

基于改进 SEIR 模型对获得性免疫效应的探究

摘 要

当下，新冠疫情还在全球范围内流行，而疫苗在防控过程中有着重要作用。探究疫苗防护对于新冠控制的作用有着重要意义。目前学界对传染病模型主要的模型为 SEIR 模型，疫苗通过主动获取免疫效应引入获得性免疫屏障，可用以模型改进，通过计算机仿真与模拟揭示动态变化。而对于问题二和问题三，国内国际数据用于建模能够得到理想情况下的真实效果，结合 ARIMA 模型可以更直观看看到疫苗对于疫情防控的重要性。

一、 问题重述

在当下后疫情时代，我国疫情已经得到明显控制，而国外疫情则仍在泛滥。为了巩固经济增长基础、保障国内国际双循环，我国政府已决定在全国进行全人群的新冠病毒疫苗接种，来建立最大规模的国民群体新冠免疫屏障。问题就需要我们建立传染病毒群体免疫屏障的数学模型来说明疫苗接种率的控制对构筑免疫屏障的作用，并分析其他因素对整个免疫系统的影响和代价，并分别以中国一个大城市为例来分析如何建立群体免疫屏障，和以美国疫情作为数据来分析疫苗对美国疫情造成的影响并预测美国的疫情走向。

二、 问题分析

2.1 问题一的分析

在传统的 SEIR 模型中又引入了疫苗接种者的角色，将疫苗接种者分为完全康复和暂时康复的两种情况，并设置不同的参数初始值，如疫苗有效率，疫苗接种人数，病毒变异率等等，得到这几种情况的对比图，最终得到最优模型所对应的一组参数值。

2.2 问题二的分析

查找得到北京市的疫情数据，并由问题一所建立的传染病毒群体免疫屏障的数学模型可以推测得到该市达到我们设定的群体免疫屏障所需要的条件。

2.3 问题三的分析

查找美国的近些月份的数据可以对其作出预测。

三、 模型假设

3.1 忽略人口的出生率和自然死亡率

因在疾病出现时导致的因病死亡率要远大于之前的自然死亡率，故在分析问题时只考虑因新冠肺炎病毒造成的死亡率，不考虑自然出生率和死亡率，这样就使得我们的模型变得简单合理。

3.2 假设疫苗接种后的人群只有暂时康复和完全康复两类

排除掉疫苗接种后部分人群出现二次感染，病毒潜伏，因病死亡等这些极小概率的事件的影响，且疫苗的品质随放置时间的增长而变化极小。

3.3 在我们研究期间未有新的疫苗接种者

我们在研究模型时是在部分人群接种疫苗之后进行的，在建立模型期间没有新的疫苗接种者植入，所研究的系统是在设定一定量初始值之后的封闭系统。

四、 符号说明

表 1 各符号表示及解释

符号	说明	符号	说明
S	易感人群人数	β	易感染者的感染率
E	病毒潜伏者人数	σ	潜伏者转感染者率
I	已感染人数	γ_1	完全康复率
CR	完全康复人数	γ_2	暂时康复率
TR	暂时康复人数	d	因病死亡率
V	疫苗接种人数	θ	疫苗有效率
D	因病死亡人数	α	不完全康复率

五、 模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 模型的建立

假设 N 为总人数, N' 为在循环系统中的人数, 即 $N' = S + E + I + TR$, 则易感染者与已感染者所占比例分别为 $\frac{S}{N}, \frac{I}{N}$, 则在单位时间内由易感染者转变为已感染者的人数即为 $\beta \times \frac{S}{N} \times \frac{I}{N} \times N = \beta \frac{SI}{N}$ 。同理可得其余各部分人群在单位时间内的人数变化量如模型图所示

