线性代数

本附录用作线性代数的备忘单。该主题以一组工具、其属性以及您可以使用它们的用途的形式呈现。如果你对这一切背后的理论感兴趣，你可以拿起任何介绍性的线性代数教科书。

这里的重点完全是2D和3D代数，因为这是本书所要求的。

点

*点*表示坐标系内的位置。

我们将一个点表示为括号之间的数字序列，例如 $(4, 3)$。我们使用大写字母来指代点，例如 P 或 Q.

点序列中的每个数字称为*坐标*。坐标的数量是点的*维度*。具有两个坐标的点称为二维或 2D。

数字的顺序很重要；$(4, 3)$与$(3, 4)$不同，按照惯例，坐标在 2D 中称的x和y，在 3D中称为x,y和z;因此点 $(4, 3)$的x坐标为4和y的坐标为3.
图 A-1 显示P，带有坐标的 2D 点 $(4, 3)$

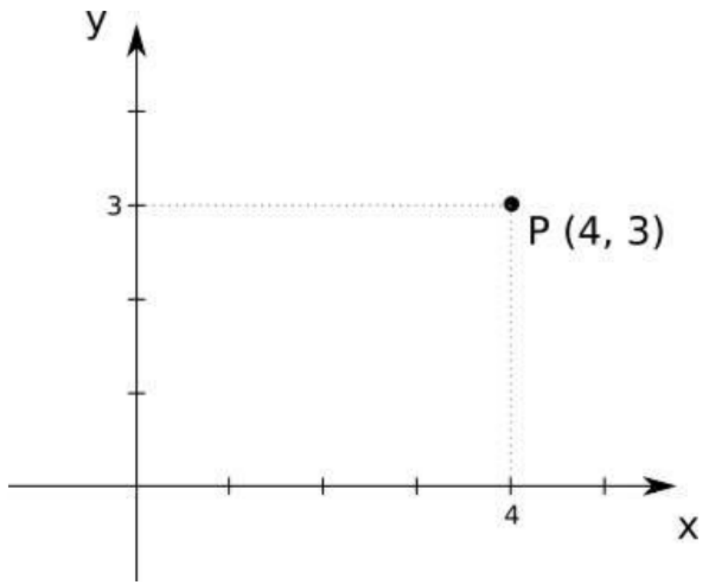


图 A-1：2D 点 P 具有坐标 （4， 3）。

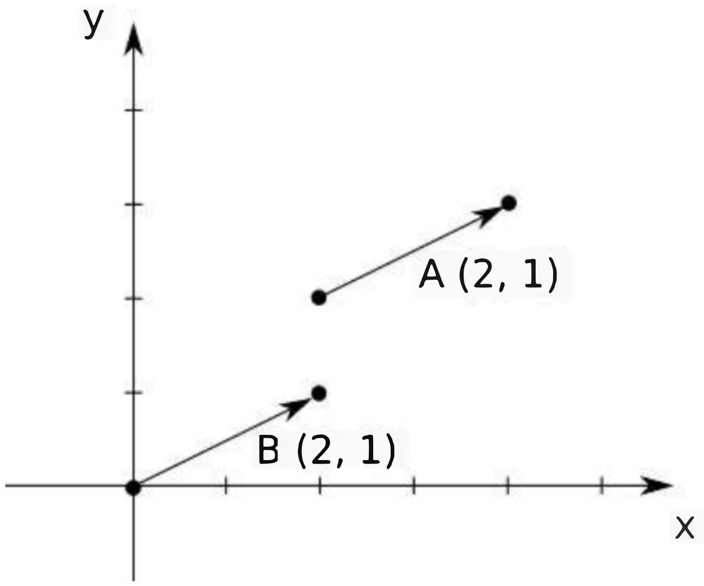
我们还可以使用下标引用点的特定坐标，例如P_x或Q_y.所以重点P也可以写成(P_x, P_y, P_z)方便的时候。

