



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

INFORMATIKOS FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS INFORMATIKOS KATEDRA

3 Laboratorinis darbas

Nr. 10

Atliko:

IFK-8 grupės stud.

Tomas Odinas

Priėmė

lekt. Andrius Kriščiūnas

KAUNAS, 2020

TURINYS

1.	UŽDUOTIS.....	2
	Interpoliavimas daugianariu.....	2
	Interpoliavimas daugianariu ir splineu per duotus taškus.....	2
	Parametrinis interpoliavimas.....	2
	Aproksimavimas	3
2.	PAGRINDINĖ DALIS	3
	2.1 Interpoliavimas daugianariu.....	3
	2.2 Interpoliavimas daugianariu ir splineu per duotus taškus.....	6
	2.3 Parametrinis interpoliavimas.....	7
	2.4 Aproksimavimas	11
3.	IŠVADOS	16
4.	PRIEDAI.....	16
	4.1 Programinio kodo fragmentai	16
	4.2 Programos aprašymas.....	17
	4.3 Duomenų šaltiniai	18
	4.4 Nuoroda į programinio kodo repozitoriją	18

1. UŽDUOTIS

Interpoliavimas daugianariu

1 lentelėje duota interpoliuojamos funkcijos analitinė išraiška. Pateikite interpoliacinės funkcijos išraišką naudodami **1 lentelėje** nurodytas bazines funkcijas, kai:

- Taškai pasiskirstę tolygiai.
- Taškai apskaičiuojami naudojant Čiobyševo abscises.

Interpoliavimo taškų skaičių parinkite laisvai, bet jis turėtų neviršyti 30. Pateikite du grafikus, kai interpoliacinės funkcijos apskaičiuojamos naudojant skirtingas abscises ir gautas interpoliuojančių funkcijų išraiškas. Tame pačiame grafike vaizduokite duotąją funkciją, interpoliacinę funkciją ir netiktį.

Var. Nr.	Funkcijos išraiška	Bazinė funkcija
10	$\cos(2 \cdot x) / (\sin(2 \cdot x) + 1,5) - \frac{x}{5}; -2 \leq x \leq 3;$	Čiobyševo

Pav. 1

Interpoliavimas daugianariu ir splainu per duotus taškus

Pagal **2 lentelėje** pateiktą šalį ir metus, sudaryti interpoliuojančią kreivę 12 mėnesių temperatūroms atvaizduoti nurodytais metodais:

- Daugianariu, sudarytu naudojant **1 lentelėje** nurodytas bazines funkcijas.
- 2 lentelėje** nurodyto tipo splainu.

Var. Nr.	Šalis	Metai	Splainas
10	Ispanija	2012	Ermito (Akima)

Pav. 2

Parametrinis interpoliavimas

Naudodami **parametrinio** interpoliavimo metodą **2 lentelėje** nurodytu splainu suformuokite **2 lentelėje** nurodytos šalies kontūrą. Pateikite pradinius duomenis ir rezultatus, gautus naudojant 10, 20, 50, 100 interpoliavimo taškų.

Užduoties sąlyga – žiūrėti Pav. 2.

Aproksimavimas

Pagal **2 lentelėje** nurodytą šalį ir metus mažiausių kvadratų metodu sudarykite aproksimuojančią kreivę 12 mėnesių vidutinėms temperatūroms atvaizduoti naudojant **antros, trečios, ketvirtos ir penktos** eilės daugianarius. Pateikite gautas daugianarių išraiškas.

Užduoties sąlyga – žiūrėti Pav. 2.

2. PAGRINDINĖ DALIS

2.1 Interpoliavimas daugianariu

Interpoliuojame funkciją $\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)+1,5} - \frac{x}{5}$ intervale $-2 \leq x \leq 3$ naudodami Čiobyševo bazines funkcijas.

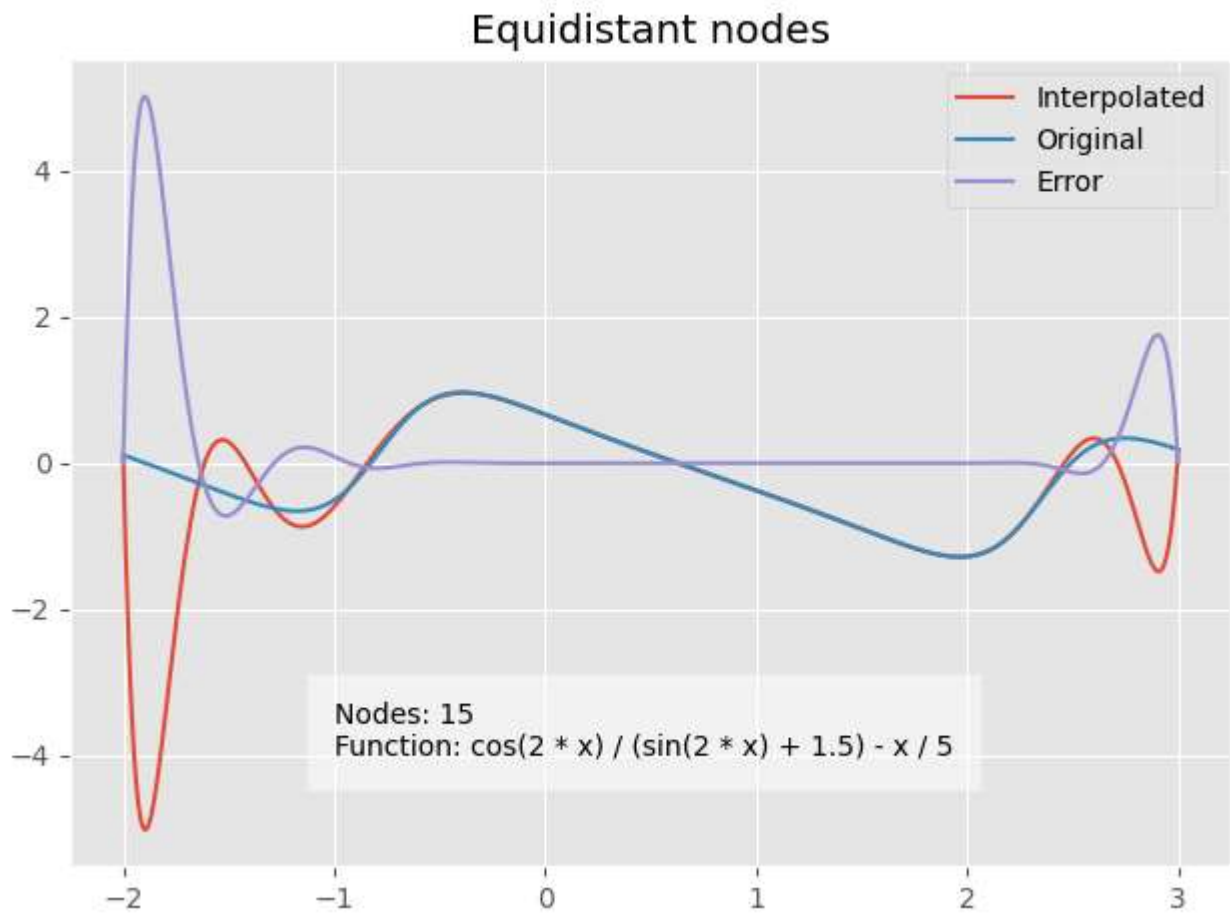
Čiobyševo daugianarius generuojame pagal funkciją: $\cos(i * \arccos(x))$, kur i – daugianario eilė.

