

13.7.22

Skal finne prinsipalverdien til $z = (2i)^{2i}$ og har da

$$z = 2^{2i} \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^{2i} = e^{\ln 2 \cdot 2i} e^{-\pi} = e^{-\pi} e^{i \cdot 2 \ln 2} \quad (1)$$

Har $2 \ln 2 < \pi$ og har dermed $\arg z = 2 \ln 2$.

14.1.3

Ser på kurven

$$\mathcal{C} : z(t) = t + 4t^2 i, t \in [0, 1] \quad (2)$$

14.1.11

Ser på \mathcal{C} fra $(-1, 2)$ til $(1, 4)$ og kan representere den på følgende måte

$$z(t) = t + 3ti. \quad (3)$$

14.1.20

Ser på \mathcal{C} gitt ved

$$4(x-2)^2 + 5(y+1)^2 = 20 \Rightarrow \frac{1}{5}(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y+1)^2 = 1 \quad (4)$$

kan da skrive

$$x-2 = \sqrt{5} \cos t, \quad y+1 = 2 \sin t \quad (5)$$

og har da ved $z = x + iy$

$$z(t) = \sqrt{2} \sin t + 2 + i(2 \cos t - 1) \quad (6)$$

14.1.22

Ser på integralet

$$\int_{\mathcal{C}} \operatorname{Re} z dz, \quad \mathcal{C} : y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 \quad (7)$$

fra $1 + i$ til $3 + 3i$ og kan parametrisere kurven ved

$$z(t) = t + i \left(1 + \frac{1}{2}(t-1)^2 \right), t \in (1, 3) \quad (8)$$

og har da

$$z'(t) = 1 + ti - i \quad (9)$$

som da gir oss

$$\int_{\mathcal{C}} \operatorname{Re} z dz = \int_1^3 [\operatorname{Re} z(t)] z'(t) dt = \int_1^3 [t + t^2 i - it] dt = 4(1-i) + \frac{26}{3}i = 4 + \frac{14}{3}i \quad (10)$$

14.1.26

Ser på integralet

$$\int_C (z + z^{-1}) dz, \quad C : z(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi) \quad (11)$$

kan dele opp og ser fordi z er analytisk på hele \mathbb{C} så har vi

$$\int_C (z + z^{-1}) dz = \int_C z dz + \int_C z^{-1} dz = \int_C z^{-1} dz \quad (12)$$

kan så finne

$$\int_C z^{-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i \quad (13)$$

14.1.29

Ser på integralet

$$\int_C \operatorname{Im} z^2 dz = \int_{C_1} \operatorname{Im} z^2 dz + \int_{C_2} \operatorname{Im} z^2 dz + \int_{C_3} \operatorname{Im} z^2 dz \quad (14)$$

med C gitt av trekanten gitt av punktene $0, 1, i$ og C_1 linja mellom $0, 1$ og C_2 linja mellom $1, i$ og C_3 linja mellom $i, 0$. Vet at $\operatorname{Im} z^2 = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$ og har dermed integralet over C_1 lik 0. Har da parameterfremstillingene

$$\begin{aligned} C_2 : \quad z(t) &= 1 - t + it, \quad t \in [0, 1] \\ C_3 : \quad z(t) &= it, \quad t \in [0, 1] \end{aligned} \quad (15)$$

og finner så

$$\begin{aligned} \int_C \operatorname{Im} z^2 dz &= \int_0^1 (i - 1) \operatorname{Im} [(1 - t + it)^2] dt + \int_0^1 i \operatorname{Im} [(it)^2] dt \\ &= \int_0^1 (i - 1) [2t - 2t^2] dt \\ &= (2i - 2) \int_0^1 [t - t^2] dt \\ &= (2i - 2) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] \\ &= \frac{1}{3}i - \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (16)$$

14.2.4

Har at en funksjon, la oss kalle den $f(z)$, har følgende egenskaper

$$\int_{R_1} f(z) dz = 2, \quad \int_{R_3} f(z) dz = 6 \quad (17)$$

hvor R_r er sirkelen med sentrum i origo og radius r , vil se om funksjonen er analytisk i annulusen $1 < |z| < 3$ og kaller dette området R . Vet at for en analytisk funksjon på hele domenet D og med en lukket kurve $C \subset D$ har vi

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (18)$$

siden vi vet at

$$\oint_{\partial R} f(z) dz = \int_{R_1} f(z) dz - \int_{R_3} f(z) dz = -4 \neq 0 \quad (19)$$

så er ikke $f(z)$ analytisk på hele R .

