Commande événementielle - TD et TP

romain.postoyan@univ-lorraine.fr

Commande distribuée d'une file de véhicules [1]

L'objectif de ce TD/TP est de déterminer des lois de commande distribuées à échantillonnage événementiel pour le pilotage automatique d'une file de véhicules automobiles. Ces derniers sont supposés identiques et se déplacent sur une ligne droite.

I Présentation

I.1 Mise en équation

Nous considérons $N \in \mathbb{N}^*$ véhicules identiques. Celui de tête est associé à l'indice 0. Ses dynamiques sont décrites par les équations différentielles suivantes

$$\begin{array}{rcl} \dot{v}_0 & = & a_0 \\ \dot{a}_0 & = & -\frac{1}{\tau}a_0 + \frac{1}{\tau}u_0 \end{array} \tag{1}$$

où $v_0 \in \mathbb{R}$ est la vitesse, $a_0 \in \mathbb{R}$ l'accélération, $u_0 \in \mathbb{R}$ son entrée de commande et τ la constante de temps. Ce modèle est en réalité obtenu en appliquant au préalable une loi de commande non-linéarisante, que nous pouvons ignorer dans le cadre de ce travail.

Les autres véhicules ont les dynamiques suivantes. Soit $i \in \{1, \ldots, N\}$,

$$\begin{array}{rcl} \dot{v}_i & = & a_i \\ \dot{a}_i & = & -\frac{1}{\tau}a_i + \frac{1}{\tau}u_i, \end{array} \tag{2}$$

où $v_i \in \mathbb{R}$ est donc la vitesse, $a_i \in \mathbb{R}$ l'accélération et $u_i \in \mathbb{R}$.

QI.1 Expliquer pourquoi il est légitime d'appeler u_i l' "accélération désirée" du véhicule i.

Le signal u_i est la sortie d'un filtre passe-bas, qui sert de pré-compensateur. Ce filtre est décrit par les équations suivantes

$$\dot{u}_i = -\frac{1}{h}u_i + \frac{1}{h}\chi_i, \tag{3}$$

où $h > 0$ et χ_i sont définis par la suite.

1. Ce sujet est librement inspiré du travail de [1].

I.2 Objectifs

Nous souhaitons satisfaire les propriétés suivantes tout en communiquant sporadiquement entre les véhicules.

Temps de passage constant entre deux véhicules successifs. Soit la distance désirée entre le véhicule i et $i-1$, $i \in \{1, \ldots, N\}$,

$$d_{r,i} \quad := \quad r + hv_i, \tag{4}$$

où r est la distance de sécurité et h est le temps inter-véhicule désiré.

Soit d_i la distance entre les véhicules $i-1$ et i. Si l'on note q_i la position du véhicule i, alors

$$d_i \quad := \quad q_{i-1} - q_i - L, \tag{5}$$

où L est la longueur d'un véhicule. On introduit alors e_i l'écart entre la distance désirée entre les véhicules $i-1$ et i, et la distance réelle

$$e_i \quad := \quad d_i - d_{r,i}. \tag{6}$$

Soit $i \in \{1, \ldots, N\}$. Le premier objectif est de garantir que, lorsque $v_{i-1}(t) = c \in \mathbb{R}$ et $u_{i-1}(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, $e_i(t) \to 0$ quand $t \to \infty$. On parle de *stabilité individuelle*.

QI.2 Justifier cet objectif.

Absence de phénomène d'accordéon. Le phénomène d'accordéon consiste en des ralentissements puis des accélérations successives du traffic sans cause apparente. L'objectif ici est de le proscrire. Pour cela, nous formalisons l'absence d'un tel phénomène par la propriété suivante. Il existe $\beta \in \mathcal{K}_\infty$ telle que pour tout condition initiale[2] $x(0)$ et tout $i \in \{1, \ldots, N\}$,

$$||\chi_i||_{\mathcal{L}_2} \quad \leq \quad ||u_0||_{\mathcal{L}_2} + \beta_i(|x(0)|). \tag{7}$$

Cette inégalité signifie que l'accélération désirée n'est pas amplifiée d'un véhicule à l'autre.