Naudodami 15 tolygiai pasiskirsčiusių interpoliavimo taškų suformuojame tokį Čiobyševo daugianarį:

```
-0.7022534538158811 +  
0.4745674064666048 * (2*x/5 - 0.2) +  
-0.9215455185266849 * cos(2*acos(2*x/5 - 0.2)) +  
0.836218582687998 * cos(3*acos(2*x/5 - 0.2)) +  
-0.1190358564736839 * cos(4*acos(2*x/5 - 0.2)) +  
-0.2891936030172719 * cos(5*acos(2*x/5 - 0.2)) +  
-0.07708207440837943 * cos(6*acos(2*x/5 - 0.2)) +  
-0.17945128820336254 * cos(7*acos(2*x/5 - 0.2)) +  
0.4023605797468654 * cos(8*acos(2*x/5 - 0.2)) +  
-0.3169422499668861 * cos(9*acos(2*x/5 - 0.2)) +  
0.8929811734556987 * cos(10*acos(2*x/5 - 0.2)) +  
-0.36832654940804344 * cos(11*acos(2*x/5 - 0.2)) +  
0.5585592428266637 * cos(12*acos(2*x/5 - 0.2)) +  
-0.11873201715427414 * cos(13*acos(2*x/5 - 0.2)) +  
0.11452356801303476 * cos(14*acos(2*x/5 - 0.2))
```

Pav. 3

Gautą daugianarį, užduotyje nurodytą funkciją ir netiktį pavaizduojame grafike:



Pav. 4

Tą pačią funkciją interpoliuojame naudodami 15 interpoliavimo taškų parinktų pagal Čiobyševo formulę (Pav. 5).

$$x_i = \cos\left(\frac{\pi(2i+1)}{2n}\right), \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

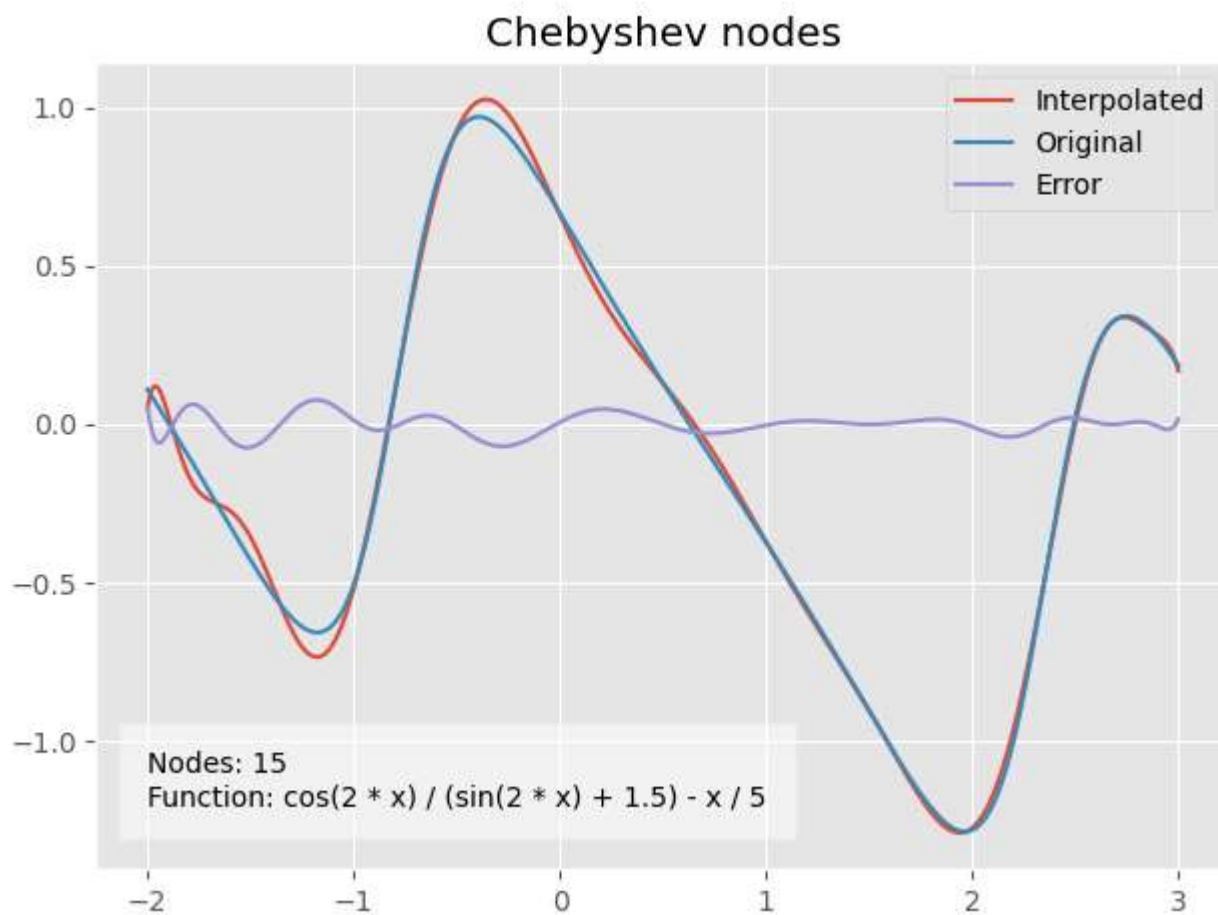
Pav. 5

Gauname tokį daugianarį:

$$\begin{aligned}
 & -0.11448695627516414 + \\
 & -0.06699294082554946 * (2*x/5 - 0.2) + \\
 & 0.07741597629527945 * \cos(2*\arccos(2*x/5 - 0.2)) + \\
 & 0.4524355349432609 * \cos(3*\arccos(2*x/5 - 0.2)) + \\
 & 0.40772379744347886 * \cos(4*\arccos(2*x/5 - 0.2)) + \\
 & -0.3999888284665661 * \cos(5*\arccos(2*x/5 - 0.2)) + \\
 & -0.16317246241244285 * \cos(6*\arccos(2*x/5 - 0.2)) + \\
 & 0.013536419600867372 * \cos(7*\arccos(2*x/5 - 0.2)) + \\
 & -0.18808034504311819 * \cos(8*\arccos(2*x/5 - 0.2)) + \\
 & 0.05365926117314663 * \cos(9*\arccos(2*x/5 - 0.2)) + \\
 & 0.14975118809830326 * \cos(10*\arccos(2*x/5 - 0.2)) + \\
 & -0.040184601231484 * \cos(11*\arccos(2*x/5 - 0.2)) + \\
 & 0.01611647406333432 * \cos(12*\arccos(2*x/5 - 0.2)) + \\
 & 0.04511887117213537 * \cos(13*\arccos(2*x/5 - 0.2)) + \\
 & -0.07347509554290488 * \cos(14*\arccos(2*x/5 - 0.2))
 \end{aligned}$$

