

# 基于微分方程建模的均质半圆面刚体-弹簧动力学模型

作者：马世拓

院系：计算机科学与技术

班级：计算机 1901

学号：U201914900

## 摘要

在刚体力学问题中，微分方程建模是一类重要的建模方法。针对问题给出的均质半圆面-弹簧模型，本文利用微分方程对问题进行建模求解。

对于问题一给定的模型，这是一个经典的**刚体平衡**问题。而刚体平衡需要满足两个条件：受力平衡和力矩平衡，可以分别根据这两个条件列方程进行求解，属于解非线性方程组的问题。而重力矩则可以使用二重积分求解，最终可以求解平衡态的角度值与弹力值。

问题二则将外力撤销，考察系统在 100 秒内的偏角变化，需要利用动力学定理。这里虽然不知道系统是否存在竖直方向上的平动分量，但我们要考察的是倾角的变化，重点在于转动分量。系统在水平方向上动量守恒，可以假设不计空气阻力以保证机械能守恒而且弹簧弹力保持竖直方向，那么可以利用**角动量定理**构建角加速度与角度的二阶微分方程，配合其它关系进行求解。其中，转动惯量的求解同样可以进行二重积分。建立**微分方程模型**的过程可以采取微元分析法，最终数值解的求解经过实验决定使用龙格库塔法来完成。

问题三将弹簧固定，考察其他状况下都相同时系统的平衡态和变化态，由于弹簧上端固定所以弹簧、杆和直径之间需要满足一定的几何关系，而在变化过程中弹簧也会发生偏转，这无疑会给问题增加难度。方程数量增加，但是和前两个问题一样，仍然可以设计相应的程序进行求解。

最后，对于问题的进一步探究，探索了圆盘质量、圆盘半径和外力大小对问题一系统平衡态的影响并且进行了相应的**灵敏度分析**，得出一些有趣的现象例如角度与圆盘的质量成线性关系、增加半径的情况下两弹簧拉力最终收敛、左弹簧的弹力对外加拉力大小不敏感等。此外，若考虑空气阻力对圆盘机械能造成的损耗，同样进行了相应的分析，在原有模型的基础上进行了进一步扩展。

模型以微分方程组和非线性方程组的求解作为其数学基础，物理原理遵循基本的牛顿力学规律，具有充分的可靠性；利用程序设计方法得到结论非常方便，从而保证了求解结果的准确性和高效性。这一模型和相应建模手段也在实际工程问题中有着重要应用。

**关键词：**刚体平衡，角动量定理，微分方程模型，灵敏度分析

## 一. 问题重述

对于题目给定的弹簧与匀质半圆形薄板组成的模型,开始时有一个在直径的B端施加一个50牛的向下的拉力。半圆形圆盘质量为5kg且分布均匀,半径0.3米。两根相同的轻质硬弹簧通过半圆形薄片的直径两端悬挂在一根水平光滑横梁上。弹簧与横梁的接触点没有固定,弹簧可在横梁上自由滑动,倔强系数为500牛/米。要求解决以下问题:

1. 在系统平衡后,请给出半圆形薄片的倾角 $\theta$ 是多少度?
2. 在撤去拉力后,给出100秒内薄片倾角的变化情况。
3. 假设两个弹簧的原始长度是0.5米,弹簧上端固定在横梁上,弹簧间距是0.6米。在B端施加一个向下的50牛拉力后,试解答此情形下的1-2问。

## 二. 问题分析

### 2.1 问题一的分析

对于问题一,这是一个典型的刚体静力平衡问题。对于刚体的静力平衡,由物理学知识可知需要满足受力平衡和力矩平衡。由于受力均为竖直方向,故受力平衡只需要按方向叠加即可。对于力矩平衡,关键在于寻找支点,可以选择圆心为质点,也可以选取两弹簧的顶端为支点,这里选用第二种方法。

此外,两弹簧的弹力又可以利用胡克定律和伸长量之差来构建关系。重力矩的求解需要确定质心的位置,可以使用二重积分的方式确定质心。将受力方程组列出来求解即可得到结果。

### 2.2 问题二的分析

问题二撤去外力以后对于圆盘而言不再平衡。这时我们把它的运动分为平动成分和转动成分。对于转动成分,我们使用角动量定理,列出角度对时间的二阶导数和时间的关系;对于平动成分,使用牛顿第二定律,求出平动速度随时间的变化关系。由于弹簧不固定,可以假设其保持竖直,即可以左右滑动而水平方向上保持动量守恒。

在运动过程中,两弹簧的伸长量会随之变化。这一变化使用微元法处理,假设经过一个角度微元以后,求解两弹簧的伸长量微元。而两弹簧的伸长量微元可以等效为AB两个端点的速度在这一时间微元内移动的距离。