向量

*向量*表示两点之间的差异。直观地，将向量想象为将一个点连接到另一个点的箭头;或者，将其视为从一个点到另一个点的说明。

表示向量

我们将向量表示为括号之间的一组数字，并使用大写字母引用它们。这与我们用于点的表示形式相同，因此我们在顶部添加一个小箭头以记住它们是向量而不是点。例如 (2, 1)个向量，我们可能会决定称之为 $\vec{A}$ 。图A-2 显示了两个相等的向量，$\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 。



图A-2：矢量$\vec{A}$和$\vec{B}$是平等的。向量没有位置。

尽管向量与点共享它们的表示，但并不表示或具有位置;毕竟，它们是两个立场之间的*区别*。当你有一个像图A-2这样的图表时，你必须在某处绘制向量;但是矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 是相等的，因为它们代表相同的位移。

此外，要点 (2, 1)和矢量 (2, 1)不相关。当然，矢量 (2, 1)是从 (0, 0)到 (2, 1)，同样正确的是，它来自，比如说，(5, 5)到(7, . 6)

矢量的特征在于它们*的方向*（它们指向的角度）和它们的大小*（它们有多长*）。

方向可以进一步分解为*方向*（它们所在线的斜率）和*感觉*（它们指向该线的可能两种方式中的哪一种）。例如，指向右的向量和指向左侧的向量都具有相同的水平方向，但它们具有相反的意义。然而，我们在本书的任何地方都没有做出这种区分。

矢量幅度

您可以从矢量的坐标计算矢量的大小。量级也称为矢量的*长度*或*范数*。它通过将向量放在垂直管道之间来表示，如$|\vec{V}|$ 计算方法如下:

$$|\vec{V}| = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2 + {V_z}^2}$$

量级等于1.0称为*单位向量*。

点和矢量运算

现在我们已经定义了点和向量，让我们探索一下我们可以用它们做什么。

减去点

向量是两点之间的差。换句话说，你可以减去两个点并得到一个向量:

$$\vec{V} = P - 问$$

在这种情况下，您可以想到$\vec{V}$作为“去” 从Q自P，如图 A-3 所示。

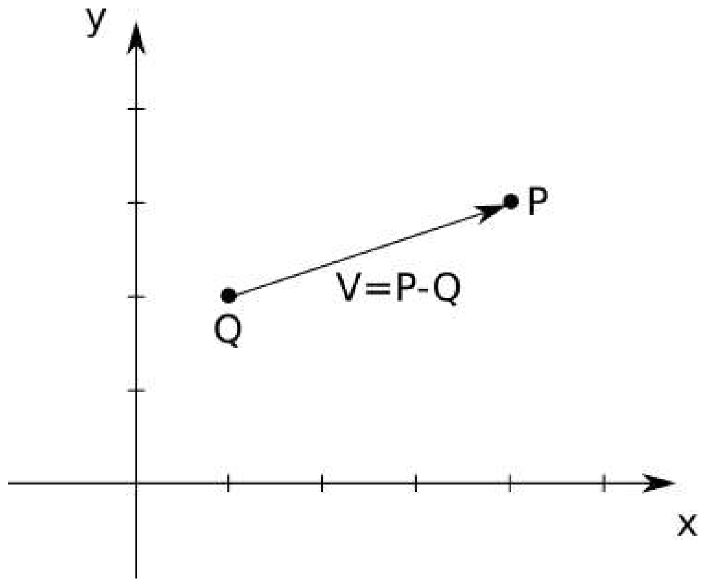


图 A-3：矢量$\vec{V}$是 P 和 Q 之间的差值。

代数上，您分别减去每个坐标：

$$(V_x, V_y, V_z) = (P_x, P_y, P_z) - (Q_x, Q_y, Q_z) = (P_x - Q_x, P_y - Q_y, P_z - Q_z)$$

