12.1.1

Skal vise fundementalteoremet for PDEer av andre orden og lar dermed u_1 og u_2 oppfylle følgende likning

$$au_{xx} + bu_{yy} + cu_{zz} + du_{xy} + fu_{xz} + gu_{yz} + hu_x + ku_y + mu_z + nu = p \tag{1}$$

og $u = ku_1 + cu_2, \ \ \forall(c, k) \in \mathbb{R}$

12.1.14d

Ser på

12.1.15

Har at $u(x, y) = a\ln(x^2 + y^2) + b$ er en løsning på Laplacelikningen, $\nabla^2 u = 0$, og kan sjekke dette ved

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} a\ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} a\ln\left(x^2+y^2\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2ax}{x^2+y^2}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2ay}{x^2+y^2}\right] \\ &= \frac{2a\left(x^2+y^2\right) - 4ax^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{2a\left(x^2+y^2\right) - 4ay^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

og har dermed at u oppfyller Laplacelikningen, skal så finne den spesielle løsningen for $u\left(x^2 + y^2 = 1\right) = 110$ og $u\left(x^2 + y^2 = 100\right) = 0$ og har da likningssettet

$$\left\{\begin{array}{rcl} a\ln(1) + b &=& 110 \\ a\ln(100) + b &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow b = 110, \ \ a = -\frac{110}{\ln(100)} \tag{3}$$

og har dermed

$$u(x, y) = -\frac{110}{\ln(100)}\ln\left(x^2+y^2\right) + 110 \tag{4}$$

12.3.5

Skal finne $u(x, t)$ for en streng med lengde $L = 1$ og $c^2 = 1$ med $u(x, 0) = k\sin 3\pi x$ med $k = 0.01$ og har da likningen

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_{xx} u = \partial_{tt} u & , x \in (0, 1) \\ u(0, t) = 0 = u(L, t) & , t \geq 0 \\ u(x, 0) = k\sin 3\pi x & , x \in [0, 1] \end{array}\right. \tag{5}$$

antar $u(x, t) = F(x) \cdot G(t)$ og har da

$$F''(x)G(t) = G''(t)F(x) \Leftrightarrow \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t)} = \kappa \tag{6}$$

for en konstant κ og har da likningen

$$\left\{\begin{array}{l} F'' - \kappa F = 0 \\ G'' - \kappa G = 0 \end{array}\right. \tag{7}$$

vi ser fra initialbetingelsene at $u(0, t) = F(0)G(t) = 0 = F(L)G(t) = u(L, t)$ gir $G(t) = 0 \vee F(0) = 0 = F(L)$ og siden $G(t) = 0$ ikke er en løsning vi er ute etter har vi dermed $F(0) = 0 = F(L)$ og ser da at $\kappa = 0$ gir

$F(x) = ax + b$ og $F(0) = 0$ gir $b = 0$ og $F(L) = 0$ gir $a = 0$ som ikke er en relevant løsning. Ser på $\kappa = q^2$ for $q \in \mathbb{R}$ og har da

$$F(x) = Ae^{qx} + Be^{-qx} \tag{8}$$

har så ved initialbetingelsene

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{qL} + Be^{-qL} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ Ae^{qL} - Ae^{-qL} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

og har dermed $A = B = 0$ og kan så sette $\kappa = -q^2$ og får

$$F(x) = C \sin qx + D \cos qx \tag{10}$$

$F(0) = D = 0$ og $F(L) = C \sin qL = 0$ og siden $C = 0$ gir $F(x) = 0$ noe vi ikke er interesserte i setter vi $C \neq 0$ og finner da

$$q = \frac{\pi n}{L}, \quad n \in \mathbb{N} \cup 0 \tag{11}$$

siden $\sin -x = -\sin x$ og setter $C = 1$ og har da uendelig mange løsninger

$$F_n(x) = \sin \frac{\pi n}{L} x \tag{12}$$

fra (7) har vi

$$G'' + q^2 G = 0 \tag{13}$$

og har dermed

$$G_n(t) = \alpha_n \sin \frac{\pi n}{L} t + \beta_n \cos \frac{\pi n}{L} t \tag{14}$$

og har dermed

$$u_n(x,t) = \left(\alpha_n \sin \frac{\pi n}{L} t + \beta_n \cos \frac{\pi n}{L} t\right) \sin \frac{\pi n}{L} x \tag{15}$$

ser $u_0(x,t) = 0$ og har den generelle løsningen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \sin \frac{\pi n}{L} t + \beta_n \cos \frac{\pi n}{L} t\right) \sin \frac{\pi n}{L} x \tag{16}$$

har $u(x,0) = k \sin 3\pi x$ og har dermed

$$k \sin 3\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{\pi n}{L} x \tag{17}$$

ser at dette vil være en sinus-fourierrekke for $k \sin 3\pi x$ og har da med $L = 1$

$$\begin{aligned} \beta_n &= 2 \int_0^1 k \sin 3\pi x \sin \pi n x dx \\ &= 2k \left[-\frac{1}{3\pi} \cos 3\pi x \sin \pi n x \Big|_0^1 + \frac{n}{3} \int_0^1 \cos 3\pi x \cos \pi n x dx \right] \end{aligned} \tag{18}$$

12.3.7

Bruker samme utledning som i forrige oppgave og har

$$\begin{aligned} \beta_n &= 2 \int_0^1 kx(1-x) \sin \pi n x dx \\ &= 2k \int \left[x \sin \pi n x - x^2 \sin \pi n x \right] dx \\ &= 2k \left[\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} - \frac{\left(2 - \pi^2 n^2\right)(-1)^n - 2}{\pi^3 n^3} \right] \end{aligned} \tag{19}$$