

Notes de cours : Commande événementielle

Polytech Nancy - IA2R

Romain Postoyan

`romain.postoyan@univ-lorraine.fr`

www.cran.univ-lorraine.fr/romain.postoyan



Sommaire

1	Introduction	5
2	Présentation générale	7
3	Modèle	9
3.1	Modèle en l'absence d'échantillonnage	9
3.2	Prise en compte de l'échantillonnage	10
3.3	Modèle complet hybride	12
3.4	Modèles alternatifs	14
3.4.1	En considérant l'entrée échantillonné \hat{u}	14
3.4.2	Sans introduire l'erreur induite par l'échantillonnage	14
3.5	Le phénomène de Zénon	14
4	Lois d'échantillonnage	17
4.1	Objectif	17
4.2	Rappel sur la stabilité et le théorème de Lyapunov direct	18
4.3	Un théorème de Lyapunov direct pour le système (4.3)	20
4.4	Seuil relatif	22
4.5	Seuil fixe	24
4.6	Combinaison des seuils fixe et relatif	25
4.7	Seuil décroissant sur $V(x)$	26
5	Temps d'inter-transmission : quelles garanties ?	31
5.1	Introduction	31
5.2	Problématique	32
5.2.1	Cas scalaire $n_x = 1$	32
5.2.2	Cas planaire $n_x = 2$	33
5.2.3	λ_1 et λ_2 complexes conjuguées, non-réelles	33
5.2.4	λ_1 et λ_2 réelles et distinctes	35
5.2.5	λ_1 et λ_2 réelles, égales et de multiplicité géométrique 2	35

5.3 Conclusion	36
6 Analyse avancée	37
6.1 Retour de sortie	37
6.2 Perturbations	41
7 Conclusion	43
Bibliographie	45

Chapitre 1

Introduction

Cf. planches de cours disponibles sur Arche.

Chapitre 2

Présentation générale

Cf. planches de cours disponibles sur Arche.

Chapitre 3

Modèle

3.1 Modèle en l'absence d'échantillonnage

Nous considérons des systèmes à commander dont les dynamiques sont linéaires et décrites par la représentation d'état suivante (cf. cours "Commande par retour d'état" de Gilles Millérioux, S7)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3.1)$$

où

- $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ est l'état, $n_x \in \mathbb{Z}_{>0}$,
- $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ est l'entrée de commande, $n_u \in \mathbb{Z}_{>0}$,
- $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ et $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$.

Nous rappelons que $\dot{x} = \frac{d}{dt}x(t)$ où $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ est le temps. Quelques précisions également concernant la notation utilisée :

- $\mathbb{Z}_{>0}$ est l'ensemble des entiers strictement positifs, autrement dit $\mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, \dots\}$;
- $\mathbb{R}_{\geq 0}$ est l'ensemble des réels non-négatifs, $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$;
- pour $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\mathbb{R}^{n \times m}$ désigne l'ensemble des matrices réelles de n lignes et m colonnes.

Nous nous permettons d'omettre la dépendance des variables en t , sauf lorsque cela est important.

L'objectif est de déterminer une loi de commande par retour d'état échantillonnée de façon événementielle.

Nous procédons par émulation pour cela. Dans un premier temps, nous ignorons donc l'échantillonnage des données entre le système (4.5) et le contrôleur à déterminer. Le problème est exclusivement en temps continu.

Nous supposons dans ce but que la paire (A, B) est contrôlable¹ (stabilisable suffit en réalité). Cela implique que nous pouvons toujours déterminer un retour d'état statique de la forme

$$u = Kx, \quad (3.2)$$

où la matrice $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ est telle que $A + BK$ est Hurwitz, c'est-à-dire que ses valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives. Ainsi, l'origine du système (4.5) en boucle fermée avec (3.2), $\dot{x} = (A + BK)x$, est globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable. Nous reviendrons sur ce point par la suite. À noter que la commande Matlab pour obtenir K est la suivante : `K = -place(A,B, [valeurs propres désirées])`.

3.2 Prise en compte de l'échantillonnage

Dans la partie précédente, l'échantillonnage fut ignoré. Nous le prenons désormais en compte. Nous notons les instants de transmission/d'échantillonnage t_i , $i \in \mathcal{I}$ où $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ avec $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, ou $\mathcal{I} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Lorsque $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$, cela signifie que nous arrêterons de transmettre à t_N , tandis que lorsque $\mathcal{I} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$, il y aura une infinité d'instant de transmissions, comme c'est le cas lorsque l'échantillonnage est périodique puisqu'alors $t_{i+1} = t_i + T$ où $T > 0$. La définition de \mathcal{I} dépend du critère de transmission et du type de bloqueur utilisé. Cela devrait être plus clair par la suite.

Nous avons donc le schéma de commande de la figure 3.1, où $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ est l'état échantillonné. Dans le cours, nous nous concentrons sur le cas où \hat{x} est généré à l'aide d'un bloqueur d'ordre zéro. En d'autres termes, nous avons, pour tout $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= 0 & \forall t \in [t_i, t_{i+1}) \\ \hat{x}(t_i^+) &= x(t_i). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Cette équation mérite plusieurs commentaires :

- la première équation de (3.3) signifie que \hat{x} est constant entre deux instants d'échantillonnage successifs ;
- dans la deuxième équation, $\hat{x}(t_i^+)$ est la limite à droite de \hat{x} en $t = t_i$. Ainsi, à chaque instant d'échantillonnage/de transmission, \hat{x} est mise à jour à la valeur actuelle de l'état x ;
- l'équation (3.3) combine équation différentielle ordinaire en temps continu, $\dot{\hat{x}} = 0$, et équation aux différences en temps discret, $\hat{x}(t_i^+) = x(t_i)$, on appelle cela un système *hybride*. Par solution de (3.3), on entend une fonction $\hat{x} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ (absolument) continue qui vérifie $\dot{\hat{x}}(t) = 0$ pour tout $t \in [t_i, t_{i+1})$, et $\hat{x}(t_i^+) = x(t_i)$ tout simplement, pour tout $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

1. Ce qui est équivalent au fait que la matrice $[B \ AB \ \dots \ A^{n_x-1}B]$ est de rang n_x , d'après le critère de Kalman.

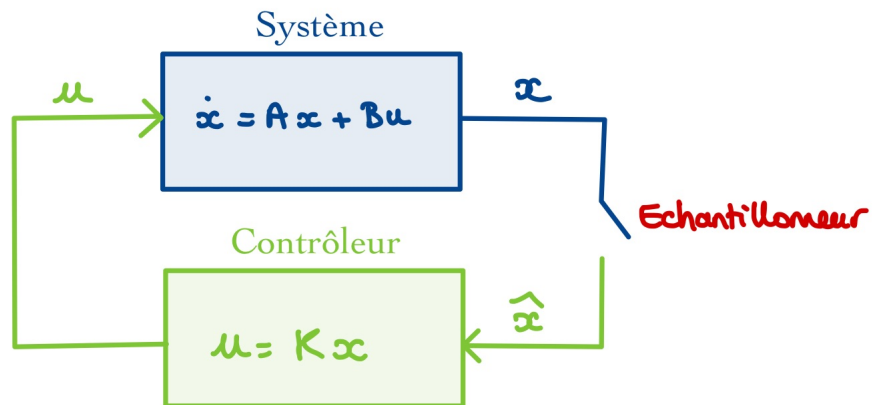
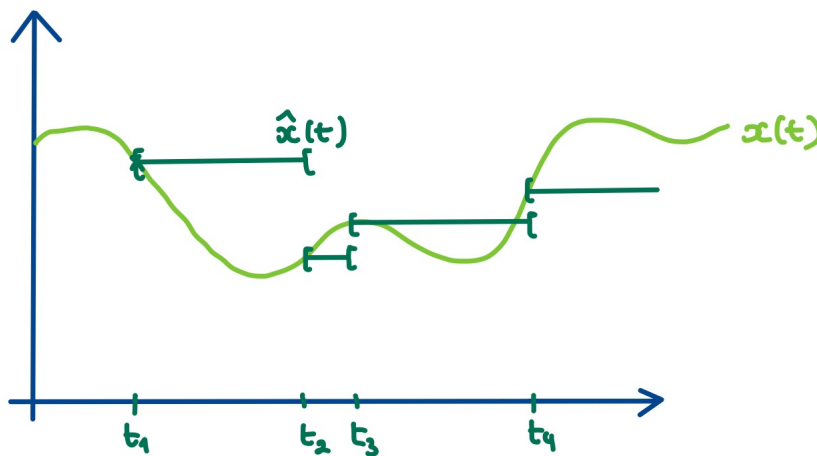


FIGURE 3.1 – Schéma de la boucle de commande échantillonnée.

La figure 3.2 fournit une illustration de (3.3) qui devrait permettre de mieux l'appréhender.

FIGURE 3.2 – Illustration du tracé d'un état échantillonné \hat{x} .

La loi de commande appliquée au système n'est donc plus donnée par l'équation (3.2) mais

$$u = K\hat{x}. \quad (3.4)$$

En conséquence, (4.5) en boucle fermée avec (3.15) donne

$$\dot{x} = Ax + BK\hat{x}, \quad (3.5)$$

pour tout $t \in [t_i, t_{i+1})$ où $i \in \mathcal{I}$. Lorsqu'une transmission se produit, cela n'affecte pas

(directement) l'état x . Prenons l'exemple d'un robot pour nous en convaincre : lorsqu'une nouvelle valeur de loi de commande parvient au robot, la position et la vitesse de ce dernier ne change pas. Ainsi,

$$x(t_i^+) = x(t_i), \quad (3.6)$$

pour tout $i \in \mathcal{I}$.

Dans la partie suivante, nous allons rassembler les équations dérivées ci-dessus pour en déduire une description complète des dynamiques mises en jeu.

