Replikations-Skript zur Vorlesung 8: Formalia

Claudius Gräbner

KW 50 2020

Contents

In diesem Dokument werden alle Abbildungen und Tabellen aus der siebten Vorlesung repliziert. Dabei gebe ich der Info wegen *allen* R Code. Entsprechend sind bestimmt auch einige Befehle dabei, die Sie jetzt noch nicht kennen.

Zudem nehme ich an, dass im Arbeitsverzeichnis der Ordner `data/T7/` existiert und in diesem folgende Datensätze enthalten sind (diese sind über die Repository zur Vorlesung verfügbar): `bip_growth.csv` und `AutoDaten.csv`.

Folgende Pakete werden zudem in diesem Skript verwendet:

```
library(tidyverse)
library(data.table)
library(ggpubr)
library(latex2exp)
library(icaeDesign)
library(here)
library(matlib)
library(fitdistrplus)
```

Beachten Sie, dass das Paket icaeDesign nicht über die zentrale Paketverwaltung verfübar ist. Es muss folgendermaßen installiert werden:

```
devtools::install_github("graebnerc/icaeDesign")
```

1 Wachstumsraten

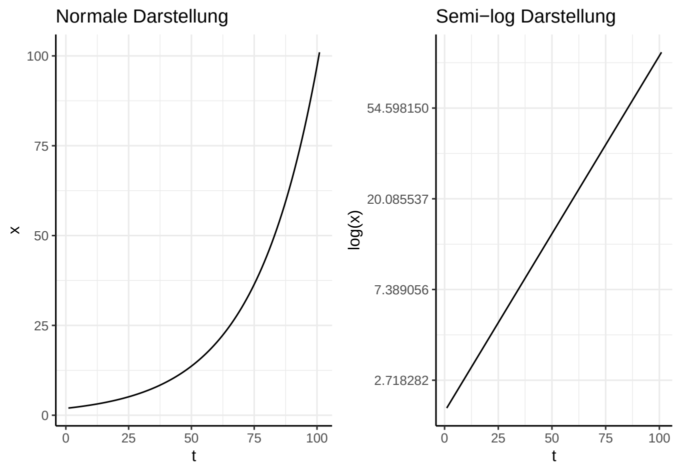
1.1 Darstellung durch Logarithmus

Wir starten mit $x = 2$ und lassen die Variable über 100 Schritte mit mit 4% pro Zeitschritt wachsen:

```
x <- c(2, rep(NA, 99))

for (i in 1:length(x)){
  x[i+1] <- x[i] * 1.04
}

x_data <- data.frame(
  t = 1:101,
  x = x
)
```

Hier sehen wir, wie sich in der semi-log Darstellung eine gerade Linie ergibt:

```
p1 <- ggplot(
  data = x_data,
  mapping = aes(x=t, y=x)) +
  geom_line() +
  labs(title = "Normale Darstellung") +
  theme_bw() + theme(
    panel.border = element_blank(),
    axis.line = element_line()
  )

p2 <- p1 +
  labs(title = "Semi-log Darstellung", y="log(x)") +
  scale_y_continuous(trans = "log")

ggpubr::ggarrange(p1, p2, ncol = 2)
```



1.2 Gruppierung und Berechnung

```
beispiel_daten <- fread(
  here("data/T7/bip_growth.csv")
  ) %>%
```

```r
  arrange(-year)
beispiel_daten
```

```
##     country      BIP year
##  1: Austria 37941.04 2018
##  2: Germany 35866.00 2018
##  3: Austria 37140.79 2017
##  4: Germany 35477.89 2017
##  5: Austria 36469.39 2016
##  6: Germany 34858.79 2016
##  7: Austria 36129.03 2015
##  8: Germany 34370.64 2015
##  9: Austria 36123.43 2014
## 10: Germany 34076.90 2014
```

