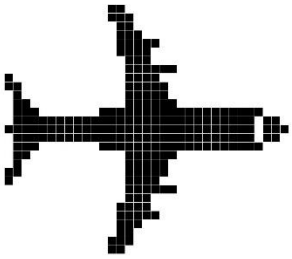
Hochschule Bielefeld
University of Applied Sciences and Arts

Schnelles Boarding

Simulation mit zellulären Automaten



Master-Seminar SoSe 2023

vorgelegt von:	Jolan Eggers 1219436 Arrode 9 33790 Halle Westfalen jolan.eggers@gmail.com
Studiengang:	Optimierung und Simulation HSBI 1. Semester
Erstgutachter:	Prof. Dr. rer. nat., Dipl.-Math. Svetozara Petrova
Zweitgutachter:	
Ort und Datum	Bielefeld, 22.06.2023

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung und Motivation

Zelluläre Automaten beschreiben ein System von Spielern, im Falle dieser Arbeit Flugzeugpassagieren, die sich nach exakt gleichen Regeln verhalten, die auf ihre Nachbarschaft angewandt werden, (Scholz, 2013). Ein einfaches Beispiel wäre hier, ein eindimensionaler Gang, z.B. der Mittelgang eines Flugzeugs, der mit Passagieren gefüllt ist. Jeder Passagier sieht genau einen Meter nach vorne, dies wird als die „Nachbarschaft“ bezeichnet und soll sich solange fortbewegen, bis dieser den nächsten Passagier sieht. Diese einfache Regel würde zwar nicht ausreichen, um den gesamten Boarding-Prozess eines Flugzeugs zu beschreiben, da ein Passagier so weder seinen Sitz finden, sein Gepäck verstauen oder anderen Personen ausweichen würde, allerdings bietet es einen guten Startpunkt.

Die nächste Frage, die sich stellt, ist, für welche Zwecke ein solches Modell benötigt wird. Das Boarding eines Flugzeugs ist bei Kurzstreckenflügen mit ca. 10 bis 20 Minuten für ca. 30-50% der Standzeit verantwortlich (Eiselin, 2016). Da bei einem längeren Aufenthalt durch Gate-Gebühren, Personal, erhöhtem Treibstoffverbrauch etc. höhere Kosten entstehen, gilt es diesen zu vermeiden, bzw. zu reduzieren. Des Weiteren geht es dabei nicht darum eine theoretisch optimale Methode zu finden, sondern eine Methode, die eine gute Balance zwischen Geschwindigkeit und Zufriedenheit, bzw. Stress bei den Passagieren findet. Diese beiden Ziele stehen bei vielen Vorgehen im Konflikt, da bspw. bei der effizientesten Methode zuerst abwechselnd alle Fensterplätze von hinten nach vorne belegt werden, dann alle mittleren Sitze und dann alle Gang-Sitzplätze. Nicht nur, müsste bei dieser Methode jeder Passagier in der richtigen Reihenfolge vor dem Gate warten, sein Gepäck gleichzeig verstauen, sowie seinen Ziel-Sitzplatz bereits vor Augen haben, es werden auch Passagiere, die hinterher zusammen sitzen beim Boarding getrennt. Dies kann vor allen Dingen bei Familien mit Kindern zu Problemen führen. Vielmals verhalten sich Menschen nicht rational und wollen als ersten im Flugzeug sitzen, obwohl die Gesamtgeschwindigkeit dadurch reduziert wird. Hinzu kommen die vielen individuellen Faktoren, wie z.B. Geschwindigkeit, Kooperationsbereitschaft, Gepäckgröße usw., die eine einfache Antwort auf dieses Problem verhindern. Ziel dieser Arbeit ist es also zunächst ein Modell des Flugzeug-Boarding Prozesses aufzubauen und daraufhin verschiedene Strategien basierend auf Simone Göttlichs „Schnelles Boarding leichtgemacht: Eine Simulationsstudie mit zellulären Automaten“ zu analysieren.

2 Stand der Technik

2.1 Zelluläre Automaten

„Zelluläre Automaten wurden erstmalig im Jahr 1940 von Stanislaw Marcin Ulam vorgestellt.“ (Kretzer, 2010) Später wurde, basierend auf diesem Konzept, von seinem Kollegen John von Neumann, die Von-Neumann-Architektur entwickelt, auf der alle modernen Computer basieren. Da aus einem Satz einfacher Regeln ein komplexes Gesamtverhalten emergieren kann, bieten sich zelluläre Automaten des Weiteren ideal an, um künstliches Leben, bzw. Evolution und Selbstreproduktion zu simulieren (Kretzer, 2010).

Im Folgenden werden nach (Scholz, 2013) die 6 Größen beschrieben anhand dessen sich ein System von Zellulären Automaten beschrieben werden kann.

Spielfeld: Das Spielfeld, beschreibt die Umgebung, in der die Simulation abläuft. Dabei kann das Spielfeld beliebig viele Dimensionen, mit beliebiger Größe besitzen. Meistens handelt es sich jedoch um ein 1–3-dimensionales „Spielbrett“ mit endlicher Größe und diskreten Schritten, sodass das Spielfeld als eine n-Dimensionale Matrix beschrieben werden kann. Jedes Feld, also jeder Eintrag dieser Matrix kann dabei genau einen Zustand einnehmen. Dieses „Feld“ wird auch als Zelle bezeichnet. Ein Beispiel für ein 4x4 Spielfeld zum Zeitpunkt t würde dabei folgendermaßen aussehen:

$$X_t = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \quad (1)$$

Zustände: Die Zustandsmenge $Q = \{q_1, \dots q_s\}$ definiert alle möglichen Zustände, die eine Zelle theoretisch einnehmen könnte, beispielsweise:

$$Q = \{0 \coloneqq kein\ Passagier\ auf\ dieser\ Zelle, 1 \coloneqq Passagier\ auf\ dieser\ Zelle\}$$

Ein Spielfeld besitzt somit $\dim(Q)^{i*j}$ theoretische Gesamtzustände, wobei i und j die Größe des Spielfelds definieren.

Nachbarschaft: Die Nachbarschaft einer Zelle beschreibt die Umgebung einer Zelle aufgrund dessen sich ihr Verhalten errechnet. Um den Zustand einer Zelle zum Zeitpunkt $x_{i,j}(t+1)$ zu berechnen, werden die Informationen der Nachbarschaft benötigt:

$$x_{i,j}(t+1) = S(x_{i-\frac{a-1}{2},j-\frac{a-1}{2}}(t+1), x_{i-\frac{a-1}{2}+1,j-\frac{a-1}{2}}(t+1), \dots x_{i+\frac{a-1}{2},j+\frac{a-1}{2}}(t+1)) \quad (2)$$

a*b ist dabei die Größe der Nachbarschaft, wobei im generellen von einer symmetrischen, quadratischen Verteilung um eine Zelle ausgegangen wird, auch Moore-Nachbarschaft genannt. Auch denkbar wäre eine Von-Neumann-Nachbarschaft, bei der jeweils die vier direkt angrenzenden Zellen betrachtet werden. Wenn also der Zustand $x_{2,2}(t+1)$ aus der oben gegebenen Matrix berechnen werden soll, müssten, bei einer Nachbarschaftsgröße von 3*3, folgende Zustände mit einbezogen werden:

$$X_t = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \quad (3)$$

Schritte: Die Schrittfunktion, hier S genannt, berechnet den nächsten Zustand einer Zelle basierend auf ihrer Nachbarschaft. Die interne Berechnung dieser Funktion kann dabei beliebig komplex sein. Ein einfaches Beispiel einer solchen Funktion wäre die Bedingung, dass eine Zelle 1 wird, genau dann, wenn die Summe ihrer Nachbarschaft ≥ 7 ist:

$$x_{i,j}(t+1) = 1 + sign\left(\sum_{m=i-\frac{a-1}{2}}^{i+\frac{a-1}{2}} \sum_{n=j-\frac{b-1}{2}}^{j+\frac{b-1}{2}} x_{m,n}(t) \quad - 7\right) \quad (4)$$

Im Beispiel oben würde $x_{2,2}(t+1) = 0$ sein, da lediglich 5 Zellen aus der Nachbarschaft = 1 sind. Der Schritt wird gleichzeitig, nicht der Reihe nach (!), auf jede Zelle angewandt.

Randbedingungen: Bei jedem endlichen Spielfeld müssen Randbedingungen aufgestellt werden, da die oben beschriebene „Schritt Berechnung“ am Rand, bspw. für $x_{1,1}$ nicht ausführbar wäre, da der Zustand von $x_{0,0}$ benötigt werden würde, der nicht definiert ist. Eine mögliche Lösung wäre hier alle Randzellen statisch zu definieren, sodass die Schrittberechnung nur auf den inneren Zellen Erfolgen muss.

Startkonfiguration: Die Startkonfiguration beschreibt den Gesamtzustand X_{t0} zum Startzeitpunkt. Da es sich in den meisten Fällen um ein deterministisches System handelt,

wird aufgrund des Startzustand jeder weitere Zustand X_{tn} eindeutig beschrieben.