添加点和矢量

我们可以通过坐标重写上面的坐标方程：

$$V_x = P_x - Q_x$$

$$V_y = P_y - Q_y$$

$$V_z = P_z - Q_z$$

这些只是数字，因此所有通常的规则都适用。这意味着您可以执行以下操作：

$$Q_x + V_x = P_x$$

$$Q_y + V_y = P_y$$

$$Q_z + V_z = P_z$$

并再次对坐标进行分组，

$$Q + \vec{V} = P$$

换句话说，您可以向点添加向量并获取新点。这具有直观和几何意义;给定一个起始位置（一个点）和一个位移（一个矢量），你最终会得到一个新的位置（另一个点）。图A-4给出了一个示例。

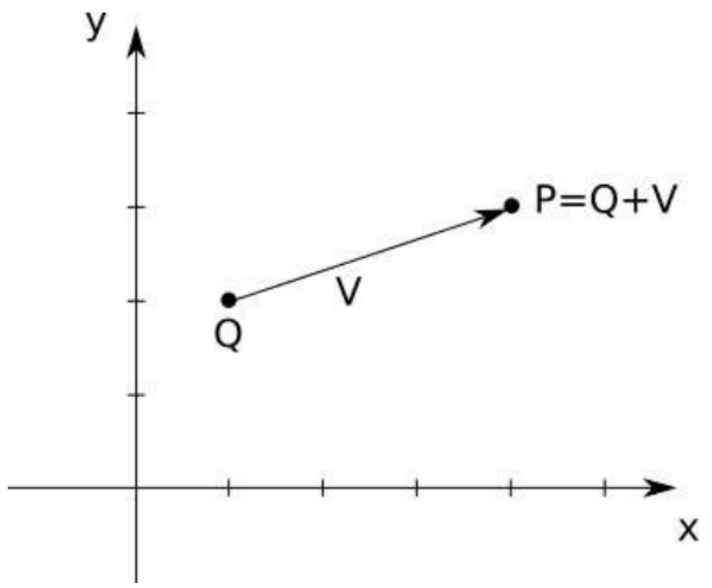


图 A-4：添加$\vec{V}$到 Q 给了我们 P。

添加向量

您可以添加两个向量。从几何上讲，想象一下将一个向量“接替”另一个向量，如图 A-5 所示。

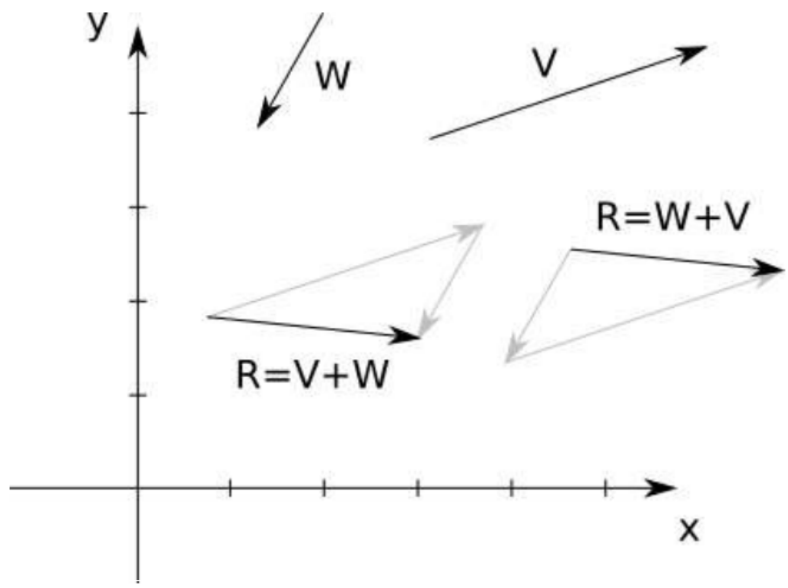


图 A-5：添加两个向量。加法是可交换的。请记住，向量没有位置。

如您所见，向量加法是可交换的——也就是说，操作数的顺序无关紧要。在图中，我们可以看到 $\vec{V}+\vec{W}=\vec{W}+\vec{V}$

在代数上，您可以单独添加坐标：

$$\vec{V}+\vec{W}=(V_x,V_y,V_z)+(W_x,W_y,W_z)=(V_x+W_x,V_y+W_y,V_z+W_z)$$

将向量乘以一个数字

您可以将向量乘以一个数字。这称为*标量积*。这使得矢量更短或更长，如图 A-6 所示。

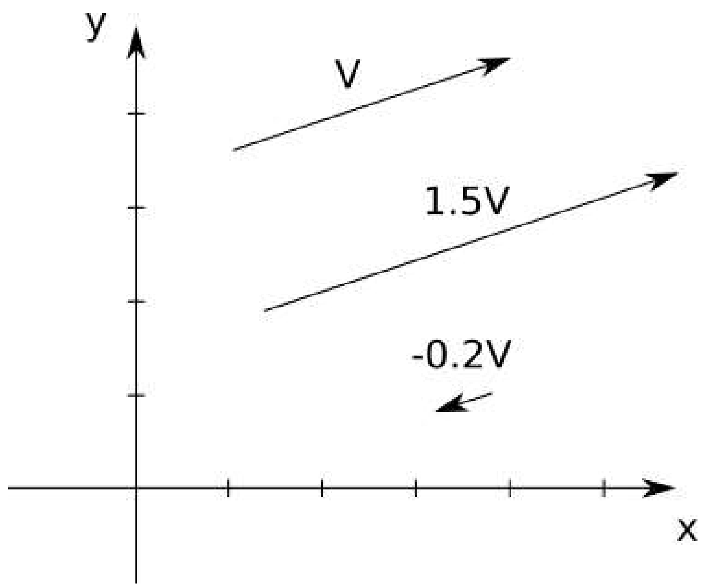


图 A-6：将向量乘以一个数字

如果数字为负数，则向量将指向另一个方向;这意味着它改变了它的意义，从而改变了它的方向。但是，将向量乘以数字永远不会改变其方向，也就是说，它将保持在同一条线上。

在代数上，您将坐标单独相乘：

$$k \cdot \vec{V} = k \cdot (V_x, V_y, V_z) = (k \cdot V_x, k \cdot V_y, k \cdot V_z)$$