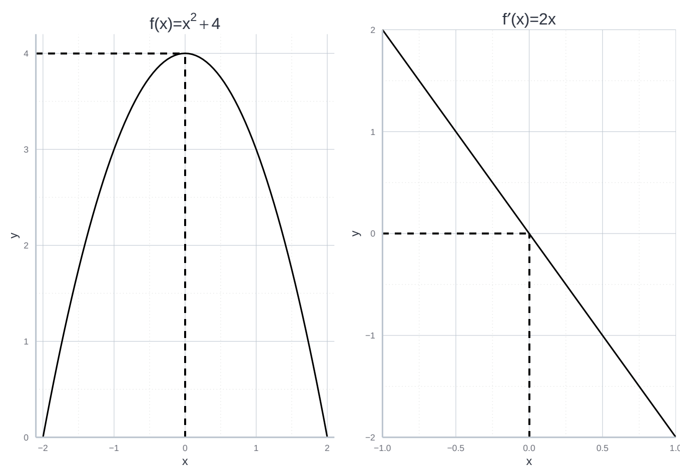
```r
beispiel_daten <- beispiel_daten %>%
  arrange(country, year) %>%
  group_by(country) %>%
  mutate(
    BIP_Wachstum = (BIP-dplyr::lag(BIP))/abs(dplyr::lag(BIP))*100
    ) %>%
  ungroup()
beispiel_daten
```

```
## # A tibble: 10 x 4
##    country    BIP  year BIP_Wachstum
##    <chr>    <dbl> <int>        <dbl>
##  1 Austria 36123.  2014      NA
##  2 Austria 36129.  2015       0.0155
##  3 Austria 36469.  2016       0.942
##  4 Austria 37141.  2017       1.84
##  5 Austria 37941.  2018       2.15
##  6 Germany 34077.  2014      NA
##  7 Germany 34371.  2015       0.862
##  8 Germany 34859.  2016       1.42
##  9 Germany 35478.  2017       1.78
## 10 Germany 35866.  2018       1.09
```

2 Differenzialrechnung und Optimierung

```r
f_0 <- function(x) -x^2 + 4
f_0_d <- function(x) -2*x

data <- data.frame(x=seq(-2, 2, 0.05)) %>%
  rowwise() %>%
  mutate(y_2 = f_0(x),
         y_3 = f_0_d(x))

fun_max <- ggplot(data, aes(x=x, y=y_2)) +
  geom_line() +
    labs(
    title = TeX("$f(x)=x^2 + 4$"),
    x="x", y="y"
```

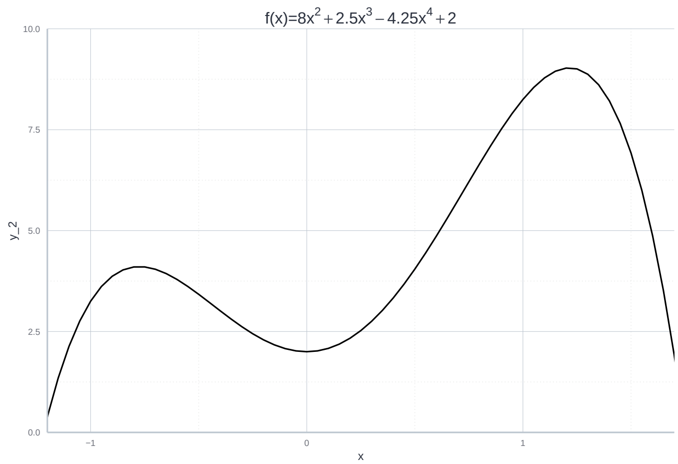
```
  ) +
  geom_segment(x=0, xend=0, y=0, yend=4, linetype=2) +
  geom_segment(x=-Inf, xend=0, y=4, yend=4, linetype=2) +
  coord_cartesian(ylim = c(0, 4.2),
                  xlim = c(-2.1, 2.1),
                  expand = c(0)) +
  theme_icae()

fun_deriv <- ggplot(data, aes(x=x, y=y_3)) +
  geom_line() +
  labs(
    title = TeX("$f'(x)=2x$"),
    x="x", y="y"
  ) +
  geom_segment(x=0, xend=0, y=-Inf, yend=0, linetype=2) +
  geom_segment(x=-Inf, xend=0, y=0, yend=0, linetype=2) +
  coord_cartesian(ylim = c(-2, 2),
                  xlim = c(-1, 1),
                  expand = c(0)) +
  theme_icae()

comb_plot <- ggarrange(fun_max, fun_deriv, ncol = 2)
comb_plot
```