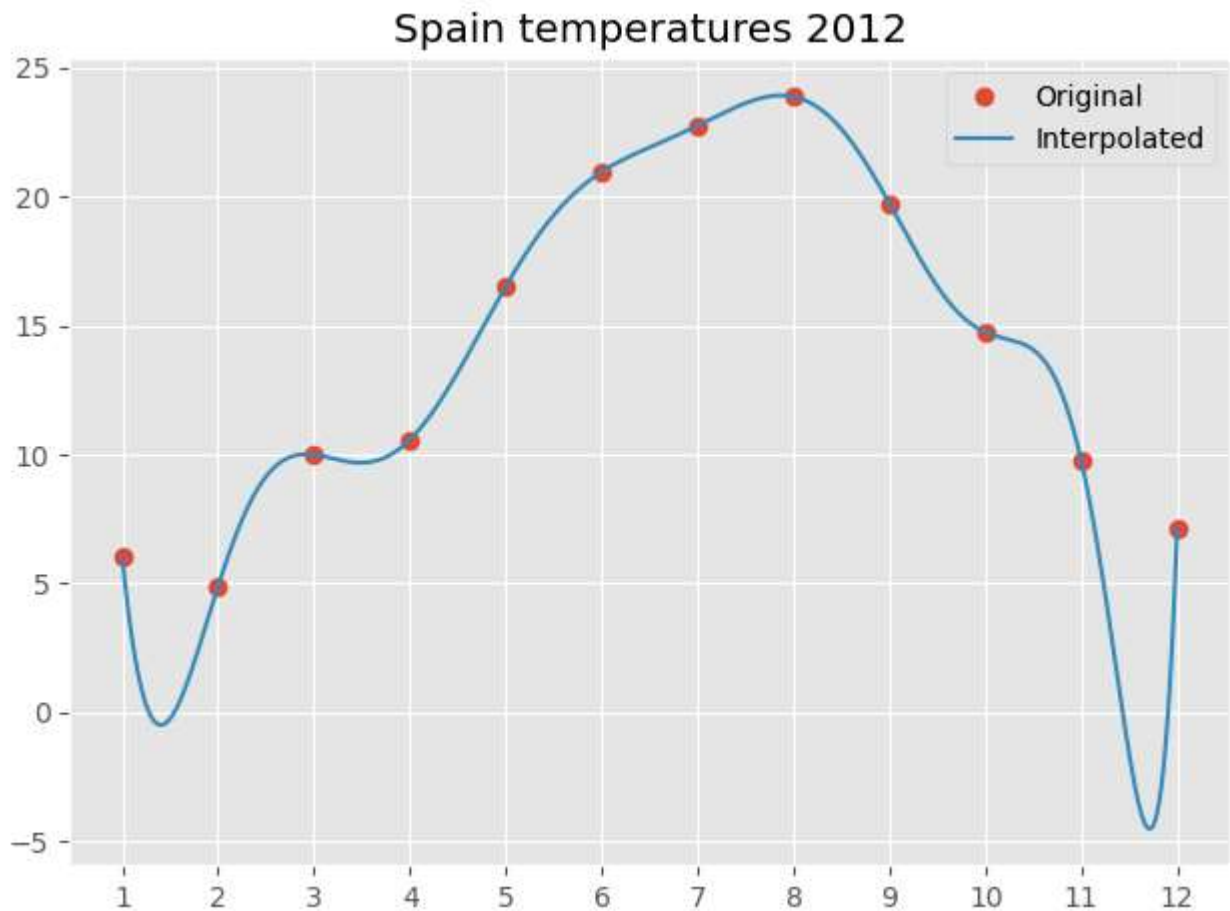
Pav. 6

Gautą daugianarį, užduotyje nurodytą funkciją ir netiktį pavaizduojame grafike:



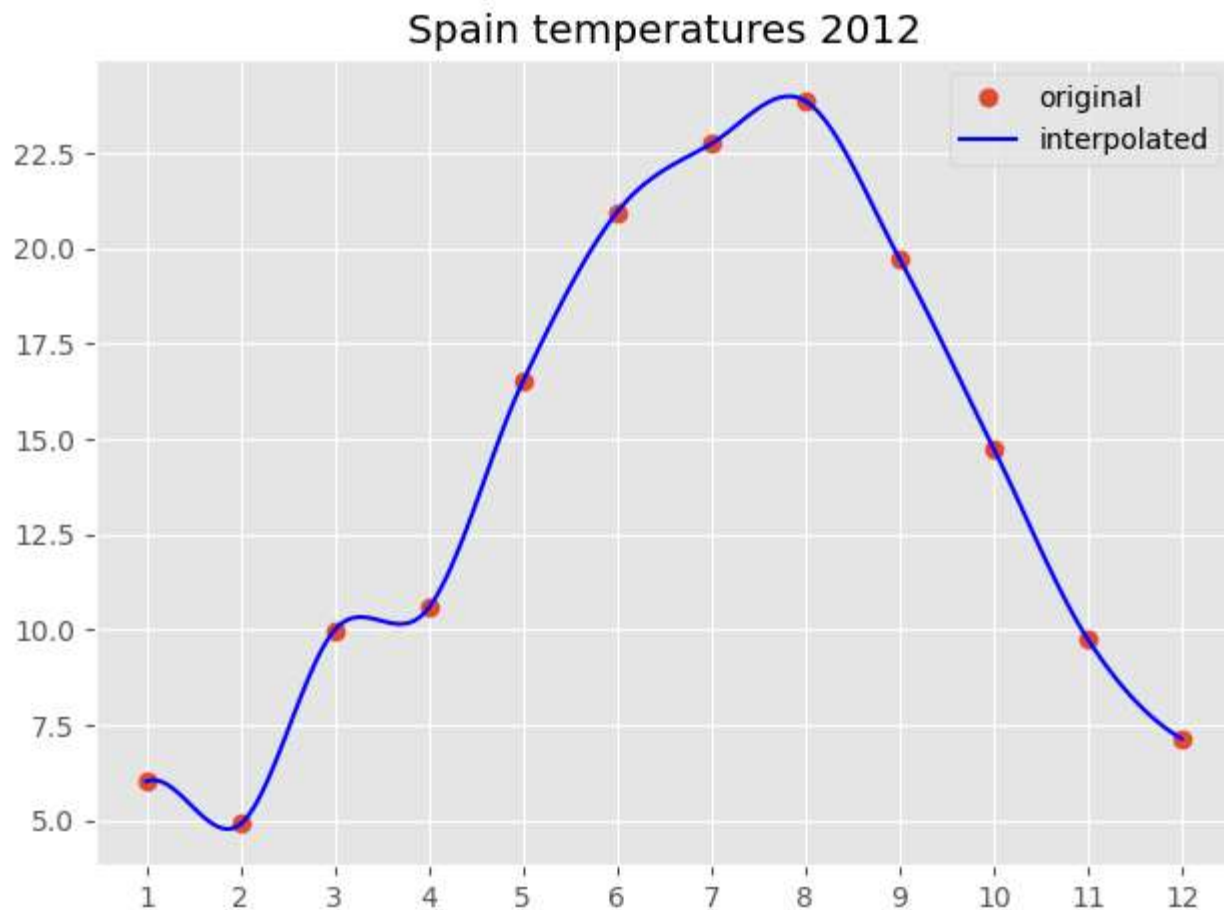
2.2 Interpoliavimas daugianariu ir splainu per duotus taškus

- a) Naudodami Čiobyševo daugianarį interpoliuojame 12 taškų, kurie rodo Ispanijos mėnesio temperatūrų vidurkius 2012 metais.