2.2 Conways Game of Life

2.2.1 Aufbau und Regeln

Um ein Verständnis für die Funktionsweise und den Aufbau zellulärer Automaten zu bekommen wird zunächst Conways Game of Life in Python implementiert. Bei Conways Game of Life handelt es sich um ein zweidimensionales System, mit einem Spielfeld unendlicher Größe und zeitlich und räumlich diskreten Schritten, bei dem jede Zelle entweder lebendig oder tot sein kann. Die Nachbarschaft hat eine Größe von 3*3, allerdings wird der eigene Zellzustand nicht mitbetrachtet, sodass 8 Zustände in die Berechnung eines einzelnen Zellschritts einfließen. Für eine Zelle gelten die folgenden beiden Regeln, um den nächsten Zustand zu berechnen:

Wenn eine Zelle genau 3 Nachbarn hat, wird diese im nächsten Zustand leben

Wenn eine Zelle weniger als 2 lebende Nachbarn oder mehr als 3 Nachbarn hat stirbt diese („Einsamkeit“ und „Überbevölkerung“).

Wenn keiner dieser Fälle Eintritt, bleibt die Zelle unverändert.

2.2.2 Implementierung in Python

Für die Ausgabe wird die Bibliothek „pygame“ verwendet, sodass die Zellen grafisch dargestellt werden können.

Die Variable “cellState = np.zeros((envHeight, envWidth))” wird als Matrix von Nullen initialisiert, sodass der Zustand jeder Zelle hier gespeichert werden kann:

$$Q = \begin{Bmatrix} 0 := Zelle\ lebt\ nicht \\ 1 := Zelle\ lebt \end{Bmatrix}$$

Es wird eine Funktion „showSpace()“ definiert, die den Zustand der Matrix visuell ausgibt, indem Kästchen mit einer lebenden Zelle schwarz und mit einer toten Zelle weiß gefärbt werden. Mithilfe der Funktion „initEnv()“ wird die Matrix mit einem Initialzustand gestartet. Dazu werden im ersten Schritt die Felder zunächst einzeln beschrieben:

```
def initEnv():
    cellState[3][1] = 1
    cellState[1][2] = 1
    cellState[3][2] = 1
    cellState[2][3] = 1
    cellState[3][3] = 1
```

Werden nun die Funktionen „initEnv()“ und „showSpace()“ nacheinander aufgerufen, ist folgendes Fenster zu erkennen:

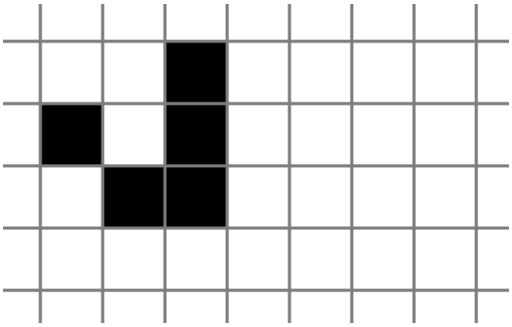


Abbildung 1: Conway's Game of Life showSpace()

Diese „Gebilde“ ist eine einfache Form eines sogenannten Gleiters. Ein Gleiter ist eine Struktur aus Zellen, die sich mithilfe der gesetzten Regeln eigenständig fortbewegen kann. Um eine solche Bewegung nun zu realisieren, wird die Funktion „nextStep()“ eingeführt in der die Regeln auf die Zellen in einem Zeitschritt angewendet werden. Dazu wird zunächst der cellState in eine zweite Variable kopiert, „cellStateCache“, auf der die Änderungen angewandt werden, sodass es nicht zu Änderungen kommt, die sich gegenseitig überschreiben. Danach wird über jede Position der Matrix iteriert und die Regeln angewandt. Dazu wird zunächst ermittelt wie viele der Nachbarn leben, indem die umliegenden Zellen aufaddiert werden:

neighbourAliveCount=cellState[x1][y+1]+cellState[x][y+1]+cellState[x+1][y+1]+
cellState[x-1][y]+cellState[x+1][y]+cellState[x-1][y-1]+cellState[x][y-1]+cellState[x+1][y-1]

Daraufhin können die beiden Regeln implementiert werden, die bestimmen, ob Zellen geboren werden oder sterben:

```
if neighbourAliveCount == 3:  # new cell gets born
    cellStateCache[x][y] = 1
if neighbourAliveCount < 2 or neighbourAliveCount > 3:  # cells dies
    cellStateCache[x][y] = 0
```

Als letztes wird der cellStateCache in den CellState zurück kopiert. Wird die Funktion „nextStep()“ nun jede Sekunde ausgeführt kann man den zuvor beschriebenen Gleiter beobachten:

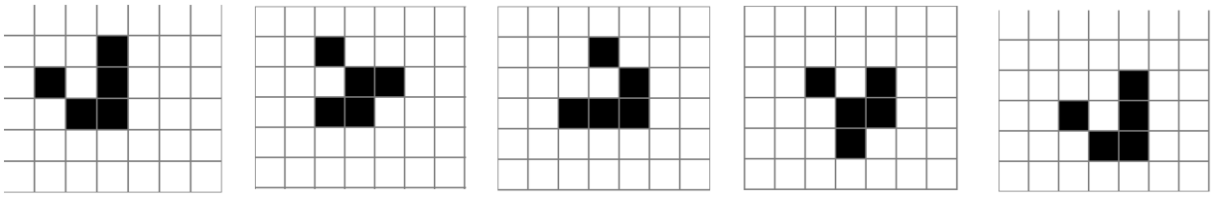


Abbildung 2:Conways Game of Life - Gleiter Schrittfolge

Dabei ist zu erkennen, dass die Struktur nach 4 Zyklen wieder im Ausgangszustand endet, allerdings jeweils eine Zelle nach rechts bzw. unten verschoben ist, sodass sich das Gebilde kontinuierlich weiterbewegt. Es wird dabei zunächst von einem unendlich großen Raum ausgegangen, sodass keine weiteren Randbedingungen benötigt werden.

Da Conways Game of Life Turing komplett ist lässt sich jede erdenkliche Berechnung, die auf „normalen“ Computern zu tätigen ist, auch in Conways Game of Life realisieren. Das Flugzeug des Titelblatts ist dabei auch eine mögliche Startkonfiguration. Eine Demonstration für die zu erreichende Komplexität ist, dass selbst Conway‘s Game of Life in Conway‘s Game of Life simuliert werden kann:

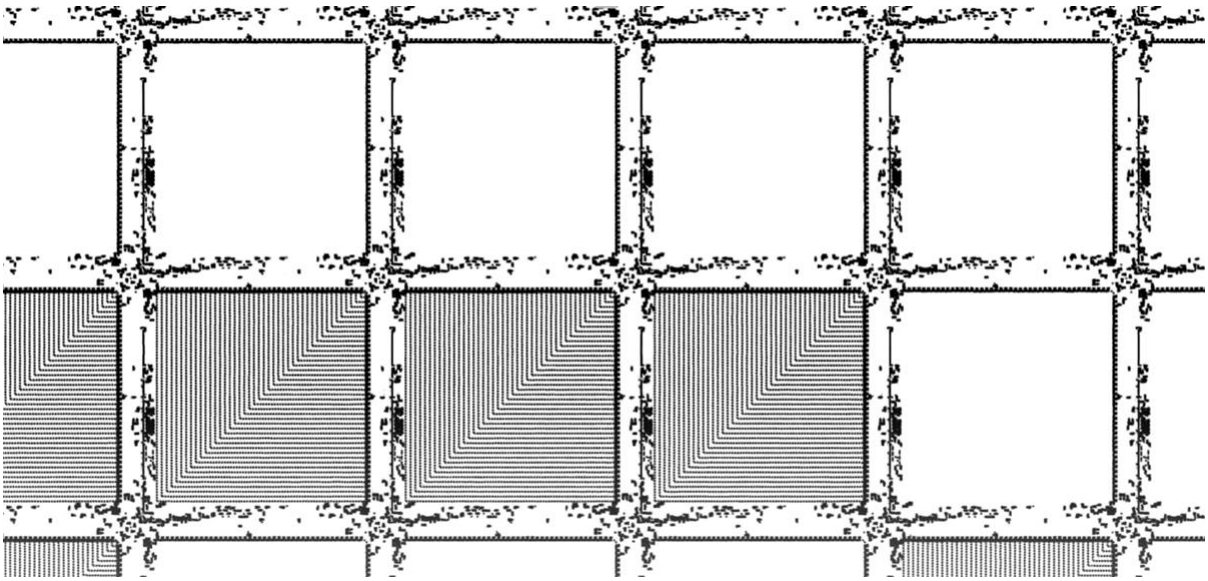


Abbildung 3: Conway's Game of Life in Conway's Game of Life (Bradbury, 2012)

2.3 Einsatzgebiete Zellulärer Automaten

Zelluläre Automaten werden u.a. auf den Gebieten der Biologie, Physik, aber vor allem auch auf dem Gebiet der Epidemiologie oder Verkehrssimulation verwendet (Scholz, 2013). Insgesamt eignen sich zelluläre Automaten bei fast jedem System, das aus einer Vielzahl von Objekten besteht, die alle ein gleiches oder ähnliches Verhalten aufweisen und miteinander in einer Umgebung interagieren.

