Oppg. 1

Har en normalfordeling med ukjent μ og $\sigma^2 = 0.060^2$

a) Antar $\mu = 6.8$ og har da

$$\mathrm{P}\left[X < 6.74\right] = \mathrm{P}\left[\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{6.74-\mu}{\sigma}\right] = \mathrm{P}\left[Z < -1\right] = 0.1587 \tag{1}$$

ved å slå opp i tabell. Kan så finne $\mathrm{P}\left[6.74 < X < 6.86\right]$, men siden normalfordelingen er lik på begge sider av μ har vi

$$\mathrm{P}\left[6.74 < X < 6.86\right] = 1 - 2\mathrm{P}\left[X < 6.74\right] = 0.6826 \tag{2}$$

til slutt ser vi på $\mathrm{P}\left[|X-\mu| > 0.06\right]$ og har da

$$\mathrm{P}\left[|X-\mu| > 0.06\right] = \mathrm{P}\left[X < 6.74\right] + \mathrm{P}\left[X > 6.86\right] = 1 - \mathrm{P}\left[6.74 < X < 6.86\right] = 0.3174 \tag{3}$$

b) Ser på $Y = \sum_{i=1}^{5} X_i/5$ og vet ikke lenger hva μ er, kan dermed se på

$$\mathrm{Var}\left[Y\right] = \frac{1}{25}\left[5\sigma^2\right] = \frac{1}{5}\sigma^2 \tag{4}$$

vet at Y er normalfordelt og har da

$$\mathrm{P}\left[|Y-\mu| > 0.06\right] = 2\mathrm{P}\left[\right] \tag{5}$$

og ser videre på

$$\begin{aligned} \overline{x} - z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} &= 6.736 \\ \overline{x} + z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} &= 6.784 \end{aligned} \tag{6}$$

og har dermed konfidensintervallet på 95%

$$\mu \in (6.736, 6.784) \tag{7}$$

Oppg. 2

a) Ser på poissonfordelingen

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, x \in \mathbb{N} \tag{8}$$

antar $\lambda = 15$ og ser da at vi har

$$\mathrm{E}\left[X\right] = \mu = \lambda = 15 \tag{9}$$

og har dermed

$$\mathrm{P}\left[X > 20\right] = 1 - \mathrm{P}\left[X \leq 20\right] = 0.083 \tag{10}$$

og

$$\mathrm{P}\left[10 \leq X < 20\right] = \mathrm{P}\left[X < 20\right] - \mathrm{P}\left[X < 10\right] = 0.8053 \tag{11}$$

b) Antar så at vi ikke kjenner λ og har $\hat{\lambda} = \overline{X} = 359/30$ og har da fra sentralgrenseteoremet at dette kan tilnærmes en standard normalfordeling

$$N(z;0,1), Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \tag{12}$$

og vi bruker variansen i en poissonfordeling som σ og dermed

$$\sigma = \mathrm{Var}\left[X\right] = \lambda \tag{13}$$

vil ha et konfidensintervall med 99% sannsynlighet og må dermed ha

$$0.99 = \int_{-\beta}^{\beta} N(z; 0, 1) dz \tag{14}$$

slår så opp i tabell og finner at for $\alpha = 0.005$ på hver side av normalfordelingen har vi $\beta = 2.576$ og har dermed konfidensintervallet

$$\mu \in () \tag{15}$$

Oppg. 3

a) Ser at X er definert slik at for hver del av DNA-strukturen så er det to muligheter, at det er en match eller ikke. Siden det sjekkes for n deler som er uavhengige er X binomisk fordelt

$$f(x) = b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{16}$$

kan dermed finne ved $n = 5$

$$\mathrm{P}[X = 2] = f(2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot 0.15^2 \cdot (1 - 0.15)^{5-2} = 0.138 \tag{17}$$

og

$$\mathrm{P}[X \geq 2] = 1 - \mathrm{P}[X = 1] - \mathrm{P}[X = 0] = 1 - 5 \cdot 0.15 \cdot 0.85^4 - 0.85^5 = 0.165 \tag{18}$$

og

$$\mathrm{P}[X = 2 | X \geq 2] = \frac{\mathrm{P}[X = 2]}{\mathrm{P}[X \geq 2]} = 0.836 \tag{19}$$

b) Ser på sjansen for en type 1 feil og har da