Pav. 8

- b) Tuos pačius 12 taškų interpoliuojame Hermito splainu (išvestinėms apskaičiuoti naudojamos Akima formulės).



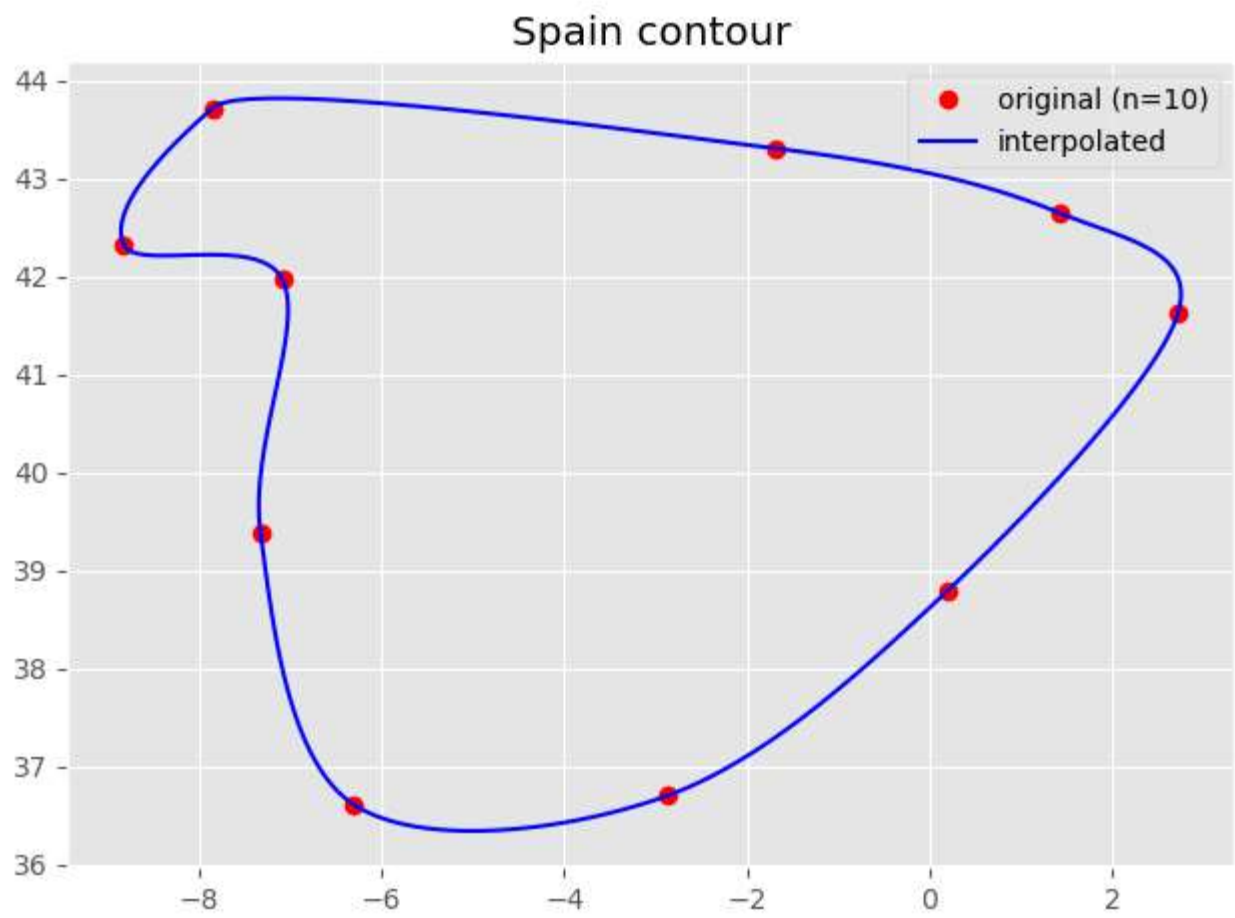
Pav. 9

2.3 Parametrinis interpoliavimas

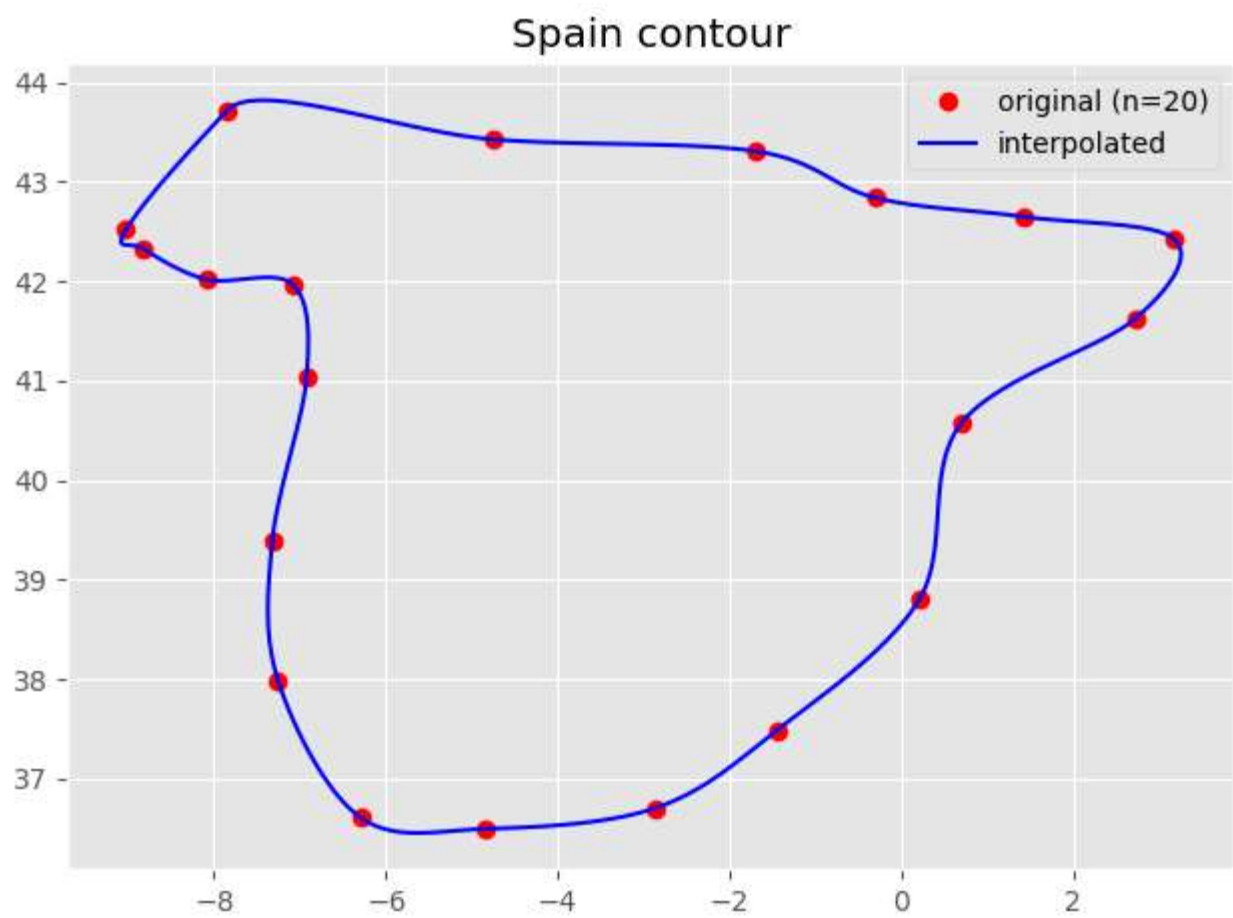
Norimo taškų skaičiaus parinkimui parašyta funkcija „sample“, kuri užtikrinta jog bus paimtas norimas taškų skaičius ir kad taškai būtų tolygiai pasiskirstę.

```
def sample(arr, n):
    indexes = np.arange(0, len(arr), len(arr) / n).astype(np.int)
    return np.take(arr, indexes)
```

