12.6.11

Har $u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t)$ og $u(x,t) = f(x)$ og løser varmelikningen med hensyn på dette

$$\partial_t u = c^2 \partial_x^2 u \tag{1}$$

og kan anta $u = F(x) \cdot G(t)$ og finner da

$$F(x)G'(t) = c^2 F''(x)G(x) \Rightarrow \frac{G'(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = \kappa \tag{2}$$

som da gir likningene

$$\begin{cases} F'' - \kappa F = 0 \\ G' - c^2 \kappa G = 0 \end{cases} \tag{3}$$

ser på F og ved initialbetingelsene

$$F'(0) = 0 = F'(L) \tag{4}$$

finner at for $\kappa = 0$ får vi $F(x) = ax + b$, men fordi vi har $F'(L) = a = 0$ får vi

$$F(x) = b \tag{5}$$

og kan så se på $\kappa = q^2$ og har da

$$F(x) = Ae^{qx} + Be^{-qx} \tag{6}$$

fra initial betingelsene har vi

$$F'(0) = qA - qB = 0 = qAe^{qL} - qBe^{-qL} = F'(L) \tag{7}$$

og har da $A = B = 0$ og dermed $F = 0$ som ikke er interessant, ser videre på $\kappa = -q^2$ og har da

$$F(x) = C\cos qx + D\sin qx \tag{8}$$

og har da ved initialbetingelsene

$$F'(0) = qD = 0 \Rightarrow F'(L) = -qC\sin qL = 0 \Rightarrow q = \frac{n\pi}{L}, \ \ n \in \mathbb{Z} \tag{9}$$

siden vi ikke ser på løsningene hvor $D = 0$ siden det vil føre til $F = 0$ og kan da se på G

$$G' + c^2 q^2 G = 0 \Rightarrow G = \alpha e^{-c^2 q^2 t} \tag{10}$$

og har da

$$u_n(x,t) = \beta_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} \cos\frac{n\pi x}{L} \tag{11}$$

og har dermed

$$u(x,t) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t} \cos\frac{n\pi x}{L} \tag{12}$$

kan så sette $t = 0$ og har da

$$u(x,0) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos\frac{n\pi x}{L} = f(x) \tag{13}$$

ser at dette er en Fourier-cosinusrekke til $f(x)$ og har da

$$\beta_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad \beta_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \tag{14}$$

12.6.12

Ser på $f(x) = x$ med $L = \pi, c = 1$ og setter inn i uttrykket vi fant i forrige oppgave

$$\beta_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{\pi}{2} \tag{15}$$

og

$$\beta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\frac{\cos n\pi - 1}{n^2} = \frac{2\left[(-1)^n - 1\right]}{\pi n^2} \tag{16}$$

og har da

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left[(-1)^n - 1\right]}{\pi n^2}\cos(nx)e^{-n^2 t} \tag{17}$$

12.6.14

Ser på $f(x) = \cos 2x$ med $L = \pi, c = 1$ og setter inn i uttrykket

$$\beta_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos 2x dx = 0 \tag{18}$$

og

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos 2x\cos nx dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right)\left(e^{inx} + e^{-inx}\right)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left[e^{(2+n)ix} + e^{(2-n)ix} + e^{-(2+n)ix} + e^{-(2-n)ix}\right]dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left\{\cos\left[(2+n)x\right] + \cos\left[(2-n)x\right]\right\}dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\left[(2+n)x\right]}{2+n} + \frac{\sin\left[(2-n)x\right]}{2-n}\right]_0^\pi \\
&= 0
\end{aligned} \tag{19}$$

og kan dermed konkludere med at $u(x,t) = 0$

12.6.16

Har likningen $u_t = c^2 u_{xx} + H$ med $H > 0$ og har $L = \pi$ med $u(0) = 0 = u(L)$ og setter

$$u = v - \frac{Hx(x-\pi)}{2c^2} \tag{20}$$

og finner da

$$v_t = v_{xx} \tag{21}$$

kan så sette $v = F(x)G(t)$ og finner

$$G'(t)F(x) = F''(x)G(t) \Rightarrow \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = \kappa \tag{22}$$

vet at kun $\kappa = -q^2$ vil gi $F \neq 0$ og kan dermed se dette tilfellet

$$F(x) = A\sin qx + B\cos qx \Rightarrow B = 0, \quad q = n, n \in \mathbb{Z} \tag{23}$$

og dermed har vi

$$G(t) = \alpha e^{-n^2 t} \tag{24}$$

og har dermed

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-n^2 t} \sin nx \tag{25}$$

med

$$\beta_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \tag{26}$$

for en funksjon $f(x) = v(x, 0)$ og kan sette dette inn i den opprinnelige funksjonen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-n^2 t} \sin nx + \frac{Hx(x-\pi)}{2c^2} \tag{27}$$

med

$$\beta_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad f(x) = u(x,0) + \frac{Hx(x-\pi)}{2c^2} \tag{28}$$