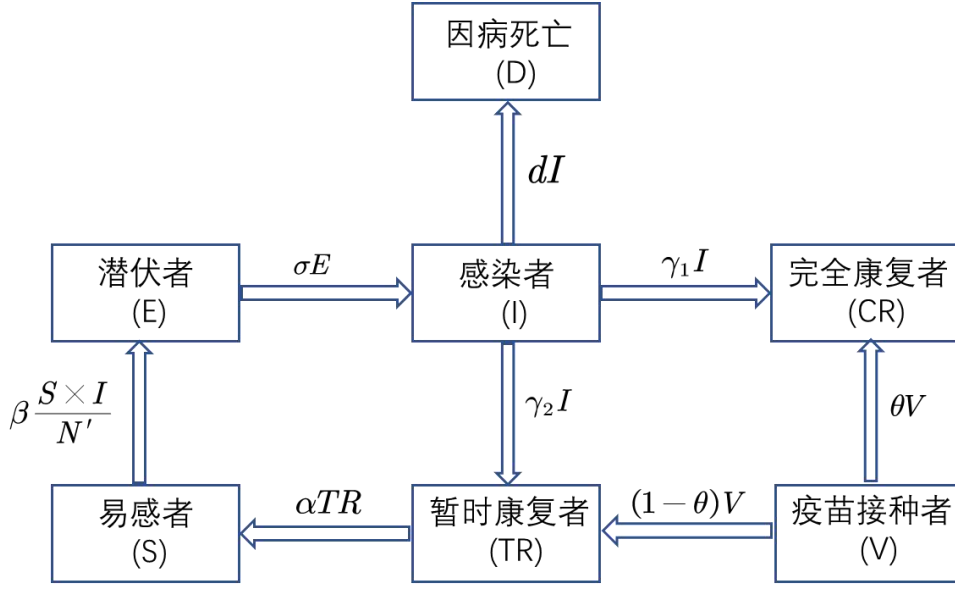


图 1 几种情况的状态转移图

由微分方程相关知识可知，易感人群的数量随时间变化率

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{S \times I}{N'} + \alpha TR \quad (1)$$

潜伏者人群数量随时间变化率

$$\frac{dE}{dt} = \beta \frac{S \times I}{N'} - \sigma E \quad (2)$$

易感染者人群数量随时间变化率

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma_2 I - \gamma_1 I - dI \quad (3)$$

暂时康复者人群数量随时间变化率

$$\frac{dTR}{dt} = \gamma_2 I - \alpha TR \quad (4)$$

完全康复者人群数量随时间变化率

$$\frac{dCR}{dt} = \gamma_1 I \quad (5)$$

因病死亡人数随时间变化率

$$\frac{dD}{dt} = dI \quad (6)$$

5.1.2 模型的求解

下面我们通过调整不同的参数初始值来对不同情况下的模型进行仿真训练

(1) 分析疫苗接种率对模型的影响

初始总人数 $N=10000$ ，初始感染人数 $I_0=1$ ，易感染者的感染率 $\beta=0.1$ ，不完全康复率 $\alpha=0.01$ ，完全康复率 $\gamma_1=0.6$ ，暂时康复率 $\gamma_2=0.4$ ，潜伏者转感染者率 $\sigma=0.5$ ，疫苗的有效率 $\theta=0.9$ ，死亡率 $d=0.005$ 。下面分别设置疫苗接种人数 V 为 1000 与 6000，作其图像如下