您也可以将向量除以数字。就像数字一样，除以k相当于乘以$\frac{1}{k}$.像往常一样，除以零不起作用。

向量乘法和除法的应用之一是对向量*进行归一化*，即将其转换为单位向量。这会将矢量的大小更改为1.0，但不会更改其其他属性。为此，我们只需要将向量除以其长度：

$$\overrightarrow{V_{normalized}} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$$

乘法向量

您可以将一个向量乘以另一个向量。有趣的是，您可以通过多种方式定义此类操作。我们将重点介绍两种对我们有用的乘法：点积和叉积。

点产品

两个向量之间的*点*积（也称为*内积*）给你一个数字。它使用点运算符表示，如 $\vec{V} \cdot \vec{W}$.它也写在角大括号之间，如$\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle$.

在代数上，您将坐标单独相乘并相加：

$$\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle = \langle (V_x, V_y, V_z), (W_x, W_y, W_z) \rangle = V_x \cdot W_x + V_y \cdot W_y + V_z \cdot W_z$$

在几何上，点积$\vec{V}$和$\vec{W}$与它们的长度和角度有关α他们之间。确切的公式将线性代数和三角学巧妙地联系在一起：

$$\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle = |\vec{V}| \cdot |\vec{W}| \cdot \cos(\alpha)$$

这些公式中的任何一个都可以帮助我们看到点积是可交换的（即$\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle$ = $\langle \vec{W}, \vec{V} \rangle$），并且它相对于标量积是分布式的（即，$k \cdot \langle \vec{V}, \vec{W} \rangle = \langle k \cdot \vec{V}, \vec{W} \rangle$).