使用角动量定理时,需要求解半圆盘的转动惯量。这一参量同样可以使用二重积分进行求解。

构建微分方程组,利用龙格库塔法进行求解即可得到角度-时间曲线。

### 2.3 问题三的分析

问题三在前两个问题的基础上固定了弹簧,所以受力分析时四个力不在一条直线上,需要进行正交分解。而力矩平衡这里可以选取圆心为参考点,这样问题更加简便。更重要的一点在于几何关系,在弹簧、直径和杆构成的四边形中利用边长之间的几何关系即可构建方程组。

动态变化的流程与上类似,只不过这时弹簧除了有沿弹簧方向的运动还有沿着弹簧方向的转动速度。对于其收缩量和摆动速度,同样可以用微元法分析。

### 三. 模型假设

下面为我们的模型假设：

1. 假设不计空气阻力，由于均质半圆面的阻力不易求解，这里简化模型使其保持机械能守恒，没有能量损耗。
2. 不计弹簧质量，这样可以忽略弹簧自身重力对弹簧伸长量的影响，使得模型得到简化。
3. 在第一问和第二问中弹簧可以保持竖直，这样就不需要考虑弹簧偏转带来的影响。系统水平方向上动量守恒所以弹簧只需要考虑沿弹簧方向上的受力。
4. 弹簧的弹力遵循胡克定律，不考虑由于伸长量过大使得弹簧弹力出现非线性变化。这样也是为了模型的简化。

### 四. 符号约定

下面为文中用到的一些变量符号：

符号	说明
$m$	圆盘质量 5kg
$g$	重力加速度取 $10\text{m/s}^2$
$h$	质心到圆心的距离
$r$	圆盘半径 0.3m
$F_1, F_2$	左右两根弹簧的弹力
$k$	弹簧的倔强系数
$\rho$	圆盘密度
$\theta$	圆盘直径的法线与竖直方向的夹角
$v$	速度
$v_y$	速度中平动的分量
$L_1, L_2$	左右两根弹簧的长度
$L_0$	弹簧原长为 0.5m
$\alpha, \beta$	两根弹簧与竖直方向的夹角

（若出现不在表格中的符号，具体含义以文中解释为准）

## 五. 模型的建立与求解

### 5.1 模型一的建立与求解

问题一需要的模型是一个典型的刚体平衡问题。对于刚体的平衡，其充分必要条件是同时满足受力平衡方程和力矩平衡方程[1]。

#### 5.1.1 建立受力平衡方程

如图 1 所示，将半圆形薄片视为受力分析对象，它受到重力、左右两弹簧对它的弹力和向下的拉力，均在竖直方向上。那么，取重力加速度为  $10\text{m/s}^2$  容易得到其受力平衡方程为：

$$F_1 + F_2 - mg - F = 0 \quad (1)$$

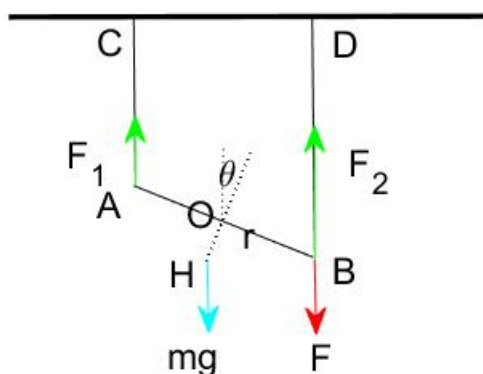


图 1. 问题一的受力分析

#### 5.1.2 建立力矩平衡方程

力矩是一个描述转动趋势的物理量，可以用质点受到的合外力与旋转支点到作用点的位矢的向量积来表示，方向遵循右手螺旋定则[2]。对于刚体而言，若要保持平衡，则除了合外力之和保持为 0 没有平动加速度以外，还需要保持合力矩为 0 以保持没有转动的角加速度。

而列写力矩方程时需要确定支点，这里可以选择质心为支点，可以选择圆心为质点，也可以以弹簧顶点为支点。

分别以左右两弹簧在杆上的连接点为支点，可以列出力矩平衡方程为：

$$\begin{cases} F_2 \cdot 2r \cos \theta - F \cdot 2r \cos \theta + mg \cdot (r \cos \theta - h \sin \theta) = 0 \\ mg \cdot (r \cos \theta + h \sin \theta) - F_1 \cdot 2r \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中  $h$  表示半圆片的质心到半圆的圆心之间的间距，是一个常量。

#### 5.1.3 其他关系

对于左弹簧和右弹簧的弹力，由于右弹簧相比于左弹簧的形变量大一些，根据胡克定律[3]可以得到关系式：

$$F_2 - F_1 = k \cdot 2r \sin \theta \quad (3)$$

#### 5.1.4 质心的求解

质心是一种等效的概念，对于均质半圆盘而言每一个质量微元的重力求和并将其等效为质心一个点处的重力作用[4]。这一求解本质上是一个微元分析法，求解可以使用积分法求解。