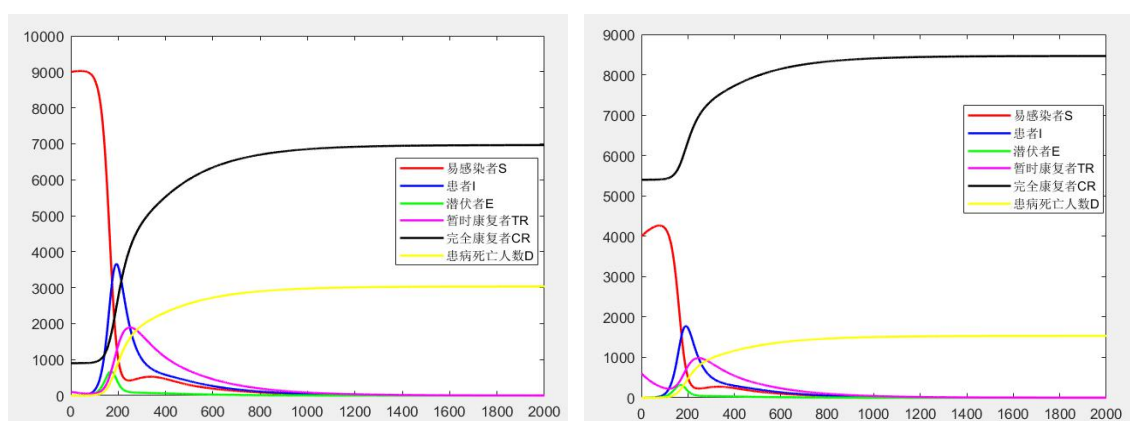


图2 疫苗接种人数 V 分别为 1000 (左) 和 6000 (右) 的图像

由图形分析可得，在疫苗接种率为 10% 和 60% 的情况下，其最终的患病死亡人数与完全康复人数的比例分别为 42.7% 与 12.6%，二者差值较大，所以可以得到完全康复人数与疫苗接种率成正比。

(2) 分析疫苗有效性对模型的影响

初始总人数 $N=10000$ ，初始感染人数 $I_0=1$ ，易感染者的感染率 $\beta=0.1$ ，不完全康复率 $\alpha=0.01$ ，完全康复率 $\gamma_1=0.6$ ，暂时康复率 $\gamma_2=0.395$ ，潜伏者转感染者率 $\sigma=0.5$ ，疫苗的接种人数 $V=7000$ ，死亡率 $d=0.005$ 。下面分别设置疫苗有效性 θ 为 0.99 与 0.90，作其图像如下