3 Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit ist es zunächst ein Modell des Flugzeug-Boarding Prozesses aufzubauen und daraufhin verschiedene Strategien basierend auf Simone Göttlichs „Schnelles Boarding leichtgemacht: Eine Simulationsstudie mit zellulären Automaten“ zu analysieren. Zunächst wird dabei versuch die beschriebene Vorgehensweise Schritt für Schritt in Python zu implementieren. Wenn die Ergebnisse dieses Papers validiert werden konnten, wird versucht darüber hinaus eine komplexere Simulation zu erzeugen, indem versucht wird die angesprochenen Schwächen zu reduzieren. Einer der grundlegenden Schwächen ist dabei die Simplifizierung des Sitzwechsel-Vorgangs, da lediglich mit einer Wartezeit simuliert wird und nicht mit einer realen Bewegung der Personen. Vielmals kann ein solcher Sitzwechsel-Vorgang allerdings weitreichende Folgen haben, da es häufig dazu kommt, dass nicht genügend Platz im Gang ist, damit zwei Personen den Sitz verlassen ohne, dass sich die gesamte Reihe an dahinterstehenden Leuten zurückbewegt. So könnte bspw. nicht mitsimuliert werden, ob eine andere Geometrie des Innenraums zu einem besseren Boarding Prozess führt. Dies ist auch der geringen räumlichen Auflösung geschuldet. Bei dem Spielbrett der Quelle handelt es sich um eine Zellengröße von 0,5x0,5m, sodass ein Sitz auch nicht mit 0,6 oder 0,3 m simuliert werden kann. Darüber hinaus wird zwar mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Gepäck verstauen gerechnet, allerdings können die Passagiere keine individuellen Eigenschaften besitzen, wie bspw. verschiedene Größen, Geschwindigkeiten oder Familienangehörige. Ziel ist es also ein Modell aufzubauen und statistisch zu validieren, dass in diesen Kategorien eine höhere Auflösung bietet.

4 Variantenuntersuchung

Die oben beschriebenen Bedingungen werden nun Schritt für Schritt auf den Boarding Prozess eines Flugzeugs übertragen, sodass eine erste Simulation aufgebaut werden kann.

4.1 Reproduktion des Ausgangsmodells

4.1.1 Spielfeld

Beim Spielfeld handelt es sich um ein zweidimensionales Feld, welches zunächst mit der Größe 12x7 initialisiert wird. Dabei ist zu beachten, dass es sich um kein homogenes Spielfeld wie im „Game of life“ handelt, da sich die zellulären Automaten anders verhalten sollen, je nachdem, ob sich diese gerade im Gang, zwischen den Sitzen oder auf einem Sitz befinden. Dieses Verhalten soll im Nachhinein noch beliebig angepasst werden können. Deswegen wird neben der Matrix „cellState“ eine Variable „environment“ mit der gleichen Dimension erstellt, die für jede Zelle die Umgebung beschreibt.

4.1.2 Zustände

Globale Zustände

Die Zustandsmenge Q beschränkt sich in diesem Fall auf die beiden Zustände

$$Q_c = \{0 \coloneqq kein\ Passagier\ auf\ dieser\ Zelle, 1 \coloneqq Passagier\ auf\ dieser\ Zelle\}.$$

Da neben dem cellState allerdings auch noch die Umgebung definiert werden muss wird eine zweite Zustandsmenge für das environment aufgestellt:

$$Q_e = \{0 \coloneqq freier\ Raum, 1 \coloneqq Sitzplatz, 2 \coloneqq Wand\}.$$

Diese beiden Zustandsmengen lassen sich zwar zu einer kombinieren, allerdings ist für die saubere Ausarbeitung eine Trennung geeigneter.

Interne Zustände

Es ist davon auszugehen, dass bereits in der Arbeit von Simone Göttlich mit internen Zuständen der Zellen gearbeitet wurde, da in Abschnitt 8.2.5 „Algorithmus zellulärer Automat“ in Schritt 2 davon gesprochen wird bei der passenden Sitzreihe links oder rechts abzubiegen. Dies spricht dafür, dass jeder Zelle von Anfang an einen Sitzplatz zugewiesen

wird, der intern gespeichert wird. Damit ist im Gegensatz zu Conways Game of Life der nächste Globale Zustand nicht allein aus dem Globalen Zustand zu bestimmen, sodass zwei gleich aussehende Spielfelder in einem anderen nächsten Zustand resultieren können.

Es ist zwar möglich den internen Zustand einer Zelle in der gesamt-Zustandsmatrix zu kodieren:

$$Q_c = \{0 \coloneqq kein\ Passagier\ ,1 \coloneqq junger\ Passagier, 2 \coloneqq\ alter\ Passagier\}$$

allerdings wird dies schnell unübersichtlich, bzw. führt zu einer exponentiell wachsenden Zustandsraumbeschreibung, wenn neben dem Alter noch Faktoren, wie bspw. Zielsitzplatz, Größe, Gewicht, Verspätung, etc. eine Rolle spielen sollen. Deshalb bietet es sich an jede aktive Zelle als ein einzelnes Objekt zu beschreiben und die notwendigen Informationen dort zu speichern. Wenn alle Informationen einer Zelle intern gespeichert werden, wäre theoretisch auch keine Zustandsmenge Q_c mehr notwendig, da auch die Position mit in der Datenstruktur des Objekts gespeichert werden kann, allerdings würde dies die Ermittlung der Nachbarschaft einer Zelle erschweren. Deshalb wird die Zustandsmenge Q_c weiterhin verwendet, allerdings wird in ihr nicht nur kodiert, ob ein Passagier in der Zelle vorhanden ist, sondern auch welcher Passagier auf der Zelle steht, indem jeder Passagier mit einem Index versehen wird:

$$Q_c = \{0 \coloneqq kein\ Passagier\ ,$$

$$1 \coloneqq Passagier\ 1,$$

$$2 \coloneqq\ Passagier\ 1$$

$$\dots$$

$$n{:}\ Passagier\ n\}$$

Alternativ könnten hier auch für jeden Passagier über alle anderen Passagiere iteriert werden (ineffizient) oder Datenstrukturen wie bspw. „spatial hash maps“ verwendet werden, um die Bestimmung der Nachbarn einfacher zu gestalten.

4.1.3 Nachbarschaft

Auf die Nachbarschaft einer Zelle werden im nächsten Abschnitt die Regeln angewandt. Die Größe der Nachbarschaft beschreibt, wie groß der Einflussbereich der Umgebung auf eine Zelle ist. Um die Programmierung möglichst einfach zu halten, wird hier, genau wie bei „Conways Game of life“ eine Umgebung mit einer Größe von 3x3 Pixeln gewählt.

4.1.4 Schritte

Um aus der Zustandsmatrix Q_C, den internen Zuständen Q_i und dem Zustand der Umgebung zum Zeitpunkt t den nächsten Zeitschritt $t+1$ zu generieren, müssen gewisse Regeln definiert werden. Da ohnehin schon interne Zustände definiert wurden, lohnt es sich ebenfalls den nächsten Schritt intern in einem Agenten zu berechnen.

4.1.5 Randbedingungen

Da sich der nächste Zustand einer Zelle aus den Zellen ihrer Nachbarschaft ergibt, muss festgelegt werden was passiert, wenn die Nachbarschaft an einer oder mehreren Seiten endet. Konkret kann dies zu Problemen führen, wenn über alle Felder einer Matrix iteriert wird und die Nachbarschaft wie folgt ausgerechnet wird:

```
for x in range(0, envWidth):
    for y in range(0, envHeight):
        neighbor = cell[x - 1][y + 1] + cell [x][y + 1] + cell [x + 1][y + 1]
```

Hier ist der Zustand aus den Indizes x=-1 oder x=envWidth+1 gefordert, der nicht definiert ist. Um das Problem für den Fall der Flugzeugsimulation zu lösen, wird zunächst der gesamte Bereich mit einer Wand umzogen, also einem Zustand, der sich nicht ändern kann, folglich auch keiner Berechnung bedarf, sodass nur noch von 1 bis envWidth-1 iteriert werden muss:

```
for x in range(1, envWidth-1):
    for y in range(1, envHeight-1):
        neighbor = cell[x - 1][y + 1] + cell [x][y + 1] + cell [x + 1][y + 1]]
```

