14.3.2

Ser på

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{z^2-1} dz, \quad \mathcal{C} : |z-1-i| = \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

kan ved delbrøksoppspaltning finne brøken forenklet og dermed ser på polynomdivisjonen

$$\left(z^2\right) / \left(z^2-1\right) = 1 + \frac{1}{z^2-1} \tag{2}$$

og kan så videre se

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2-1} &= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} \\ \frac{1}{z^2-1} &= \frac{A(z+1)+B(z-1)}{z^2-1} \\ 1 = Az + A + Bz - B &\Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

og har dermed

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{z^2-1} dz &= \oint_{\mathcal{C}} \left[1 + \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2(z+1)}\right] dz \\ &= \oint_{\mathcal{C}} dz + \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-1} dz - \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z+1} dz \\ &= 0 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi i - 0 \\ &= \pi i \end{aligned} \tag{4}$$

siden $z = 1$ ligger i sirkelen, mens $z = -1$ ikke ligger innenfor sirkelen.

14.3.13

Ser på integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z+2}{z-2} dz, \quad \mathcal{C} : |z-1| = 2 \tag{5}$$

ser at $z = 2$ ligger innenfor sirkelen og har dermed

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z+2}{z-2} dz = 2\pi i(2+2) = 8\pi i \tag{6}$$

14.3.18

Ser på integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{4z^2 - 8iz} dz = \frac{1}{4} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{z^2 - 2iz} dz \tag{7}$$

hvor $\mathcal{C}$ er kvadratet med hjørnene $\pm 3i, \pm 3$ mot klokka og $\pm i, \pm 1$ med klokka, og ser så

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2-2iz} &= \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2i} \\ \frac{1}{z^2-2iz} &= \frac{Az - 2Ai + Bz}{z^2-2iz} \\ 1 = Az - 2Ai + Bz &\Rightarrow A = \frac{i}{2}, B = -\frac{i}{2} \end{aligned} \tag{8}$$

og dermed

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{4z^2 - 8iz} dz = \frac{i}{8} \oint_{\mathcal{C}} \left[\frac{\sin z}{z} - \frac{\sin z}{z-2i}\right] dz = -\frac{i}{4} \pi i \sin 2i = \frac{\pi i}{8} \left[e^2 - e^{-2}\right] \tag{9}$$

14.4.2

Ser på intagralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^6}{(2z-1)^6} dz \tag{10}$$

hvor $\mathcal{C}$ er enhetssirkelen og med $f(z) = z^6$ er

$$f^{(5)}(z) = 6!z \tag{11}$$

og har da

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^6}{(2z-1)^6} dz = \oint_{\mathcal{C}} \frac{z^6}{2^{1/6}(z-1/2)^6} = \frac{2\pi i}{2^{1/6} \cdot 5!} 6! \cdot \frac{1}{2} = 2^{5/6} \cdot 3\pi i \tag{12}$$

14.4.7

Ser på integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos z}{z^{2n+1}} dz, \quad n = 0, 1, \dots \tag{13}$$

med $\mathcal{C}$ enhetssirkelen, kan da se at

$$f^{(2n)} = (-1)^n \cos z \tag{14}$$

og har dermed

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos z}{z^{2n+1}} dz = (-1)^n \cdot \frac{2\pi i}{(2n)!} \tag{15}$$

14.4.16

Ser på integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{4z}}{z(z-2i)^2} dz \tag{16}$$

med $\mathcal{C}$ er gitt ved $|z-i| = 3$ mot klokka og $|z| = 1$ med klokka og kan skrive

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-2i)^2} &= \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2i} + \frac{C}{(z-2i)^2} \\ 1 &= A(z-2i)^2 + Bz(z-2i) + Cz \\ 1 &= Az^2 - 4Azi - 4A + Bz^2 - 2Bzi + Cz \end{aligned} \tag{17}$$

og har fra dette $A = -1/4, B = 1/4, C = -i/2$ og dermed

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{4z}}{z(z-2i)^2} dz &= \oint_{\mathcal{C}} \left[\frac{e^{4z}}{4(z-2i)} - \frac{e^{4z}}{4z} - \frac{ie^{4z}}{2(z-2i)^2} \right] dz \\ &= \frac{1}{4} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{4z}}{z-2i} dz - \frac{1}{4} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{4z}}{z} dz - \frac{i}{2} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{4z}}{(z-2i)^2} \\ &= \frac{1}{2} \pi i e^{8i} - 0 + 4\pi e^{8i} \\ &= \left(4 + \frac{1}{2} i\right) \pi e^{8i} \end{aligned} \tag{18}$$

15.1.17

Ser på rekka

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\ln n} \tag{19}$$

kan skrive om til

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{\ln n} \tag{20}$$

og kan finne konvergensradius ved Cauchy-Hardamard

15.1.18

Ser på rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{i}{4}\right)^n \tag{21}$$

og ser ved å bruke rottesten

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \exp\left\{\ln n^{\frac{2}{n}}\right\} = \frac{1}{4} \exp\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n}{n}\right\} = \frac{1}{4} < 1 \tag{22}$$

og dermed konvergerer rekka.

15.2.5

Ser på en rekke

$$\sum_n a_n z^n \tag{23}$$

med konvergensradius R og ser så på

$$\sum_n a_n z^{2n} = \sum \tag{24}$$

og ved å se på forholdstesten finner vi

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} z^2\right| = Lz^2 \tag{25}$$

ved å anta $L \neq 0$ har vi $L > 0$ og ved forholdstesten har vi konvergens ved

$$Lz^2 < 1 \Rightarrow z < \frac{1}{\sqrt{L}} \tag{26}$$

ved Cauchy-Hardamard vet vi at

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{L} \tag{27}$$

og dermed konvergens for

$$z < \sqrt{R} \tag{28}$$

15.2.10

Ser rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{n^n} \tag{29}$$

har sentrum i $z = 2i$ og kan bruke Cauchy-Hardamard

$$\left| \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \right| \xrightarrow{n\to\infty} \infty \tag{30}$$

og har dermed uendelig konvergensradius og rekka konvergerer for alle $z \in \mathbb{C}$.

15.2.14

Ser på rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{2n}(n!)^2} z^{2n} \tag{31}$$

ser at sentrum er i $z = 0$ og fra beviset tidligere har vi konvergens i $\sqrt{R}$ dersom R er gitt av Cauchy-Hardamard

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n 4^{2(n+1)} \left[(n+1)!\right]^2}{4^{2n}(n!)^2(-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} 4^2 \left(n+1\right)^2 \to \infty \tag{32}$$

fra Cauchy-Hardamard vil dette gjelde for uendelig store konvergensradiuser for z^{2n} også og vi har dermed en uendelig stor konvergensradius.