# 14.3.2

Ser på

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{z^2-1} dz, \quad \mathcal{C} : |z-1-i| = \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

kan ved delbrøksoppspaltning finne brøken forenklet og dermed ser på polynomdivisjonen

$$\left(z^2\right) / \left(z^2-1\right) = 1 + \frac{1}{z^2-1} \tag{2}$$

og kan så videre se

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2-1} &= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} \\ \frac{1}{z^2-1} &= \frac{A(z+1)+B(z-1)}{z^2-1} \\ 1 = Az + A + Bz - B &\Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

og har dermed

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{z^2-1} dz &= \oint_{\mathcal{C}} \left[1 + \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2(z+1)}\right] dz \\ &= \oint_{\mathcal{C}} dz + \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-1} dz - \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z+1} dz \\ &= 0 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi i - 0 \\ &= \pi i \end{aligned} \tag{4}$$

siden $z = 1$ ligger i sirkelen, mens $z = -1$ ikke ligger innenfor sirkelen.

# 14.3.13

Ser på integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z+2}{z-2} dz, \quad \mathcal{C} : |z-1| = 2 \tag{5}$$

ser at $z = 2$ ligger innenfor sirkelen og har dermed

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z+2}{z-2} dz = 2\pi i(2+2) = 8\pi i \tag{6}$$

# 14.3.18

Ser på integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{4z^2-8iz} dz = \frac{1}{4}\oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{z^2-2iz} dz \tag{7}$$

hvor $\mathcal{C}$ er kvadratet med hjørnene $\pm 3i, \pm 3$ mot klokka og $\pm i, \pm 1$ med klokka, og ser så

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2-2iz} &= \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2i} \\ \frac{1}{z^2-2iz} &= \frac{Az-2Ai+Bz}{z^2-2iz} \\ 1 = Az - 2Ai + Bz &\Rightarrow A = \frac{i}{2}, B = -\frac{i}{2} \end{aligned} \tag{8}$$

og dermed

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{4z^2-8iz} dz = \frac{i}{8}\oint_{\mathcal{C}} \left[\frac{\sin z}{z} - \frac{\sin z}{z-2i}\right] dz = -\frac{i}{4}\pi i \sin 2i = \frac{\pi i}{8}\left[e^2 - e^{-2}\right] \tag{9}$$

## 14.4.2

Ser på intagralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^6}{(2z-1)^6} dz \tag{10}$$

hvor $\mathcal{C}$ er enhetssirkelen og med $f(z) = z^6$ er

$$f^{(5)}(z) = 6!z \tag{11}$$

og har da

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^6}{(2z-1)^6} dz = \oint_{\mathcal{C}} \frac{z^6}{2^{1/6}(z-1/2)^6} = \frac{2\pi i}{2^{1/6} \cdot 5!} 6! \cdot \frac{1}{2} = 2^{5/6} \cdot 3\pi i \tag{12}$$

## 14.4.7

## 14.4.16

## 15.1.17

## 15.1.18

## 15.2.5

## 15.2.10

## 15.2.14