在式(1)-(3)中，未知量只有两弹簧的弹力和偏角，但要求解这一方程组还需要知道  $h$  的数值，下面我们通过建立坐标系的方法用二重积分进行求解。

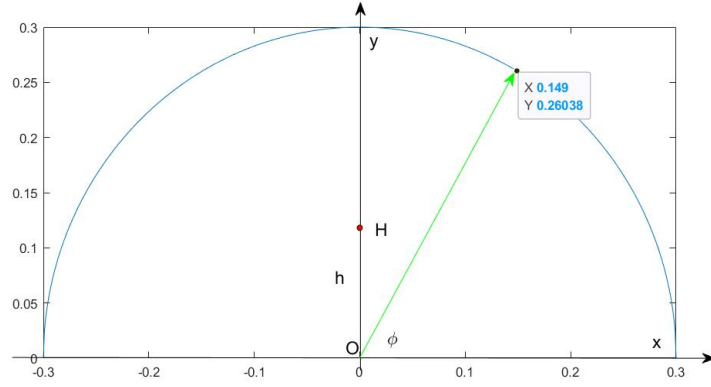


图 2. 使用积分法求质心示意图

建立如图 2 所示的直角坐标系，可以知道，质心 H 必然在对称轴上。设 OH 距离为 h，由于是均匀半圆盘，其密度值始终为一个常数。那么由二重积分公式：

$$h = \frac{\int y \rho dS}{\int \rho dS} = \frac{\rho \int_0^r r^2 dr \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi}{M} \quad (4)$$

带入  $r=0.3\text{m}$ ， $M=5\text{kg}$ ，容易解得  $h=0.1273\text{m}$ 。再将  $k=500$ ， $M=5$ ， $F=50$  带入，可以解得最后  $\theta=0.1562$ 。

## 5.2 模型二的建立与求解

若撤去拉力 F，变化过程与时间有关。下面采用微分方程进行建模。

### 5.2.1 建立微分方程组

由于系统作用力都是水平方向，那么水平方向上系统动量守恒，两弹簧向左和向右的速度相等。对于圆心 O，由对称性可知在水平方向上刚好可以不发生运动。由于问题求解  $\theta$  随时间变化的变化情况，这里只需要考虑半圆盘的转动和竖直方向上的平动，我们把两个运动分解处理。

对于某一时刻，半圆直径的垂线与竖直方向角度为  $\theta$ ，经过很小的一段时间微元  $dt$  以后角度变化了  $d\theta$ ，角速度变化了  $d\omega$ ，由角动量定理[5]，以 O 为参考点，可以列出：

$$Jd\omega = (F_2 r \cos \theta + mgh \sin \theta - F_1 r \cos \theta) dt \quad (5)$$

即微分方程：

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = (F_2 r \cos \theta + mgh \sin \theta - F_1 r \cos \theta) \quad (6)$$

其中转动惯量 J 也可以用二重积分的方法计算。若以圆心为参考轴，转动惯量的积分形式为[6]：

$$J = \int y^2 \rho dS = \frac{M}{\frac{1}{2} \pi r^2} \int_0^r r^3 dr \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi \quad (7)$$

带入数据，可以解得最终转动惯量数值为 0.1125。

而对于弹簧弹力的变化，以拉伸方向为正方向，那么经过时间微元  $dt$ ，弹簧弹力变化分别为  $dF_1$ ， $dF_2$ 。而杆、弹簧、半圆构成的系统合外力为 0，那么系

统在竖直方向上合动量守恒，保持为 0。所以，若左边的弹簧伸长了  $dx$ ，那么右边就会收缩  $dx$ 。那么根据胡克定律：

$$\begin{cases} dF_1 = kdx = kvdt \\ dF_2 = -kdx = -kvdt \end{cases} \quad (8)$$

即微分方程组：

$$\begin{cases} \frac{dF_1}{dt} = kr \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - kv_y \\ \frac{dF_2}{dt} = -kr \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - kv_y \end{cases} \quad (9)$$

对于平动速度，由牛顿第二定律：

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_1 + F_2 - mg \quad (10)$$

### 5.2.2 方程组的数值解

微分方程组的数值解求解方法有很多，这里我们选取龙格库塔法进行求解：

龙格库塔法是在拉格朗日中值定理的基础上进行了一定的改进，它基于一个事实：对于函数的切线公式而言，我们将更新的迭代公式中的单一斜率替换为区间内多个点斜率的平均值，会让精确度得到进一步提升[7]。经求解，接下来 100s 内角度随时间的变化：

