13.7.22

Skal finne prinsipialverdien til $z = (2i)^{2i}$ og har da

$$z = 2^{2i}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2i} = e^{\ln 2\cdot 2i}e^{-\pi} = e^{-\pi}e^{i\cdot 2\ln 2} \tag{1}$$

Har $2\ln 2 < \pi$ og har dermed $\arg z = 2\ln 2$.

14.1.3

Ser på kurven

$$\mathcal{C} : z(t) = t + 4t^2 i, t \in [0, 1] \tag{2}$$

14.1.11

Ser på $\mathcal{C}$ fra $(-1, 2)$ til $(1, 4)$ og kan representere den på følgende måte

$$z(t) = t + 3ti. \tag{3}$$

14.1.20

Ser på $\mathcal{C}$ gitt ved

$$4(x-2)^2 + 5(y+1)^2 = 20 \Rightarrow \frac{1}{5}(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y+1)^2 = 1 \tag{4}$$

kan da skrive

$$x - 2 = \sqrt{5}\cos t, \quad y + 1 = 2\sin t \tag{5}$$

og har da ved $z = x + iy$

$$z(t) = \sqrt{2}\sin t + 2 + i\left(2\cos t - 1\right) \tag{6}$$

14.1.22

Ser på integralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathrm{Re} z dz, \quad \mathcal{C} : y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 \tag{7}$$

fra $1 + i$ til $3 + 3i$ og kan parametrisere kurven ved

$$z(t) = t + i\left(1 + \frac{1}{2}(t-1)^2\right), t \in (1, 3) \tag{8}$$

og har da

$$z'(t) = 1 + ti - i \tag{9}$$

som da gir oss

$$\int_{\mathcal{C}} \mathrm{Re} z dz = \int_1^3 \left[\mathrm{Re} z(t)\right] z'(t) dt = \int_1^3 \left[t + t^2 i - it\right] dt = 4(1-i) + \frac{26}{3}i = 4 + \frac{14}{3}i \tag{10}$$

14.1.26

Ser på integralet

$$\int_{\mathcal{C}} (z + z^{-1})dz, \quad \mathcal{C} : z(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi) \tag{11}$$

kan dele opp og ser fordi z er analytisk på hele $\mathbb{C}$ så har vi

$$\int_{\mathcal{C}} (z + z^{-1})dz = \int_{\mathcal{C}} zdz + \int_{\mathcal{C}} z^{-1}dz = \int_{\mathcal{C}} z^{-1}dz \tag{12}$$

kan så finne

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-1}dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}dt = 2\pi i \tag{13}$$

14.1.29

Ser på integralet

$$\int_{\mathcal{C}} \text{Im}z^2dz = \int_{\mathcal{C}_1} \text{Im}z^2dz + \int_{\mathcal{C}_2} \text{Im}z^2dz + \int_{\mathcal{C}_3} \text{Im}z^2dz \tag{14}$$

med $\mathcal{C}$ gitt av trekanten gitt av punktene $0, 1, i$ og $\mathcal{C}_1$ linja mellom $0, 1$ og $\mathcal{C}_2$ linja mellom $1, i$ og $\mathcal{C}_3$ linja mellom $i, 0$. Vet at $\text{Im}z^2 = 0 \ \ \forall z \in \mathbb{R}$ og har dermed integralet over $\mathcal{C}_1$ lik 0. Har da parameterfremstillingene

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 : &\quad z(t) = 1 - t + it &&, t \in [0, 1] \\ \mathcal{C}_3 : &\quad z(t) = it &&, t \in [0, 1] \end{aligned} \tag{15}$$

og finner så

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \text{Im}z^2dz &= \int_0^1 (i - 1)\text{Im}\left[(1 - t + it)^2\right] dt + \int_0^1 i\text{Im}\left[(it)^2\right] dt \\ &= \int_0^1 (i - 1)\left[2t - 2t^2\right] dt \\ &= (2i - 2)\int_0^1 \left[t - t^2\right] dt \\ &= (2i - 2)\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] \\ &= \frac{1}{3}i - \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{16}$$

14.2.4

Har at en funksjon, la oss kalle den $f(z)$, har følgende egenskaper

$$\int_{R_1} f(z)dz = 2, \quad \int_{R_3} f(z)dz = 6 \tag{17}$$

hvor R_r er sirkelen med sentrum i origo og radius r, vil se om funksjonen er analytisk i annulusen $1 < |z| < 3$ og kaller dette området R. Vet at for en analytisk funksjon på hele domenet D og med en lukket kurve $\mathcal{C} \subset D$ har vi

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0 \tag{18}$$

siden vi vet at

$$\oint_{\partial R} f(z)dz = \int_{R_1} f(z)dz - \int_{R_3} f(z)dz = -4 \neq 0 \tag{19}$$

så er ikke $f(z)$ analytisk på hele R.

14.2.13

Ser på integralet over enhetssirkelen mot klokka

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(z^2 - 1.2\right)^{-1} dz \tag{20}$$

og siden dette er integralet over en lukket kurve i et enkeltsammenhengende domene hvor integranden er analytisk har vi

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(z^2 - 1.2\right)^{-1} dz = 0 \tag{21}$$

14.2.22

Ser på integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \text{Re} z dz, \quad \mathcal{C} : z(t) = e^{it}, t \in [0, \pi] \tag{22}$$

og har dermed

$$\oint_{\mathcal{C}} \text{Re} z dz = \int_0^{\pi} \text{Re}\left[e^{it}\right] ie^{it} dt = i \int_0^{\pi} e^{it} dt = e^{i\pi} - 1 = -2 \tag{23}$$

14.2.23

14.2.28