6.4.4

Har likningen $y'' + 16y = 4\delta(t - 3\pi)$ med $y(0) = 2, y'(0) = 0$ og finner Laplace transformen

$$s^2Y - 2s + 16Y = 4e^{-3\pi s} \Rightarrow Y = \frac{4e^{-3\pi s} + 2s}{s^2 + 16} = \frac{4e^{-3\pi s}}{s^2 + 16} + \frac{2s}{s^2 + 16} \tag{1}$$

og kan da finne invers Laplace i de forskjellige leddene

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2 + 16}\right](t) = 2\cos 4t \tag{2}$$

og

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4e^{-3\pi s}}{s^2 + 16}\right](t) = \frac{1}{4}\sin(4t + 3\pi)\,u(t + 3\pi) = -\frac{1}{4}\sin(4t)u(t + 3\pi) \tag{3}$$

og har dermed

$$y = \mathscr{L}[Y](s) = 2\cos 4t - \frac{1}{4}\sin(4t)u(t + 3\pi) \tag{4}$$

6.4.10

Har likningen $y'' + 5y' + 6y = \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + u(t - \pi)\cos t$ med $y(0) = y'(0) = 0$ og kan ta Laplace av likningen og vet at $\cos t = -\cos(t - \pi)$ og dermed

$$s^2Y + 5sY + 6Y = e^{-\frac{\pi}{2}s} - e^{-\pi s} \cdot \frac{s}{s^2 + 1} \Rightarrow Y = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2 + 5s + 6} - \frac{se^{-\pi s}}{(s^2 + 1)(s^2 + 5s + 6)} \tag{5}$$

prøver delbrøkoppspaltning med $s^2 + 5s + 6 = (s + 3)(s + 2)$ og får

$$1 = As + 2A + Bs + 3B \tag{6}$$

og har dermed $A = -1, B = 1$ og finner

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 5s + 6}\right](t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + 2} - \frac{1}{s + 3}\right](t) = e^{2t} - e^{3t} \tag{7}$$

kan så gjøre det samme med det andre leddet og finner

$$\begin{aligned}\frac{s}{(s^2 + 1)(s + 3)(s + 2)} &= \frac{A}{s + 3} + \frac{B}{s + 2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1}\\ s &= As^3 + 2As^2 + As + 2A + Bs^3 + 3Bs^2 + Bs + 3B\\ &\quad + Cs^3 + 5Cs^2 + 6Cs + Ds^2 + 5Ds + 6D\end{aligned} \tag{8}$$

kan så løse likningssystemet ved Gauss-Jordaneliminasjon

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 5 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 6 & 5 & 1\\ 2 & 3 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/10\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4/10\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/10\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/10 \end{array}\right] \tag{9}$$

og har dermed $A = 3/10, B = -4/10, C = 1/10, D = 1/10$ og dermed

$$\frac{s}{(s^2 + 1)(s + 3)(s + 2)} = \frac{1}{10}\left(\frac{3}{s + 3} - \frac{4}{s + 2} + \frac{s + 1}{s^2 + 1}\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{3}{s + 3} - \frac{4}{s + 2} + \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1}\right) \tag{10}$$

og kan fra dette få

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2 + 1)(s + 3)(s + 2)}\right](t) = \frac{1}{10}\left(3e^{-3t} - 4e^{-2t} + \cos t + \sin t\right) \tag{11}$$

og har dermed

$$y = \mathscr{L}^{-1}[Y](t) = u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\left[e^{-2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)} - e^{-3\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}\right] - \frac{u(t - \pi)}{10}\left[3e^{-2(t - \pi)} - 4e^{-3(t - \pi)} - \cos t - \sin t\right] \tag{12}$$

6.5.12

Har differensiallikningen

$$y(t) + \int_0^t y(\tau)\cosh(t-\tau)d\tau = t + e^t \tag{13}$$

ser at andre leddet på venstre side er en konvolusjon og kan skrive

$$y(t) + y * \cosh t = t + e^t \tag{14}$$

og kan deretter finne Laplace transformen

$$Y + Y \cdot \frac{s}{s^2-1} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1} \Rightarrow Y = \frac{s^2-1}{(s-1)s^2} \tag{15}$$

og har dermed

$$Y = \frac{s^2-1}{(s-1)s^2} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)s^2} \tag{16}$$

gjør så delbrøksoppspaltning

$$\frac{1}{(s-1)s^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2} \Leftrightarrow 1 = As^2 + Bs^2 - Bs + Cs - C \tag{17}$$

og har da $C = -1, B = -1, A = 1$ og kan dermed finne

$$y = \mathscr{L}^{-1}[Y](t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right](t) = 1 + t \tag{18}$$