2.1 Ableitungen

```
f_2 <- function(x) 8*x^2 + 2.5*x**3 - 4.25*x**4 + 2

data <- data.frame(x=seq(-2, 2, 0.05)) %>%
  rowwise() %>%
  mutate(y_2 = f_2(x))

mult_max <- ggplot(data, aes(x=x, y=y_2)) +
  geom_line() +
  ggtitle(TeX("$f(x)=8x^2 + 2.5x^3 - 4.25x^4 + 2$")) +
  coord_cartesian(ylim = c(0, 10),
                  xlim = c(-1.2, 1.7), expand = c(0)) +
  theme_icae()
```

```
mult_max
```

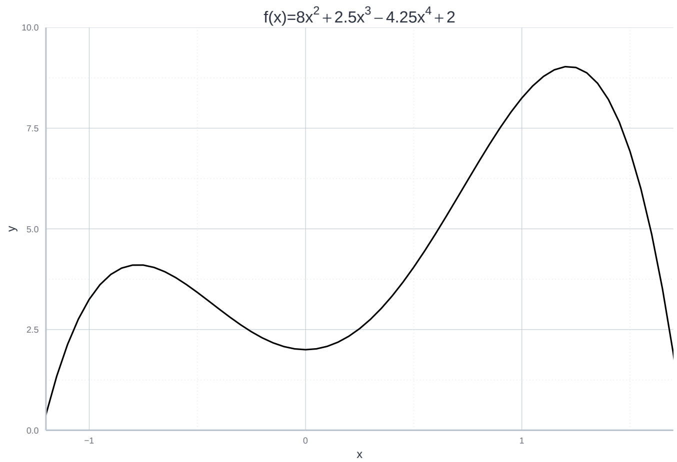



```
f_expr <- expression(8*x^2 + 2.5*x^3 - 4.25*x^4 + 2)
f_deriv <- D(expr = f_expr, name = "x")
x <- seq(-2, 2, 0.05)
f_expr_vals <- eval(f_expr)

f_data <- data.frame(x=x,
                     y=f_expr_vals,
                     y_deriv = eval(f_deriv))

deriv_plot <- ggplot(f_data, aes(x=x, y=y_deriv)) +
  geom_line() +
  ggtitle(TeX("$f'(x)=8(2x) + 2.5(3x^2) - 4.25(4x^3)$")) +
  coord_cartesian(ylim = c(-10, 10),
                  xlim = c(-1.2, 1.7), expand = c(0)) +
  geom_hline(yintercept = 0) +
  theme_icae()
deriv_plot
```

2.2 Optimierung

```
f_1 <- function(x) 8*x^2 + 2.5*x**3 - 4.25*x**4 + 2
```

```r
data <- data.frame(x=seq(-2, 2, 0.05)) %>%
  rowwise() %>%
  mutate(y = f_1(x))

ggplot(data, aes(x=x, y=y)) +
  geom_line() +
  ggtitle(TeX("$f(x)=8x^2 + 2.5x^3 - 4.25x^4 + 2$")) +
  coord_cartesian(ylim = c(0, 10),
                  xlim = c(-1.2, 1.7), expand = c(0)) +
  theme_icae()
```




```r
opt_obj <- optimize(f = f_1,
                    lower = -1.25, upper = 1.75,
                    maximum = FALSE)
opt_obj
```

```
## $minimum
## [1] -7.54766e-06
##
## $objective
## [1] 2
```

```r
opt_obj <- optimize(f = f_1,
                    lower = -1.25, upper = 1.75,
                    maximum = TRUE)
opt_obj
```

```
## $maximum
## [1] 1.215492
##
## $objective
## [1] 9.032067
```

```r
opt_obj <- optimize(f = f_1,
                    lower = -1.25, upper = 0,
                    maximum = TRUE)
opt_obj
```

```
## $maximum
## [1] -0.7743199
##
```

```
## $objective
## [1] 4.108106
```

3 Lineare Algebra

3.1 Beispiel Keynes

Das Keynesianische Modell:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G \\ C &= a + bY \end{aligned}$$

Umgeformt:

$$\begin{aligned} Y - C &= I + G \\ -bY + C &= a \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I+G \\ a \end{pmatrix}$$
$$Ax = d$$