14.2.13

Ser på integralet over enhetssirkelen mot klokka

$$\oint_C (z^2 - 1.2)^{-1} dz \quad (20)$$

og siden dette er integralet over en lukket kurve i et enkeltsammenhengende domene hvor integranden er analytisk har vi

$$\oint_C (z^2 - 1.2)^{-1} dz = 0 \quad (21)$$

14.2.22

Ser på integralet

$$\oint_C \operatorname{Re} z dz = \int_{C_1 \cup C_2} \operatorname{Re} z dz, \quad C_1 : z(t) = e^{it}, t \in [0, \pi], C_2 : z(t) = t, t \in [-1, 1] \quad (22)$$

og har dermed

$$\int_{C_1} \operatorname{Re} z dz = \int_0^\pi \operatorname{Re} [e^{it}] i e^{it} dt = i \int_0^\pi e^{it} dt = e^{i\pi} - 1 = -2 \quad (23)$$

og

$$\int_{C_2} \operatorname{Re} z dz = \int_{-1}^1 t dt = 0 \quad (24)$$

og har dermed

$$\oint_C \operatorname{Re} z dz = -2 \quad (25)$$

14.2.23

Ser på integralet

$$\oint_C \frac{2z - 1}{z^2 - z} dz \quad (26)$$

kaller integranden $f(z)$ og ser at for $z = 0, 1$ er funksjonen ikke analytisk. Ser dermed på kurvene C_1, C_2 som er en sirkel med radius 1 rundt disse punktene og har da

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz \quad (27)$$

har da parameterfremstillingene

$$\begin{aligned} C_1 : z(t) &= e^{it} & t &\in [0, 2\pi) \\ C_2 : z(t) &= 2 + e^{it} & t &\in [0, 2\pi) \end{aligned} \quad (28)$$

og kan dermed skrive

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \int_0^{2\pi} \frac{2e^{it} - 1}{e^{it}(e^{it} - 1)} i e^{it} dt + \int_0^{2\pi} \frac{4 + 2e^{it} - 1}{(2 + e^{it})(2 + e^{it} - 1)} i e^{it} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \left[\frac{2e^{it} - 1}{e^{it} - 1} + \frac{3e^{it} + 2e^{2it}}{(e^{it} + 2)(e^{it} + 1)} \right] dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{(2e^{it} - 1)(e^{2it} + 3e^{it} + 2) + 2e^{3it} + e^{2it} - 3e^{it}}{(e^{it} - 1)(e^{it} + 1)(e^{it} + 2)} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{4e^{3it} + 6e^{2it} - 2e^{it} - 2}{(e^{it} - 1)(e^{it} + 1)(e^{it} + 2)} dt \end{aligned} \quad (29)$$

14.2.28

Ser på integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\tan \frac{z}{2}}{16z^4 - 81} dz \quad (30)$$

hvor \mathcal{C} er kvadretet definert av hjørnene $\pm 1, \pm i$, og ser at integranden ikke er analytisk i

$$z^4 = \frac{81}{16} \Rightarrow |z| = \frac{3}{2} \quad (31)$$

den er heller ikke analytisk for

$$\cos z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad (32)$$

vet at på kvadratets maksimale distanse fra origo er 1 og funksjonen er analytisk innenfor dette området, og har dermed

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\tan \frac{z}{2}}{16z^4 - 81} dz = 0 \quad (33)$$

σ