Remarque. Nous pouvons envisager d'autres types de bloqueurs, à l'instar de ceux que vous avez dû voir en cours de "Automatique numérique" dispensé par Hugues Garnier en S6. En voici un autre exemple, appelé "bloqueur-modèle",

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + BK\hat{x}(t) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}), \\ \hat{x}(t_i^+) &= x(t_i). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Remarquons que la dynamique continue de \hat{x} est la même que celle du système continu en boucle fermée, $\dot{x} = Ax + BKx$, sauf que \hat{x} remplace x puisque ce dernier n'est pas disponible entre deux instants de transmission. Nous pouvons aussi déduire de (3.7) qu'après une seule transmission $x(t_1) = \hat{x}(t_1^+)$. Par conséquent, $\hat{x}(t) = x(t)$ pour tout $t > t_i$ puisque x et \hat{x} ont les mêmes dynamiques en temps continu et sont initialisés à la même valeur.

Ce type de bloqueur dit "intelligent" est plus sophistiqué à mettre en œuvre en pratique mais permet de réduire grandement le nombre de transmissions.

3.3 Modèle complet hybride

Nous introduisons maintenant par commodité une nouvelle variable que nous appelons *l'erreur induite par l'échantillonnage*

$$e := \hat{x} - x, \quad (3.8)$$

et donc $e \in \mathbb{R}^{n_x}$, puisque $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$. Le nom de e est explicite : cette variable traduit l'écart entre l'état échantillonné \hat{x} et l'état actuel du système x .

Étudions les dynamiques de cette variable e . Soit $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i \in \mathcal{I}$, d'après (3.3) et (3.5),

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\ &= 0 - Ax - BK\hat{x} \\ &= -Ax - BK(\hat{x} - x + x) \\ &= -(A + BK)x - BKe. \end{aligned} \quad (3.9)$$

À chaque instant d'échantillonnage t_i , $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, nous avons

$$e(t_i^+) = \hat{x}(t_i^+) - x(t_i^+). \quad (3.10)$$

D'après (3.3) et (3.6),

$$\begin{aligned} e(t_i^+) &= x(t_i) - x(t_i) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Cette dernière équation a une explication intuitive : lorsqu'une transmission a lieu, $\hat{x} = x$, il n'y a pas d'erreur induite par l'échantillonnage donc $e = 0$.

En résumé, les dynamiques de la variable e sont

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= -(A + BK)x(t) - BKe(t) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}), \\ e(t_i^+) &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Par ailleurs, nous pouvons réécrire la dynamique continue de x en fonction de (x, e) et non plus (x, \hat{x}) comme dans (3.5). Cela donne

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BK\hat{x} \\ &= Ax + BK(\hat{x} - x + x) \\ &= (A + BK)x + BKe, \end{aligned} \quad (3.13)$$

pour tout $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i \in \mathcal{I}$. Cette dernière équation est claire : nous retrouvons la partie continue $(A + BK)x$ en l'absence d'échantillonnage, qui est perturbée par BKe . Notre objectif sera en quelque sorte de définir un critère de transmission tel que la perturbation BKe ne détruise pas la stabilité globale asymptotique (exponentielle) de $x = 0$.

Nous pouvons enfin présenter le modèle complet dans les coordonnées (x, e)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + BKe(t) \\ \dot{e}(t) &= -(A + BK)x(t) - BKe(t) \\ x(t_i^+) &= x(t_i) \\ e(t_i^+) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}), \quad (3.14)$$

Il s'agit donc d'un système hybride car il y a, à la fois, des dynamiques en temps continu décrites par des équations différentielles ordinaires, et des dynamiques en temps discret décrites par des équations aux différences.

Il existe plusieurs formalismes pour décrire ce genre de systèmes dynamiques, ce qu'on entend par solution pour de tels systèmes, etc. Nous nous contenterons dans ce cours de la formulation ci-dessus, ce qui présentera un inconvénient mineur comme nous le verrons ultérieurement.

3.4 Modèles alternatifs

Le modèle (4.3) sera celui sur lequel nous travaillerons dans le reste de ces notes. Il existe néanmoins des modèles équivalents qui ont leurs avantages selon notre objectif. Nous en voyons deux ci-dessous.

3.4.1 En considérant l'entrée échantillonnée \hat{u}

Nous avons considéré ci-dessus l'état échantillonné \hat{x} . Nous aurions aussi pu prendre l'entrée échantillonnée \hat{u} au lieu de \hat{x} . Les dynamiques de \hat{u} sont alors

$$\begin{aligned}\dot{\hat{u}}(t) &= 0 & \forall t \in [t_i, t_{i+1}), \\ \hat{u}(t_i^+) &= u(t_i) = Kx(t_i).\end{aligned}\tag{3.15}$$

Dans ce cas, il est logique de définir l'erreur induite par le réseau comme $e = \hat{u} - u$. En adaptant les développements ci-dessus, on obtient le modèle suivant

$$\left. \begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + Be(t) \\ \dot{e}(t) &= -K(A + BK)x(t) - KBe(t) \\ x(t_i^+) &= x(t_i) \\ e(t_i^+) &= 0.\end{aligned} \right\} \forall t \in [t_i, t_{i+1}),\tag{3.16}$$

Ce modèle est parfois pratique pour l'analyse.

3.4.2 Sans introduire l'erreur induite par l'échantillonnage

Lorsque nous simulons un système à commande échantillonnée de façon événementielle à l'aide de Matlab-Simulink, il est souvent plus aisé de ne pas introduire l'erreur induite par l'échantillonnage et d'écrire le modèle complet dans les coordonnées (x, \hat{u}) ou (x, \hat{x}) . Le premier cas correspond au modèle suivant

$$\left. \begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B\hat{u}(t) \\ \dot{\hat{u}}(t) &= 0 \\ x(t_i^+) &= x(t_i) \\ \hat{u}(t_i^+) &= Kx(t_i).\end{aligned} \right\} \forall t \in [t_i, t_{i+1}),\tag{3.17}$$

C'est ce modèle que nous simulerons en TP.

3.5 Le phénomène de Zénon

Pour conclure ce chapitre, notons que les systèmes hybrides ne se circonscrivent pas au seul cadre de la commande échantillonnée. Dès que des phénomènes discrets ou discontinus

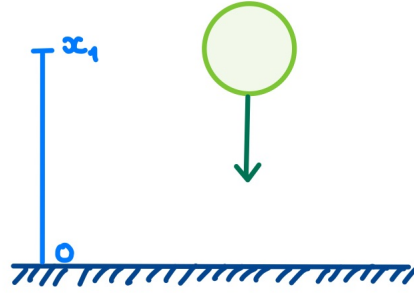


FIGURE 3.3 – Balle rebondissante.

se produisent, il est légitime de proposer un tel modèle. Il en va ainsi des convertisseurs de puissance et plus généralement de n'importe quel système électrique muni d'interrupteurs dont l'ouverture et la fermeture peut se modéliser comme un phénomène discret. Une autre grande classe de problèmes est celle des systèmes mécaniques sujets à impacts, à l'instar des robots marcheur : l'impact correspondant à la dynamique discrète. Considérons d'ailleurs probablement le plus simple d'entre eux : l'exemple de la balle rebondissante (solide, homogène), cf. figure 3.3.

La balle est en chute libre entre deux impacts, impacts qui sont modélisés par des dynamiques discrètes. Nous avons ainsi en ramenant l'étude de la balle à celle de son centre,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} x_2 \\ -\gamma \end{pmatrix} & x_1 > 0 \text{ ou } (x_1 = 0 \text{ et } x_2 > 0) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ -\lambda x_2 \end{pmatrix} & x_1 = 0 \text{ et } x_2 < 0 \end{cases} \\ x^+ &= \begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\lambda x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

- $x_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ est la hauteur de la balle,
- $x_2 \in \mathbb{R}$ est sa vitesse verticale,
- $\gamma > 0$ la constante gravitationnelle,
- $\lambda \in]0, 1[$ le coefficient d'amortissement lié aux impacts.

Considérons le cas où $x_1(0) = 0$ et $x_2(0) > 0$. Après quelques calculs non-explicités, nous pouvons établir que les instants de saut/d'impact t_i , $i \in \mathcal{J} \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$, vérifient la relation suivante

$$t_{i+1} = t_i + \frac{2\lambda^i}{\gamma} x_2(0).$$

Ainsi, en supposant que $t_1 = 0$,

$$\begin{aligned} t_i &= \sum_{j=1}^i \frac{2\lambda^j}{\gamma} x_2(0) \\ &= \frac{2}{\gamma} x_2(0) \frac{1 - \lambda^{i+1}}{1 - \lambda}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$t_i \rightarrow \frac{2}{\gamma} x_2(0) \frac{1}{1 - \lambda} \text{ quand } i \rightarrow \infty.$$

La solution saute un nombre infini de fois en temps fini : on appelle cela le *phénomène de Zénon*.

En quoi cela nous concerne-t-il ? Nous devons concevoir des lois d'échantillonnage qui excluent ce phénomène car cela signifierait que nous devrions transmettre un nombre infini de fois en temps fini ce qui est irréalisable et va à l'encontre de notre motivation première : commander en transmettant le moins possible. En pratique, nous demandons une propriété plus forte : nous souhaitons avoir la garantie qu'il existe un *temps minimum strictement positif entre t_i et t_{i+1}* . Mathématiquement, la formulation qui nous intéresse dans ce cours est la suivante : pour tout $x(0), e(0) \in \mathbb{R}^{n_x}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $i \in \mathcal{I}$,

$$t_{i+1} - t_i \geq \eta.$$

On appelle η un temps minimum d'inter-transmission.

Chapitre 4

Lois d'échantillonnage

4.1 Objectif

Pour rappel, le modèle établi au chapitre 3.3 est

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + BK e(t) \\ \dot{e}(t) &= -(A + BK)x(t) - BK e(t) \\ x(t_i^+) &= x(t_i) \\ e(t_i^+) &= 0. \end{aligned} \right\} \forall t \in [t_i, t_{i+1}), \quad (4.1)$$

Il nous reste à définir les instants d'échantillonnage $t_i, \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, afin de préserver les propriétés de stabilité du système en temps continu, c'est-à-dire $\dot{x} = (A + BK)x$. Pour ce faire, nous n'allons pas définir d'expression explicite des t_i . Nous allons plutôt construire une fonction Γ à valeurs dans \mathbb{R} , qui dépendra de l'erreur induite par l'échantillonnage e voire de l'état x . En fonction du signe de $\Gamma(x, e)$, nous déclencherons ou non une transmission. Ainsi, dans le cas où le critère Γ dépend de x et de e , nous aurons, pour tout¹ $i \in \mathcal{I}$,

$$t_i = \inf \{t > t_{i-1} : \Gamma(x(t), e(t)) \geq 0\}. \quad (4.2)$$

où $t_0 = 0$.