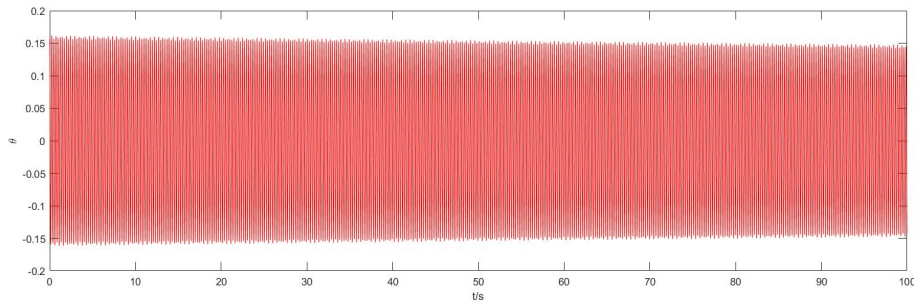


图 3. 角度随时间的变化

## 5.3 模型三的建立与求解

### 5.3.1 受力平衡的分析

当弹簧被固定时受力分析图如图 4 所示：

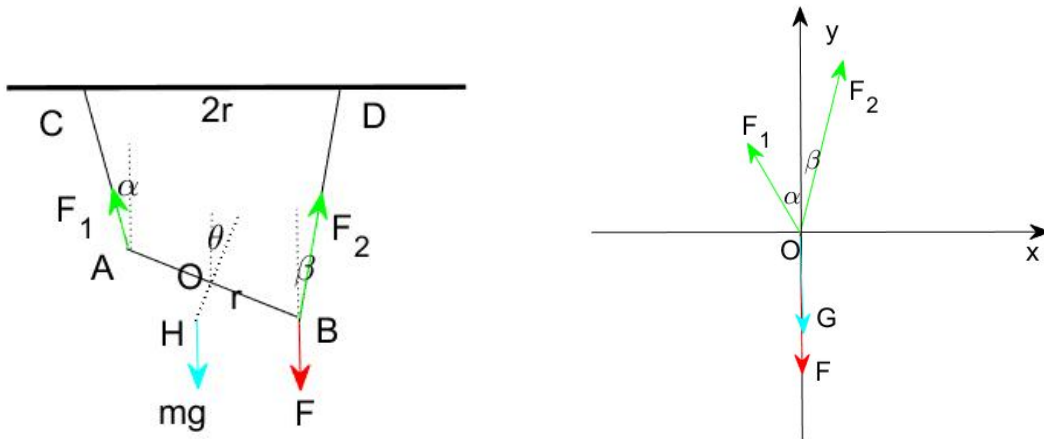


图 4. 问题二的受力分析与正交分解

此时由于受力不在同一条直线上，考虑受力平衡方程。采取正交分解的策略：

$$\begin{cases} F_1 \sin \alpha = F_2 \sin \beta \\ F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta = mg + F \end{cases} \quad (11)$$

接下来考虑几何关系：在四边形内：

$$\begin{cases} L_2 \cos \beta - L_1 \cos \alpha = 2r \sin \theta \\ L_1 \sin \alpha + L_2 \sin \beta = 2r(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (12)$$

其中弹簧弹力与弹簧长度的关系为

$$\begin{cases} F_1 = k(L_1 - L_0) \\ F_2 = k(L_2 - L_0) \end{cases} \quad (13)$$

最后，由力矩平衡方程，以圆心作为支点可以列出：

$$-F_1 r \cos(\alpha + \theta) + F_2 r \cos(\theta - \beta) + mgh \sin \theta - Fr \cos \theta = 0 \quad (14)$$

联立式(10)-(13)可以求解得到结果为  $\theta = 0.1529$

### 5.3.2 变化过程的分析

利用和问题二类似的建模方法，首先将圆盘的运动分解为平动和转动。对于平动，由牛顿第二定律：

$$F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta - mg = m \frac{dv_y}{dt} \quad (15)$$

而利用角动量定理，有：

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = mgh \sin \theta + F_2 r \cos(\theta - \beta) - F_1 r \cos(\alpha + \theta) \quad (16)$$

假设在圆盘转动了角度微元  $d\theta$  时，弹簧偏角分别改变了  $d\alpha$  和  $d\beta$ ，那么可以得到弹力的关系式：

$$\begin{cases} dF_1 = kdx_1 = kL_1 d\alpha = k \left( -v_y \cos \alpha + \frac{d\theta}{dt} r \cos(\theta + \alpha) \right) dt \\ dF_2 = kdx_2 = kL_2 d\beta = k \left( -v_y \cos \beta - \frac{d\theta}{dt} r \cos(\theta - \beta) \right) dt \end{cases} \quad (17)$$

在变化过程中，需要维持(12)的几何关系保持一定。通过编写相应的程序，可以解得角度随时间变化曲线为：

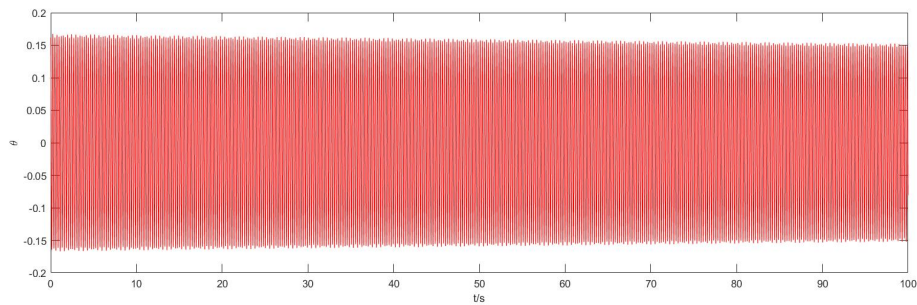


图 5. 问题三的角度-时间图像



## 六. 模型的分析与改进

### 6.1 模型的优点

本模型的优点包括：

1. 从物理学原理出发，在经典力学体系下是适用的。
2. 模型相对来讲较为简单，一些假设简化了模型的难度。
3. 采用微分方程建模，能够建立描述系统状态的通用形式。
4. 能够很容易地编程求解。

