11.4.2

Ser på Fourier-konstantene til $f(x) = x$ og ser at funksjonen er odde og har dermed $a_n = 0, n \in \mathbb{N}$ og ser så på

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx dx\right] = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \tag{1}$$

ser så på kvadrat feilen

$$E_k = ||f(x) - S_{f,k}(x)||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx - \pi\left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{k}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right] = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx - \pi\sum_{n=1}^{k} b_n^2 \tag{2}$$

og har for alle disse utregningene

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^3}{3} \tag{3}$$

har dermed

$$E_k = \frac{2\pi^3}{3} - \pi\sum_{n=1}^{k}\frac{4}{n^2} \tag{4}$$

og finner så for ulike verdier av k

$$\begin{aligned} E_1 &= 8.104 \\ E_2 &= 4.963 \\ E_3 &= 3.567 \\ E_4 &= 2.781 \\ E_5 &= 2.279 \end{aligned} \tag{5}$$

11.4.3

Har nå $f(x) = |x|$ for $-\pi < x < \pi$ og ser at dette kun er en like periodisk utvidning av x for $0 < x < \pi$ og kan dermed finne Fourier-koeffisientene med $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{\pi}{2} \tag{6}$$

og

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx = \frac{2}{n\pi}\left[x\sin nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin nx dx\right] = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{4}{n^2\pi} \tag{7}$$

for $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$ og har at $x^2 = |x|^2$ og kan bruke tidligere utregninger og får da

$$E_k = \frac{2\pi^3}{3} - \pi\left[\frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{k}\frac{16}{n^4\pi^2}\right] = \frac{\pi^3}{6} - \pi\sum_{n=1}^{k}\frac{16}{n^4\pi^2} \tag{8}$$

og har da

$$\begin{aligned} E_1 &= 0.075 \\ E_2 &= 0.075 \\ E_3 &= 0.0119 \\ E_4 &= 0.0119 \\ E_5 &= 0.00373 \end{aligned} \tag{9}$$

11.4.13

Proof. Ser på rekken vi har fått vite konvergensen til

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \tag{10}$$

har Parsevals identitet

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \tag{11}$$

kan anta en odde funksjon slik at $b_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ og kan da finne en funksjon slik at

$$a_n = \frac{1}{2n^2} \left[(-1)^{n+1} + 1\right] = \frac{1}{2n^2} \left[1 - \cos n\pi\right] \tag{12}$$

ser at dersom en bruker delvis integrasjon får vi n^2 og kan tenke på dette som et polynom $f(x) = ax$

$$a_n = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \tag{13}$$

og fra tidligere oppgave har vi integralet og dermed

$$a_n = \frac{2a}{n^2 \pi} (\cos n\pi - 1) \tag{14}$$

setter vi $a = \pi/4$ har vi

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi^2}{8} \tag{15}$$

og har også

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^4}{24} \tag{16}$$

og ser da videre fra Parsevals identitet

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{\pi^4}{64} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^4}{24} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^4}{24} - \frac{2\pi^4}{64} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^4}{96} \end{aligned} \tag{17}$$

□

11.4.9

Har $f(x) = x$ for $-\pi < x < \pi$ og har da den komplekse Fourierrekka

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \tag{18}$$

og kan regne ut

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi in}\left[xe^{inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi in}\left[\pi\left(e^{in\pi}+e^{-in\pi}\right) - \frac{1}{in}\left(e^{in\pi}-e^{-in\pi}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2in}\left(e^{in\pi}+e^{-in\pi}\right) + \frac{1}{2\pi n^2}\left(e^{in\pi}-e^{-in\pi}\right) \\
&= \frac{1}{in}\cos n\pi + \frac{i}{\pi n^2}\sin n\pi
\end{aligned} \tag{19}$$

ser så hele rekka

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2in}\left[e^{in(\pi+x)}+e^{in(x-\pi)}\right] + \frac{1}{2\pi n^2}\left[e^{in(\pi+x)}-e^{in(x-\pi)}\right]\right\} \tag{20}$$