Nous pouvons donc ré-écrire (4.1) sans faire apparaître le temps

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + BK e \\ \dot{e} &= -(A + BK)x - BK e \\ x^+ &= x \\ e^+ &= 0. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{quand } \Gamma(x, e) \leq 0, \\ &\text{quand } \Gamma(x, e) \geq 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

1. Rappelons que $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ avec $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, ou $\mathcal{I} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$

L'objectif de ce chapitre est de construire la fonction Γ afin de garantir :

- la stabilité (globale exponentielle) de $x = 0$ pour le système (4.3) ;
- l'existence d'un temps minimum d'inter-transmission strictement positif, c'est-à-dire que pour toute solution telle que $x(0) \neq 0$ de (4.3), il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $i \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$,

$$t_{i+1} - t_i \geq \eta, \quad (4.4)$$

ce qui nous permettra d'éviter le phénomène de Zénon.

Avant cela, nous devons faire un rappel sur la stabilité des systèmes dynamiques et revoir un théorème de Lyapunov direct.

4.2 Rappel sur la stabilité et le théorème de Lyapunov direct

Considérons le système linéaire temps-invariant

$$\dot{x} = Fx, \quad (4.5)$$

où

- $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ est l'état, $n_x \in \mathbb{Z}_{>0}$,
- $F \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$.

Définition 1. L'origine $x = 0$ est globalement exponentiellement stable (GES) pour le système (4.5) s'il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que pour toute condition initiale x_0 , la solution correspondante de (4.5) vérifie pour tout $t \geq 0$,

$$|x(t)| \leq c_1 e^{-c_2 t} |x_0|. \quad (4.6)$$

□

Remarques :

- Nous parlons de la stabilité d'un point pour un système dynamique. L'expression "un système est stable" est un raccourci à utiliser avec précaution.
- La définition 1 garantit bien les deux propriétés attendues de la stabilité asymptotique d'un point :
 - (i) lorsque la condition initiale x_0 est proche de l'origine, l'état x reste à proximité de l'origine. En effet, d'après (4.6), pour tout $t \geq 0$, $|x(t)| \leq c_1 |x_0|$. Par conséquent, si $|x_0|$ est "petit", $|x(t)|$ le sera également pour tout $t \geq 0$.
 - (ii) Lorsque $t \rightarrow \infty$, $x(t) \rightarrow 0$. En effet, puisque $|x(t)| \leq c_1 e^{-c_2 t}$ pour tout $t \geq 0$ et $c_2 > 0$, $|x(t)| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

L'“ingrédient” supplémentaire de la stabilité exponentielle par rapport à la stabilité asymptotique est que toute solution converge exponentiellement vite vers l'origine.

Comment vérifie-t-on que $x = 0$ est GES pour le système (4.5) ? Il suffit pour cela d'étudier les valeurs propres de F .

Théorème 1. *L'origine du système (4.5) est GES si et seulement si F est Hurwitz, c'est-à-dire que les valeurs propres de F sont à parties réelles strictement négatives.* \square

Cela est bien joli mais le système qui nous intéresse, (4.3), n'est plus linéaire, il ne s'écrit pas sous la forme (4.6). Nous ne pouvons donc pas utiliser le théorème 1 pour étudier la stabilité de $x = 0$. Une alternative consiste à exploiter les fonctions de Lyapunov. Énonçons le théorème de Lyapunov pour l'étude de la stabilité de $x = 0$ pour les systèmes linéaires de la forme (4.5).

Théorème 2. *L'origine du système (4.5) est GES si et seulement si il existe $V \in C^1(\mathbb{R}^{n_x}, \mathbb{R})$, $a_1, a_2, a_3 > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^{n_x}$*

$$\begin{aligned} a_1|x|^2 &\leq V(x) \leq a_2|x|^2 \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x} Fx &\leq -a_3|x|^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

\square

La première ligne de (4.7) implique que V est définie positive² et radialement non-bornée, c'est-à-dire que $V(x) \rightarrow \infty$ quand $|x| \rightarrow \infty$. La deuxième ligne de (4.7) peut être interprétée comme suit. Le terme $\frac{\partial V(x)}{\partial x} Fx$ correspond en quelque sorte à $\frac{d}{dt} V(x(t))$ où x est solution de (4.5). En effet, $\frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)} Fx(t)$, nous retrouvons le terme de gauche dans la deuxième ligne de (4.7). Ainsi cette dernière implique $\frac{d}{dt} V(x(t)) < 0$ quand $x(t) \neq 0$, et donc $V(x(t))$ décroisse vers zéro avec le temps, ce qui garantit in fine, que $x(t)$ converge vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. La forme particulière du majorant de $\frac{\partial V(x)}{\partial x} Fx$, c'est-à-dire $-a_3|x|^2$, permet, avec la première ligne de (4.7), de prouver que la stabilité est exponentielle.

La bonne nouvelle est qu'il est aisé de construire une fonction de Lyapunov V pour (4.5) lorsque F est Hurwitz bien sûr. Nous utilisons pour cela le lemme suivant.

Lemme 1. *La matrice F est Hurwitz si et seulement si pour toute matrice $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ symétrique, définie positive³, il existe une unique matrice $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ symétrique, définie positive telle que*

$$F^\top P + PF = -Q. \quad (4.8)$$

Voyons comment utiliser le lemme 1 pour construire une fonction de Lyapunov V satisfaisant les conditions du théorème 2. Nous supposons pour cela que F est Hurwitz. Soit

2. Cela signifie que $V(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ et $V(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.

3. La matrice Q est définie positive si et seulement si $x \mapsto x^\top Qx$ est définie positive.

$Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ symétrique, définie positive et $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ symétrique, définie positive telle que $F^\top P + PF = -Q$. Une telle matrice P existe d'après le lemme 1. Nous posons

$$V(x) := x^\top P x \quad (4.9)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^{n_x}$. Puisque V est symétrique et définie positive, les inégalités suivantes sont satisfaites pour tout $x \in \mathbb{R}^{n_x}$,

$$\lambda_{\min}(P)|x|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(P)|x|^2, \quad (4.10)$$

où $\lambda_{\min}(P)$ et $\lambda_{\max}(P)$ sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de P . Rappelons que les valeurs propres de P sont réelles puisque cette matrice est symétrique, nous pouvons donc bien parler de valeurs propres minimale et maximale. La première ligne de (4.7) est vérifiée avec $a_1 = \lambda_{\min}(P)$ et $a_2 = \lambda_{\max}(P)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^{n_x}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x} F_x &= (F_x)^\top P x + x^\top P F_x \\ &= x^\top F^\top P x + x^\top P F x \\ &= x^\top (F^\top P + P F) x, \end{aligned} \quad (4.11)$$

or $F^\top P + P F = -Q$, donc

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} F_x = -x^\top Q x, \quad (4.12)$$

et puisque Q est symétrique et définie positive, $x^\top Q x \geq \lambda_{\min}(Q)|x|^2$. Par conséquent,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} F_x \leq -\lambda_{\min}(Q)|x|^2. \quad (4.13)$$

La deuxième inégalité de (4.7) est donc satisfaite avec $a_3 = \lambda_{\min}(Q) > 0$.

Ces développements nous seront utiles pour construire et analyser les lois d'échantillonnage. À noter que sous Matlab, la commande `lyap` permet d'obtenir la matrice P étant données A , B et Q : $P = \text{lyap}((A+BK)', Q)$.

4.3 Un théorème de Lyapunov direct pour le système (4.3)

Les résultats de stabilité de la section 4.2 s'appliquent aux systèmes linéaires en temps continu, cf. (4.5). Or le système d'intérêt dans ce chapitre est (4.3) et est hybride. Nous devons donc adapter ceux-ci. C'est le sujet de cette section.

Tout d'abord, notons que l'état du système (4.3) n'est plus uniquement constitué de x mais aussi de e . Ainsi, lorsque nous parlons de stabilité de $x = 0$, cela correspond en réalité à l'ensemble

$$\mathcal{A} := \{(x, e) : x = 0\}. \quad (4.14)$$

Il nous faut donc redéfinir la notion de stabilité vue ci-dessus pour le cas où l'attracteur n'est

pas l'origine mais l'ensemble \mathcal{A} .

Définition 2. L'ensemble \mathcal{A} est globalement exponentiellement stable (GES) pour le système (4.3) s'il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que pour toute condition initiale (x_0, e_0) , la solution (x, e) correspondante de (4.3) vérifie pour tout $t \geq 0$,

$$|x(t)| \leq c_1 e^{-c_2 t} |x_0|. \quad (4.15)$$

□

Nous avons quasiment la même définition que dans la définition 1. À noter que $|x(t)|$ dans (4.15) correspond à la distance de $(x(t), e(t))$ à l'attracteur \mathcal{A} , qui se définit mathématiquement de la façon suivant : $|(x, e)|_{\mathcal{A}} := \inf\{|(x', e') - (x, e)| : (x', e') \in \mathcal{A}\}$. Ainsi $|(x, e)|_{\mathcal{A}} = |x|$.

Pour prouver la stabilité exponentielle de l'ensemble \mathcal{A} pour le système (4.3), nous appliquerons le théorème de Lyapunov suivant.

Théorème 3. Supposons qu'il existe $V \in C^1(\mathbb{R}^{n_x}, \mathbb{R})$, $a_1, a_2, a_3, \eta > 0$ telles que les conditions ci-dessous sont vérifiées.