4.1.6 Startkonfiguration

Als letzte Bedingung fehlen die Startbedingung, um eine Simulation zum Laufen zu bringen. Da sowohl Startkonfigurationen als auch Schritt-Regeln später geändert und untersucht werden sollen, wird hier nur auf eine Möglichkeit eingegangen. In der „initEnv()“ Funktion werden Sitzplätze wie folgt beschrieben:

```
def initEnv():
    for x in range(envWidth):
        for y in range(envHeight):
            if y != 3:
                if x % 2 == 1:
                    environment[x][y] = 1
```

So ist auf jeder zweiten Reihe ein Sitzplatz, außer auf der Mittellinie. Wenn nun für $x == 0 \,||\, x = endWidth - 1 \,||\, y == 0 \,||\, y = envHeight - 1$, die Umgebung auf 2 (Wand) gesetzt wird, erhält man folgende Umgebung:

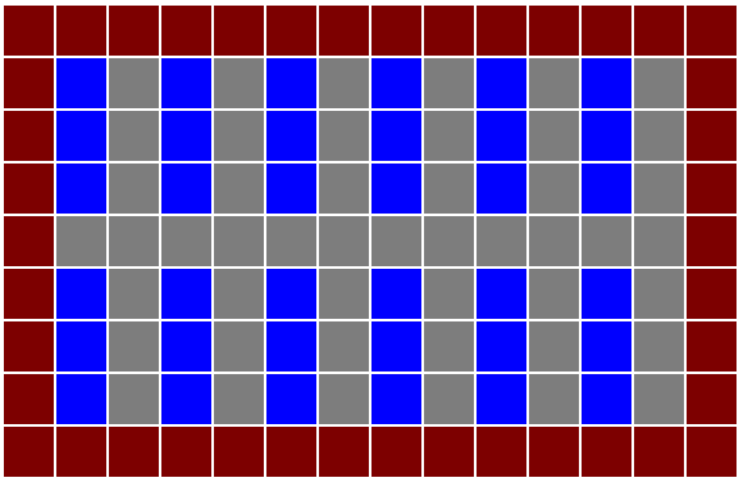


Abbildung 4: Erstes Flugzeug-Spielbrett

Die erste Zelle im Gang benötigt eine besondere Regel, damit Passagiere der Simulation hinzugefügt werden können. Die Passagiere können entweder nacheinander auf den ersten Platz „teleportiert“ werden, sobald dieser frei ist oder das Gateway zum Flugzeug kann mitsimuliert werden und die Simulation startet mit allen Passagieren bereits in der Simulation.

4.2 Erste Simulation

Für eine erste Simulation werden alle Randbedingungen so einfach wie möglich gehalten. Dazu wird alle 3 Schritte ein neuer Passagier an der Position (1,4) initialisiert, mit dem bekannten Ziel nextSeatX, nextSeatY:

```
entities.append(Entity(index=1, target=(nextSeatX, nextSeatY), position=(1, 4)))
entitiesToCellState()
```

Da es für eine erste Simulation zu möglich wenig Problemen kommen soll, wurde die optimale Strategie der Quelle gewählt, die „reverse Pyramid-Boarding“-Strategie, bei der zunächst von hinten die am Fenster gelegenen Sitze aufgefüllt werden , daraufhin die Sitzreihe weiter innen usw.:

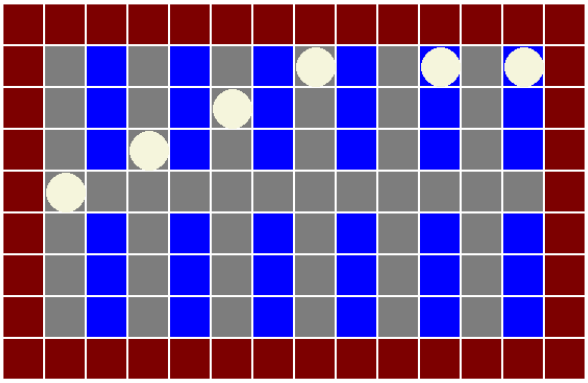


Abbildung 5: Erste Boarding-Simulation

Da es bei dieser Strategie zu keinen Kollisionen kommt und alle Passagiere bereits in der korrekten Reihenfolge bereitstehen, wird das Tauschen von Sitzplätzen oder das Verstauen von Gepäck zunächst nicht mit modelliert.

Übrig bleibt hier also nur noch die interne Logik der Passagiere zu beschreiben:

Ein Passagier soll so lange den mittleren Gang nach rechts durch gehen, bis dieser einen Pixel vor seinem Ziel-Sitz steht, also im Gang vor dem Sitz, dann soll diese Reihe so weit wie möglich nach oben, bzw. unten durchgegangen werden, bis die Y-Koordinate des Ziel-Sitzes der eigenen Y-Koordinate entspricht, woraufhin ein letzter Schritt nach rechts unternommen wird, um den finalen Sitzplatz einzunehmen:

```
def nextStep(self, cellStateInternal):
    x = self.position[0]
    y = self.position[1]
    if y == self.target[1]:
        if x < self.target[0]:
            self.position = (self.position[0] + 1, self.position[1])
    elif x == self.target[0] - 1:
        if self.target[1] > y:
            self.position = (self.position[0], self.position[1] + 1)
        if self.target[1] < y:
            self.position = (self.position[0], self.position[1] - 1)
    elif cellStateInternal[x + 1][y] == 0 and environment[x + 1][y] != 2:
        self.position = (self.position[0] + 1, self.position[1])
```

4.3 Erweiterung des Modells

Da in der Quelle bereits beschrieben wurde, dass eine der ersten zu verbessernden Abläufen das Verhalten zwischen zwei oder mehreren Passagieren beim Tauschen von Sitzplätzen ist, wird zunächst hier angegriffen: Das in der Quelle angewandte Verfahren beruht darauf eine Wartezeit für jeden Vorgang, basierend auf der Poisson-Verteilung, $P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ($\lambda =$

mittlere Ereignisrate), zu berechnen. Dabei gehen nützliche Informationen über das tatsächliche Verhalten der einzelnen Passagiere verloren, wie z.B., ob es zu einem übermäßigen Gedrängel kommt, was durch eine andere Gang-Geometrie vermindert werden könnte. Um ein solches Verhalten zu simulieren, bedarf es einer höheren räumlichen und möglicherweise auch zeitlichen Auflösung. Im (Paper) wird von einem Sitz und Gang-Maß von 0,5x0,5m ausgegangen, also einer Auflösung von $2\frac{Zellen}{m}$. Da noch nicht klar ist welche Auflösung letztendlich am besten für eine schnelle Simulation geeignet ist, werden Zeit-, sowieso Raumauflösung variabel gestaltet, wobei mit Werten von $10\frac{Zellen}{m}$ und einem Intervallschritt von einer Sekunde gestartet wird.

4.3.1 Zustandsraum

Die Änderung der Umgebung gestaltet sich trivial, da eine Matrix geringerer Auflösung lediglich hochskaliert werden muss (solange man nicht neues Detail hinzufügen möchte, wie bspw. eine andere Gang-Form oder abgerundete Sitze):

```
[[2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2.]
 [2. 0. 1. 0. 1. 0. 1. 0. 1. 2.]
 [2. 0. 1. 0. 1. 0. 1. 0. 1. 2.]
 [2. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 2.] →
 [2. 0. 1. 0. 1. 0. 1. 0. 1. 2.]
 [2. 0. 1. 0. 1. 0. 1. 0. 1. 2.]
 [2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2.]]

[[2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2.]
 [2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2.]
 [2. 2. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 2. 2.]
 [2. 2. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 2. 2.]
 [2. 2. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 2. 2.]
 [2. 2. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 2. 2.]
 [2. 2. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 2. 2.]
 [2. 2. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 2. 2.]
 [2. 2. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 2. 2.]
 [2. 2. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 2. 2.]
 [2. 2. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 2. 2.]
 [2. 2. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 0. 0. 1. 1. 2. 2.]
 [2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2.]
 [2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2.]]
```

```
environmentUpscale = np.zeros((envWidth*2, envHeight*2))
for x in range(envWidth*2):
    for y in range(envHeight*2):
        environmentUpscale[x][y]=environment[int(x/2)][int(y/2)]
```

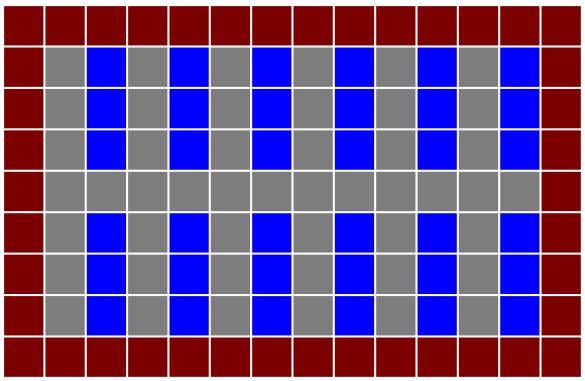


Abbildung 6: Spielbrett Auflösung "1"