### 6.2 模型的缺点

而该模型也有一些缺点：

1. 未能充分考虑到阻力对系统的影响。
2. 并未讨论当参数变化时系统的状态改变，普适性不够。

### 6.3 模型的灵敏度分析

接下来我们对模型的一些参数进行调整，观察结果变化：

#### 6.3.1 改变半径大小：

我们设置半径在 0.1 米到 1 米之间变化，分析问题一模型中角度和弹力随着半径变化的变化规律，绘制出如图 6 所示的图像：

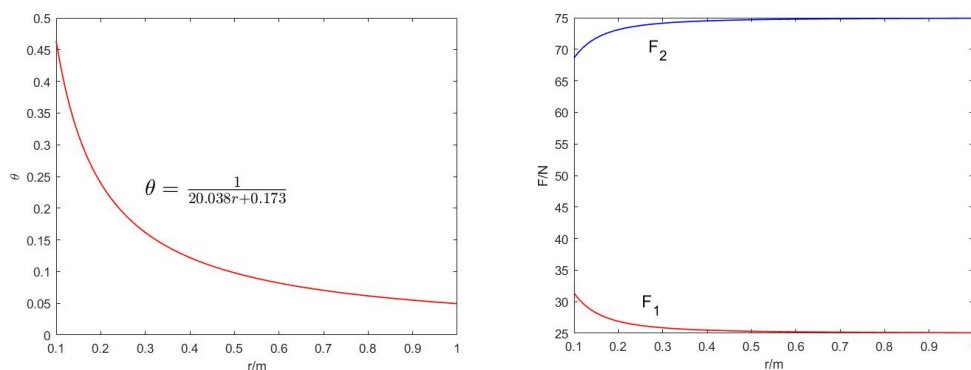


图 6. 角度和弹簧弹力随半径变化

可以看到，角度  $\theta$  随着半径增大是一个反比例的形式。这一点通过建立  $r$  与  $\theta^{-1}$  的线性回归方程可以看出。我们可以得到关系：

$$\theta = \frac{1}{20.038r + 0.173} \quad (18)$$

而两弹簧的弹力会随着半径的增大趋向于收敛， $F_1$  会收敛到 25N， $F_2$  会收敛到 75N。发生这一现象的原因在于，随着半径的增大，弹力和拉力的力矩作用会比重力矩更大，此时极限情况就是只需要控制两弹簧弹力差值为外力 50N，合力为重力加拉力为 100N 即可。

综上，当  $r$  较小时系统对半径的灵敏度较大，随着  $r$  的增大系统对半径的灵敏度会减弱。

#### 6.3.2 改变初始力：

设置外力  $F$  在 10N 到 100N 内变化，针对问题一中给定的模型分析角度和弹簧弹力随质量变化的影响，可以得到如图 7 所示的结果。

可以看到，随着外力的增大，角度和弹簧弹力是线性增长的。很显然，角度对初始外力敏感。而一个有意思的现象为，右弹簧的弹力增长会比左弹簧更快一些。这是由于我们的初始外力作用在右侧。初始状态下不加作用力，则双方都是