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}^{n_x}$

$$a_1 |x|^2 \leq V(x) \leq a_2 |x|^2. \quad (4.16)$$

(ii) Pour tout $(x, e) \in \mathbb{R}^{n_x}$ tel que $\Gamma(x, e) \leq 0$,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) \leq -a_3 |x|^2. \quad (4.17)$$

(ii) pour toute condition initiale (x_0, e_0) où $x_0 \neq 0$, pour toute solution correspondante (x, e) de (4.3), il existe un temps minimum d'inter-transmission $\eta > 0$ tel que pour tout $i \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$,

$$t_{i+1} - t_i \geq \eta. \quad (4.18)$$

Alors l'ensemble \mathcal{A} est globalement exponentiellement stable pour le système (4.3).

Nous retrouvons des conditions similaires à celles du théorème 1. En effet, les conditions (i) et (ii) du théorème 3 nous rappellent fortement celles du théorème 1 à ceci près que l'item (ii) ne doit être vérifiée que lorsque $\Gamma(x, e) \leq 0$. À cela s'ajoute l'item (iii), qui non seulement évite le phénomène de Zénon et est attendue en pratique, mais est utilisée pour prouver la propriété de stabilité du théorème 3; la preuve en question n'est pas fournie dans ces notes. Nous excluons l'origine, $x_0 = 0$, dans l'item (ii) ci-dessus car dans ce cas une singularité peut se produire au niveau du temps d'inter-transmission comme nous le verrons par la suite.

Puisque $A + BK$ est Hurwitz, un choix logique pour la fonction V du théorème 3 est $V(x) = x^T P x$ où P est symétrique, définie positive et satisfait

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) = -Q, \quad (4.19)$$

avec Q une matrice symétrique et définie positive. Dans ce cas, l'item (i) du théorème 3 est vérifiée avec $a_1 = \lambda_{\min}(P)$ et $a_2 = \lambda_{\min}(P)$ comme nous l'avons vu précédemment. Par contre, regardons de plus près l'item (ii) du théorème 3. Soit $(x, e) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) &= \left((A + BK)x + BKe \right)^\top P x + x^\top P \left((A + BK)x + BKe \right) \\ &= x^\top \left((A + BK)P + P(A + BK) \right) x + 2x^\top PBKe \\ &= -x^\top Qx + 2x^\top PBKe. \end{aligned} \quad (4.20)$$

À cause du terme $2x^\top PBKe$, il n'est pas évident que la condition (ii) du théorème 3 est vérifiée. D'ailleurs, ce terme admet une interprétation simple : il représente l'effet induit par l'échantillonnage qui va, en général, détruire la stabilité du système lorsque l'erreur e est trop grande. Tout le défi en échantillonnage événementiel est de contrôler la "taille" de e via le critère Γ afin de garantir la condition (ii) du théorème 3, mais aussi l'item (iii) dudit théorème. C'est ce que nous allons voir dans la suite de chapitre.

4.4 Seuil relatif

Revenons à (4.20) et considérons $(x, e) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) &= -x^\top Qx + 2x^\top PBKe \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 2x^\top PBKe \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 2|x||PBK||e|. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Faisons apparaître le terme $\sigma\lambda_{\min}(Q)|x|^2$ où $\sigma \in]0, 1[$ est un paramètre de réglage,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) \leq -\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + \sigma\lambda_{\min}(Q)|x|^2 - \sigma\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 2|x||PBK||e|. \quad (4.22)$$

Lorsque $-\sigma\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 2|x||PBK||e| \leq 0$, alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) &\leq -\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + \sigma\lambda_{\min}(Q)|x|^2 \\ &= -(1 - \sigma)\lambda_{\min}(Q)|x|^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

et l'item (ii) du théorème 3 est vérifiée avec $a_3 = (1 - \sigma)\lambda_{\min}(Q) > 0$ puisque $\sigma \in]0, 1[$. Revenons à la condition $-\sigma\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 2|x||PBK||e| \leq 0$ qui nous a permis d'obtenir (4.23). Nous pouvons la réécrire de façon équivalente sous la forme

$$\begin{aligned} -\sigma\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 2|x||PBK||e| &\leq 0 \\ 2|x||PBK||e| &\leq \sigma\lambda_{\min}(Q)|x|^2 \\ |e| &\leq \sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|}|x|. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nous pouvons donc définir

$$\Gamma(x, e) = |e| - \sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} |x|. \quad (4.25)$$

Voici notre loi d'échantillonnage ! Nous la devons à Paulo Tabuada, professeur à UCLA aux États-Unis, en 2007. Elle est appelée seuil relatif, car un seuil, $\sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} |x|$ est imposée à la norme de $|e|$, seuil qui est relatif puisqu'il dépend de $|x|$. Celui-ci est donc grand lorsque $|x|$ l'est et inversement. Après chaque instant de transmission, $e = 0$ d'après (4.3) et donc $\Gamma(x, 0) = -\sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} |x| \leq 0$ de telle sorte que la solution du système (4.3) est donnée par la résolution de sa partie continue.

La condition (iii) quant à elle est également vérifiée, sa preuve est un peu technique et donc éludée ici.

Formalisons les développements ci-dessous.

Théorème 4. *Considérons le système (4.3) avec Γ défini dans (6.8) où $\sigma \in]0, 1[$. Les conditions du théorème 3 sont vérifiées et l'ensemble \mathcal{A} est donc globalement exponentiellement stable.*

□

Remarque. Nous avons développé le seuil relatif en partant de la dernière inégalité de (4.20) ci-dessus. Nous pouvons obtenir une version moins conservative en partant de (4.20), c'est-à-dire

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) = -x^\top Qx + 2x^\top PBKe. \quad (4.26)$$

En suivant le même raisonnement que ci-dessus, nous pouvons introduire $\sigma x^\top Qx$ où $\sigma \in]0, 1[$,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) = -x^\top Qx + \sigma x^\top Qx - \sigma x^\top Qx + 2x^\top PBKe. \quad (4.27)$$

Ainsi, lorsque $-\sigma x^\top Qx + 2x^\top PBKe \leq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) &\leq -(1 - \sigma)x^\top Qx \\ &\leq -(1 - \sigma)\lambda_{\min}(Q)|x|^2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

et l'item (ii) du théorème 3 est satisfait avec $a_3 = (1 - \sigma)\lambda_{\min}(Q) > 0$. Nous pouvons également montré la satisfaction de l'item (iii) du théorème 3 de telle sorte que le théorème 4 reste vrai pour Γ défini par

$$\Gamma(x, e) = 2x^\top PBKe - \sigma x^\top Qx. \quad (4.29)$$

Cette technique générera en général moins de transmissions qu'avec Γ de (6.8).

Concluons cette section sur le seuil relatif par une discussion sur ses avantages et inconvénients.

Avantages :

- la stabilité exponentielle est préservée (nous verrons que ce n'est pas toujours le cas) ;
- cette technique génère souvent moins de transmissions que la suivante de part l'adaptation du seuil sur $|e|$ à la valeur de l'état $|x|$;
- il existe un temps minimum d'inter-transmission $\eta > 0$ *global* sauf en l'origine, c'est-à-dire que pour toute solution (x, e) du système (4.3) telle que $x(0) \neq 0$, pour tout $i \in \mathcal{I} \setminus \{1\}$,

$$t_{i+1} - t_i \geq \eta. \quad (4.30)$$

En d'autres termes, η ne dépend pas des conditions initiales du système. Cela évite le cas où η devient très petit lorsque les conditions initiales sont prises de plus en plus loin de l'attracteur \mathcal{A} , à l'instar de la technique suivante.

Inconvénients :

- sa non-robustesse, comme nous le verrons au chapitre 6, qui est due au fait qu'il n'existe pas de temps minimum d'inter-transmission strictement positif quand $x_0 = 0$.

4.5 Seuil fixe

L'idée de la technique du seuil fixe repose sur une idée simple : il s'agit de transmettre uniquement lorsque la norme de l'erreur induite par l'échantillonnage, $|e|$, est plus grand qu'une constante $\rho > 0$ que nous sommes libre de choisir. Cela donne lieu au critère

$$\Gamma(e) = |e| - \rho, \quad (4.31)$$

qui est donc indépendant de x dans cette section. Nous devons cette technique à Karl-Erik Årzén de l'université de Lund en Suède en 1999.

Il y a un prix à payer pour cette simplicité : la stabilité ne sera plus exponentielle. Nous pouvons le voir à partir de l'analyse de Lyapunov. En effet, d'après (6.7),

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) \leq -\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 2|x||PBK||e|. \quad (4.32)$$

Lorsque $|e| \leq \rho$, autrement dit $\Gamma(e) \leq 0$,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) \leq -\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 2|x||PBK|\rho. \quad (4.33)$$

Nous ne pourrions plus conclure que l'item (ii) du théorème 3 est vérifié, car lorsque $|x|$ est proche de 0, le terme $2|x||PBK|\rho$ domine $-\lambda_{\min}(Q)|x|^2$. Par contre, cela ne se produit que lorsque $|x|$ est de l'ordre de ρ . En poussant plus loin ce raisonnement, ce que nous ne faisons pas dans ces notes, nous pouvons obtenir le théorème suivant.

Théorème 5. *Considérons le système (4.3) avec Γ défini dans (4.31) où $\rho > 0$. Les propriétés suivantes sont satisfaites.*

- (i) *Il existe $c_1, c_2, c_3 > 0$ tels que pour toute condition initiale (x_0, e_0) , toute solution correspondante (x, e) vérifie pour tout $t \geq 0$,*

$$|x(t)| \leq c_1 e^{-c_2 t} |x_0| + c_3 \rho. \quad (4.34)$$

- (ii) *L'item (iii) du théorème 3 est vérifiée.* □

D'après l'item (i) du théorème 5, la composante en x des solutions de (4.3) converge exponentiellement mais pas nécessairement vers 0 à cause du terme $c_3 \rho$, terme qu'on peut toutefois prendre aussi petit qu'on veut. On parle de stabilité globale exponentielle *pratique* de \mathcal{A} dans ce cas. Le prix à payer cependant est que plus ρ est petit, plus le temps entre deux transmissions sera petit en général. En d'autres termes, plus nous voudrions être précis, plus il faudra communiquer.