第二个公式的一个有趣结果是，如果V和W是垂直的，则 $\cos(\alpha) = 0$，$\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle$ 也是零。如果$\vec{V}$和 $\vec{W}$是单位向量，则$\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle$始终介于$-1.0$和$1.0$跟$1.0$这意味着它们是平等的，$-1.0$意思是他们是相反的。

第二个公式还表明点积可用于计算两个向量之间的角度：

$$\alpha = cos^{-1} \left(\frac{\langle \vec{V}, \vec{W} \rangle}{|\vec{V}| \cdot |\vec{W}|} \right)$$

请注意，向量的点积与自身，$\langle \vec{V}, \vec{V} \rangle$，减少到其长度的平方：

$$\langle \vec{V}, \vec{V} \rangle = V_x{}^2 + V_y{}^2 + V_z{}^2 = |\vec{V}|^2$$

这提出了另一种计算向量长度的方法，作为其点积与自身的平方根：

$$|\vec{V}| = \sqrt{\langle \vec{V}, \vec{V} \rangle}$$

矢积

两个向量之间的交叉乘积为您提供了另一个向量。它使用交叉运算符表示，如$\vec{V} \times \vec{W}$

两个向量的叉积是垂直于它们的向量。在本书中，我们只在 3D 矢量上使用叉积，如图 A-7 所示。

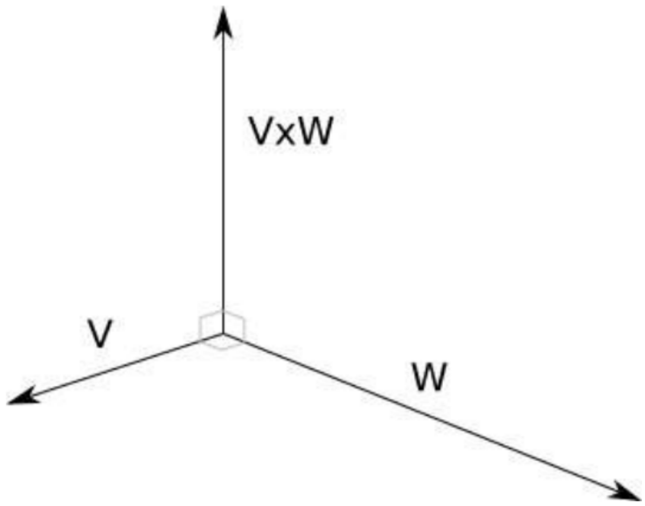


图 A-7：两个向量的叉积是垂直于它们的向量。

计算比点积更复杂一些。如果$\vec{R} = \vec{V} \times \vec{W}$,然后

$$R_x = V_y \cdot W_z - V_z \cdot W_y$$

$$R_y = V_z \cdot W_x - V_x \cdot W_z$$

$$R_z = V_x \cdot W_y - V_y \cdot W_x$$

叉积不是可交换的。具体说来$\vec{V} \times \vec{W} = -(\vec{W} \times \vec{V})$.

我们使用叉积来计算表面的法线向量，即垂直于曲面的单位*向量*。为此，我们在表面上取两个向量，计算它们的交叉乘积，并对结果进行归一化。

矩阵

*矩阵*是一个矩形的数字数组。就本书而言，矩阵表示可以应用于点或向量的*变换*，我们用大写字母来指代它们，例如M.这与我们引用点的方式相同，但通过上下文可以清楚地知道我们是在谈论矩阵还是点。

矩阵的特点是其行和列的大小。例如，这是一个3×4矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -6 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵运算

让我们看看我们可以用矩阵和向量做什么。

添加矩阵

您可以添加两个矩阵，只要它们具有相同的大小。添加是逐个元素完成的：

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+j & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \\ g+p & h+q & i+r \end{pmatrix}$$