25N。而加了作用力以后，两弹簧伸长量不再相等，故会发生增长速度上的快慢差异问题。

角度随着外力变化的变化方程为：

$$\theta = 0.0033F - 0.0015 \quad (19)$$

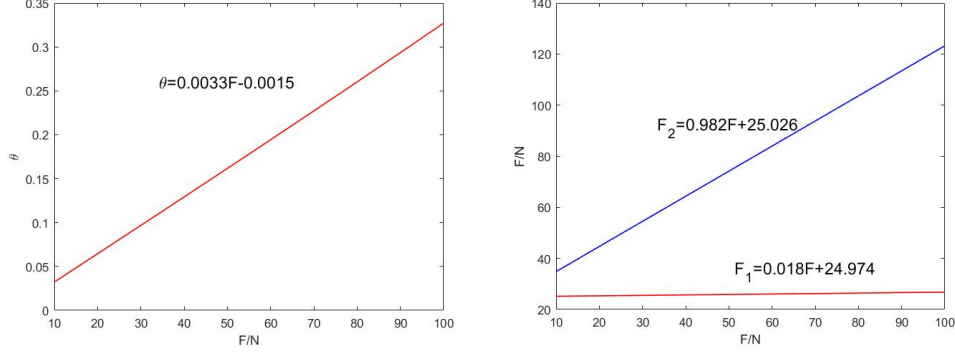


图 7. 角度和弹簧弹力随外力的变化

综上，角度和右侧弹簧的弹力对外力变化敏感，而左侧弹簧弹力对外力变化不敏感。

### 6.3.3 改变质量/重力：

设置质量在 1 到 10 千克内取值，分析问题一模型下的角度和两弹簧弹力大小随质量变化的影响。经过程序设计，我们绘制出了图 8 所示的图像：

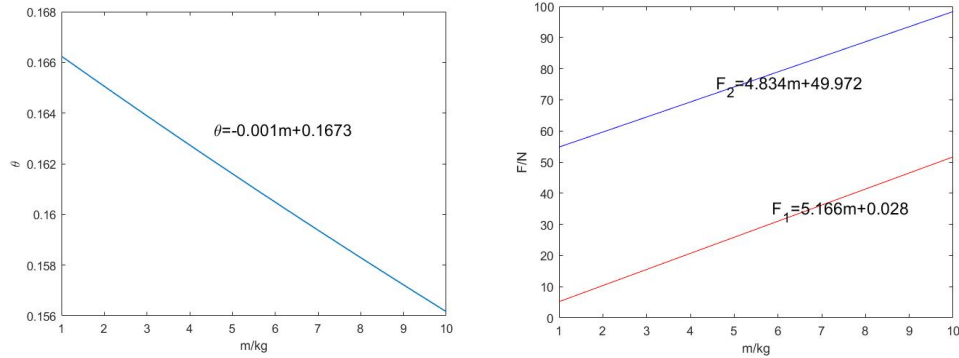


图 8. 角度和弹簧弹力随质量变化

绘制图像可以看到，无论是角度还是两弹簧的弹力，它们随质量的变化都是线性变化的。利用线性回归方程的最小二乘法求解，可以得到其随质量变化的关系为：

$$\begin{cases} \theta = -0.001m + 0.1673 \\ F_1 = 5.166m + 0.028 \\ F_2 = 4.834m + 49.972 \end{cases} \quad (20)$$

这一点也容易理解，考虑极限情况当质量远远超过  $F$  时，外力产生的力矩作用效果便会减弱，此时角度极限值就是 0 因为重力的极限情况就是竖直向下的。而这样严格的线性关系是计算结论中的一个亮点，有待进一步研究。

两弹簧弹力近似平行，因为它们的倔强系数都相同，并且要保持差值相近。在半径固定、进度系数相同的情况下，由于  $\theta$  比较小， $\sin(\theta)$  差异不大，所以两个力差值也相近。

综上，系统对质量变化是灵敏的。

#### 6.4 模型的进一步讨论

如果考虑空气阻力的影响，那么模型将发生一些变化。

假设质点在空气中受到的阻力满足[12]：

$$f = \mu v \quad (21)$$

对于半圆盘上每一个质点，将他们的阻力矩叠加求和：

$$M_f = \mu w r^2 \propto m w \quad (22)$$

显然，半圆盘的阻力矩正相关于质量和角速度。这里的  $k$  是一个常数值，我们探讨一下在不同的  $\mu$  值下由于阻力的影响导致的角度变化。

由于加入阻力因素，角动量定理方程变为：

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = (F_2 r \cos \theta + m g h \sin \theta - F_1 r \cos \theta - \mu_1 m w) \quad (23)$$

这里  $\mu_1$  也是一个常数，等于阻力矩与  $m w$  的比值。由于角度变化与竖直方向的平动速度没有关系，这里我们设置该常数为 0.01 来观察 1000s 内角度的变化情况，如图 9 所示。