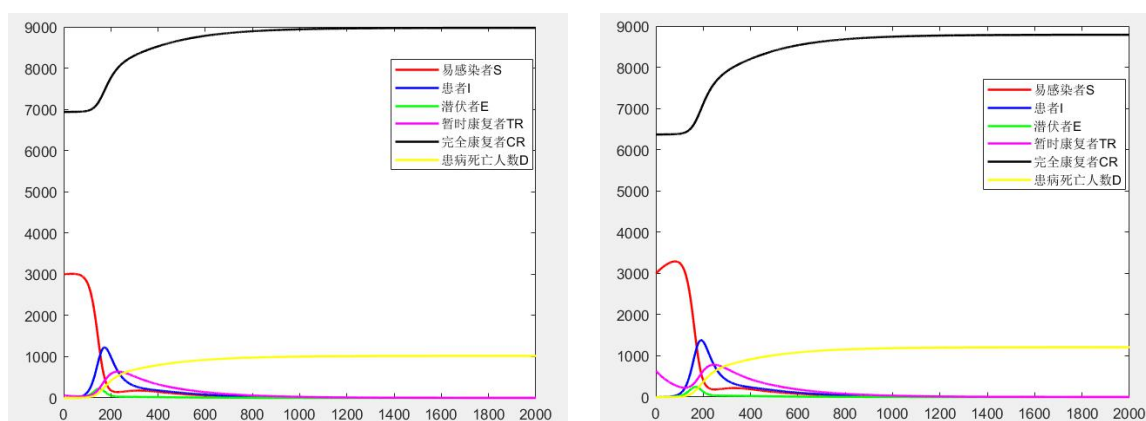


图3 疫苗有效性 θ 分别为 0.99 (左) 和 0.90 (右) 的图像

由图形分析可得，在疫苗接种率均为 70% 的情况下，分别设置不同的疫苗有效性的值，其最终的患病死亡人数与完全康复人数的比例分别为 11.1% 与 13.5%，

(3) 分析病毒变异性对模型的影响

经理论分析可知，病毒的变异性所影响的参数值为 β ， γ_1 ， γ_2 ， d 。则设置初始总人数 $N=10000$ ，初始感染人数 $I_0=1$ ，不完全康复率 $\alpha=0.01$ ，潜伏者转感染者率 $\sigma=0.5$ ，疫苗的有效率 $\theta=0.9$ ，疫苗接种人数 V 为 7000。下面分别设置病毒未变异（易感染者的感染率 $\beta=0.1$ ，完全康复率 $\gamma_1=0.6$ ，暂时康复率 $\gamma_2=0.395$ ，死亡率 $d=0.005$ ）和病毒变异（易感染者的感染率 $\beta=0.4$ ，完全康复率 $\gamma_1=0.5$ ，暂时康复率 $\gamma_2=0.3$ ，死亡率 $d=0.2$ ）两种情况作其图像如下

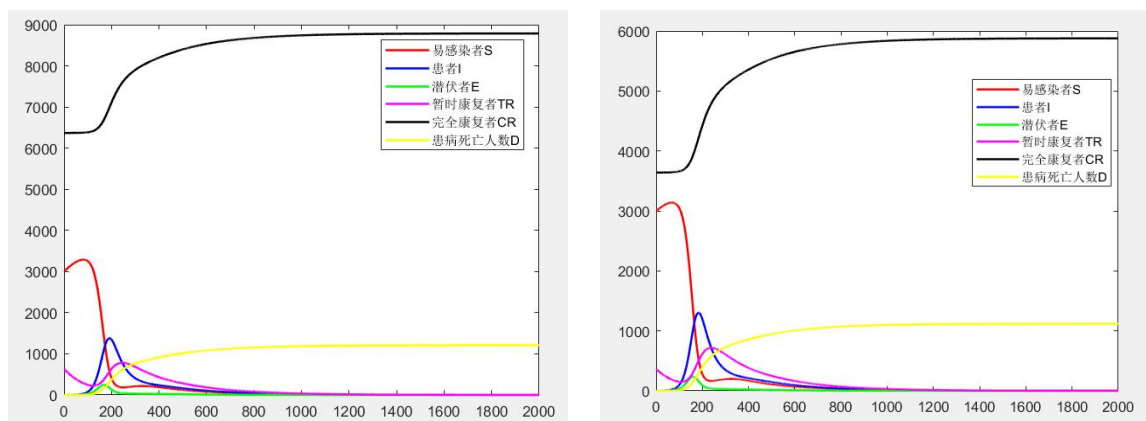


图 4 疫苗未变异（左）与已变异（右）的图像

由图像分析可知，在疫苗接种率 70%，疫苗有效性 0.9 的情况下，病毒变异前后其最终的患病死亡人数与完全康复人数的比例分别为 12.5%和 17.2%。

5.2 问题二模型的建立与求解

5.2.1 模型的建立

由问题一中建立的群体免疫屏障模型，和北京市 2020 年上半年的疫情数据可知，为了达到该模型对应的理想状态（参数值），我们又建立了疫苗接种预测模型。

5.2.2 模型的求解

北京市常驻人口为 2154 万，现在日均接种疫苗剂量为 30 万剂次。故作出以下图形模拟北京市从 2020 年初疫情爆发开始到现在的人数变化图。

5.3 问题三模型的建立与求解

美国作为世界上疫情最严重的国家之一，日前也在积极进行疫苗接种。接下来我们分析疫苗对美国疫情的影响。

我们首先根据美方提供的疫情数据分析在不接种疫苗的情况下利用 ARIMA 模型预测每日新增病例的多少。根据 AIC 准则确定阶数，发现 $p=6, q=4$ 时模型有最好的表现。所以，我们构建 ARIMA 模型并预测在不进行集体疫苗接种的情况下新增人数会变化如下：

