

# Testing og verifisering av Stefan-Boltzmanns lov og emisjonskonstanter ved varierende temperatur

J. O. Bruun, S. Klyve

## Sammendrag

Stefan-Boltzmanns lov kan verifiseres ved å måle intensiteten til varmestrålingen fra et varmt objekt som en lampe. Strålingen fra en Stefan-Boltzmann-lampe blir målt og det viser seg at intensiteten øker med  $T^4$ . I tillegg vises det at emisjon i forhold til et svart legeme fra et materiale ikke er avhengig av temperaturen ved å måle intensiteten i varmestråling fra forskjellige sider på Leslies kube. Begge disse forsøkene har feil i temperaturmålinger skylt at det ikke finnes noen nøyaktige måter å måle temperaturen på.

## 1. Introduksjon

Stefan-Boltzmanns lov er en viktig relasjon i fysikken, som forbinder emittert varmeenergi fra et svart legeme, med dets temperatur. Den ble først formulert av Joseph Stefan i 1879, og utledet av Ludwig Boltzmann fem år senere [1]. I dette forsøket skal vi studere emissiviteten til ulike overflater ved ulike temperaturer, i tillegg til å verifisere Stefan-Boltzmanns lov ved å sjekke forholdet mellom temperatur og emittert varme fra et objekt.

## 2. Teori

Et svart legeme er et objekt som absorberer all innkommende strålingsenergi, uavhengig av bølgelengden. Dersom objektet er i termisk likevekt, blir det totalt sett hverken tilført eller avgitt energi. Det vil si at objektet må emitte like mye stråling som det absorberer for å oppnå likevekt. For et svart legeme betyr dette at den emitterte strålingsenergien er lik den absorberte. Forholdet mellom den emitterte effekten per flateenhet,  $j$ , og det svarte legemets temperatur er gitt ved Stefan-Boltzmanns lov:

$$j = \sigma T^4 \quad (1)$$

Her er  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  Stefan-Boltzmann-konstanten. Dersom dette skal gjelde for et objekt med vilkårlig emissivitet  $\epsilon$ , må vi justere til

$$j = \epsilon \sigma T^4. \quad (2)$$

Leslies kube er et objekt med fire ulike overflater; svart, hvit, upolert aluminium og blankt aluminium (speil). Den varmes opp innvendig ved hjelp av en glødepære, og temperaturen til kubens kan leses av i tabell basert på resistansen i en innebygd termistor. Når resistansen stabiliserer seg på en gitt verdi, har kubens oppnådd termostatisk likevekt. Fra dette kan det måles avgitt varmestråling med

en strålingssensor, og med det undersøke hvordan dette avhenger med overflate og temperatur.

For å måle temperaturen til glødetråden i en Stefan-Boltzmann-lampe, kan følgende relasjon brukes:

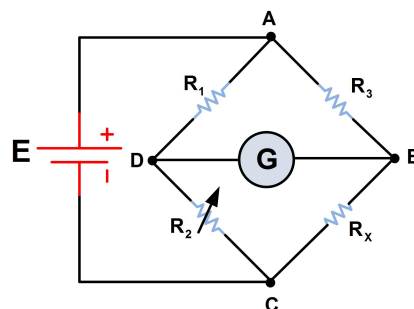
$$T = T_0 + \frac{R - R_0}{\alpha R_0} \quad (3)$$

Her er  $\alpha = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  temperaturkoeffisienten til wolfram.  $R_0$  er motstanden ved referansetemperatur  $T_0$ , og  $R = \frac{V}{I}$  er motstand ved temperatur  $T$ . Siden denne relasjonen i utgangspunktet gjelder kun for små temperaturvariasjoner i metallet, må vi bruke relativ motstand  $R/R_0$ , og lese av temperaturen til wolframtråden fra tabell. Fra dette finner vi usikkerheten i den relative resistansen ved Gauss feilforplantning

$$\left( \Delta \frac{R}{R_0} \right)^2 = \frac{\Delta R^2}{R_0^2} + \frac{R^2 \Delta R_0^2}{R_0^4}. \quad (4)$$

En Wheatstonebro kan brukes til å måle nøyaktig motstand i en krets. Ved å justere resistansene vist i figur 1 til strømmen gjennom  $G$  er 0, så kan en ved Kirchhoffs lover finne resistansen

$$R_x = \frac{R_3 R_2}{R_1}. \quad (5)$$



**Figur 1:** Wheatstonebro [2].  $R_1, R_2, R_3$  er kjente størrelser som kan justeres helt til det ikke går strøm gjennom  $G$ .