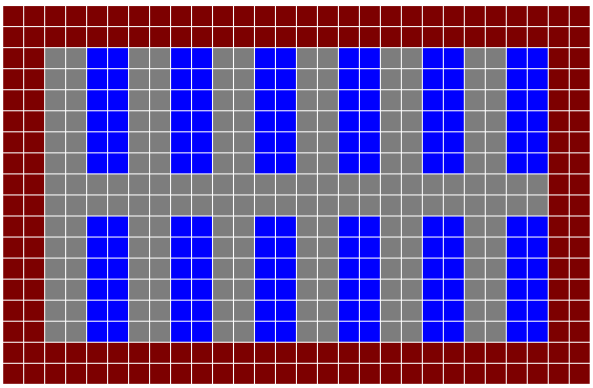


Abbildung 7: Spielbrett Auflösung "2"

Die Änderung des Zustandsraums der Passagiere gestaltet sich bereits etwas schwieriger, da ein Passagier nun nicht mehr eine Position im Raum einnimmt, sondern mehrere Felder. Deshalb wird in der Zustandsmatrix der Passagiere nur der Mittelpunkt der jeweiligen Passagiere gespeichert und die Größe der einzelnen Passagiere im internen Zustand des Passagiers. Dies muss in der Berechnung des nächsten Schritts beachtet werden, da nun die Umgebung nicht mehr aus 8 Zellen, sondern aus $\sim 8 * n^2$ Zellen. Das Spielbrett wird jeden Schritt geupdatet, indem aus der Fließkommazahl-Position der einzelnen Objekte, die nächste mögliche Zelle berechnet wird und der Index dieses Objekts in die Zelle geschrieben wird.

4.3.2 Passagier-Agent

Da eine Beschreibung über if/else-Statements, wie in Kapitel 4.2 schnell unübersichtlich werden kann, liegt nun jedem Passagier ein Agenten-basiertes Modell zugrunde, das die Verhaltensweise des Passagiers beschreibt. Dabei hat ein Passagier folgende Interne Zustände:

Variable	Erklärung
index	Name der Zelle (Platz in der Liste aller Passagiere)
target	x,y – Koordinaten des Ziels (Sitzplatz) in m
position	x,y – Koordinaten der derzeitigen Position in m
speed	Maximale Geschwindigkeit in m/s
diameter	Durchmesser der Person in m
seated	True/False: Gibt an, ob man auf dem Sitzplatz ist
luggageStored	True/False: Gibt an, ob das Gepäck bereits verstaut ist
luggageStoreTime	Zeit, die zum Gepäck verstauen benötigt wird in s
changeSeatFor	Index der Person für die man den Sitz wechseln soll
awaitingSeatChangeFor	Liste von Personen auf die gewartet wird, um den Sitz zu wechseln
state	Interner state (int), dient zur Koordination der Schritte

Die Zustände werden dabei als Instanzattribute der Klasse „Entity“ gespeichert. Alle Zustände besitzen Standartwerte, können aber auch beim Initialisieren überschrieben werden. Zusätzlich enthält diese Klasse alle internen Methoden, die notwendig sind, um einen nächsten Schritt auszuführen. Die grobe Schrittabfolge wird dabei im folgenden Aktivitätsdiagramm „Abbildung 8: Entity Aktivitätsdiagramm“ dargelegt.

Nachdem ein Passagier initialisiert wurde, wird zunächst die Funktion „moveToX“ aufgerufen, die den Passagier solange in X-Richtung nach vorne oder nach hinten bewegt, bis der Passagier an seiner Sitzreihe angekommen ist. Dabei besteht diese Funktion aus Unterfunktionen, sodass bspw. darauf geachtet werden kann, ob ein Passagier den Weg blockiert oder ob der Passagier vor sich dazu auffordert zurückzutreten, um Platz zu machen. Auf diese Funktionen wird separat nochmal eingegangen.

Als nächstes wird überprüft, ob der Passagier bereits sein Gepäck verstaut hat; falls nein, bleibt die Person so lange auf der Stelle stehen, bis das Gepäck verpackt ist. Daraufhin wird überprüft, ob Passagiere den Weg auf den eignen Sitzplatz versperren, also ob bereits Passagiere in der eigenen Reihe sitzen, dessen Sitzplatz näher am Gang sind als der eigene. Wenn dies der Fall ist, tritt die Person zunächst selbst zurück, woraufhin die Passagiere, die im Weg sind, gebeten werden den Sitz zu wechseln („tellOthersToChangeSeats“). Bei dem oder den Passagieren, die zuvor im Weg gesessen haben, wird nun die Abfrage „request to change seat“ wahr, sodass der oder die Passagiere zurück in den Gang und daraufhin aus dem Weg gehen. Darauf kann Passagier 1 den Sitz einnehmen, indem die Schleife wieder von vorne beginnt (move To X – move to Y Position – sit down). Die Passagiere, die Platz gemacht haben kehren ebenfalls zum eignen Sitz zurück, indem auch hier die Schleife von vorne beginnt.

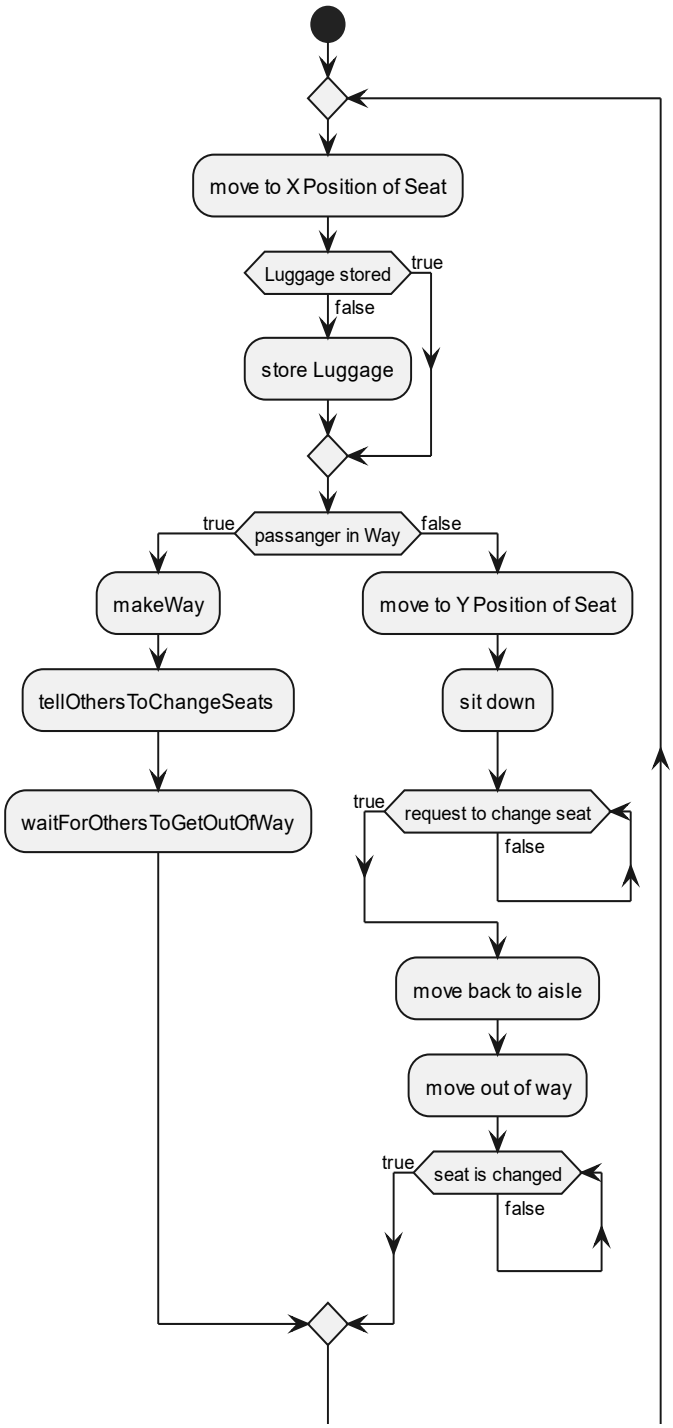


Abbildung 8: Entity Aktivitätsdiagramm

Um klar abzugrenzen in welchem Zustand sich jedes Objekt befindet, wird jeder Aktivität in „Abbildung 8: Entity Aktivitätsdiagramm“ ein state zugeordnet. So ist bspw. „move to X Position of Seat“ state 0, “store Luggage” state 1 usw. Jede Funktion kann den state ändern, sodass theoretisch jede Funktion zu jeder anderen Funktion springen könnte. Als Beispiel ein Ausschnitt des Codes:

```
if self.state == 4:
    self.makeWay(cellStateInternal, environmentInternal, entities)
if self.state == 5:
    self.tellOthersToChangeSeats(cellStateInternal, environmentInternal, entities)
if self.state == 6:
    self.waitForOthersToGetOutOfWay()
```

