11.1.2

Vet at fundamentalperioden for $\cos x$ er 2π og har dermed at fundamentalperioden til $\cos nx$ må være $p_f = 2\pi/n$ og har samme argumentet for $\sin nx$ og kan dermed konkludere med følgende

$$\begin{aligned}\cos nx, \sin nx &\Rightarrow p_f = \frac{2\pi}{n} \\ \cos\frac{2\pi}{k}x, \sin\frac{2\pi}{k}x &\Rightarrow p_f = k \\ \cos\frac{2\pi n}{k}x, \sin\frac{2\pi n}{k}x &\Rightarrow p_f = \frac{k}{n}\end{aligned} \tag{1}$$

11.1.15

Ser på $f(x) = x^2$ for $0 < x < 2\pi$ med $f(x) = f(x + 2\pi)$ finner da

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi}x\cos nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx dx \\ &= \frac{2}{n^2}\cos 2n\pi + \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^3\pi}(\sin 2n\pi - \sin 0) \\ &= \frac{4}{n^2}\end{aligned} \tag{2}$$

finner også

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{8\pi^3}{3} = \frac{4\pi^2}{3} \tag{3}$$

og til slutt

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-x^2\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n^2}x\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{n^2}\int_0^{2\pi}\sin nx dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi^2}{n} - \frac{2}{n^3}(\cos 2n\pi - 1)\right] \\ &= -\frac{4\pi}{n}\end{aligned} \tag{4}$$

og har dermed Fourierrekka

$$f(x) \sim \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right) \tag{5}$$

11.1.17

Finner de samme uttrykkene

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[-x\cos nx + \pi\cos nx\right]dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right] \\ &= \frac{2}{n^2\pi}\left(-\cos\pi n + 1\right) \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n^2\pi} & , n = 2k-1 \\ 0 & , n = 2k \end{cases} \quad , k \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{6}$$

ser så på

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

og til slutt

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0 \tag{8}$$

siden den resulterende funksjonen blir odde, og har dermed

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi}\cos\left[(2n-1)x\right] \tag{9}$$

11.1.21

Ser at funksjonen er antisymmetrisk og har dermed $a_n = 0$ og finner dermed kun

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[-x\sin nx + \pi\sin nx\right]dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx - \frac{\pi}{n}\left(\cos n\pi - \cos 0\right)\right] \\ &= \frac{2}{n} \end{aligned} \tag{10}$$

og har dermed

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx \tag{11}$$

11.2.1

Vet at e^x verken er odde eller like, mens $e^{-|x|}$ må være symmetrisk om $y = 0$ og er dermed like, $x^3\cos nx$ er en odde funksjon ganget med en annen odde funksjon og er dermed like, $x^2\tan\pi x$ er en odde funksjon ganget med en like funksjone og er dermed odde, til slutt kan vi se på

$$\sinh x - \cosh x = \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x} - e^x - e^{-x}\right] = -e^{-x} \tag{12}$$

som verken er like eller odde.

11.2.10

Ser at funksjonen er odde og trenger derfor kun å finne

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{4}\int_0^4 \left[-x\sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right) + 4\sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right)\right] dx \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[x\cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right)\Big|_0^4 - \int_0^4 \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx - 4\left(\cos n\pi - 1\right)\right] \\ &= \frac{8}{n\pi} \end{aligned} \tag{13}$$

og har dermed

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right) \tag{14}$$

11.2.17

Ser at funksjonen er odde og finner derfor ikke b_n

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 \left[-x\cos n\pi x + \cos n\pi x\right] dx \\ &= 2\left[-\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x dx\right] \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}\left(-\cos n\pi + 1\right) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{n^2\pi^2} & , n = 2k-1 \\ 0 & , n = 2k \end{array} \right. \quad , k \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{15}$$

og har

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) dx = \frac{1}{2} \tag{16}$$

og har dermed

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2\left(2n-1\right)^2}\cos\left[\left(2n-1\right)\pi x\right] \tag{17}$$

11.2.24

Finner først Fourier-cosinus-rekka til $f(x)$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_2^4 \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx \\ &= \frac{2}{n\pi}\left(\sin n\pi - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{2}{n\pi} & , n = 4k-3 \\ \frac{2}{n\pi} & , n = 4k-1 \\ 0 & , n = 2k \end{array} \right. \quad , k \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{18}$$

og har $a_0 = 2 \cdot 2 \cdot 1/8 = 1/2$ og har da Fourier-cosinus-rekka

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{\left(4n-3\right)\pi}\cos\left[\frac{\left(4n-1\right)\pi x}{4}\right] - \frac{2}{\left(4n-3\right)\pi}\cos\left[\frac{\left(4n-3\right)\pi x}{4}\right]\right\} \tag{19}$$

finner så Fourier-sinus-rekka og har da

$$b_n = \frac{1}{2}\int_2^4 \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right)dx = \frac{2}{n\pi}\left[-\cos n\pi + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & ,n = 2k-1 \\ -\frac{4}{n\pi} & ,n = 4k-2 \\ 0 & ,n = 4k \end{cases} \quad ,k \in \mathbb{N} \tag{20}$$

11.2.29

Ser på $f(x) = \sin x$ for $0 < x < \pi$ og ser først på Fourier-sinus-rekka til $f(x)$ og ved å periodisk utvide til en odde funksjon får vi $\sin x, \forall x$ og har dermed at Fourier-sinus-rekka er gitt ved

$$f(x) \sim \sin x \tag{21}$$

ser så på Fourier-cosinus-rekka og har dermed

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left[ie^{-ix} - ie^{ix}\right]\left[e^{inx} + e^{-inx}\right]dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left[ie^{ix(n-1)} + ie^{ix(-n-1)} - ie^{ix(n+1)} - ie^{ix(-n+1)}\right]dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1} + \frac{(-1)^{-n-1}-1}{-n-1} - \frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} - \frac{(-1)^{-n+1}-1}{-n+1}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2(-1)^{n-1}-2}{n-1} - \frac{2(-1)^{n+1}-2}{n+1}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{4(-1)^{n+1}-4}{n^2-1}\right] \\ &= \frac{2\left[(-1)^{n+1}-1\right]}{\pi\left(n^2-1\right)} \end{aligned} \tag{22}$$

ser så at denne rekka ikke er definert for $n = 1$ og finner da

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2x dx = 0 \tag{23}$$

og finner så

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx = \frac{1}{\pi}\left[-\cos\pi + 1\right] = \frac{2}{\pi} \tag{24}$$

og har dermed Fourier-cosinus-rekka

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\left[(-1)^{n+1}-1\right]}{\pi\left(n^2-1\right)}\cos nx \tag{25}$$

11.3.15