Avantages :

- simplicité de mise en oeuvre, il n'y a aucun calcul à mener pour obtenir Γ ;
- robustesse en général.

Inconvénients :

- la composante en x des solutions ne converge plus vers 0, nous perdons en précision ;
- le temps minimum d'inter-transmission n'est pas global, il devient de plus en plus petit lorsque les conditions initiales des solutions de (4.3) sont de plus en plus loin de l'attracteur \mathcal{A} . Cependant il existe bien un temps minimum d'inter-transmission à l'origine.

4.6 Combinaison des seuils fixe et relatif

Nous pouvons très bien combiner les deux techniques précédentes. Nous devons cette idée à Tijs Donkers et Maurice Heemels, tous deux enseignants-chercheurs à TU Eindhoven aux Pays-Bas.

Nous avons donc le critère Γ , pour tout $x, e \in \mathbb{R}^{n_x}$

$$\Gamma(x, e) = |e| - \sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} |x| - \rho \quad (4.35)$$

où $\sigma \in]0, 1[$ et $\rho > 0$ sont deux paramètres de réglage. Ainsi, la loi d'échantillonnage garantit (sauf à l'instant initial éventuellement) l'inégalité suivante le long des solutions de (4.3)

$$|e| \leq \sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} |x| + \rho. \quad (4.36)$$

Nous retrouvons bien à la fois le seuil relatif et le fixe. Nous avons alors le résultat suivant.

Théorème 6. *Considérons le système (4.3) avec Γ défini dans (4.35) où $\sigma \in]0, 1[$ et $\rho > 0$. Les propriétés suivantes sont satisfaites.*

- (i) *Il existe $c_1, c_2, c_3 > 0$ tels que pour toute condition initiale (x_0, e_0) , toute solution correspondante (x, e) vérifie pour tout $t \geq 0$,*

$$|x(t)| \leq c_1 e^{-c_2 t} |x_0| + c_3 \rho. \quad (4.37)$$

- (ii) *L'item (iii) du théorème 3 est vérifiée.* □

Remarque. Nous pouvons aussi définir Γ de la façon suivante

$$\Gamma(x, e) = |e| - \max \left\{ \sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} |x|, \rho \right\}. \quad (4.38)$$

Ainsi, sauf à l'instant initial éventuellement, l'inégalité suivante le long des solutions de (4.3)

$$|e| \leq \max \left\{ \sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} |x|, \rho \right\}. \quad (4.39)$$

Nous retrouvons ici aussi à la fois le seuil relatif et le fixe. Le théorème 6 reste valide dans ce cas.

Avantages :

- génère souvent moins de transmissions que les deux techniques précédentes ;
- le temps minimum d'inter-transmission est global, en excluant l'origine ;
- permet de palier le problème de robustesse du seuil relatif, cf. chapitre 6.

Inconvénients :

- la composante en x des solutions ne converge plus vers 0, nous perdons en précision par rapport au seuil relatif.

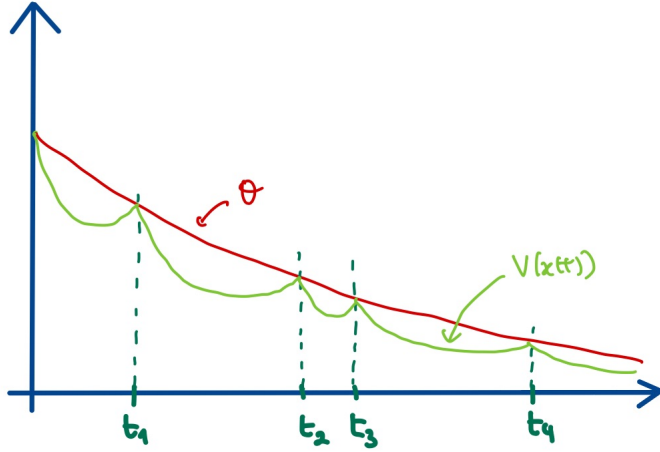
4.7 Seuil décroissant sur $V(x)$

Revenons à la technique du seuil relatif. L'idée est de définir Γ de telle sorte que l'item (ii) du théorème 3 soit vérifiée, c'est-à-dire que tout $(x, e) \in \mathbb{R}^{n_x}$ tel que $\Gamma(x, e) \leq 0$,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BK e \right) \leq -a_3 |x|^2. \quad (4.40)$$

Nous forçons ainsi toute solution (x, e) de (4.3) de vérifier

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq -a_3 |x(t)|^2, \quad (4.41)$$

FIGURE 4.1 – Illustration d'un seuil possible à imposer sur $V(x)$.

pour tout $t > 0$. Ainsi, nous pouvons montrer que

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) < 0, \quad (4.42)$$

pour tout $t > 0$, dès que $x(0) \neq 0$. Nous en déduisons que $V(x(t))$ décroît vers 0 et $x(t)$ converge bien (exponentiellement vite) vers 0.

Si nous souhaitons garantir que $V(x(t))$ converge vers 0 quand $t \rightarrow \infty$, il n'est pas nécessaire d'imposer (4.42). En effet, nous pouvons tolérer que la dérivée $V(x(t))$ soit positive du moment que $V(x(t))$ reste plus petit ou égal qu'un seuil qui décroît vers 0 avec le temps, comme l'illustre la figure 4.1.

Introduisons la variable $\theta \in \mathbb{R}$ pour définir le seuil décroissant sur $V(x)$. Cette variable ne peut pas décroître plus rapidement que $V(x(t))$ en l'absence d'échantillonnage, qui est le cas idéal, autrement le phénomène de Zénon se produirait. Or, nous avons pour toute solution x du système en temps continu (en absence d'échantillonnage) $\dot{x} = (A + BK)x$,

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = -x(t)^\top Qx(t), \quad (4.43)$$

pour tout $t > 0$. Soit $\mu > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{R}^{n_x}$, $z^\top Qz \geq \mu V(z)$. Nous pouvons par exemple prendre $\mu = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$; il est néanmoins possible de déterminer un plus grand μ en général à l'aide de solveur d'inégalités linéaires matricielles (LMI) comme Sedumi ou Yalmip sous Matlab. Ainsi,

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq -\mu V(x(t)). \quad (4.44)$$

La constante μ correspond à la vitesse de décroissance idéale de $V(x(t))$. Nous sommes prêts

pour définir les dynamiques de la variable seuil θ

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -(1 - \sigma)\mu\theta \\ \theta^+ &= \theta\end{aligned}\tag{4.45}$$

où $\sigma \in]0, 1[$ est un paramètre de réglage. Nous remarquons que θ décroît vers 0 moins vite que $V(x(t))$ le long des solutions du système continu $\dot{x} = (A + BK)x$ d'après (4.44) puisque $\sigma \in]0, 1[$.

L'idée est de définir Γ comme

$$\Gamma(x, \theta) = V(x) - \theta.\tag{4.46}$$

Ainsi, $\Gamma(x, \theta) \leq 0$ est équivalent à

$$V(x) \leq \theta.\tag{4.47}$$

Puisque θ converge vers 0 exponentiellement vite, $V(x)$ en fait de même le long des solutions de (4.3). Plus formellement, nous avons le résultat suivant.

Théorème 7. *Considérons le système (4.3) augmenté de (4.45) avec Γ défini dans (4.46) où $\sigma \in]0, 1[$. Les propriétés suivantes sont satisfaites.*

- (i) *Il existe $c_1, c_2, c_3 > 0$ tels que pour toute condition initiale (x_0, e_0, θ_0) , toute solution correspondante (x, e, θ) vérifie pour tout $t \geq 0$,*

$$|(x(t), \theta(t))| \leq c_1 e^{-c_2 t} |(x_0, \theta_0)|.\tag{4.48}$$

- (ii) *L'item (iii) du théorème 3 est vérifiée.* □

Le théorème 7 garantit que l'ensemble $\{(x, e, \theta) : x = 0, \theta = 0\}$ est globalement exponentiellement stable. Nous devons cette technique à Xiaofeng Wang et Michael Lemmon de l'université de Notre-Dame aux États-Unis en 2008.

Remarque. En réalité, la définition de Γ dans (4.46) induit le phénomène de Zénon car après une transmission $V(x) = \theta$ et nous devrions transmettre à nouveau. Nous évitons cet artefact en ne générant des transmissions que lorsque $V(x) \geq \theta$ et $\frac{\partial V(x)}{\partial x}((A+BK)x+BKe) \geq -\mu V(x)$.

Remarque. Nous pouvons tout à fait combiner cette technique avec les précédentes.

Avantages :

- génère souvent moins de transmissions que les techniques précédentes ;
- le temps minimum d'inter-transmission est global ;

- préserve la stabilité globale exponentielle.

Inconvénients :

- nécessite l'implémentation d'une variable supplémentaire θ ;
- manque de robustesse due à une singularité du temps d'inter-transmission quand $x_0 = 0$.

Chapitre 5

Temps d'inter-transmission : quelles garanties ?

5.1 Introduction

Nous venons de voir plusieurs lois d'échantillonnage au chapitre 4. À y regarder de plus près, nous n'avons pas dit grand chose sur les temps d'inter-transmission, c'est-à-dire sur l'intervalle de temps entre deux instants de transmission successifs. Les seules garanties présentées assurent l'existence d'un temps minimum strictement positif entre deux transmissions, temps qui peut être le même pour toute condition initiale ou dépendant de l'ensemble de conditions initiales. C'est important mais cela ne nous dit rien sur l'évolution du temps d'inter-transmission. Or, rappelons que l'objectif de la commande à échantillonnage événementiel est de transmettre sporadiquement. Il est donc fondé de vouloir en savoir plus sur la quantité de transmissions générées par la loi considérée.

Il s'avère que nous n'avons pas la réponse à ces questions dans la plupart des cas. En d'autres termes, pour une loi d'échantillonnage donnée, il nous est très difficile de fournir des garanties sur le comportement des temps de transmission en général, autre que l'existence d'un temps minimum. Pour palier ce manque, nous recourons aux simulations numériques. De multiples conditions initiales du système sont considérées, puis nous observons les instants de transmissions obtenus sur un intervalle de temps fixé.