6.5.19

Har

$$\mathscr{L}[f](s) = \frac{2\pi s}{(s^2+\pi^2)^2} = \frac{2\pi}{s^2+\pi^2} \cdot \frac{s}{s^2+\pi^2} = \mathscr{L}[2\sin\pi t](s) \cdot \mathscr{L}[\cos\pi t](s) \tag{19}$$

og har dermed $f(t) = 2\sin\pi t * \cos\pi t$ og kan finne

$$\begin{aligned}
\int_0^t 2\sin\pi\tau\cos\pi(t-\tau)d\tau &= 2\int_0^t \left(i\frac{e^{-i\pi\tau} - e^{i\pi\tau}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\pi(t-\tau)} + e^{-i\pi(t-\tau)}}{2}\right)d\tau \\
&= \frac{i}{2}\int_0^t \left[e^{i\pi t}e^{-2i\pi\tau} + e^{-i\pi t} - e^{i\pi t} - e^{2i\pi\tau}e^{-i\pi t}\right]d\tau \\
&= \frac{i}{2}\left[e^{i\pi t}\left(-\frac{e^{-2i\pi t}}{2i\pi} + \frac{1}{2i\pi}\right) + te^{-i\pi t} - te^{i\pi t} - e^{-i\pi t}\left(\frac{e^{2i\pi t}}{2i\pi} - \frac{1}{2i\pi}\right)\right] \\
&= \frac{i}{2}\left[\frac{e^{i\pi t}}{2i\pi} - \frac{e^{-i\pi t}}{2i\pi} + te^{-i\pi t} - te^{i\pi t} + \frac{e^{-i\pi t}}{2i\pi} - \frac{e^{i\pi t}}{2i\pi}\right] \\
&= t\left(i\frac{e^{-i\pi t} - e^{i\pi t}}{2}\right) \\
&= t\sin\pi t
\end{aligned} \tag{20}$$

og har dermed $f(t) = t\sin\pi t$.

6.5.22

Har

$$\mathscr{L}[f](s) = \frac{e^{-as}}{s(s-2)} = e^{-as}\left(\frac{1}{s(s-2)}\right) \tag{21}$$

og delbrøkoppspalter

$$\frac{1}{s(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} \Rightarrow 1 = As - 2A + Bs \tag{22}$$

og ser at vi har $A = -1/2, B = 1/2$ og finner dermed

$$f = \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-as}\left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}\right)\right](t) = \frac{1}{2}\left(e^{2(t+a)} - e^{t+a}\right) \tag{23}$$

6.6.7

Har $f(t) = t^2 \sinh 2t$, og kan se at

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2t\sinh 2t + 2t^2\cosh 2t \\ f''(t) &= 2\sinh 2t + 8t\cosh 2t + 4t^2\sinh 2t \end{aligned} \tag{24}$$

og vet at

$$\mathscr{L}\left[f''(t)\right](s) = s^2\mathscr{L}\left[f\right](s) - sf(0) - f'(0) \tag{25}$$

og har dermed

$$2\mathscr{L}\left[\sinh 2t\right](s) + 8\mathscr{L}\left[t\cosh 2t\right](s) + 4\mathscr{L}\left[t^2\sinh 2t\right](s) = s^2\mathscr{L}\left[t^2\sinh 2t\right](s) \tag{26}$$

vet at

$$\mathscr{L}\left[tg(t)\right](s) = -G'(t) \tag{27}$$

og kan sette $g(t) = \cosh 2t$ og finner

$$\mathscr{L}\left[t\cosh 2t\right](s) = -\frac{d}{ds}\left[\frac{s}{s^2-4}\right] = -\frac{s^2-4-2s^2}{\left(s^2-4\right)^2} = \frac{s^2+4}{\left(s^2-4\right)^2} \tag{28}$$

og har dermed fra (26)

$$\begin{aligned} \frac{4}{s^2-4} + \frac{8\left(s^2+4\right)}{\left(s^2-4\right)^2} + 4F = s^2F \\ F &= \frac{4}{\left(s^2-4\right)^2} + \frac{8\left(s^2+4\right)}{\left(s^2-4\right)^3} \\ F &= \frac{12s^2+16}{\left(s^2-4\right)^3} \end{aligned} \tag{29}$$