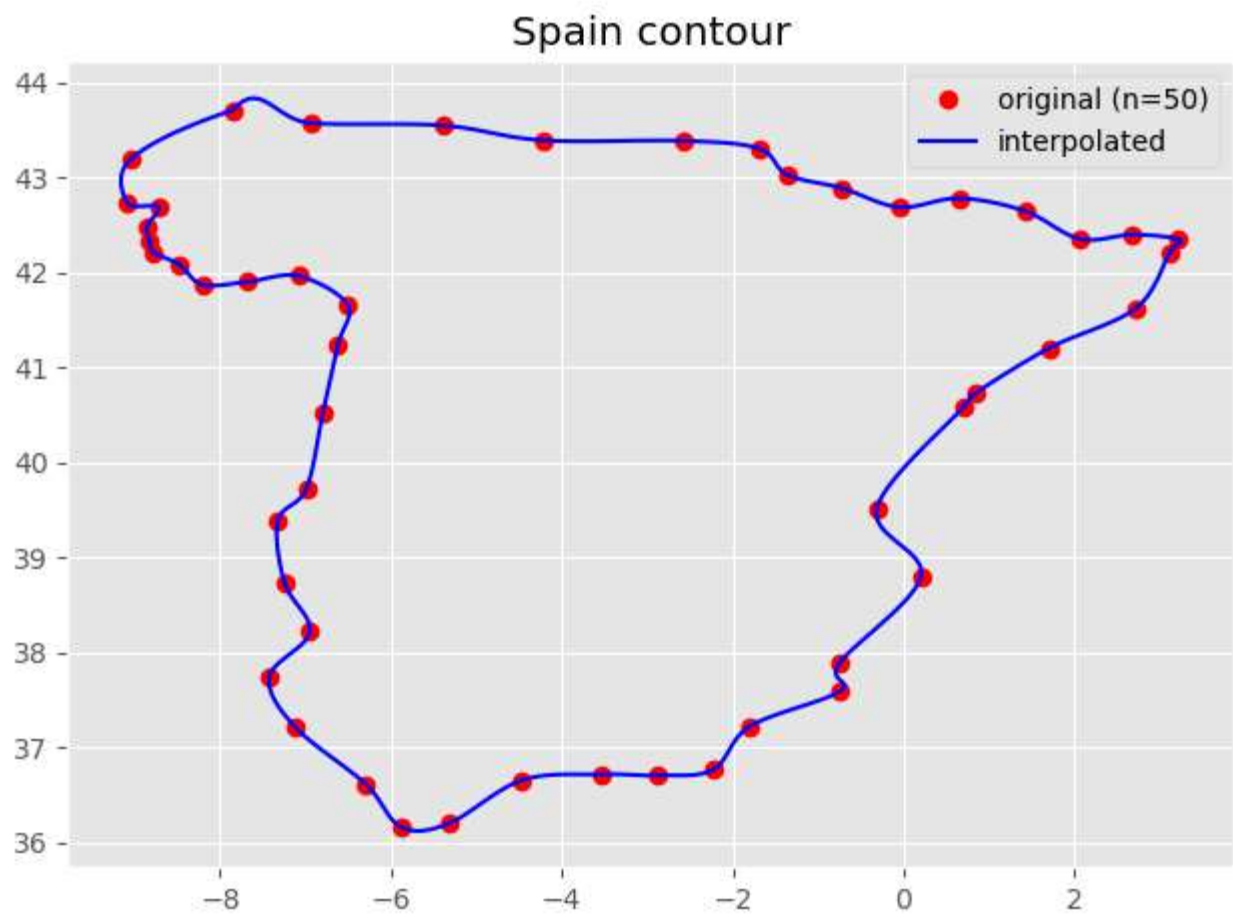
Toliau pavaizduoti gauti Ermito splainai naudojant parametrinį interpoliavimą per pasirinktą taškų skaičių. Taškų skaičius nurodytas kiekvieno grafiko viršutiniame dešiniajame kampe ir pažymėtas raide „n“.