Bevor eine Person den nächsten Schritt macht, muss sichergestellt werden, dass es zu keiner Kollision kommt. Dafür wird die Funktion „collisionAtPoint(x,y)“ eingeführt, die zurückgibt, ob es am abgefragten Punkt zu einer Kollision kommt. Mögliche Antworten dieser Funktion wären bspw., dass an Punkt x,y im Umkreis des eigenen Durchmessers bereits eine Wand oder ein Sitz ist. Wenn eine Person im Weg steht, wird der Name (Index) der Person verwendet. Bei Personen unterscheidet sich das Vorgehen allerdings minimal, da Passagiere nicht nur über eine Zelle in der Matrix definiert werden, sondern auch über ihren Durchmesser. So wird zunächst eine Liste mit allen Personen in der Nachbarschaft erstellt, woraufhin über diese Liste iteriert und überprüft wird, ob der Abstand kleiner als die halbe Summe der Durchmesser ist. All diese möglichen Kollisionen werden in einer Liste zurückgegeben. Wenn die Liste leer ist, kann die Person den nächsten Schritt vollziehen. Wenn ein Passagier herausfinden will, ob ein anderer Passagier auf dem Pfad zum eignen Sitz im Weg steht/sitzt, wird die Funktion für mehrere Punkte auf der Geraden zwischen der Person selbst und dem Ziel ausgeführt und die Ergebnisse kombiniert und gefiltert, sodass eine Liste aller Personen zurückgegeben wird, die zwischen einem selbst und dem Ziel stehen. Diese Information kann im nächsten Schritt dazu verwendet werden die Passagiere aufzufordern den Platz zu wechseln. Als Beispiel eine Funktion, die in 11 Schritten alle Kollisionen zwischen dem Passagier und ihrem Ziel berechnet (das Summenzeichen dient hier als das Anhängen des Ergebnisses an eine Liste).

$$collisionsOnWay = \sum_{i=0}^{10} collisionAtPoint\left(\begin{pmatrix} xIst \\ yIst \end{pmatrix} * \frac{i}{10} + \begin{pmatrix} xZiel \\ yZiel \end{pmatrix} * \frac{10-i}{10}\right) \quad (5)$$

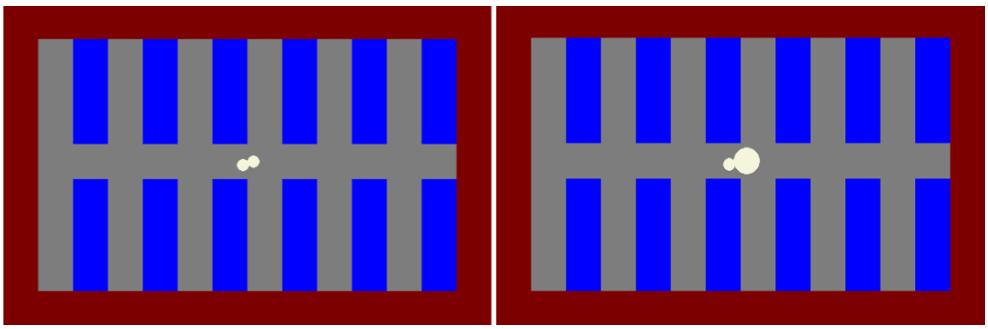


Abbildung 9: Kollision zweier Passagiere

Ein Sitzwechsel-Vorgang läuft dabei folgenderweise ab:

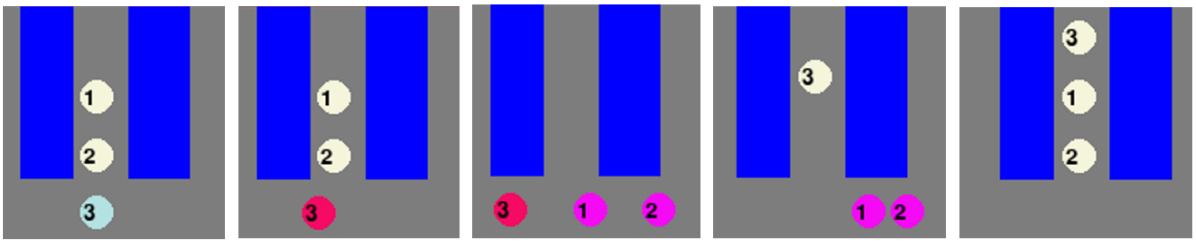


Abbildung 10: Sitzwechsel-Vorgang

4.3.3 Starten der Simulation

Um die Simulation starten zu können werden die benötigten Parameter über eine csv Datei in das Programm geladen. Im Folgenden ein Ausschnitt dieser Daten:

```
index,targetX,targetY,positionX,positionY,diameter,speed
1,     1.9,    1.25,    0.75,     2.24,      0.3,     1
2,     1.9,    1.75,    0.75,     2.24,      0.3,     1
3,     1.9,    0.75,    0.75,     2.24,      0.3,     1
```

Es werden für jeden Passagier Index, Ziel-Sitzplatz, Startposition und Geschwindigkeit übergeben. Es könnten auch weitere der oben beschriebenen inneren Zustände übergeben werden. Im Ablauf der Simulation werden diese Passagiere der Reihe nach der Simulation hinzugefügt, sobald an der gegebenen Position genug Platz vorhanden ist. Der interessante Teil ist dabei die Generierung der Zielposition, die am Ende darüber entscheiden um welche Boarding Strategie es sich handelt. Dafür wird in einem separaten Skript die csv Datei gemäß dem Passenden Verfahren erstellt. Wenn es sich um ein Verfahren handelt, bei dem nicht jeder Sitz fest vergeben ist, wie z.B. das random-Boarding, wird bei jedem Aufrufen des Skripts eine neue Sitzordnung generiert.

4.3.4 Realistische Daten

Damit die Simulation möglich realistisch gestaltet werden kann, muss diese mit möglichst realistischen Parametern initialisiert werden. Die maßgeblichen Parameter der Umgebung sind dabei der Sitzabstand, die Sitzbreite, sowie Sitztiefe und der Gangbreite.

Am Beispiel eines Lufthansa Airbus A321 lauten diese wie folgt:

Sitzabstand	0,79-0,89m
Sitzbreite	0,43-0,44m
Sitztiefe	0,5 m
Gangbreite	0,6 4m

(Lufthansa, 2023), (Fairliners, 2023)

Da über die Auflösung eine genauere Unterteilung erreicht werden kann, ist nicht, wie zuvor eine Zelle für einen Sitz reserviert, sodass die Maße in Metern gerechnet werden können und die entsprechende Anzahl an Zellen über die Auflösung ausgerechnet werden kann.

5 Finale Lösung

5.1 Statistische Auswertung

Um das Modell zu validieren, wurde ein Python Programm geschrieben, das zuerst eine neue, zufällige, aber auf dem Schema basierende, Sitzanordnung erzeug und daraufhin die Simulation startet. Danach wird das Ergebnis dieser Simulation in einer csv Datei gespeichert und Schritt 1 wiederholt. Alle Metaparamter, wie bspw. die Größe des Flugzeugs oder die Sitzanordnung, aber auch die Initialisierung der einzelnen Passagiere, wurden über alle Verfahren gleich gelassen. Konkret wurde dabei mit folgenden Parametern gearbeitet:

diameter	0,2 m
speed	1 m/s
storeLuggageTime	2 s
Sitzbreite	0,5 m
Sitztiefe	0,5 m
Sitzabstand	0,5 m
Gangbreite	0,5m
Sitzkonfiguration	3 Sitze rechts, 3 Sitze links
Anzahl Sitze	6 Sitze/Reihe * 11 Reihen = 66 Sitze

