Oppg. 1

a) Har en Poisson-fordeling og definerer da

$$L(\mathbf{x}, \lambda_R) = f(x_1, \lambda_R) \cdots f(x_n, \lambda_R) \tag{1}$$

med

$$f(x_i, \lambda_R) = \frac{\lambda_R^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda_R} \tag{2}$$

og finner så

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda_R} = \frac{\partial}{\partial \lambda_R} \left\{ \ln \left[\frac{\lambda_R^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{j=1}^n x_j!} e^{-n\lambda_R} \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial \lambda_R} \left\{ \ln \lambda_R \sum_{i=1}^n x_i - \ln \prod_{j=1}^n x_j! - n\lambda_R \right\} = \frac{1}{\lambda_R} \sum_{i=1}^n x_i - n \tag{3}$$

setter vi så likning (3) lik 0 finner vi

$$\hat{\lambda}_R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \tag{4}$$

ser også at $\hat{\lambda}_R = \overline{X}$ og har da

$$\mathrm{E}\left[\hat{\lambda}_R\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n}\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n} \cdot n\lambda_R = \lambda_R \tag{5}$$

og ser så på

$$\mathrm{Var}\left[\hat{\lambda}_R\right] = \mathrm{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2} \cdot n\lambda_R = \frac{\lambda_R}{n} \tag{6}$$

ved sentralgrenseteoremet er dette normalfordelt.

b) Setter da opp hypotesene

$$H_0 : \lambda_R = 10, \quad H_1 : \lambda_R < 10 \tag{7}$$

og kan sette opp ved sentralgrenseteoremet

$$T = \frac{\overline{X} - \lambda_R}{\sqrt{\mathrm{Var}\left[X\right]}} \approx -1.34164 \tag{8}$$

for H_0 og kan så finne p-verdien

$$p = \mathrm{P}\left[T \leq -1.34164\right] = 0.0901 \tag{9}$$

og har dermed med $\alpha = 0.05$ at vi ikke forkaster hypotesen.

c) Antar $\lambda_R = 9$ og fortsetter å operere med $\alpha = 0.05$ og vil finne

$$F(x) = \sum_{n=0}^{x} f(x) = e^{-9} \sum_{n=0}^{x} \frac{9^n}{n!} = 0.9 \tag{10}$$

og finner ved tabell $x = 13$

$$p = \mathrm{P}\left[T \leq -\frac{1}{3}\sqrt{n}\right] \leq 0.05 \tag{11}$$

og ved å se i tabell trenger vi da

$$-\frac{1}{3}\sqrt{n} = -1.65 \Rightarrow \tag{12}$$

Oppg. 2

Ser på $Y_i = ax_i(1-x_i) + \epsilon_i$ for $i = 1, 2, \ldots, n$ og har

$$\mathrm{E}\left[Y_i|x_i\right] = ax_i(1-x_i), \quad \mathrm{Var}\left[Y_i|x_i\right] = \sigma_0^2 = 0.025^2 \tag{13}$$

ser på sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for a og definerer

$$L(\mathbf{x}, a) = \prod_{i=1}^{n}\left[ax_i(1-x_i) + \epsilon_i\right] \tag{14}$$

og setter

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \ln L}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \ln\left\{\prod_{i=1}^{n}\left[ax_i(1-x_i) + \epsilon_i\right]\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n} \ln\left[ax_i(1-x_i) + \epsilon_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i(1-x_i)}{ax_i(1-x_i) + \epsilon_i} \end{aligned} \tag{15}$$

og finner så

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i(1-x_i)Y_i}{} \tag{16}$$