Il existe néanmoins un cas pour lequel nous pouvons en dire plus. Nous avons proposé une étude en 2019 en collaboration avec Ricardo Sanfelice (Université de Californie Santa Cruz, États-Unis) et Maurice Heemels (TU Eindhoven, Pays-Bas) [PSH19] qui répond au problème pour la technique du seuil relatif (cf. chapitre 4.4) lorsque la dimension du système à contrôler est de 1 ou de 2. Nous passons en revue ces résultats dans ce chapitre.

5.2 Problématique

Rappelons que nous considérons le système suivant

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + BKe \\ \dot{e} &= -(A + BK)x - BKe \\ x^+ &= x \\ e^+ &= 0. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{quand } \Gamma(x, e) \leq 0, \\ &\text{quand } \Gamma(x, e) \geq 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

et que la technique du seuil relatif correspond à l'expression de Γ suivante pour tout $(x, e) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_e}$

$$\Gamma(x, e) = |e| - \sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} |x|, \quad (5.2)$$

où $\sigma \in]0, 1[$ est un paramètre de réglage et les matrices P et Q sont symétriques, définies positives et satisfont $(A + BK)^\top P + P(A + BK)P = -Q$, cf. chapitre 4.

Par commodité, nous réécrivons (6.8) sous la forme

$$\Gamma(x, e) = |e| - \nu |x|, \quad (5.3)$$

où $\nu := \sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBK|} > 0$. Ainsi nous avons la garantie que le système (5.1) vérifie bien les propriétés de stabilité désirée, cf. théorème 4 du chapitre 4.

L'objectif de cette section est de fournir des propriétés analytiques sur la suite des instants de transmission t_i , $i \in \mathcal{I}$, générée par (6.8). Nous devons pour cela définir rigoureusement ce que nous appelons le temps d'inter-transmission, qui correspond à $t_{i+1} - t_i$. On supposera que $e(0) = 0$, c'est-à-dire qu'une transmission a lieu à l'instant initial, ainsi pour toute condition initiale¹ $x_0 \neq 0$, nous définissons

$$\tau_\nu(x_0) := \inf \{ \eta > 0 : |x_0 - x(\eta)| = \nu |x(\eta)| \}. \quad (5.4)$$

La quantité $\tau_\nu(x_0)$ correspond à $t_1 - t_0$ sachant que $t_0 = 0$, c'est-à-dire le premier temps d'inter-transmission.

Le temps d'inter-transmission est donc défini à l'instant $t \in [t_i, t_{i+1})$ par $\tau_\nu(x(t_i))$. Puisque $\hat{x}(t) = x(t_i)$ pour $t \in [t_i, t_{i+1})$, $\tau_\nu(x(t_i)) = \tau_\nu(\hat{x}(t))$.

Nous sommes prêts pour l'analyse de $\tau_\nu(\hat{x})$. Nous distinguons différent cas selon la dimension de l'état x du système noté n_x .

5.2.1 Cas scalaire $n_x = 1$

Lorsque l'état x est scalaire, nous avons le résultat suivant, qui peut surprendre (mais qui est vrai !).

1. Nous excluons $x_0 = 0$ car le phénomène de Zénon se produit dans ce cas : le temps d'inter-transmission est nul.

Théorème 8. Si $A \neq 0$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$,

$$\tau_v(\hat{x}(t)) = \frac{1}{A} \ln \left(\frac{\frac{A}{1+v} + BK}{A + BK} \right). \quad (5.5)$$

Si $A = 0$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$,

$$\tau_v(\hat{x}(t)) = \frac{\sigma}{|BK|} (1 + \sigma). \quad (5.6)$$

Nous remarquons que l'expression de $\tau_v(\hat{x}(t))$ dans le théorème 8 ne dépend ni du temps t , ni de la condition initiale x_0 . Cela signifie que l'échantillonnage est *périodique* (tout ça pour ça !).

Nous en déduisons que la technique du seuil relatif n'a pas d'intérêt dans le cas scalaire puisqu'elle revient à échantillonner périodiquement. Passons au cas où $n_x = 2$, nous parlons alors de systèmes planaires.

5.2.2 Cas planaire $n_x = 2$

Nous distinguons différents cas selon la nature des valeurs propres de $A + BK$, que nous notons λ_1 et λ_2 . Par ailleurs, pour ne pas rendre la présentation trop technique, les résultats sont présentés de façon informelle. Dernier point et pas des moindres, ces résultats sont valides lorsque v est petit ce qui est généralement le cas en pratique pour pouvoir garantir la stabilité du système (5.1).

5.2.3 λ_1 et λ_2 complexes conjuguées, non-réelles

Nous pouvons écrire $\lambda_1 = a + ib$ et $\lambda_2 = a - ib$ où $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}_{>0}$. Dans ce cas, $\tau_v(\hat{x})$ est une fonction $\frac{\pi}{b}$ -périodique et ce, quelque soit la condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^{2*}$. Par "presque" périodique, nous entendons que $\tau(\hat{x})$ a une période qui varie autour de $\frac{\pi}{b}$ et l'écart est de l'ordre de v . De plus, le choix de x_0 n'a quasiment aucun impact sur les valeurs prises par $\tau(\hat{x})$.

Considérons l'exemple suivant pour illustrer ces résultats

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u. \quad (5.7)$$

Nous avons sélectionné $K = [-3 \ -7]$. Ainsi les valeurs propres de $A + BK$ sont

$$\lambda_1 = -2 + i \quad \lambda_2 = -2 - i. \quad (5.8)$$

La matrice Q est l'identité et nous en avons déduit la matrice P associée. La valeur maximale de v est de 0.0728.

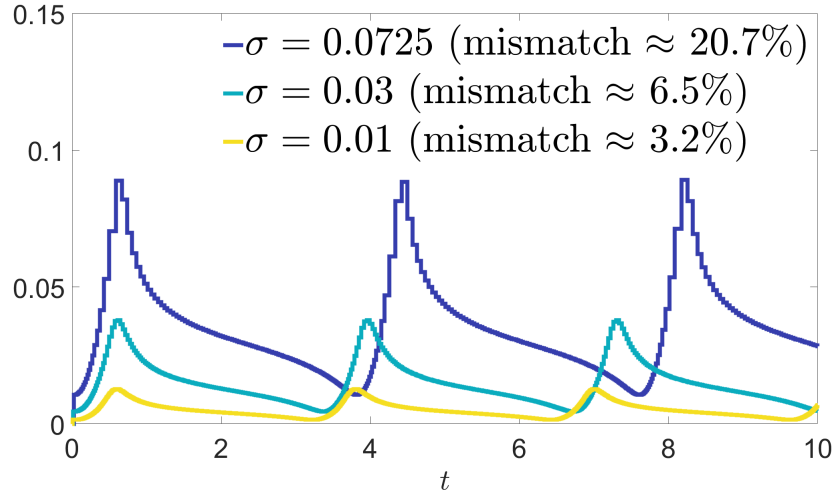


FIGURE 5.1 – Temps inter-transmission pour différentes valeurs de ν (σ dans la légende).

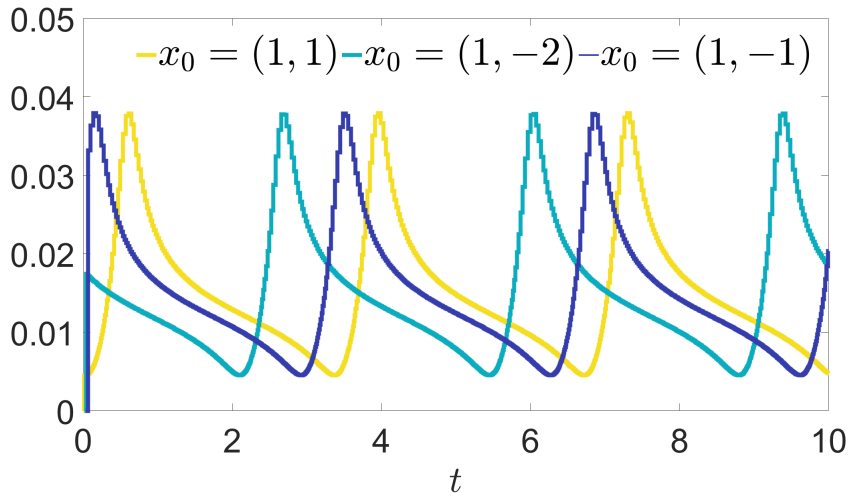


FIGURE 5.2 – Temps inter-transmission pour différentes conditions initiales.

La théorie nous dit que les temps d'inter-transmission doivent osciller avec une période proche de π puisque $b = 1$ ici. C'est bien ce que nous observons sur la figure 5.1. L'écart entre la période théorique, π , et celle observée augmente avec la valeur de ν (noté σ sur la figure).

La figure 5.2 quant à elle illustre le fait que les valeurs du temps d'inter-transmission sont peu affectées par le choix de la condition initiale x_0 .

Nous déduisons de ces résultats qu'il suffit de générer une seule simulation sur $\frac{\pi}{b}$ unités de temps pour connaître le temps d'inter-transmission pour tout temps futur et toute condition initiale x_0 .

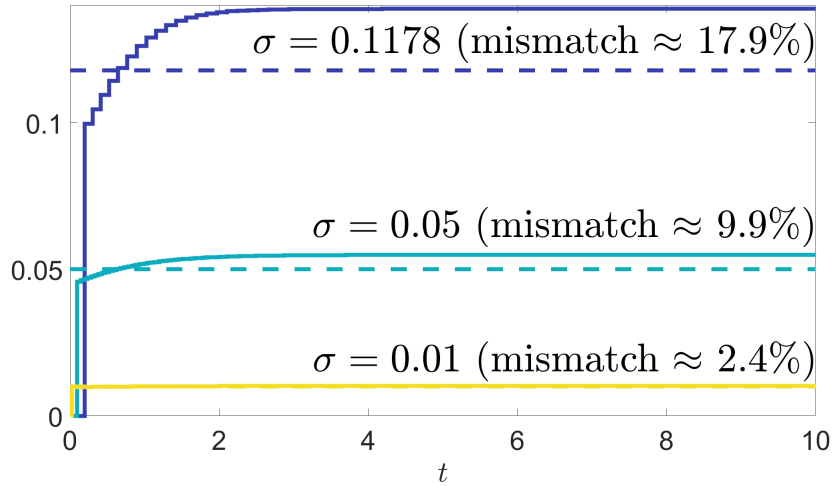


FIGURE 5.3 – Temps d'inter-transmission (ligne continue) et valeur de $\frac{\nu}{|\lambda_1|}$ (ligne pointillée) pour différentes valeurs de ν (notée σ).