Lösung in R für $G = 5$, $I = 4$, $a = 4$ und $b = 0.5$:

```r
I_keynes <- 5
G_keynes <- 4
b_keynes <- 0.5
a_keynes <- 4

A_keynes <- matrix(c(1, -b_keynes, -1, 1), nrow = 2)
d_keynes <- matrix(c(I_keynes + G_keynes, a_keynes), ncol = 1)
Solve(A = A_keynes, b = d_keynes)
```

```
## x1    =  26
##    x2  =  17
```

3.2 Beispiel OLS

Wir wissen nun, dass wir das lineare Regressionsmodell mit n Beobachtungen von p Variablen

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + ... + \beta_p x_{1p} + \epsilon_1 \\ y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + ... + \beta_p x_{2p} + \epsilon_2 \\ &\vdots \\ y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + ... + \beta_p x_{np} + \epsilon_n \end{aligned}$$

auch folgendermaßen schreiben können:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \tag{1}$$

Nehmen wir jetzt folgenden Datensatz an:

```r
ols_beispiel <- fread(here("data/T7/AutoDaten.csv"),
                      select = c("Auto"="character",
                                 "Verbrauch"="double",
                                 "PS"="double", "Zylinder"="double"))
ols_beispiel
```

```
##              Auto Verbrauch  PS Zylinder
## 1: Ford Pantera L      15.8 264        8
## 2:   Ferrari Dino      19.7 175        6
## 3:  Maserati Bora      15.0 335        8
## 4:     Volvo 142E      21.4 109        4
```

Dies können wir schreiben als:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \epsilon_1 \\
y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \epsilon_2 \\
y_3 &= \beta_0 + \beta_1 x_{31} + \beta_2 x_{32} + \epsilon_3 \\
y_4 &= \beta_0 + \beta_1 x_{41} + \beta_2 x_{42} + \epsilon_4
\end{aligned} \tag{2}
$$

und mit Zahlen:

$$
\begin{aligned}
15.8 &= \beta_0 + \beta_1 264 + \beta_2 8 + \epsilon_1 \\
19.7 &= \beta_0 + \beta_1 175 + \beta_2 6 + \epsilon_2 \\
15.0 &= \beta_0 + \beta_1 335 + \beta_2 8 + \epsilon_3 \\
21.4 &= \beta_0 + \beta_1 109 + \beta_2 4 + \epsilon_4
\end{aligned} \tag{3}
$$

Und als Matrix:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 264 & 8 \\ 1 & 175 & 6 \\ 1 & 335 & 8 \\ 1 & 109 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.8 \\ 19.7 \\ 15.0 \\ 21.4 \end{pmatrix}
$$

Das können wir wiederum in R lösen:

```r
ols_X <- matrix(c(1, 264, 8, 1, 175, 6, 1, 335, 8, 1, 109, 4),
                ncol = 3, byrow = T)
ols_y <- matrix(c(15.8, 19.7, 15.0, 21.4), ncol = 1)

solve(t(ols_X) %*% ols_X) %*% t(ols_X) %*% ols_y
```

```
##             [,1]
## [1,] 26.37086491
## [2,] -0.01783627
## [3,] -0.68592421
```

Oder direkt mit `lm()`:

```r
lm(Verbrauch~PS+Zylinder, data = ols_beispiel)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Verbrauch ~ PS + Zylinder, data = ols_beispiel)
##
## Coefficients:
## (Intercept)           PS     Zylinder
##    26.37086     -0.01784     -0.68592
```

3.3 Herleitung des OLS Schätzers (optional)

Wir wissen bereits, dass die Residuen einer Schätzung gegeben sind durch:

$$e = y - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

Wir können die Summe der Residuen (RSS) in Matrixschreibweise schreiben als:

$$e'e = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \times e_1 & e_2 \times e_2 & \dots & e_n \times e_n \end{pmatrix}$$

Wir können dann schreiben:[1]

$$\begin{aligned} e'e &= \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)' \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) \\ &= \boldsymbol{y'y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X'y} - \boldsymbol{y'X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X'X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= \boldsymbol{y'y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{X'y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X'X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \end{aligned}$$

Wir wollen diesen Ausdruck nun minimieren. Dazu leiten wir nach dem Vektor der zu schätzenden Koeffizienten $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ab:

$$\frac{\partial e'e}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} = -2\boldsymbol{X'y} + 2\boldsymbol{X'X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = 0$$