圆盘的转动速度逐渐衰减，到最后保持平衡，偏角为 0。可以观察到，衰减速度实际上越来越快，到一定的时间速度近似为 0。

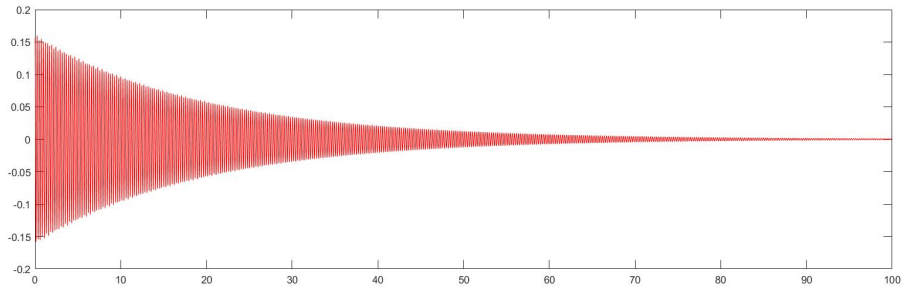


图 9. 有阻力时偏角随时间的变化

接下来探究不同的  $\mu$  值对结果的影响。取其分别为 0.01-0.05，可以绘制图像如图 10 所示：

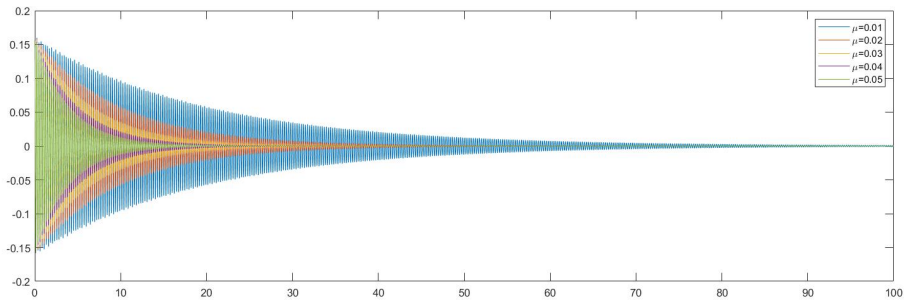


图 10. 不同常数值下的变化图象

可以发现， $\mu$  值越大则角度的衰减速度越快，速度降低为 0 的时间越短，平均的振幅也就越小。

## 参考文献

- [1] 于世新, 越彩霞, 刘国荣. 力系平衡是刚体平衡的充要条件吗[J]. 物理通报, 2012, {4} (08):101-103.
- [2] 范淑华, 项林川, 大学物理(上册)[M]. 华中科技大学出版社, P41, 2020
- [3] 符峤山. 对胡克定律中劲度系数的探讨[J]. 课程教材教学研究(中教研究), 2020, {4} (Z5):71-73.
- [4] 李超群, 刘智慧, 张玉洁. 质心公式推导及其在求解积分中的应用[J]. 数学学习与研究, 2014, {4} (01):69-70.
- [5] 毛骏健, 顾牡, 大学物理学(第二版)上册[M]. 高等教育出版社, P78-80, 2019
- [6] 朱宝奇, 苏煜. 等效替换物理思想解决刚体定轴转动问题[J]. 物理通报, 2021, {4} (S1):4-7+11.
- [7] 杨阳. 龙格库塔法求模糊微分方程的数值解. 哈尔滨工业大学, 2015.

## 附录

Environment: OS: Windows 10; CPU: Intel i7; GPU: NVIDIA GEFORCE 1650  
Language: Matlab 2019a

附录
<pre>%Question 1 clear;clc; k=500; g=10; h=0.4/pi; r=0.3; m=5; F=50; syms F1 F2 theta; %eq1=F2*2*r*cos(theta)-F*2*r*cos(theta)+m*g*(r*cos(theta) -h*sin(theta))==0; %eq2=m*g*(r*cos(theta)+h*sin(theta))-F1*2*r*cos(theta)==0 ; eq2=m*g*h*sin(theta)+F2*r*2*cos(theta)-F1*2*r*cos(theta)- F*2*r*cos(theta)==0; eq3=F2-F1-k*2*r*sin(theta)==0; eq4=F1+F2-m*g-F==0; [F1,F2,theta]=solve(eq2,eq3,eq4); F1=vpa(F1,4); F2=vpa(F2,4); theta=vpa(theta,4); F1 F2 theta</pre>
<pre>%Question 2 clear;clc; k=500; g=10; h=0.1273; r=0.3; m=5; F=50; F10=25.86; F20=74.14; theta0=0.1616; J=m*r*r/4;  [t,x]=ode45('func',[1:1000],[theta0,F10,F20,0]); % 初始化</pre>

```

%[t,x]=ode45('newfunc',[1:100],[theta0,0])
%[t,x]=ode45('hyperfunc',[1:100],[theta0,F10,F20,0,0,0]);
x = vpa(x,4);
%[theta,f1,f2]=dsolve('J*D2theta=f1*r*cos(theta)+m*g*h*sin(theta)-f2*r*cos(theta),Df1=k*r*cos(theta)*Dtheta,Df2=-k*r*cos(theta)*Dtheta','theta(0)=0.1562,f1(0)=26.67,f2(0)=73.33');
%theta,f1,f2
plot(t,x(:,1),'r-','Linewidth',1.5);
legend('\theta')
%plot(t,x(:,2),'r-',t,x(:,3),'g-')
%legend('F_1','F_2')

```

```

function dx=func(t,x)
    k=500;
    g=10;
    h=0.1273;
    r=0.3;
    m=5;
    mu=0.01;
    J=m*r*r/4;
    dx=zeros(4,1);
    dx(1)=x(4);
    dx(2)=k*r*cos(x(1))*dx(1);
    dx(3)=-k*r*cos(x(1))*dx(1);

    dx(4)=(x(3)*r*cos(x(1))+m*g*h*sin(x(1))-x(2)*r*cos(x(1))-mu*m)/J;
end