Siden  $R_x$  her vil referere til resistansen i resistoren i tillegg til i ledningene kan en finne resistansen i resistoren  $R_0$  ved å koble den ut og finne resistansen i ledningene  $R_{x0}$ , og har dermed

$$R_0 = R_x - R_{x0}. \quad (6)$$

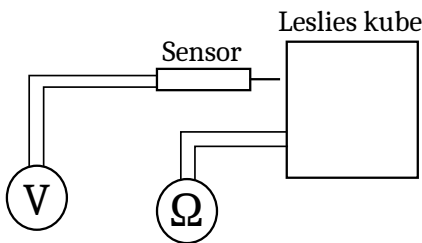
Feilmarginen i  $R_0$  kan da finnes ved Gauss feilforplantning

$$\Delta R_0^2 = \frac{(R_x - R_{x0})^2}{R_1^2} \left( \Delta R_3^2 + \frac{R_3^2 \Delta R_1^2}{R_1^2} \right) + \frac{R_3^2}{R_1^2} (\Delta R_x^2 + \Delta R_{x0}^2). \quad (7)$$

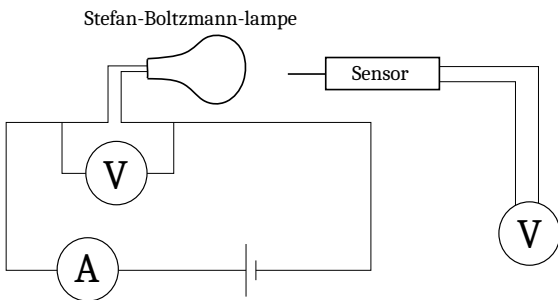
### 3. Metode

Dette forsøket omfatter i hovedsak to ulike deler; først å undersøke emissivitet til ulike overflater ved ulike temperaturer ved bruk av Leslies kube, og deretter verifisere Stefan-Boltzmann lov ved å måle emittert varmestråling fra en lampe ved høye temperaturer.

For Leslies kube kobles utstyret opp som vist i figur 2. Skru på lampen i Leslies kube på høy intensitet først, før den skrues ned når ohmmeteret viser omtrent  $40 \text{ k}\Omega$ . Venter så til det oppnås en form for termisk likevekt, og måler varmestråling ved å lese av voltmeteret koblet til sensoren på hver av de fire sidene. Skru deretter opp intensiteten, venter i omtrent fem minutter til det er tilnærmet termisk likevekt og måler varmestråling på nytt. Gjør dette fire ganger for ulike intensiteter.



**Figur 2:** Utstyrsoppsett. Leslies kube er koblet til et strømuttak og et ohmmeter, varmestrålingssensoren er koblet til et voltmeter.



**Figur 3:** Utstyrsoppsett. Kobler et voltmeter parallelt med Stefan-Boltzmann-lampen i en krets med et ammeter og en spenningskilde som kobles til et strømuttak. Kobler et voltmeter til sensoren.

Kobler opp utstyr som vist i figur 3. Setter spenningen til 1 V og måler så av strøm og spenning i kretsen med Stefan-Boltzmann-lampen og spenningen i varmestrålingssensoren. Setter så opp spenningen med 1 V og gjør det samme til og med 12 V.