Diese Gleichung können wir nun umformen zu:

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{X'X}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= 2\boldsymbol{X'y} \\ \boldsymbol{X'X}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= \boldsymbol{X'y} \end{aligned}$$

Da gilt, dass $(\boldsymbol{X'X})^{-1}(\boldsymbol{X'X}) = I$ multiplizieren wir beide Seiten mit $(\boldsymbol{X'X})^{-1}$:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'X}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'y} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\boldsymbol{X'X})^{-1}(\boldsymbol{X'y}) \end{aligned} \tag{4}$$

Damit haben wir den Schätzer für $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ hergeleitet.

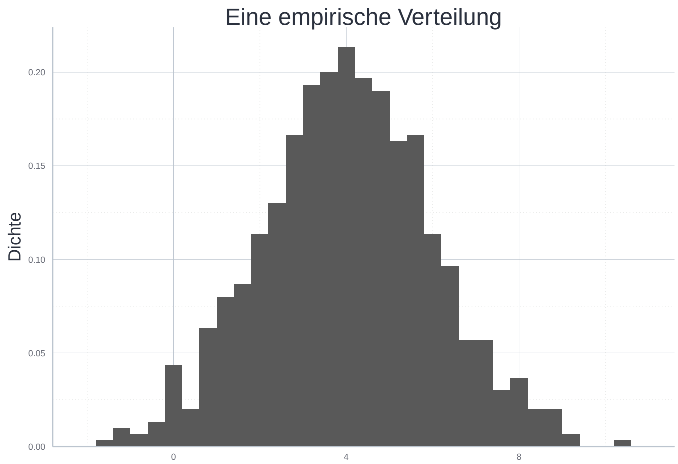
[1] Beachte dabei, dass $\boldsymbol{y'X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{y'X}\hat{\boldsymbol{\beta}})' = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X'y}$.

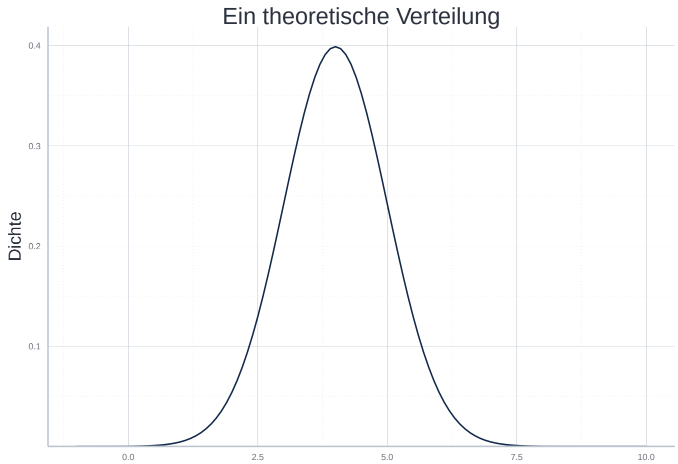
4 Verteilungen

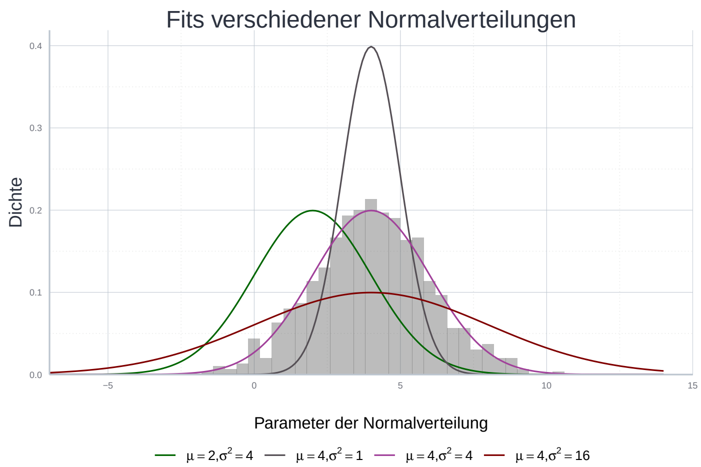
4.1 Theoretische und empirische Verteilungen