将矩阵乘以一个数字

您可以将矩阵乘以一个数字。您只需将矩阵的每个元素乘以数字：

$$n \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot a & n \cdot b & n \cdot c \\ n \cdot d & n \cdot e & n \cdot f \\ n \cdot g & n \cdot h & n \cdot i \end{pmatrix}$$

乘法矩阵

您可以将两个矩阵相乘，只要它们的大小兼容：第一个矩阵中的列数必须与第二个矩阵中的行数相同。例如，您可以将2×3矩阵由3×4矩阵，但不是相反！与数字不同，乘法的顺序很重要，即使您将两个可以按任一顺序相乘的平方矩阵。

将两个矩阵相乘的结果是另一个矩阵，其行数与左侧矩阵相同，列数与右侧矩阵相同。继续我们上面的例子，乘以2×3矩阵由3×4矩阵是一个2×4矩阵。

让我们看看如何将两个矩阵 A 和 B 相乘：

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} g & h & i & j \\ k & l & m & n \\ o & p & q & r \end{pmatrix}$$

为了使事情更清楚，让我们将 A 和 B 中的值分组为向量：将 A 写为行（水平）向量的列，将 B 写为一行（垂直）向量的行。例如，A 的第一行是向量 (a, b, c) B 的第 二 列是向量 (h, l, p)

$$A = \begin{pmatrix} (a, b, c) \\ (d, e, f) \end{pmatrix}$$

$$B = \left(\begin{pmatrix} g \\ k \\ o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ l \\ p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ m \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ n \\ r \end{pmatrix} \right)$$

让我们为这些向量命名：

$$A = \begin{pmatrix} -\overrightarrow{A_0}- \\ -\overrightarrow{A_1}- \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \overrightarrow{B_0} & \overrightarrow{B_1} & \overrightarrow{B_2} & \overrightarrow{B_3} \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

我们知道 A 是2×3，而 B 是3×4，所以我们知道结果将是一个2×4矩阵：

$$\begin{pmatrix} -\overrightarrow{A_0}- \\ -\overrightarrow{A_1}- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \overrightarrow{B_0} & \overrightarrow{B_1} & \overrightarrow{B_2} & \overrightarrow{B_3} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{pmatrix}$$

现在我们可以对结果矩阵的元素使用一个简单的公式：行中元素的值r和列c的结果——即c_{rc}一是A 中对应的行向量和B中的列向量的点积 $\overrightarrow{A_r}$ and $\overrightarrow{B_c}$:

$$\begin{pmatrix} -\overrightarrow{A_0}- \\ -\overrightarrow{A_1}- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \overrightarrow{B_0} & \overrightarrow{B_1} & \overrightarrow{B_2} & \overrightarrow{B_3} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{A_0}, \overrightarrow{B_0} \rangle & \langle \overrightarrow{A_0}, \overrightarrow{B_1} \rangle & \langle \overrightarrow{A_0}, \overrightarrow{B_2} \rangle & \langle \overrightarrow{A_0}, \overrightarrow{B_3} \rangle \\ \langle \overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{B_0} \rangle & \langle \overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{B_1} \rangle & \langle \overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{B_2} \rangle & \langle \overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{B_3} \rangle \end{pmatrix}$$

例如 $c_{01} = \langle \overrightarrow{A_0}, \overrightarrow{B_1} \rangle$，扩展到$a \cdot h + b \cdot l + c \cdot p$.

将矩阵和向量相乘

您可以将 n 维向量视为$n \times 1$垂直矩阵或作为$1 \times n$水平矩阵，并以与乘以任何两个兼容矩阵相同的方式乘法。例如，以下是将 a 乘以2×3矩阵和 3D 矢量：

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z \\ d \cdot x + e \cdot y + f \cdot z \end{pmatrix}$$

由于矩阵和向量（或向量和矩阵）相乘的结果也是向量，在我们的例子中，矩阵表示变换，我们可以说矩阵变换了向量。