La loi de commande proposée pour le véhicule $i \in \{1, \ldots, N\}$ est

$$\chi_i \quad := \quad k_p e_i + k_d \dot{e}_i + u_{i-1}. \tag{8}$$

2. Le vecteur x est l'état global du système $x = (x_0^\top, \ldots, x_N^T)$ et les x_i, $i \in \{0, \ldots, N\}$, sont définis par la suite.

QI.3 Commenter la loi de commande χ_i et réfléchir à son implémentation pratique. Modifier son expression en prenant en compte l'existence d'un réseau de communication local sans fil entre les véhicules.

II Analyse et synthèse des lois de transmission

Nous allons modéliser chaque véhicule séparément. Soient $i \in \{1, \dots, N\}$ et

$$x_i \quad := \quad (v_{i-1}, a_{i-1}, u_{i-1}, e_i, v_i, a_i, u_i)^\top. \tag{9}$$

QII.1 Écrire les dynamiques de la variable x_i sous la forme

$$\dot{x}_i \quad := \quad Ax_i + B\chi_{i-1} + E\hat{u}_{i-1}. \tag{10}$$

QII.2 Déterminer le(s) point(s) d'équilibre du système en x_i lorsque $\chi_{i-1} = \hat{u}_{i-1} = 0$.

QII.3 Pour construire la loi de transmission, nous allons remplacer la dépendance de x_i en v_i et v_{i-1} par $v_{i-1} - v_i$. Nous définissons pour cela la variable

$$z_i \quad := \quad (a_{i-1}, u_{i-1}, e_i, v_{i-1} - v_i, a_i, u_i)^\top. \tag{11}$$

Écrire le système en z_i sous la forme

$$\dot{z}_i \quad := \quad A_z z_i + B_z\chi_{i-1} + E_z\hat{u}_{i-1} \tag{12}$$

QII.4 On admettra que si $k_d - k_p\tau > 0$ alors A_z est Hurwitz, ce qui est équivalent au fait que $z_i = 0$ est globalement exponentiellement stable lorsque $\chi_{i-1} = 0$ et $\hat{u}_{i-1} = 0$. Qu'est-ce que cela implique par rapport à l'objectif de stabilité individuelle ?

Concernant le phénomène d'accordéon, nous allons prouver qu'il existe $V(z_i) = z_i^\top P z_i$ où P est une matrice réelle, symétrique, semi-définie positive telle que pour tout $z_i, \chi_{i-1}, \hat{u}_{i-1}$,

$$\frac{\partial V}{\partial z_i}(A_z z_i + B_z\chi_{i-1} + E_z\hat{u}_{i-1}) \quad \leq \quad \mu\left(|\chi_{i-1}|^2 - |\chi_i|^2\right), \tag{13}$$

où $\mu > 0$ est une constante. On admettra que cette inégalité implique (7).

Soit $e_{u_i} := \hat{u}_{i-1} - u_{i-1}$ l'erreur induite par l'échantillonnage lors de la transmission de u_{i-1} au véhicule i.

QII.5 Écrire le système en z_i sous la forme $\dot{z}_i = \widetilde{A}z_i + B_z\chi_{i-1} + E_z e_{u_i}$ et $\chi_i = C_z z_i + D_z e_{u_i}$.

Nous supposons que la matrice P est telle qu'il existe $\rho, \gamma, \mu > 0$ vérifiant

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}^\top P + P\widetilde{A} + \mu C_z^\top C_z + \rho C_u^\top C_u & PE_z + \mu C_z^\top D_z & PB_z \\ \star & \mu D_z^\top D_z - \gamma^2 \mathbb{I} & 0 \\ \star & 0 & -\mu \mathbb{I} \end{pmatrix} \leq 0, \tag{14}$$

où $C_u := [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$.