Erstellen der Daten:

```
ggplot(data = sample_data) +
  geom_histogram(mapping = aes(x=r, stat(density)), binwidth = 0.4) +
  scale_x_continuous(expand = c(0, 1)) +
  scale_y_continuous(name = "Dichte",
                     expand = expansion(c(0, 0.05), c(0, 0))) +
  ggtitle("Eine empirische Verteilung") +
  theme_icae() +
  theme(axis.title.x = element_blank(),
        plot.title = element_text(size = 16),
        axis.title.y = element_text(size = 12))
```







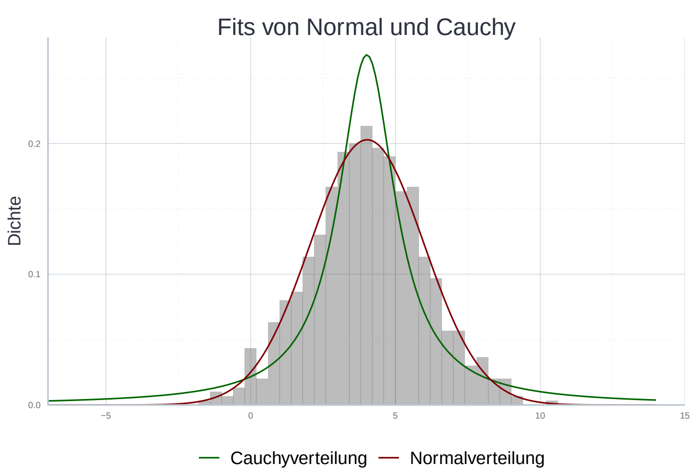
Wir fitten die Normalverteilung mit dem Paket `fitdistrplus`:

```
fit_dist <- fitdist(data = sample_data$r,
                    distr = "norm")
fit_dist[["estimate"]]
```

```
##     mean       sd
## 4.023254 1.967130
```

```
fit_dist2 <- fitdist(data = sample_data$r,
                     distr = "cauchy")
fit_dist2[["estimate"]]
```

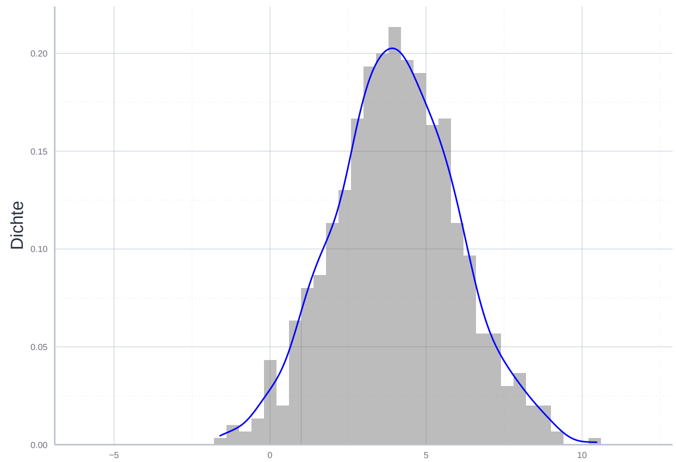
```
## location    scale
## 4.011809 1.188676
```