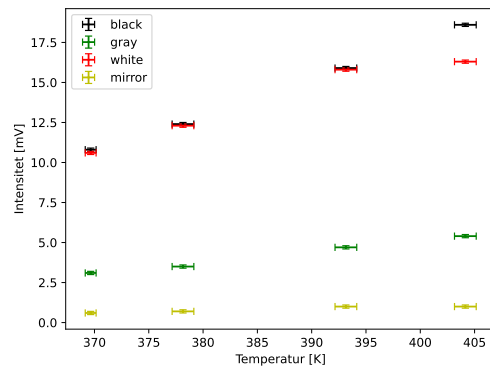
### 4. Resultater

Ser først på dataen funnet ved Leslies kube som vist i figur 4. Avlesninger av voltmeteret koblet til varmestrålingssensoren viser intensiteten og ved avlesninger av ohmmeteret finnes resistans og dermed temperatur ved avlesning av tabell. Siden temperaturen blir funnet ved avlesning fra tabell, finner vi laveste og høyeste feilmargen i temperatur ved å runde feilmarginen i resistans henholdsvis opp og ned.

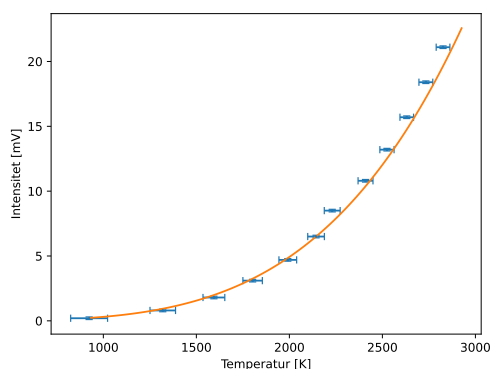
Videre er dataen for Stefan-Boltzmann-lampa vist i figur 5. Ved avlesninger av voltmeteret koblet til sensoren finner vi intensiteten, og temperatur er funnet ved avlesning av resistans og ved å lese av tabell. Usikkerheten i temperaturen kommer av måleusikkerheten i resistansen og usikkerheten i resistansen ved romtemperatur som vist i (4). Bruker samme metode for å finne feilmarginer som ved Leslies kube.

### 5. Diskusjon

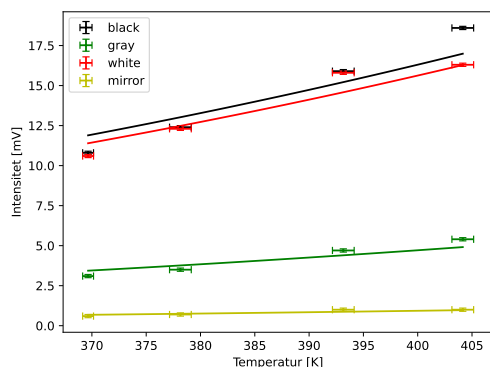
Kan se i figur 4 at alle målingene ser ut til å følge en lik økning i forhold til hverandre med unntak av den hvite siden i siste måling. Vi forventet at intensiteten skulle følge likningen i (2) med varierende  $\epsilon$  på de forskjellige sidene. Da ville målingene vært proporsjonale med  $T^4$ . Hvis vi tegner inn  $\alpha T^4$  med  $\alpha = \bar{U}/T^4$ , hvor  $\bar{U}$  er gjennomsnittet av de målte verdiene for intensiteten, får vi grafen vist i figur 6. Her er det vanskelig å se om denne modellen passer, siden det er relativt liten forskjell på største og minste verdi for temperaturene som er målt.



**Figur 4:** Leslies kube. Punktene er målinger ved de forskjellige intensitetene hvor temperaturen er tilnærmet konstant i hver av de fire målingene ved samme intensitetsinnstilling.



**Figur 5:** Stefan-Boltzmann-lampe. Punktene er avlesninger og den heltrukne linja er et gjett på en fjerdegradsfunksjon.



**Figur 6:** Leslies kube med tilnærmede fjerdegradspolynomer.

Det kan finnes flere forklaringer på hvorfor de teoretiske modellene som vi forventet ikke skulle vises i dataen. En mulighet er at temperaturen vi måler for glødepæren ikke er lik overflaten. Gitt at vi ikke kan vente evig på termisk likevekt, vil det være en forskjell i disse temperaturene, og den forskjellen kan være stor nok til å gjøre betydelige utslag i dataen. Denne temperaturforskjellen kan øke med temperaturen også, slik at det vi måler ikke er helt proporsjonal med  $T^4$ .