QII.6 Prouver à l'aide de (14) que, le long des solutions du système en z_i,

$$\frac{\partial V}{\partial z_i}\left(\widetilde{A}_z z + B_z \chi_{i-1} + E_z e_{u_i}\right) \leq \mu\left(|\chi_{i-1}|^2 - |\chi_i|^2\right) - \rho u_{i-1}^2 + \gamma^2 e_{u_i}^2, \tag{15}$$

où, pour rappel, $e_{u_i} = \hat{u}_{i-1} - u_{i-1}$. On écrira pour cela $\frac{\partial V}{\partial z_i}(A_z z_i + B_z \chi_{i-1} + E_z \hat{u}_i)$ comme un produit scalaire de la forme $\left\langle (z_i, e_{u_i}, \chi_{i-1})^\top, \mathcal{M}(z_i, e_{u_i}, \chi_{i-1})^\top \right\rangle$.

QII.7 En déduire qu'en l'absence de contraintes de communication, le phénomène d'accordéon ne peut se produire.

QII.8 Proposer une loi d'échantillonnage en vous inspirant du cours à partir de (15). Discuter :

(i) de son implémentation ;

(ii) des possibles différences avec le cours.

Malgré la complexité des étapes précédentes, apprécions la simplicité de la loi d'échantillonnage ainsi obtenue.

III Simulations

Le but de cette partie est de simuler les lois de commande obtenues à l'aide de Matlab-Simulink. Les valeurs numériques sont fournies dans le tableau 1. Nous considérerons $N = 3$ véhicules.

Nous allons, dans un premier temps, vérifier le bon fonctionnement de la loi commande (8) lorsque u_{i-1} est disponible en tout temps au véhicule i. Cela correspond à la première étape de l'approche par émulation.

QIII.1 Simuler le système de 3 véhicules. Analyser les résultats obtenus en vérifiant notamment la satisfaction des deux objectives (stabilité individuelle et absence de phénomène d'accordéon). **Il est fortement conseiller de procéder étape par étape en considérant 1, puis 2 et enfin 3 véhicules et de s'assurer du bon fonctionnement du système global à chacune d'entre elles.**

QIII.2 Supprimer le terme u_{i-1} dans (8) et comparer les résultats obtenus. En quoi ce terme est important ?

Nous prenons désormais en compte l'échantillonnage des transmissions entre les véhicules.

QIII.3 Simuler le système de 3 véhicules avec les lois de commande à échantillonnage événementiel. Analyser les résultats obtenus.

QIII.4 Tracer les temps inter-transmissions. Que remarquez-vous ?

QIII.5 Si vous observez le phénomène de Zénon, mettez-le en évidence, proposez une explication ainsi qu'une solution à l'aide du cours. Simuler la méthode choisie. Analyser les résultats.

$$
\begin{aligned}
\tau &= 0.1\\
h &= 0.6\\
L &= 3\\
r &= 2.5\\
\rho &= 0.04\\
\gamma &= 0.7232\\
k_p &= 0.2\\
k_d &= 0.7\\
P &= \begin{pmatrix}
0.0837 & -0.0361 & 0.0018 & 0.0080 & 0.0077 & -0.0205\\
-0.0361 & 0.4372 & -0.0190 & -0.0742 & 0.0288 & -0.0095\\
0.0018 & -0.0190 & 0.1364 & 0.1847 & -0.0236 & -0.0536\\
0.0080 & -0.0742 & 0.1847 & 0.5726 & -0.0735 & -0.1891\\
0.0077 & 0.0288 & -0.0236 & -0.0735 & 0.1326 & -0.0638\\
-0.0205 & -0.0095 & -0.0536 & -0.1891 & -0.0638 & 0.1670
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Table 1 – Valeurs numériques

Références

[1] V.S. Dolk, J. Ploeg, and W.P.M.H. Heemels. Event-triggered control for string-stable vehicle platooning. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 18(12) :3486–3500, 2017.