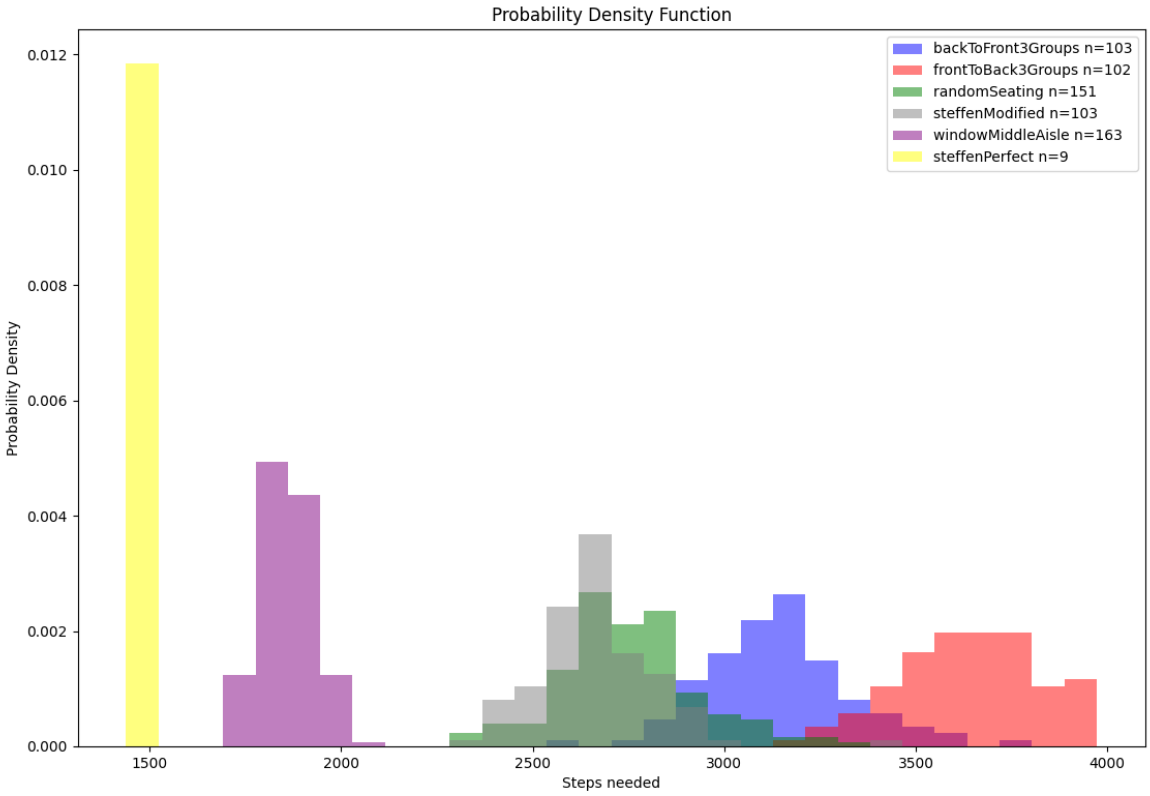


Abbildung 11: Wahrscheinlichkeitsverteilung verschiedener Boardingverfahren

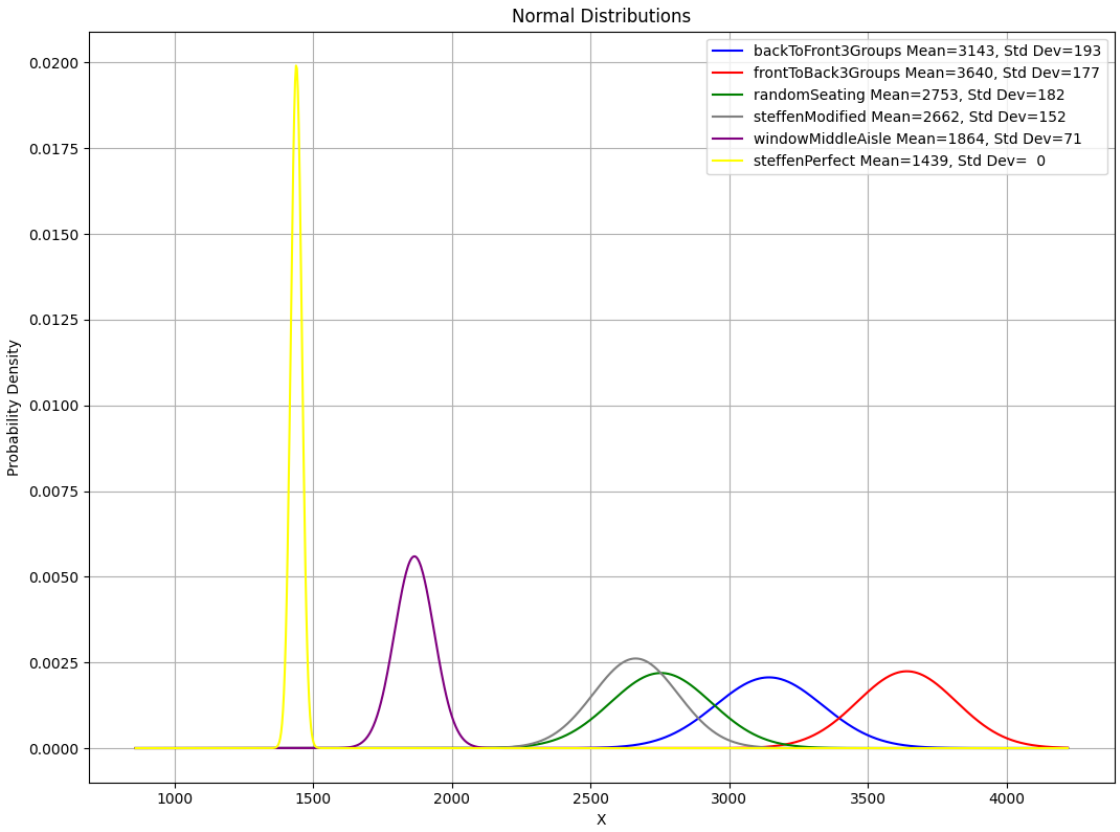


Abbildung 12: Normalverteilung der verschiedenen Boardingverfahren

An der Wahrscheinlichkeitsverteilung der verschiedenen Verfahren ist bereits, ein klarer Gewinner zu erkennen: „Steffen Perfect“. Bei diesem Verfahren gibt es bei n Passagieren auch n Boarding Gruppen. Beim Boarding wird jeweils eine Reihe Platz gelassen, sodass jeder sein eigenes Gepäck verstauen kann, ohne dass andere auf einen warten müssen und es wird von hinten nach vorne, bzw. von außen nach innen geboarded, sodass es zu keinen Sitzwechsel Vorgängen kommt. Die finale Anordnung ist in „Abbildung 13: Steffen Perfect Boardingverfahren“ zu erkennen. Da bei dieser Versuchsreihe eine Gepäck-Verstauzeit von 2 Sekunden verwendet wurde, ist dieses Verfahren, als einziges, komplett deterministisch, mit einer Standartabweichung $\sigma = 0$ (im Diagramm oben aus Anschauungszwecken erhöht).

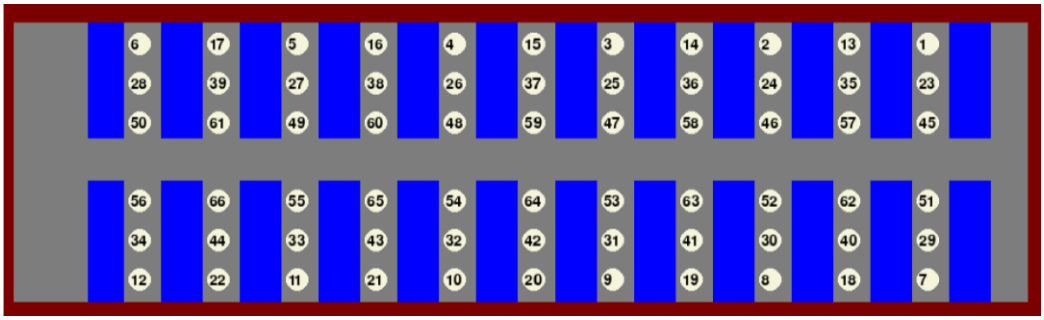


Abbildung 13: Steffen Perfect Boardingverfahren

Am langsamsten hingegen ist das Verfahren „frontToBack“. Dabei wird das Flugzeug in drei Gruppen geboarded, wobei zuerst die vorderen Passagiere das Flugzeug betreten, dann die mittleren und zum Schluss die Passagiere im hinteren Teil des Flugzeugs. Dieses Verfahren ist aus der oben getroffenen Auswahl das langsamste, da nur ein kleinstmöglicher Teil an Passagieren zu seinem Sitz kommt und die gesamte Masse an Leuten warten muss, wenn eine Person seinen Platz verlässt oder sein Gepäck verstaut, siehe „Abbildung 14: Front to Back Boarding“.

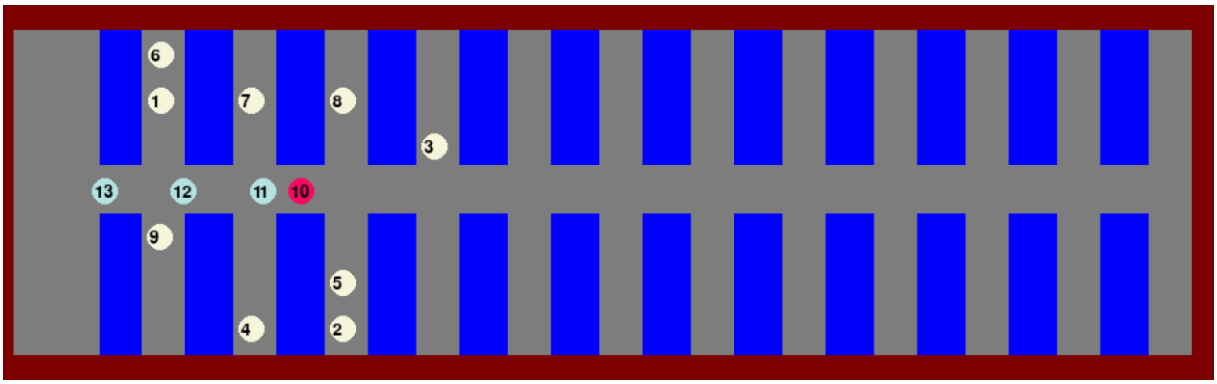


Abbildung 14: Front to Back Boarding

Wieso wird dieses Verfahren also modelliert? Obwohl das „Front to Back“ Verfahren praktisch das ineffizienteste Boarding Verfahren ist, kommt es dennoch häufig zum Einsatz. Zum einen bildet sich dieser, oder jedenfalls ein ähnlicher Ablauf, auf natürliche Weise von selbst, wenn das Flugzeug wieder verlassen wird, da zunächst alle vorderen Reihen einzeln geleert werden, bevor die hinteren Passagiere ihre Plätze verlassen können und zum anderen wird es bei Passagieren der ersten Klasse mit Absicht eingesetzt, da diese das Flugzeug zumeist als erstes betreten dürfen, aber die erste Klasse im vorderen Teil eines Flugzeugs lokalisiert ist.