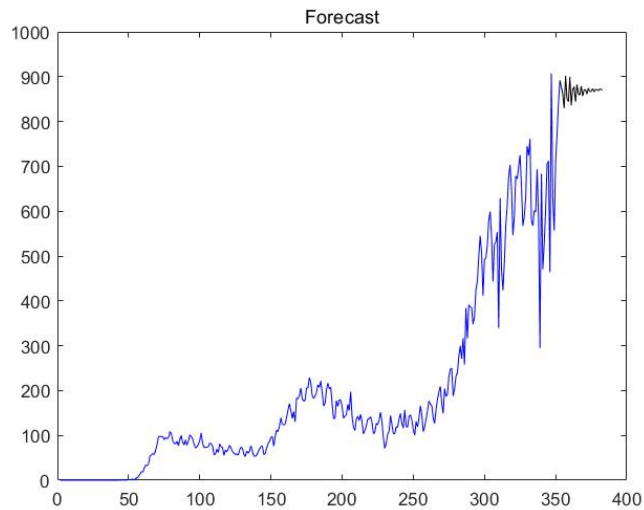


图 5 不考虑疫苗接种的情况下变化

实际上，美方在近期也采取了集体疫苗接种的措施。实际人数发生了一个断崖式下降如图 6 所示：

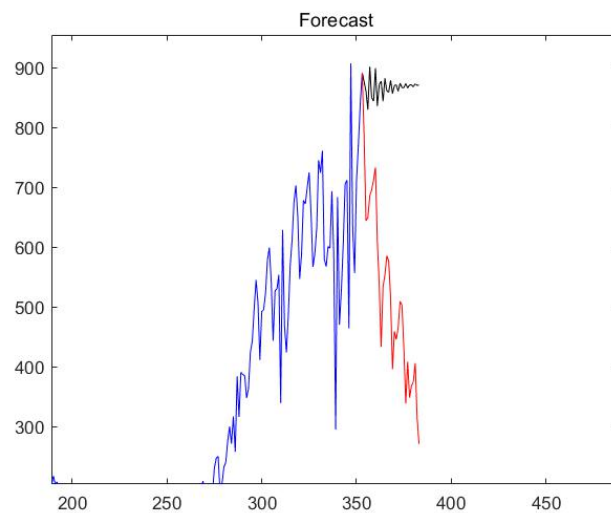


图 6 实际情况与不考虑疫苗接种的对比

很明显，由于接种疫苗，原本保持在一个高水平的增长人数发生了强烈的下降。这说明了疫苗对于美国疫情控制的影响是十分强烈的。下面我们再回到我们的模型来描述疫苗的控制机理。

假设人群数量为一百万，传染强度 0.1，两个康复率都是 0.1，潜伏者转变的概率 0.8，根据美方数据，死亡率 0.0287，假设疫苗有效率 90%。2000 天内图像如图所示：