12.6.21

Har en boks med $u(x,0) = 0, u(x,a) = 25, u(0,y) = 0, u(a,y) = 0$ med $a = 24$ og kan bruke varmelikningen uten leddet for tidsavhengighet siden $u_t = 0$

$$u_{xx} = -u_{yy} \tag{29}$$

og skriver

$$u = F(x)G(y) \Rightarrow \frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)} = \kappa \tag{30}$$

og har da likningene

$$\begin{cases} F'' - \kappa F = 0 \\ G'' + \kappa G = 0 \end{cases} \tag{31}$$

må ha $\kappa = -q^2$ for F og får da med $F(0) = 0 = F(a)$

$$F = A \sin qx + B \cos qx \Rightarrow B = 0, \;\; q = \frac{n\pi}{a} \tag{32}$$

og kan fra dette også finne G

$$G'' - q^2 G = 0 \Rightarrow G = Ce^{qy} + De^{-qy} \tag{33}$$

og så

$$G(0) = C + D = 0 \Rightarrow C = -D \tag{34}$$

og har da

$$G(y) = 2C \sinh \frac{n\pi y}{a} \tag{35}$$

og kan dermed finne

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \tag{36}$$

vet at $u(x,a) = 25$ og kan dermed Fourier-sinusrekka til denne funksjonen fra 0 til a og har da

$$C_n \sinh n\pi = \frac{2}{a} \int_0^a 25 \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \frac{50}{n\pi} [1 - \cos n\pi] = \frac{100}{n\pi}, n = 2k-1, k \in \mathbb{N} \tag{37}$$

og har da

$$C_n = \frac{100}{n\pi \sinh n\pi} \tag{38}$$

og har dermed

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n\pi \sinh n\pi} \sinh \frac{n\pi y}{24} \sin \frac{n\pi x}{24} \tag{39}$$

12.7.1

Har

$$2u_x + 3u_t = 0, \;\; u(x,0) = f(x) \tag{40}$$

skriver om til

$$u_t + cu_x = 0, c = \frac{2}{3} \tag{41}$$

gjør variabelskiftet $\xi = x + ct, \eta = x - ct$ og har dermed

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \tag{42}$$

og

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta} = c\left[\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right] \tag{43}$$

og har dermed likningen

$$\begin{aligned} cu_\xi - cu_\eta + cu_\xi + cu_\eta &= 0 \\ 2cu_\xi &= 0 \end{aligned} \tag{44}$$

som da gir oss $u = F(\eta) = F(x - ct)$ ser at hvis vi setter $t = 0$ får vi

$$u(x,0) = F(x) = f(x) \tag{45}$$

og har dermed

$$u(x,0) = f\left(x - \frac{2}{3}t\right) \tag{46}$$

12.7.2

Har

$$2tu_x + 3u_t = 0, \;\; u(x,0) = f(x) \tag{47}$$

ser på konstante linjer i planet som da har formen $x = x(r), t = t(r)$ og har da ved kjerneregelen

$$\frac{du}{dr} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dr} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dr} = 0 \tag{48}$$

og har da

$$\frac{dt}{dr} = 1, \frac{dx}{dr} = \frac{2t}{3} \tag{49}$$

ved å multiplisere den opprinnelige likningen med $1/t$ får vi

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{t}, \frac{dx}{dr} = \frac{2}{3} \tag{50}$$

siden $r = 0$ ikke må være definert ser vi bort ifra den ene vilkårlige variabelen og har

$$r = \frac{t^2}{2}, \;\; r = \frac{3}{2}x + C \tag{51}$$

som kan skrives om til

$$r = \frac{t^2}{2}, C = \frac{t^2}{2} - \frac{3}{2}x \tag{52}$$

og siden u er konstant på kurva så har vi

$$u = F\left(\frac{t^2}{2} - \frac{3}{2}x\right) \tag{53}$$

ved å sette $t = 0$ har vi

$$F\left(-\frac{3}{2}x\right) = f(x) \Rightarrow F(x) = f\left(-\frac{2}{3}x\right) \tag{54}$$

og har dermed løsningen

$$u(x,t) = f\left(x - \frac{t^2}{3}\right) \tag{55}$$

12.7.3

Har

$$tu_{xx} = u_t, \;\; u(x,0) = f(x) \tag{56}$$

med $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ og kan bruke Fouriertransformen

$$-tw^2\hat{u} = \hat{u}_t \Rightarrow \hat{u} = Ae^{-w^2t^2} \tag{57}$$

ved å sette $t = 0$ får vi $A = \hat{u}(x,0)$ og har dermed

$$\begin{aligned} u &= \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(x)e^{-w^2t^2}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x) * e^{-w^2t^2}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)e^{-s^2t^2}\,ds \end{aligned} \tag{58}$$