6.6.15

Har

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = \frac{s}{\left(s^2-4\right)^2} = \frac{s}{s^2-4}\cdot\frac{1}{s^2-4} = \mathscr{L}\left[\cosh 2t\right](s)\cdot\mathscr{L}\left[\frac{1}{2}\sinh 2t\right](s) = \mathscr{L}\left[\cosh 2t * \frac{1}{2}\sinh 2t\right](s) \tag{30}$$

og kan finne

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t \cosh 2\tau\cdot\frac{1}{2}\sinh 2(t-\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{8}\int_0^t \left[\left(e^{2\tau}+e^{-2\tau}\right)\left(e^{2t-2\tau} - e^{-2t+2\tau}\right)\right]d\tau \\ &= \frac{1}{8}\int_0^t \left[e^{2t} - e^{-2t}e^{4\tau} + e^{2t}e^{-4\tau} - e^{-2t}\right]d\tau \\ &= \frac{1}{8}\left[te^{2t} - \frac{e^{2t}}{4} - \frac{e^{-2t}}{4} + \frac{e^{-2t}}{4} + \frac{e^{2t}}{4} - te^{-2t}\right] \\ &= \frac{1}{4}t\sinh 2t \end{aligned} \tag{31}$$

6.6.17

Har

$$\mathscr{L}\left[f\right](s) = \ln\frac{s}{s-1} = \ln s - \ln\left(s-1\right) \tag{32}$$

ser så på $G(s) = \ln s$ og kan se at $G'(s) = 1/s$ og har med dette

$$\mathscr{L}\left[tg(t)\right](s) = -\frac{1}{s} \tag{33}$$

ser dermed at $tg(t) = -1$ og har dermed $g(t) = -1/t$, kan derfra se at

$$\mathscr{L}\left[-\frac{1}{t}\right](s) = \ln s \tag{34}$$

og har dermed løsningen

$$f = -\frac{1}{t} + \frac{e^t}{t} = \frac{e^t - 1}{t} \tag{35}$$

6.7.4

Har likningssettet

$$y_1' = 4y_2 - 8\cos 4t, y_2' = -3y_1 - 9\sin 4t \tag{36}$$

med $y_1(0) = 0, y_2(0) = 3$ og kan da finne Laplace transformen

$$\left\{\begin{array}{l} Y_1 s = 4Y_2 - \frac{8s}{s^2+16} \\ Y_2 s - 3 = -3Y_1 - \frac{36}{s^2+16} \end{array}\right\} \Rightarrow Y_1 = \frac{4Y_2}{s} - \frac{8}{s^2+16} \tag{37}$$

og kan sette inn i likninga og kan finne Y_2

$$\begin{aligned} Y_2 s - 3 &= -\frac{12Y_2}{s} + \frac{24}{s^2+16} - \frac{36}{s^2+16} \\ Y_2 s + \frac{12Y_2}{s} &= 3 - \frac{12}{s^2+16} \\ Y_2\left(\frac{12+s^2}{s}\right) &= 3 - \frac{12}{s^2+16} \\ Y_2 &= \frac{3s}{s^2+12} - \frac{12s}{\left(s^2+12\right)\left(s^2+16\right)} \\ Y_2 &= \frac{3s^3+36s}{\left(s^2+12\right)\left(s^2+16\right)} \\ Y_2 &= \frac{3s}{s^2+16} \end{aligned} \tag{38}$$

som dermed gir

$$y_2 = \mathscr{L}^{-1}\left[Y_2\right](t) = 3\cos 4t \tag{39}$$

og finner så Y_1

$$Y_1 = \frac{4}{s^2+16} \Rightarrow y_1 = \sin 4t \tag{40}$$

og har dermed løsningene

$$y_1 = \sin 4t, y_2 = 3\cos 4t \tag{41}$$