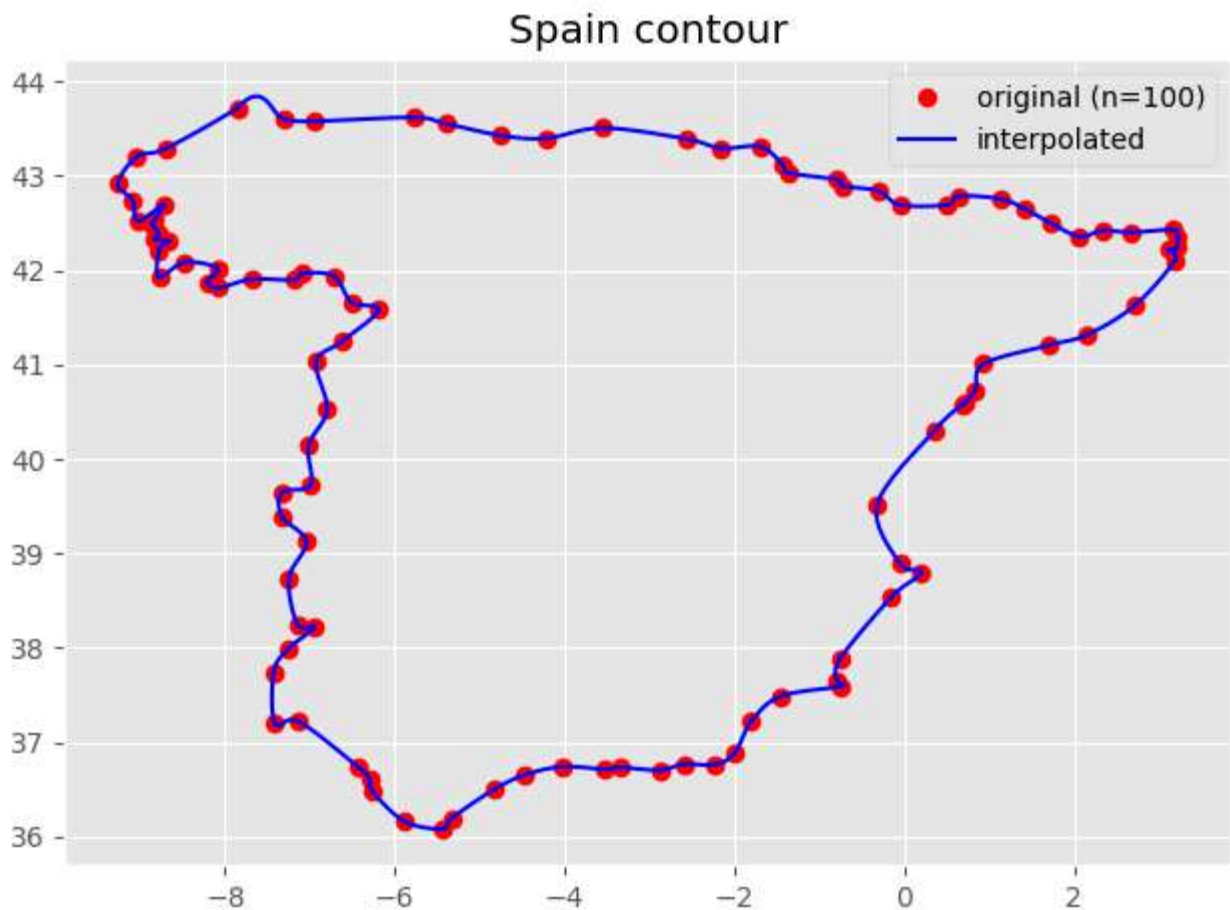


Pav. 10



Pav. 11





Pav. 13

2.4 Aproximavimas

Mažiausių kvadratų metodu aproksimuojame Ispanijos vidutinę mėnesių temperatūrą 2012 metais.

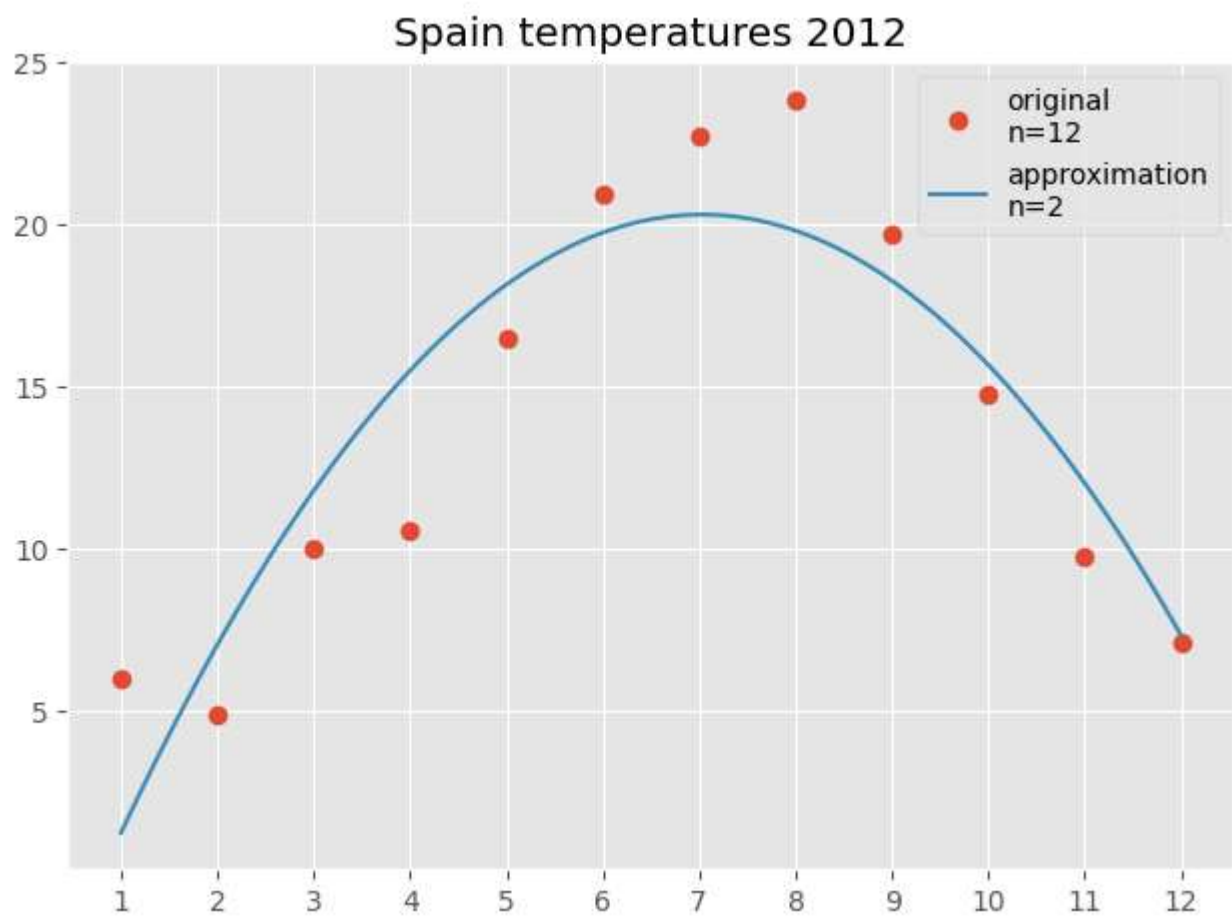
Žemiau pateikiamos aproksimuojančios funkcijos formulės ir gauti rezultatai. Raidė „n“ esanti šalia raudono taško žymi taškų skaičių (jis visada lygus 12, nes imami 12 mėnesių duomenys), o esanti šalia mėlynos linijos žymi daugianario eilę (Pvz.: jei $n=2$ tai reiškia aproksimuoti naudotas $a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2$ daugianaris). Daugianariai pateikiami **virš** grafikų.