5.2.4 λ_1 et λ_2 réelles et distinctes

Supposons que $\lambda_1 > \lambda_2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^{2,*}$, dans ce cas nous avons l'une des propriétés suivantes :

- $\tau_\nu(\hat{x}(t))$ converge approximativement vers $\frac{\nu}{|\lambda_1|}$ quand $t \rightarrow \infty$;
- $\tau_\nu(\hat{x}(t)) \approx \frac{\nu}{|\lambda_2|}$ pour tout $t \geq 0$.

Ainsi, soit $\tau_\nu(\hat{x})$ converge vers une constante, soit il est toujours proche constante. Nous n'avons pas été capables de reproduire le second cas en simulation, à chaque fois le premier se produit comme l'illustre les résultats de simulation de la figure 5.3 pour le même exemple que précédemment avec $K = [0 \ -6]$ de telle sorte que $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -2$. La valeur maximale de ν est 0.1179 dans ce cas.

Nous constatons sur la figure 5.3 que les temps d'inter-transmission convergent bien asymptotiquement vers un voisinage de $\frac{\nu}{\lambda_1} = \nu$ et que l'écart entre cette borne théorique et celle observée grandit avec ν .

5.2.5 λ_1 et λ_2 réelles, égales et de multiplicité géométrique 2

Rappelons que la multiplicité géométrique correspond à la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres associés à $\lambda_1 = \lambda_2$

Dans ce cas, nous avons que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^{2,*}$ et tout $t \geq 0$,

$$\tau_\nu(\hat{x}(t)) \approx \frac{\nu}{|\lambda_1|}. \quad (5.9)$$

En d'autres termes, l'échantillonnage est "quasiment" périodique comme dans le cas scalaire !

À noter que lorsque la multiplicité géométrique des valeurs propres est de 1, nous n'avons

pas de réponse à la question. Nous conjecturons que $\tau_v(\hat{x}(t))$ converge approximativement vers $\frac{v}{|\lambda_1|}$ quand $t \rightarrow \infty$ dans ce cas.

5.3 Conclusion

Beaucoup reste à faire sur l'étude du temps d'inter-transmission, qui semble être une étape importante vers le transfert industriel de la commande à échantillonnage événementiel.

Dans le chapitre suivant, nous discutons de la validité des lois d'échantillonnage présentées au chapitre 4 lorsqu'on dépasse le cadre de la commande par retour d'état et lorsqu'on prend en compte les perturbations et les incertitudes de modèle.

Chapitre 6

Analyse avancée

Nous évoquons dans ce chapitre l'extension des résultats du chapitre 4 à :

- la commande par retour de sortie ;
- la commande en présence de perturbations.

6.1 Retour de sortie

Jusqu'à présent nous nous sommes concentrés sur le cas de lois de commande par retour d'état, c'est-à-dire $u = Kx$. En pratique, nous n'avons pas toujours accès à l'état complet x du système, mais uniquement à un vecteur de sortie noté y . Prenons l'exemple d'un robot, il se peut que nous ayons des capteurs de position mais pas de vitesse par exemple.

Il est légitime de se demander si les résultats du chapitre 4 sont transposables au cas de lois de commande par retour de sortie.

Considérons pour cela le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{6.1}$$

où

- $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ est l'état ;
- $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ est l'entrée de commande ;
- $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ est la sortie mesurée ;
- A, B, C sont des matrices de dimension appropriée ;
- $n_x, n_u, n_y \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Supposons que nous savons construire une loi de commande par retour de sortie statique de la forme suivante

$$u = Ky,\tag{6.2}$$

qui garantit la stabilité globale exponentielle de l'origine de (6.1), c'est-à-dire que $A + BKC$ est Hurwitz.

Remarques :

- Auparavant, le contrôleur était de la forme $u = Kx$.
- Il est souvent plus aisé de construire un retour de sortie dynamique, à l'aide d'un observateur. Les développements qui suivent restent valides dans ce cas.

Dans ce cas, la loi de commande implémentée est

$$u = K\hat{y}, \quad (6.3)$$

où \hat{y} est la sortie échantillonnée dont les dynamiques sont

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}}(t) &= 0 & \forall t \in [t_i, t_{i+1}) \\ \hat{y}(t_i^+) &= y(t_i) = Cx(t_i). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Nous définissons l'erreur induite par le réseau

$$e = \hat{y} - y. \quad (6.5)$$

Nous en déduisons le modèle hybride suivant

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BKC)x(t) + BKe(t) \\ \dot{e}(t) &= -C(A + BKC)x(t) - CBKe(t) \\ x(t_i^+) &= x(t_i) \\ e(t_i^+) &= 0. \end{aligned} \right\} \forall t \in [t_i, t_{i+1}), \quad (6.6)$$

Puisque $A + BKC$ est Hurwitz, nous pouvons procéder comme au chapitre 4 et construire une fonction de Lyapunov $V(x) = x^\top Px$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ telle que P est symétrique et définie positive et pour tout $(x, e) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y}$,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BKC)x + BKe \right) \leq -\lambda_{\min}(Q)|x|^2 + 2|x||PBKC||e|, \quad (6.7)$$

où Q est une matrice symétrique, définie positive telle que $(A + BKC)^\top P + P(A + BKC) = -Q$.

En suivant la procédure pour obtenir le seuil relatif (cf. chapitre 4.4), nous pourrions définir la loi d'échantillonnage de telle sorte que

$$|e| \leq \sigma \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2|PBKC|}|x|. \quad (6.8)$$

Le problème est que nous n'avons pas accès à x . Nous ne pouvons donc pas implémenter ce

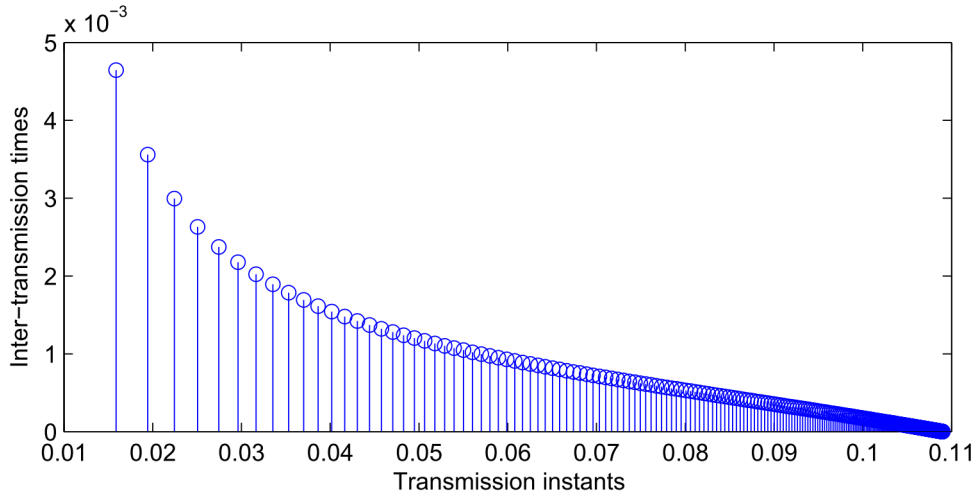


FIGURE 6.1 – Phénomène de Zénon lorsque la technique du seuil relatif (6.10) est implémentée sur un exemple, cf. [Abd14].

critère.

Pour parer à ce problème, on note qu'il est possible d'obtenir l'inégalité suivante

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) \leq -a|x|^2 - b|y|^2 + c|e|^2. \quad (6.9)$$

Nous pouvons alors définir la loi de transmission de telle sorte que

$$c|e|^2 \leq b|y|^2, \quad (6.10)$$

ainsi

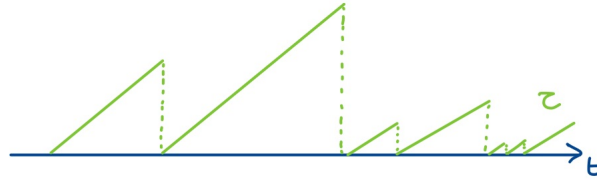
$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} \left((A + BK)x + BKe \right) \leq -a|x|^2. \quad (6.11)$$

Le critère (6.10) est implémentable et il garantit bien la décroissance stricte de la fonction de Lyapunov V . Cependant il y a toujours un problème. En effet, lorsque $y = 0$, pour garantir (6.10) il faut que $e = 0$ et donc transmettre. Cependant, après une transmission y reste égal à 0, il faut donc encore transmettre : le phénomène de Zénon se produit, comme l'illustre la figure 6.1.

La technique du seuil relatif n'est pas donc adaptée au retour de sortie. Celle du seuil fixe l'est en revanche. Le tableau 6.1 résume les lois vues au chapitre 4 que l'on peut adapter pour la commande par retour de sortie. Nous devons ces résultats à Tijs Donkers, Niek Borgers et Maurice Heemels (TU Eindhoven, Pays-Bas), cf. [DHvdWH11, BH14].

Seuil relatif	Seuil fixe	Combinaison	Seuil décroissant sur $V(x)$
✗	✓	✓	✗

TABLE 6.1 – Résumé des lois d'échantillonnage adaptables à la commande par retour de sortie.

FIGURE 6.2 – Illustration d'une évolution possible de τ .

