(8)-x(6))+m*g*(x(1))*sin(x(5)))/J2;
    x(7);
    (L*cos(w*t)+N*x(7)-fi*x(8)-((K*(x(7)-x(5))+lambda*(x(8)-x(6)))))/(J1+Ji)];

x0=[x_vib,0,x_flt,0,0,0,0,0]';
[t,x]=ode15s(move,0:0.2:100,x0);

x=real(x);
figure()
lstr = { 'VibX', 'VibV','FltX','FltV','Vibtheta', 'Vibw','Flttheta','Fltw' };
for i=1:length(lstr)
    subplot(2,4,i)
    plot(t, x(:,i));
    xlabel('Time')
    ylabel( lstr{i} )
end
P=mean(eta*(newx(:,2)-newx(:,4)).^2)+mean(lambda*(newx(:,6)-newx(:,8)).^2);

%问题四
figure()
P2=[];
x=[];

```

```

y=[];
for lambda=0:10000:100000
    P2=[]
    %x=[x lambda*ones(1,11)];
    for eta=0:10000:100000
        %y=[y eta];
        P2=[P2 p2(eta,lambda)];
    end
    plot(0:10000:100000,P2);hold on;
end
%scatter(x,y,P2);
xlabel("直线阻尼系数");ylabel("功率/W");grid;
lstr={"lambda=0","lambda=10000","lambda=20000","lambda=30000","lambda=40000",
"lambda=50000","lambda=60000","lambda=70000","lambda=80000","lambda=90000","
lambda=100000"};
legend(lstr);
%蒙特卡洛模拟
X=unifrnd(0,3.8,[200,200]);
sx=linspace(-1,1,200);
sy=linspace(-1,1,200);
points=[];
for i=1:200
    for j=1:200
        if sx(i)^2+sy(j)^2<1
            if X(i,j)>0.8
                points=[points [sx(i),sy(j),X(i,j)]];
            elseif X(i,j)^2>(16/25)*(sx(i)^2+sy(j)^2)
                points=[points [sx(i),sy(j),X(i,j)]];
            end
        end
    end
end
scatter3(points(1,:)','points(2,:)','points(3,:)','');
points=points';
totalpoints=length(points);
top=1;
monte=[];
for h=3:0.2:6
    for beta=0:0.1:1.5
        neg=0;
        for i=1:totalpoints
            r=points(i,:);
            rx=r(1);rz=r(3);
            if rz>h-tan(beta)*rx

```

```

        neg=neg+1;
    end
end
monte=[monte [h,beta,3.233*pi*neg/totalpoints]'];
%top=top+1;
end
end
figure();
%scatter3(monte(1,:),monte(2,:),monte(3,:));
[h,beta]=meshgrid(3:0.2:6,0:0.1:1.5);
V=monte(3,:);
V=reshape(V,length(3:0.2:6),length(0:0.1:1.5));
mesh(h,beta,V);
xlabel("液面位置")
ylabel("倾斜角")
zlabel("水面上方体积")
%功率求解
function P=p1(alpha,eta)

M = 4866;
m = 2433;
g = 9.8;
k = 80000;
l = 0.5;
l0=m*g/k;
x_flt = ((7+sqrt(1.64))*pi/2-sqrt(1.64)*pi)/(2*pi)+0.8;
x_vib = 0.8+l-l0+0.25;
w = 2.2143;
f = 4890;
m_i = 1165.992;
psi = 167.8395;

move=@(t,x)[x(2);
(k*(x(3)-x(1)-(x_flt-x_vib)+l0)+eta*(x(4)-x(2))^(1+alpha)-m*g)/m;
x(4);
(f*cos(w*t)+F_float(-x(3)+x_flt+2.8)-M*g-psi*x(4)-(k*(x(3)-x(1)-(x_flt-
x_vib)+l0)+eta*(x(4)-x(2))^(1+alpha)))/(M+m_i)];

x0=[x_vib,0,x_flt,0]';
[t,x]=ode15s(move,0:0.2:100,x0);

%x=real(x);
%newx=zeros(size(x));

```

```

%newx(:,1)=x(:,1);
%newx(:,3)=x(:,3)+3*(x(:,3)-x(:,1))-x_flt+x_vib);
%for i=2:length(x)
%newx(i,2)=(newx(i,1)-newx(i-1,1))/0.2;
%newx(i,4)=(newx(i,3)-newx(i-1,3))/0.2;
%end
%x=newx;

P=mean(eta*(x(:,2)-x(:,4)).^(2+alpha));
P=real(P);
end

```