```

```

%Question 3.1
clear;clc;
k=500;
g=10;
h=0.4/pi;
r=0.3;
m=5;
F=50;
%syms x(1) x(2) x(3) x(4) x(5);
%eq1=x(1)*sin(x(4))==x(2)*sin(x(5));
%eq2=x(1)*cos(x(4))-x(2)*cos(x(5))==2*r*cos(x(3));
%eq3=x(1)*cos(x(4))+x(2)*cos(x(5))==100;
%eq4=(x(1)/k-0.5)*sin(x(4))+(x(2)/k-0.5)*sin(x(5))==2*r*(

```

```

1-cos(x(3)));
%eq5=m*g*h*sin(x(3))+x(2)*r*sin(x(3)-x(5))-x(1)*r*sin(x(4)
)+x(3))-F*r*cos(x(3))==0;
%[x(1),x(2),x(3),x(4),x(5)]=solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5);
%x(1)=vpa(x(1),4);
%x(2)=vpa(x(2),4);
%x(3)=vpa(x(3),4);
%x(4)=vpa(x(4),4);
%x(5)=vpa(x(5),4);
x=[0,0,0,0,0];
eq=@(x)
[x(1)*sin(x(4))-x(2)*sin(x(5)),x(1)*cos(x(4))-x(2)*cos(x(
5))-2*r*cos(x(3)),x(1)*cos(x(4))+x(2)*cos(x(5))-100,(x(1)
/k-0.5)*sin(x(4))+(x(2)/k-0.5)*sin(x(5))-2*r*(1-cos(x(3))
),m*g*h*sin(x(3))+x(2)*r*sin(x(3)-x(5))-x(1)*r*sin(x(4)+x
(3))-F*r*cos(x(3))];
x=fsolve(eq,[25,25,0,0,0])

```

```

%Question 3.2
clear;clc;
k=500;
g=10;
h=0.1273;
r=0.3;
m=5;
F=50;
F10=51.91;
F20=52.53;
theta0=0.8471;
alpha0=-0.2575;
beta0=-0.2594;
J=m*r*r/4;
[t,x]=ode45('exceedfunc',[1:100],[theta0,F10,F20,alpha0,b
eta0,0.619,0.625,0,0,0]); % 初始化

%[t,x]=ode45('newfunc',[1:100],[theta0,0])
%[t,x]=ode45('hyperfunc',[1:100],[theta0,F10,F20,0,0,0]);
x = vpa(x,4);
%[theta,f1,f2]=dsolve('J*D2theta=f1*r*cos(theta)+m*g*h*si
n(theta)-f2*r*cos(theta),Df1=k*r*cos(theta)*Dtheta,Df2=-k
*r*cos(theta)*Dtheta','theta(0)=0.1562,f1(0)=26.67,f2(0)=
73.33');
%theta,f1,f2
plot(t,x(:,1),'r-','Linewidth',1.5);

```

```
legend('\theta')
```

```
function dx=exceedfunc(t,x)
    k=500;
    g=10;
    h=0.1273;
    r=0.3;
    m=5;
    J=m*r*r/4;
    dx=zeros(10,1);
    dx(1)=x(9);
    dx(2)=k*(x(9)*r*sin(x(1)+x(4))+x(8)*sin(x(4)));
    dx(3)=k*(x(9)*r*sin(x(1)-x(5))+x(8)*sin(x(5)));
    dx(4)=(x(9)*r*sin(x(1)+x(4))+x(8)*sin(x(4)))/x(6);
    dx(5)=(x(9)*r*sin(x(1)-x(5))+x(8)*sin(x(5)))/x(7);
    dx(6)=(x(9)*r*sin(x(1)+x(4))+x(8)*sin(x(4)));
    dx(7)=(x(9)*r*sin(x(1)-x(5))+x(8)*sin(x(5)));
    dx(8)=x(10);

    dx(9)=(x(3)*r*sin(x(1)-x(5))-x(2)*r*sin(x(1)+x(4))-m*g*h*
    sin(x(1)))/J;
    dx(10)=(x(2)*cos(x(4))+x(3)*cos(x(5))-m*g)/m;
end
```

```
%Analysis
function F2=xfunc(r)
k=500;
g=10;
h=4*r/(3*pi);
r=0.3;
F=50;
m=5;
syms F1 F2 theta;
%eq1=F2*2*r*cos(theta)-F*2*r*cos(theta)+m*g*(r*cos(theta)
-h*sin(theta))==0;
%eq2=m*g*(r*cos(theta)+h*sin(theta))-F1*2*r*cos(theta)==0
;
eq2=m*g*h*sin(theta)+F2*r*2*cos(theta)-F1*2*r*cos(theta)-
F*2*r*cos(theta)==0;
eq3=F2-F1-k*2*r*sin(theta)==0;
eq4=F1+F2-m*g-F==0;
[F1,F2,theta]=solve(eq2,eq3,eq4);
F1=vpa(F1,4);
F2=vpa(F2,4);
```



```
theta=vpa(theta,4);  
end
```