$$1.2352564560439745 * x ^ 0 +$$

$$6.331400427072921 * x ^ 1 +$$

$$-0.5251439835164831 * x ^ 2$$

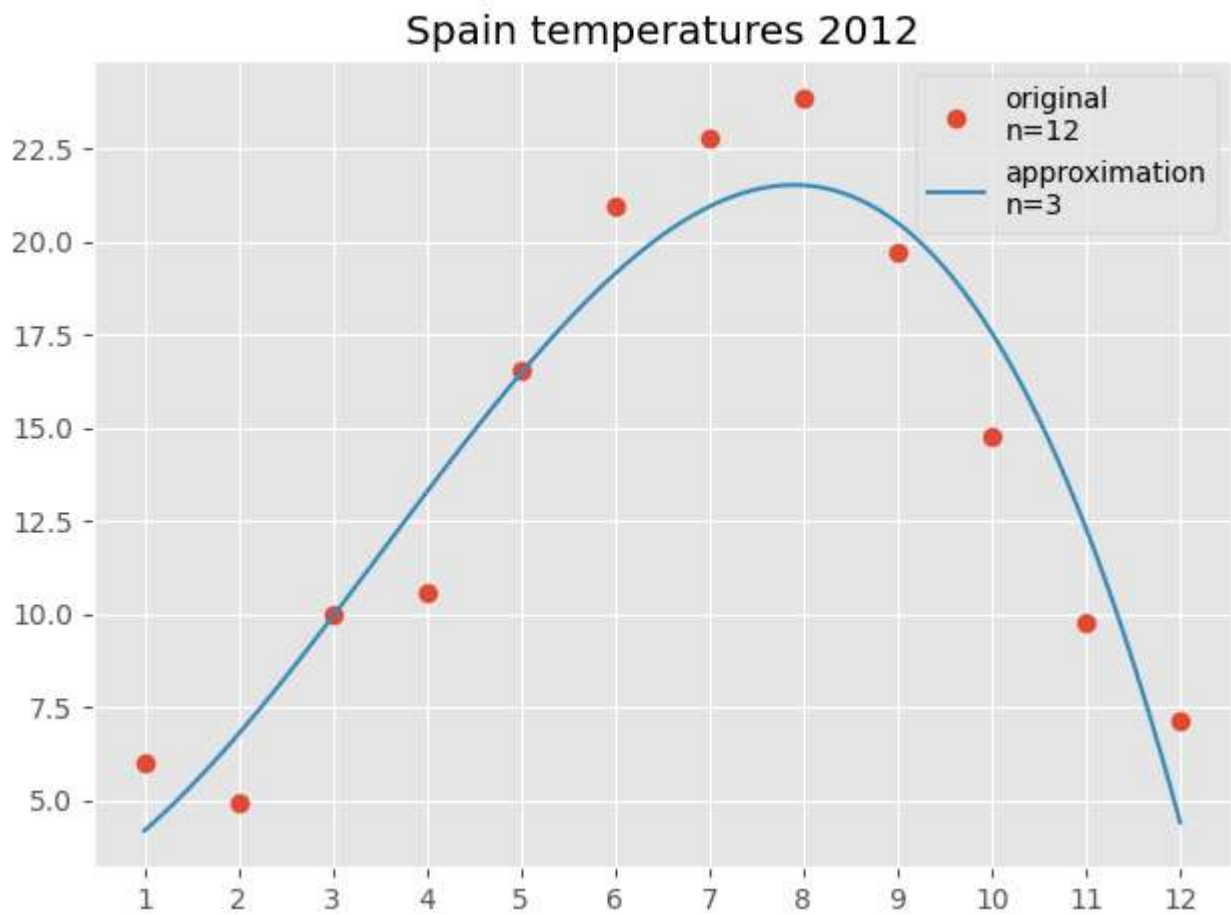
Pav. 14



Pav. 15

$$\begin{aligned}
 &4.173993443223764 * x ^ 0 + \\
 &2.2052949602246215 * x ^ 1 + \\
 &0.45443501221008503 * x ^ 2 + \\
 &-0.05936842398342816 * x ^ 3
 \end{aligned}$$

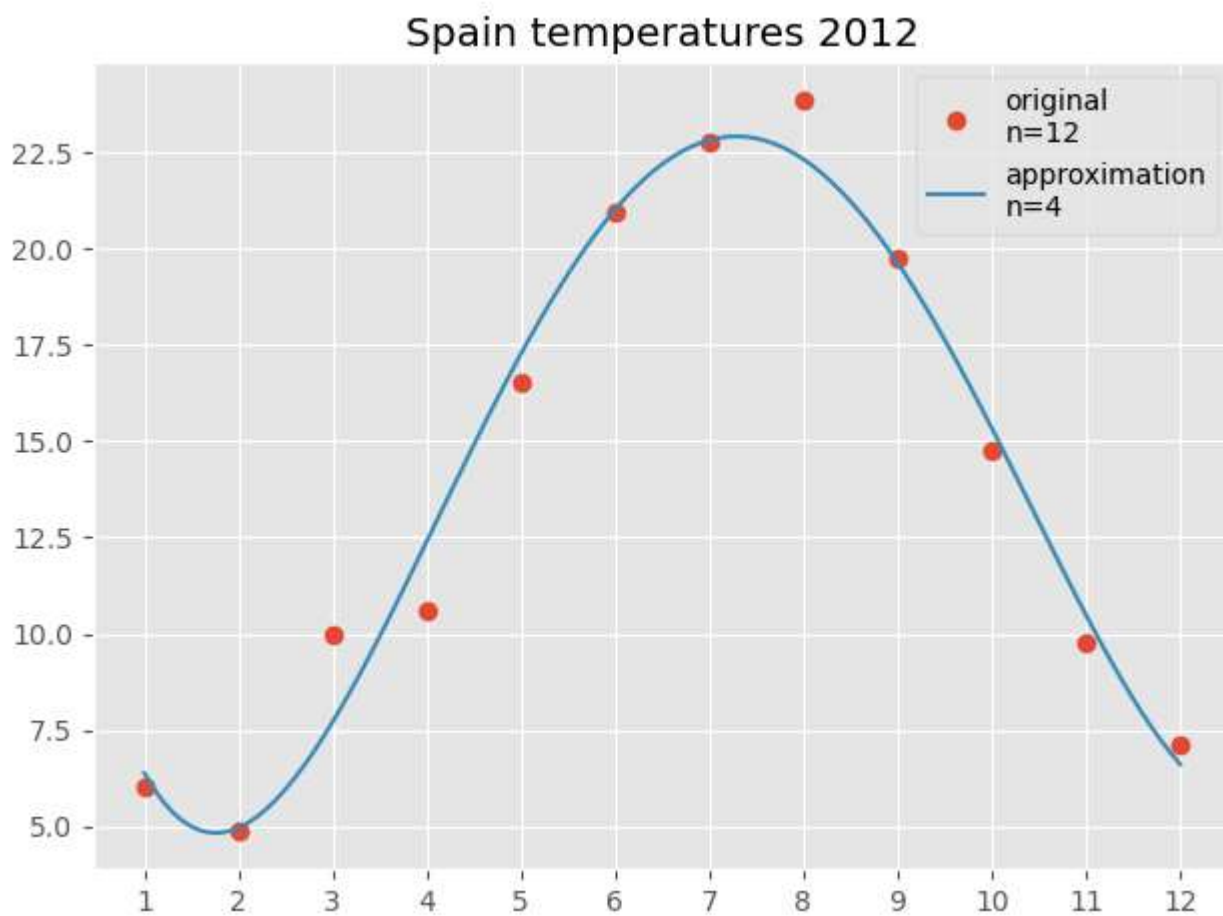
Pav. 16



Pav. 17

$$\begin{aligned}
&6.387167660254399 * x ^ 0 + \\
&-4.3727506292841625 * x ^ 1 + \\
&3.4193060277026355 * x ^ 2 + \\
&-0.4897078550728538 * x ^ 3 + \\
&0.019560883231338366 * x ^ 4
\end{aligned}$$