Vi kan også tenke oss at siden denne temperaturen er så liten i forhold til romtemperaturen, kan det gjøre at varmestralingen er liten i forhold til annen stråling som kan detekteres av sensoren, og dermed ikke vil øke med  $T^4$ . I dette tilfellet er hovedsaklig problemet at temperaturforskjellene er liten og det er dermed vanskelig å konkludere med noen proporsjonalitet.

Vi kan så se på målingene i forhold til hverandre. Vi hadde regnet med at den svarte siden ville emittere mest stråling siden denne siden også vil absorbere mest stråling. Det som var uventet var at den hvite siden emitterte nesten like mye som den svarte siden, ettersom vi vet at hvite objekter reflekterer alt synlig lys. Vi kan tenke oss at selv om dette er sant så vil i dette tilfelle varmestralingen ikke

være i form av synlig lys og det kan hende at den hvite siden absorberer denne bølgelengden nesten like godt som den svarte siden, og dermed emitterer omtrent like mye.

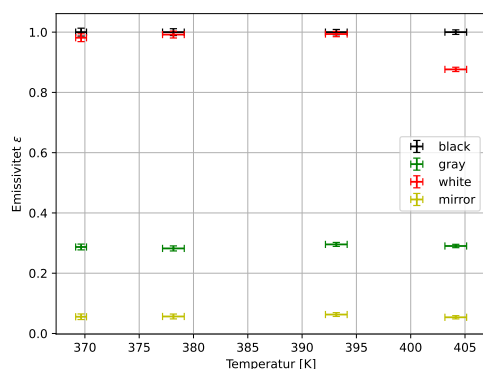
Vi ser at det er en måling som er ganske langt unna den korresponderende målingen av den svarte siden. Dette kan være en målefeil, men en kan også tenke seg at varmestralingen i dette tilfellet begynner å nærme seg synlig lys, eller en annen bølgelengde som blir reflektert av hvitt og ikke svart. Dette virker ikke veldig sannsynlig siden vi vet at intensiteten i varmestralingen skal øke med  $T^4$ , og at det derfor ikke gir mening at det er en stor plutselig forskjell i evnen til absorpsjon. En annen tanke er at det egentlig er en betydelig forskjell på disse målingene men at de ser små ut i forhold til alle de andre målingene vi har. Det kan også hende at det tar lenger å tid å varme opp visse sider av kuben og at dette fører til at hvit emitterer omtrent like mye stråling. Dette siste punktet er nok ikke spesielt sannsynlig siden vi ved første måling lot det stå veldig lenge og vi ser at første måling også er veldig like.

Som forventet er det den blanke aluminiumssiden som emitterer minst, da dette omtrent er et speil og vil dermed reflektere omtrent all stråling. I tillegg vet vi at aluminium reflekterer mye stråling fra før av, noe vi også kan se ved at den upolerte aluminiumssiden også emitterer ganske lite, men likevel en del mere enn den blankpolerte. For å finne emisjonskonstanter for upolert og blankpolert aluminium kan det antas at den svarte siden er tilnærmet et svart legeme og vil dermed ha  $\epsilon = 1$ . Får da tabell 1. Her er det regnet ut  $\epsilon = j/j_b$  hvor  $j_b$  er strålingen fra den svarte siden da vi antar dette er et svart legeme. Feilmarginen er funnet ved Gauss feilforplantning og ved å finne ekstremalverdiene med feilmarginer for de ulike målingene.

Kan også ved å se på figur 7 at emissiviteten ser uavhengig ut fra temperaturen, med unntak fra siste måling på hvit side, noe vi ville forventet fra teorien. Igjen ser en at den hvite siden opptrer veldig likt som et svart legeme, noe som ikke virker intuitivt. Ser også at dersom en ser bort ifra siste måling på hvit side får en  $\epsilon = 0,99 \pm 0,02$ . Dette er overraskende nærme et svart legeme, men har også en feilmargin som gir en mulig verdi  $\epsilon > 1$ , noe som ikke er mulig. Siden det er antatt at den svarte siden kan ses på som et perfekt svart legeme, noe som ikke er riktig, så gir det mulig mening at dette kan skje. Her kan det muligens også ha noe å si at de forskjellige sidene på kubens varmes opp på ulik tid og dermed kan temperaturen være forskjellige på de forskjellige sidene.