Ein effizienteres Boarding Verfahren, laut Literatur und den eigenen Versuchen, ist das komplett zufällige Boarding, welches in Europa vorwiegend verwendet wird. Aufgrund der vielen zufälligen Faktoren hat dieses Verfahren allerdings mit die höchste Standartabweichung, sodass ein Erfolg nicht garantiert ist.

Die beiden Erfolgreichsten, realistischen Verfahren sind „window-middle-aisle“, bei dem in drei Gruppen von außen nach innen geboarded wird und „steffen Modiefied“, bei dem nach dem gleichen Ablauf wie bei „steffen Perfect“ geboarded wird, allerdings in 4, statt in n Gruppen.

In der oben gezeigten Versuchsreihe ist „window-middle-aisle“ der klare Sieger, allerdings ist dies dem Fakt geschuldet, dass der Sitzwechselprozess bei der gewählten Simulation negativer gewichtet wird, als das Gepäck verstauen. Da bei „window-middle-aisle“ keine Sitzwechsel erforderlich sind, ist dieses Verfahren im Vorteil.

Welchen Effekt die Gepäck-Verstauzeit auf das Ergebnis haben kann ist im folgenden Diagramm zu erkennen (Abbildung 15: Gepäck Verstauzeit vs. Gesamtzeit). Dabei wurden beispielhaft die beiden Verfahren „window-middle-aisle“ und „back to Front“ miteinander verglichen. Es ist zu erkennen, dass eine erhöhte Verstauzeit das Verfahren „back to Front“ negativer beeinflusst als „window-middle-aisle“. So kann es sein, dass die Verfahren ihre Rangliste ändern, wenn die Simulation mit verschiedenen Parametern initialisiert wird, allerdings scheinen die meisten Verfahren mit der Zeit eher zu divergieren.

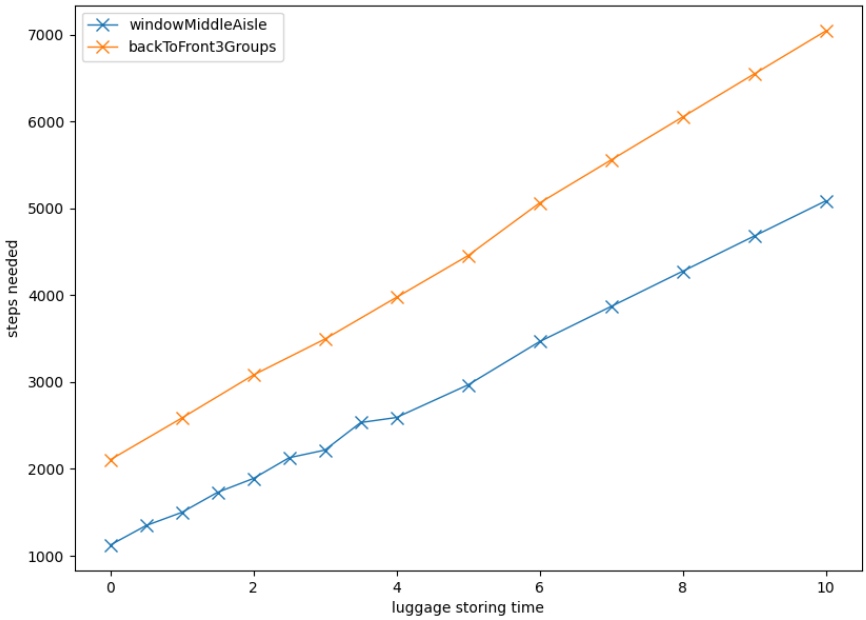


Abbildung 15: Gepäck Verstauzeit vs. Gesamtzeit

5.2 Quellcode

Der Code dieses Projekts, inklusive dieser Dokumentation und den Daten der statistischen Auswertung ist auf GitHub unter https://github.com/JolanEggers/CellularAutomata/ einzusehen. Um die Hauptsimulation zu starten, müssen die notwendigen Bibliotheken installiert werden und die Datei „main.py“ ausgeführt werden. In der Kommandozeile lässt sich dies mit dem Befehl „python main.py“ bewerkstelligen, vorausgesetzt Python ist installiert und man befindet sich im Projektordner.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein Modell des Flugezug-Boaradingprozesses aufgebaut und durch eine höhere räumliche, sowie zeitliche Auflösung verbessert. Des Weiteren wurde das Verhalten der einzelnen Passagiere realistischer gestaltet, indem jedem Passagier zu einem Agenten umgeschrieben wurde, der das Verhalten der Person bestimmt, sodass die Passagiere bspw. kommunizieren können, um den Sitzplatz zu wechseln. Das Flugzeugmodell ist variabel aufgebaut, sodass Sitzanzahl, Sitzgröße, Flugzeugform, aber auch die räumliche oder zeitliche Auflösung geändert werden können. Auch der Agent ist parametrisierbar, bzw. modular aufgebaut, sodass individuelle Eigenschaften wie Geschwindigkeit oder Größe angepasst werden können.

An dieser Stelle könnten zukünftig weitere Verhaltensmuster hinzugefügt werden, bspw., eine komplexere Pfadfindung, bei der Passagieren einander ausweichen können, wenn der Gang breit genug ist. So kann mithilfe dieses Modells bspw. auch eine gute Ganggröße ermittelt werden, bei der die Passagiere ihren Platz möglichst schnell den Platz erreichen, sodass nicht nur Boardingverhalten, sondern auch Flugzeugdesign mit einbezogen werden können. Eine Erweiterung im 3D-Raum wäre hier ebenfalls denkbar.

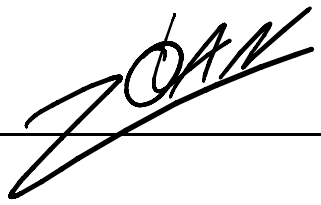
Obwohl das Modell qualitativ mit den vorangegangenen Studien übereinstimmt, da die gleichen Boarding Verfahren siegen, müsste für eine genauere Validierung bzw. Parameteranpassung der gleiche Boarding Prozess, bspw. „window-middle-aisle“ simuliert und in der Realität ausgeführt werden, um das Verhalten der einzelnen Passagiere abzugleichen und ein genaueres Modell zu erstellen. Auch muss eine gute Balance zwischen Performance und Auflösung gefunden werden. Zum einen hat der Code an einigen Stellen noch Optimierungsbedarf, bspw. bei der Kollisionsdetektierung. Des Weiteren sind zelluläre Automaten im Allgemeinen gut parallelisierbar, sodass einige Segmente auf der GPU ausgeführt werden können, um die CPU zu entlasten (hier ist i.d.R. ca. eine Größenordnung an Performance zu gewinnen).

Abschließend könnte dieses Programm mit anderen seiner Art verglichen oder über eine automatische Art der Boarding-Verfahren Optimierung nachgedacht werden.

7 Eigenständigkeitserklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende schriftliche Ausarbeitung selbstständig angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher weder in gleicher noch in ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Bielefeld, 22.06.2023 
Ort, Datum, Unterschrift

8 Bibliography

Bradbury, P. (13. 5 2012). *Life in life*. Von Youtube: https://www.youtube.com/watch?v=xP5-iIeKXE8 abgerufen

Conwaylife. (kein Datum). Von https://conwaylife.com/wiki/Tutorials/Rules abgerufen

Eiselin, S. (23. 11 2016). *So wird das Flugzeug-Boarding gravierend beschleunigt*. Von welt: https://www.welt.de/wirtschaft/aerotelegraph/article159692481/So-wird-das-Flugzeug-Boarding-gravierend-beschleunigt.html abgerufen

Fairliners. (2023). *Sitzabstand und Sitzbreite bekannter Airlines*. Von Fairliners: https://www.fairliners.com/sitzabstand.html abgerufen

Kretzer, Y. (1. 12 2010). *Zelluläre Automaten - Beispiel: Game of Life*. Von uni-goettingen: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/6905 abgerufen

Lufthansa. (2023). *Airbus A321-100/200*. Von Lufthansa: https://www.lufthansa.com/de/en/321 abgerufen

Scholz, D. (2013). Modellieren und Simulieren mit zellulären Automaten. Springer-Verlag. doi:10.1007/978-3-642-45131-7