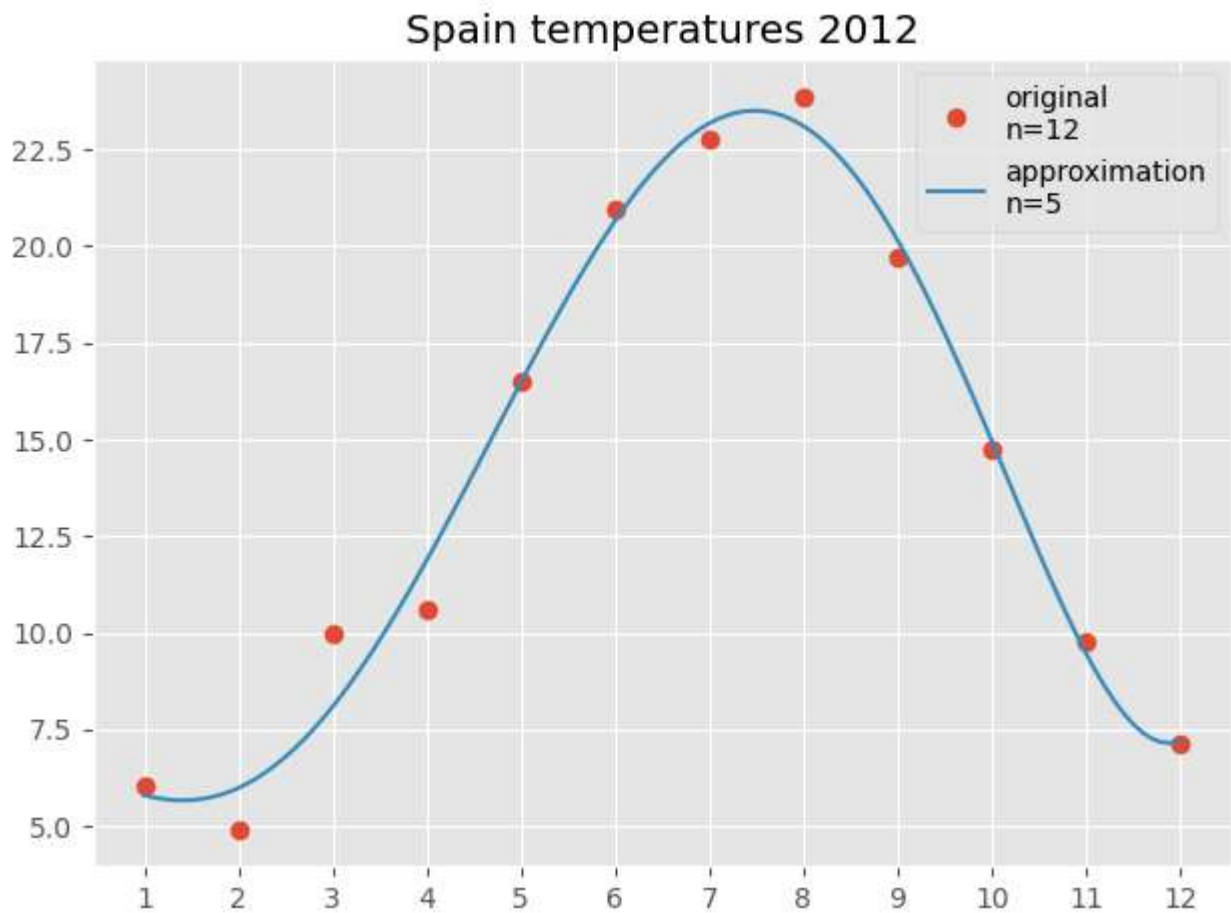
Pav. 18



Pav. 19

$$\begin{aligned}
 &5.7948640950021835 * x^0 + \\
 &-0.6092298442274945 * x^1 + \\
 &0.6305434079857417 * x^2 + \\
 &0.2222529960853571 * x^3 + \\
 &-0.05447706242478992 * x^4 + \\
 &0.0026922889329492835 * x^5
 \end{aligned}$$

Pav. 20



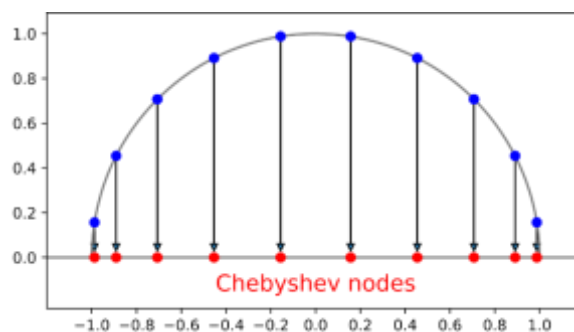
Pav. 21

3. IŠVADOS

Prenkant interpoliavimo taškus pagal Čiobyševo formulę gaunama interpoliuojanti funkcija kuri yra mažiau vingiuota lyginant su funkcija kai parenkami tolygiai išsidėstę taškai.

Čiobyševo daugianariai skirti nagrinėti funkciją duotą $-1 \leq x \leq 1$ intervale, todėl reikalingas koordinačių perskaičiavimas prieš interpoliuojant ir atvaizduojant funkciją kituose intervaluose.

Nors Čiobyševo interpoliavimo taškai nėra išsidėstę vienodais atstumais, juos galima laikyti tolygiai išsidėsčiusių taškų ant apskritimo projekcijomis į x ašį, kaip parodyta Pav. 22.



Pav. 22

Jeigu aproksimuojantį daugianarį sudaro tiek pat narių, kiek yra taškų – tai gaunama interpoliacinė kreivė, kuri pereina per visus taškus. Todėl interpoliavimas yra tik atskiras aproksimavimo atvejis.

4. PRIEDAI

4.1 Programinio kodo fragmentai

Funkcijos reikalingos dirbti su Čiobyševo daugianariais:

```
def chebyshev_polynomial(x, i):  
    return cos(i * arccos(x))
```

```
def to_chebyshev_interval(x, a, b):
    return (2 * x) / (b - a) - (b + a) / (b - a)

def chebyshev_node(i, a, b, n):
    """
    :param i: iteration (Can be numpy array)
    :param a: interval start
    :param b: interval end
    :param n: number of nodes
    """
    return ((b - a) / 2) * cos(pi * (2 * i + 1) / (2 * n)) + ((b + a) / 2)
```

Akima formulė reikalinga išvestinėms skaičiuoti:

```
def fnk(x, xi, xim1, xip1, yi, yim1, yip1): # 1 akima derivative
    return (2 * x - xi - xip1) / ((xim1 - xi) * (xim1 - xip1)) * yim1 + (2 * x -
xim1 - xip1) / ((xi - xim1) * (xi - xip1)) * yi + (2 * x - xim1 - xi) / ((xip1 -
xim1) * (xip1 - xi)) * yip1
```

Funkcija kuri sudaro G matricą reikalingą mažiausių kvadratų aproksimavimui:

```
def g(x, n):
    x = x.flatten()
    return np.array([x ** i for i in range(n)]).T.astype(np.float)
```

4.2 Programos aprašymas

Visoms užduotims spręsti parašytos skirtingos programos (uzd_1, užd_2, užd_3, užd_4). Naudojama Python kalbos versija 3.9.

uzd_1.py – Naudotojas pasirenka kaip turi būti parinkti interpoliavimo taškai (vienodų atstumų, Čiobyševo)

uzd_2.py – Naudotojo veiksmų nereikalauja.

uzd_3.py – Naudotojas įveda interpoliavimo taškų skaičių. Kuo jis didesnis, tuo tikslesnis gaunamas Ispanijos kontūro vaizdas.

uzd_4.py – Naudotojas įveda daugianario eilės skaičių. Juo bus aproksimuojami duomenys.

Visos programos paleidžiamos komanda: `python3.9 <programos_pavadinimas.py>`

4.3 Duomenų šaltiniai

Temperatūrų duomenys: <https://climateknowledgeportal.worldbank.org/download-data>

Šalies kontūras: <http://boundaries.us/country/es/>

4.4 Nuoroda į programinio kodo repozitoriją

<https://github.com/d0ubletr0uble/Skaitiniai-metodai-ir-algoritmai>