Nous en déduisons qu'une possibilité, pour implémenter la technique du seuil relatif, et de la combiner avec un seuil fixe. Une autre possibilité consiste à forcer l'existence d'un temps minimum entre deux transmissions successives : nous parlons de *régularisation temporelle*. L'idée est la suivante. Nous définissons la variable τ pour mesurer le temps passé depuis la dernière transmissions

$$\begin{aligned} \dot{\tau}(t) &= 1 & \forall t \in [t_i, t_{i+1}) \\ \hat{\tau}(t_i^+) &= 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Une illustration de l'évolution possible de τ est fournie en figure 6.2.

Ensuite, la prochaine transmission ne peut se produire que si T unités de temps se sont écoulées depuis le dernier instant de transmission, où $T > 0$ est une constante de réglage choisie suffisamment petite. Cela donne lieu au système hybride suivant

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + BKe \\ \dot{e} &= -C(A + BK)x - CBKe \\ \dot{\tau} &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{quand } \Gamma(y, e) \leq 0, \\ &\left. \begin{aligned} x^+ &= x \\ e^+ &= 0 \\ \tau^+ &= 0. \end{aligned} \right\} \text{quand } \Gamma(y, e) \geq 0 \text{ et } \tau \geq T. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Nous pouvons montrer que tous les résultats du chapitre 4 restent vrai pour le système (6.13) lorsque T est suffisamment petit (il existe des techniques pour calculer une borne sur T). Ainsi, le phénomène de Zénon ne peut pas se produire.

6.2 Perturbations

Les perturbations sont inévitables en pratique. Il est donc fondamental de s'assurer du bon fonctionnement du système contrôlé en leur présence.

Considérons le système et supposons que l'état complet x du système est mesuré

$$\dot{x} = Ax + Bu + w, \quad (6.14)$$

où

- $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ est l'état ;
- $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ est l'entrée de commande ;
- $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ est la perturbation ;
- A, B sont des matrices de dimension appropriée ;
- $n_x, n_u, n_w \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Ainsi, l'implémentation de la commande échantillonnée conduit à

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BK\hat{x} + w \\ &= (A + BK)x + BK e + w. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Le modèle global s'écrit donc

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + BK e + w \\ \dot{e} &= -(A + BK)x - BK e - w \\ x^+ &= x \\ e^+ &= 0. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{quand } \Gamma(x, e) \leq 0, \\ \text{quand } \Gamma(x, e) \geq 0. \end{array} \quad (6.16)$$

Supposons que la perturbation soit de la forme

$$w = -Ax - BK\hat{x} - \hat{x}. \quad (6.17)$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BK\hat{x} + w \\ &= Ax + BK\hat{x} - Ax - BK\hat{x} - \hat{x} \\ &= -\hat{x}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Considérons la loi du seuil relatif que l'on écrit $|e| \leq \nu|x|$ où $\nu > 0$ comme au chapitre 4. On peut alors prouver que

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 - \frac{1}{1 + \nu} \\ t_2 &= 1 - \frac{1}{(1 + \nu)^2} \\ &\vdots \\ t_i &= 1 - \frac{1}{(1 + \nu)^i} \end{aligned} \quad (6.19)$$






Seuil relatif	Seuil fixe	Combinaison	Seuil décroissant sur $V(x)$	Régularisation temporelle
				

TABLE 6.2 – Résumé des lois d'échantillonnage adaptables en présence de perturbations.

et donc $t_i \rightarrow 1$ quand $i \rightarrow \infty$. Ainsi, $t_{i+1} - t_i \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow \infty$: le phénomène de Zénon se produit. Nous devons cette observation à [BH14].

La loi du seuil relatif n'est donc pas robuste aux perturbations. Ce n'est pas le cas de toutes les approches vues jusqu'à présent comme le résume le tableau 6.2.

Chapitre 7

Conclusion

La commande à échantillonnage événementiel est principalement motivée par opposition à celle par échantillonnage périodique. Les preuves théoriques de la supériorité de ce nouveau paradigme manquent encore ; des travaux en proposent dans un cadre particulier [AK18]. Par contre, les résultats numériques et expérimentaux sont très encourageant comme le démontre nos travaux menés en 2015 [PBG⁺15] sur lesquels nous concluons ce cours.

Il s'agit d'un problème de commande via un réseau sans fil d'un robot mobile, cf. figure 7.1. Les mesures de la position du robot sont fournies à un ordinateur via un réseau filaire à haut débit. L'ordinateur utilise ces données pour calculer une loi de commande assurant que le robot suive une trajectoire désirée. Ces communications se font via un réseau sans fil à l'aide d'une loi événementielle.

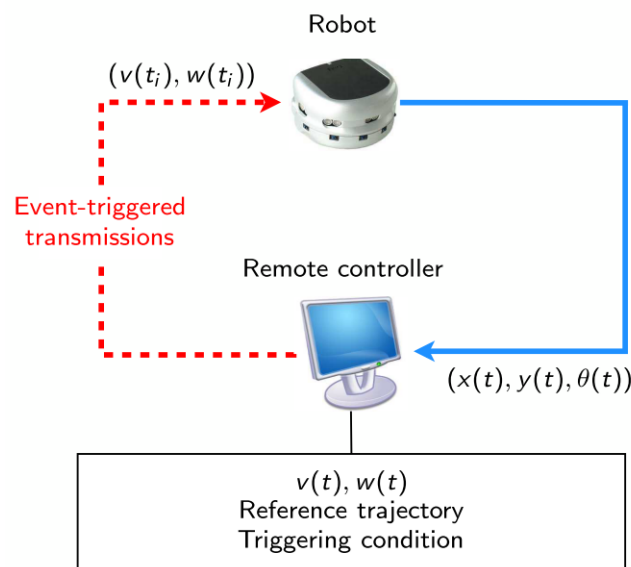


FIGURE 7.1 – Commande d'un robot mobile via un réseau sans fil.

La loi d'échantillonnage est donnée par un seuil relatif légèrement modifié. La figure 7.2 représente les résultats obtenus lorsque la trajectoire de référence décrit une ellipse. Lorsque la loi d'échantillonnage est événementiel, le tracé est en bleu. Nous avons ensuite calculé le temps moyen entre deux transmissions obtenus, appelons T_{moyen} puis nous avons

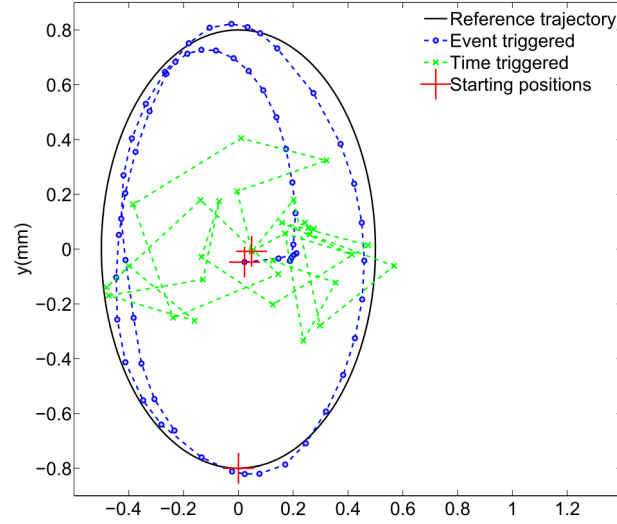


FIGURE 7.2 – Résultats expérimentaux pour une trajectoire de référence décrivant une ellipse.

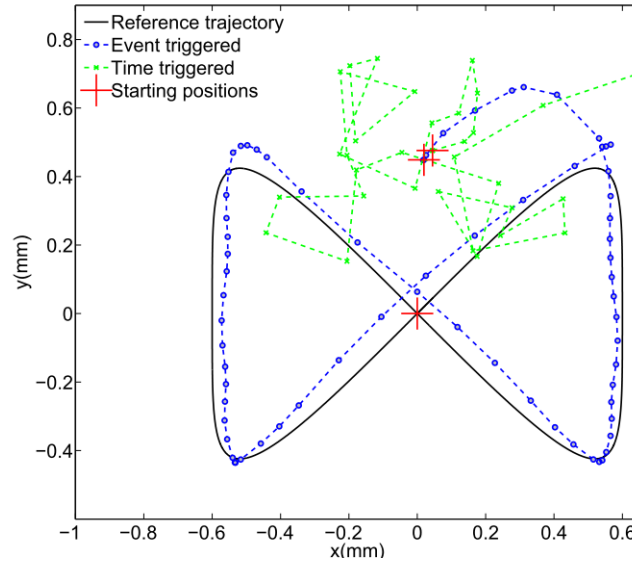


FIGURE 7.3 – Résultats expérimentaux pour une trajectoire de référence décrivant un huit.

implémenté une loi de transmission T_{moyen} -périodique. Nous pouvons ainsi comparé les lois événementielles et périodiques car elles génèrent la même quantité de transmissions. Nous constatons sur la figure 7.2 que l'approche périodique ne permet pas au robot de suivre la trajectoire de référence, contrairement à l'événementielle. L'avantage de cette dernière est claire ici. Des résultats similaires furent obtenus lorsque la trajectoire de référence décrit un 8, cf. figure 7.3.

Bibliographie

- [Abd14] M. Abdelrahim. *Output feedback event-triggered control*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2014.
- [AK18] D.J. Antunes and B.A. Khashooei. Consistent dynamic event-triggered policies for linear quadratic control. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 5(3) :1386–1398, 2018.
- [BH14] D. Borgers and W.P.M.H. Heemels. Event-separation properties of event-triggered control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(10) :2644–2656, 2014.
- [DHvdWH11] M.C.F. Donkers, W.P.M.H. Heemels, N. van de Wouw, and L. Hetel. Stability analysis of networked control systems using a switched linear systems approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(9) :2101–2115, 2011.
- [PBG⁺15] R. Postoyan, M.C. Bragagnolo, E. Galbrun, J. Daafouz, D. Nešić, and E.B. Castelan. Event-triggered tracking control of unicycle mobile robots. *Automatica*, 52 :302–308, 2015.
- [PSH19] R. Postoyan, R.G. Sanfelice, and W.P.M.H. Heemels. Inter-event times analysis for planar linear event-triggered controlled systems. In *IEEE Conference on Decision and Control, Nice : France*, 2019.