**Tabell 1:** Emisjonskonstant for de ulike overflatene på Leslies kube.

Side	$\epsilon$
Svart	1
Hvit	$0,94 \pm 0,07$
Upolert aluminium	$0,29 \pm 0,02$
Polert aluminium	$0,06 \pm 0,02$



**Figur 7:** Emissivitet på Leslies kube ved svart side antatt et perfekt svart legeme.

Målet med andre del av forsøket var å vise Stefan-Boltzmanns lov. Ser i figur 5 at proporsjonaliteten mellom intensitet og  $T^4$  stemmer godt. Proporsjonalitetskonstanten er basert på et gjennomsnitt av forholdet mellom målt intensitet og  $T^4$ . Grunnen til at det ikke ble brukt en prefaktor på  $\epsilon\sigma$  har med at intensiteten er målt i mV. Det er ikke nødvendig å gjøre om enhetene for å vise proporsjonalitet, og har heller ikke blitt gjort i denne utredningen. Resultatene viser uansett at en kurve proporsjonal med  $T^4$  passer relativt godt til måleverdiene for intensiteten.

Det at lampen når såpass høye temperaturer som rundt 3000 K medbringer både fordeler og ulemper. Fordelaktig er det at lampen har høy temperatur i forhold til omgivelsene, som fører til mindre bråk i måling av strålingsintensiteten til lampen. Dette bidrar til å bedre kunne verifisere Stefan-Boltzmanns lov, fordi proporsjonaliteten blir tydeligere ved økt nøyaktighet og mindre bråk i målingene. På den andre siden er det utfordrende å faktisk måle høye temperaturer med høy nøyaktighet. I teoridelen ble det diskutert at temperaturkoeffisienten  $\alpha$  til wolfram endrer seg ved høye temperaturer. Dette gjør det for vanskelig å finne temperaturen ved regning, slik at vi måtte bruke relativ resistans som forklart i teoridelen.

Ved å bruke tabellverdier blir behandling av feilmargin litt annerledes. Siden tabellen for temperaturer opererer med diskrete intervall på relativ resistans, vil feilmarginen i temperatur ligge mellom to tabellverdier. Ved å bruke minste og største relative motstand fra feilanalysen, kan vi runde henholdsvis ned og opp for å finne minste og største mulige temperatur med den aktuelle målefeilen i relativ resistans, som kan regnes ut ved (4).

Denne feilmarginen ser vi reflektert i de blå punktene i figur 5, og det oransje estimatet passer stort sett i disse feilmarginsintervallene. En enkel forklaring på dette kan være at proporsjonalitetskonstanten vi har brukt ikke er optimal til målingene. Det er uansett tydelig at intensiteten vokser i takt med  $T^4$ , som er riktig i forhold til Stefan-Boltzmanns lov.

## 6. Konklusjon

Det ble vist at Stefan-Boltzmanns lov ser ut til å holde for dette tilfellet. Har sett at feilmarginene kunne bli relativt store, noe som kunne vært med på å gi et resultat en ikke kunne ha konkludert med noe ifra, men her ser en til tross for dette at det er en tydelig proporsjonalitet med  $T^4$ . Det er også vist at den relative emisjonsevnen til et materiale ikke er endret ved temperatur. Her finnes også målinger som strider mot dette, men det er i ytterpunktene av målingene, og motvirker i liten grad det totale inntrykket.

## Referanser

- [1] The Editors of Encyclopaedia Britannica: *Stefan-Boltzmann law*. <https://www.britannica.com/science/Stefan-Boltzmann-law>, (hentet 23.10.2022).
- [2] Sheik, A. F.: *Wheatstone Bridge Circuit Theory and Working Principle*. <https://electricalacademia.com/instrumentation-and-measurements/wheatstone-bridge-circuit-and-working-principle/>, (hentet 19.10.2022).