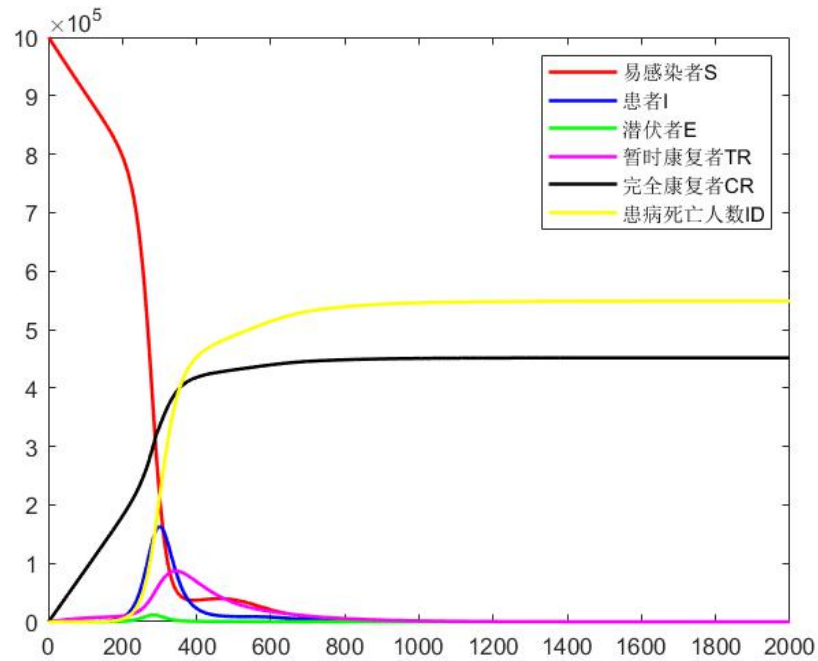


图 7 理想模型的疫情控制

我们假设在研究过程中每日能够接种 1000 人。图像如图，最终拐点将在将近爆发两年后来到，但是死亡人数比较大。

六、 模型的评价

6.1 模型的优点

- (1) 多次调参进行仿真可使模型更优。
- (2) 预测模型运用实际数据更贴合实际情况。

6.2 模型的缺点

未充分考虑其他因素而使模型简化过于简单。

七、 参考文献

- [1] 姜启源, 谢金星, 《数学模型》第四版
- [2] 谢家荣¹ 孙嘉辰², 刘迅³, 孙小强⁴, 何群⁵, 胡延庆 新冠数学模型

附录

附录 1

介绍：计算方程

```
function dx=fun3(t,x)    % 修改里面的参数，来看结果的变化

    beta = 0.1;    % 易感染者与已感染者接触且被传染的强度

    gamma1 = 0.01;    % 完全康复率

    gamma2 = 0.01;    % 暂时康复率

    sigma = 0.8;    % 潜伏者转换为感染者的速率

    alpha = 0.01;    % 暂时康复者 TR 再次转变为易感者 S 的转移率

    d = 0.0287;    % 因病的死亡率

    theta = 0.9;    % 疫苗的有效率

    V=1000;
    if 1000*t<x(1)
        u=1000;%接种速率
    else
        u=0;
    end
    %u=0;

    C = x(1)+x(2)+x(3)+x(4);    % 传染病系统中的有效人群,也就是  $N' = S+I+E+R_2$ 

    dx = zeros(6,1);    % x(1)表示 S  x(2)表示 I  x(3)表示 E
    x(4)表示 TR  x(5)表示 CR  x(6)表示 ID

    dx(1) = - beta*x(1)*x(2)/C + alpha*x(4)-u ;
    dx(2) = sigma*x(3) -
gamma1*x(2)-gamma2*x(2)-d*x(2);
    dx(3) = beta*x(1)*x(2)/C - sigma*x(3);
    dx(4) = gamma2*x(2)+(1-theta)*u- alpha*x(4) ;
    dx(5) = gamma1*x(2)+theta*u ;
    dx(6) = d*x(2);

end
```

附录 2

介绍：仿真

```
%clc;clear

N = 1000000; % 总人数

i0 = 1; % 初始时刻患者（已感染者）的人数
figure(3)

% 第一列是易感染者 S 的数量，第二列是患者 I 的数量, 3E

% 第 5 列是完全康复者 CR 的数量，第 4 列是暂时康复者 TR 的数量

% 第 6 列是患病死亡人数 ID 的数量

[t,x]=ode45('fun3',[1:2000],[N-i0 i0 0 0 0 0]); % 初
始化

x = round(x);
plot(t,x(:,1),'r-',t,x(:,2),'b-',t,x(:,3),'g-',t,x(:,
4),'m-',t,x(:,5),'k-',t,x(:,6),'y-','Linewidth',1.5)

legend('易感染者 S','患者 I','潜伏者 E','暂时康复者 TR','完全
康复者 CR','患病死亡人数 ID')
```

附录 3

介绍 ARIMA

```
MD11=arima(6,0,4);
D1=new_cases_per_million(1:353);
EstMD11 = estimate(MD11,D1);
[res,~,logL] = infer(EstMD11,D1);
```

```

    stD1r = res/sqrt(EstMD11.Variance);
    [forD1,YMSE] = forecast(EstMD11,30,'Y',D1);
    plot(D1,'b-');hold on;
    h2 =
plot(length(D1):length(D1)+30,[D1(end);forD1],'k-');
    h3 =
plot(length(D1):length(D1)+30,[D1(end);new_cases_per_mil
lion(354:383)],'r-');
    title('Forecast')

```