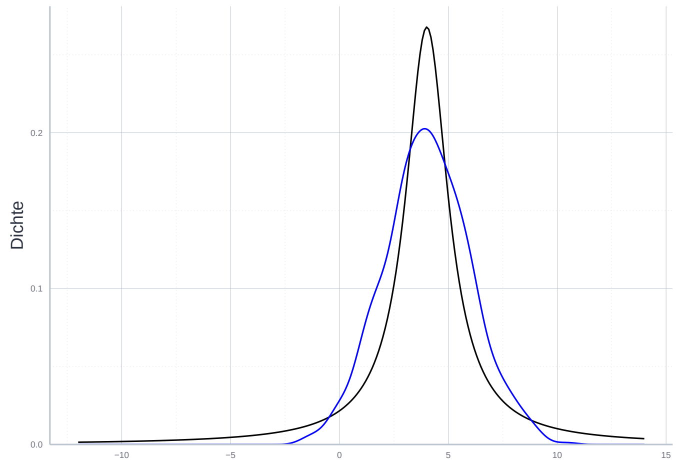
Der nicht-parametrische Fit:

```
ggplot(data = sample_data) +
  geom_histogram(
    mapping = aes(x=r, stat(density)),
    binwidth = 0.4, alpha=0.4) +
    coord_cartesian(xlim = c(-6, 12)) +
  stat_density(mapping = aes(x=r),
               color="blue",
               geom="line") +
  scale_y_continuous(name = "Dichte",
```

```
                     expand = expansion(c(0, 0.05), c(0, 0))
                     ) +
  theme_icae() +
  theme(legend.title = element_blank(),
        legend.text = element_text(size = 12),
        axis.title.x = element_blank(),
        plot.title = element_text(size = 16),
        axis.title.y = element_text(size = 12))
```




```
ggplot(data = sample_data) +
  geom_line(data = filter(
    y_vals_pdf,
    Verteilung=="Cauchyverteilung"),
            mapping = aes(x=x, y=y)) +
  stat_density(mapping = aes(x=r),
               color="blue",
               geom="line") +
  scale_y_continuous(name = "Dichte",
                     expand = expansion(c(0, 0.05), c(0, 0))
                     ) +
  theme_icae() +
  theme(legend.title = element_blank(),
        legend.text = element_text(size = 12),
        axis.title.x = element_blank(),
        plot.title = element_text(size = 16),
        axis.title.y = element_text(size = 12))
```



4.2 Grafische Darstellung

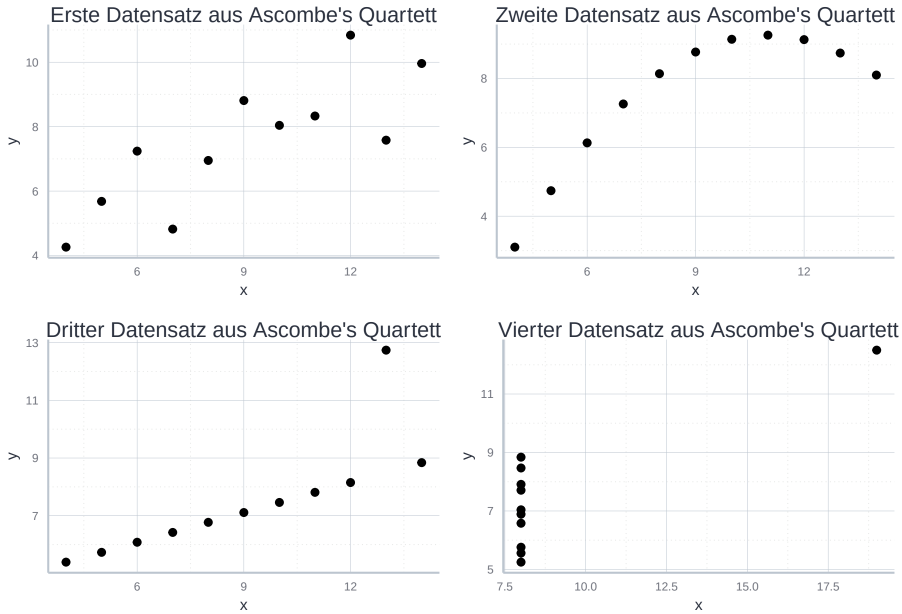
```
data("anscombe")
head(anscombe)
```

```
##   x1 x2 x3 x4   y1   y2    y3   y4
## 1 10 10 10  8 8.04 9.14  7.46 6.58
## 2  8  8  8  8 6.95 8.14  6.77 5.76
## 3 13 13 13  8 7.58 8.74 12.74 7.71
## 4  9  9  9  8 8.81 8.77  7.11 8.84
## 5 11 11 11  8 8.33 9.26  7.81 8.47
## 6 14 14 14  8 9.96 8.10  8.84 7.04
```

Die folgende Tabelle gibt die Werte der quantitativen Kennzahlen an:

Kennzahl	Wert
Mittelwert von x	9
Mittelwert von y	7.5
Varianz von x	11
Varianz von y	4.13
Korrelation zw. x und y	0.82

Nur die grafische Inspektion zeigt, wie unterschiedlich die Verteilungen tatsächlich sind:


Erste Datensatz aus Ascombe's Quartett
Zweite Datensatz aus Ascombe's Quartett
Dritter Datensatz aus Ascombe's Quartett
Vierter Datensatz aus Ascombe's Quartett
x
y