11.7.1

Proof. Ser på

$$f(x) = \int_0^{\infty}\frac{\cos xw + w\sin xw}{1+w^2}dw = \begin{cases} 0 & ,x<0 \\ \frac{\pi}{2} & ,x=0 \\ \pi e^{-x} & ,x>0 \end{cases} \tag{21}$$

ser at vi har formen

$$f(x) = \int_0^{\infty}\left[A(w)\cos wx + B(w)\sin wx\right]dw, \quad A(w) = \frac{1}{1+w^2},\ B(w) = \frac{w}{1+w^2} \tag{22}$$

og har at

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv dv, \quad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv dv \tag{23}$$

ser at funksjonen er 0 for $x<0$ og har dermed

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \pi e^{-v}\cos wv dv, \quad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \pi e^{-v}\sin wv dv \tag{24}$$

og kan fra dette finne $A(w)$ og $B(w)$ og viss de er de samme som gitt i (22) så holder funksjonen

$$\begin{aligned}
A(w) &= \int_0^{\infty}\frac{e^{-v}}{2}\left[e^{iwv}+e^{-iwv}\right]dv \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[e^{v(iw-1)}+e^{-v(iw+1)}\right]dv \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{v(iw-1)}}{iw-1} - \frac{e^{-v(iw+1)}}{iw+1}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{viw}e^{-v}}{iw-1} - \frac{e^{-viw}e^{-v}}{iw+1}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{iw-1}+\frac{1}{iw+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{iw-1-iw-1}{-w^2-1}\right] \\
&= \frac{1}{w^2+1}
\end{aligned} \tag{25}$$

ser så på $B(w)$

$$\begin{aligned} B(w) &= \int_0^\infty \frac{e^{-v}}{2i}\left[e^{iwv} - e^{-iwv}\right] dv \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{iwv}e^{-v}}{iw-1} + \frac{e^{-iwv}e^{-v}}{iw+1}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{2i}\left[-\frac{1}{iw-1} - \frac{1}{iw+1}\right] \\ &= \frac{i}{2}\cdot\frac{iw+1+iw-1}{-w^2-1} \\ &= \frac{w}{w^2+1} \end{aligned} \tag{26}$$

□

11.9.5

Skal finne Fouriertransformen til

$$f(x) = \begin{cases} e^x & ,-a < x < a \\ 0 & ,\text{ellers} \end{cases} \tag{27}$$

har da

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[f\right](w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-iwx}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^a e^{x(1-iw)}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^xe^{-iwx}}{1-iw}\right]_{-a}^a \\ &= \frac{e^ae^{-aiw} - e^{-a}e^{aiw}}{\sqrt{2\pi}\,(1-iw)} \end{aligned} \tag{28}$$

11.9.7

Skal finne Fouriertransformen til

$$f(x) = \begin{cases} x & ,0 < x < a \\ 0 & ,\text{ellers} \end{cases} \tag{29}$$

har da

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[f\right](w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a xe^{-iwx}dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}iw}\left[xe^{-iwx}\Big|_0^a + \int_0^a e^{-iwx}dx\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}iw}\left[ae^{-iwx} - \frac{e^{-iwa}-1}{iw}\right] \\ &= \frac{ae^{-iwx}}{\sqrt{2\pi}iw} + \frac{e^{-iwa}-1}{\sqrt{2\pi}w^2} \end{aligned} \tag{30}$$

11.9.9

Skal finne Fouriertransformen til

$$f(x) = \begin{cases} |x| & ,-1 < x < 1 \\ 0 & ,\text{ellers} \end{cases} \tag{31}$$

har da

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[f\right](w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}|x|e^{-iwx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-1}^{0}-xe^{-iwx}dx+\int_{0}^{1}xe^{-iwx}dx\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}iw}\left[xe^{-iwx}\Big|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^{-iwx}dx-xe^{-iwx}\Big|_{0}^{1}+\int_{0}^{1}e^{-iwx}dx\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}iw}\left[e^{iw}+\frac{1}{iw}-\frac{e^{iw}}{iw}-e^{-iw}-\frac{e^{-iw}}{iw}+\frac{1}{iw}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}iw}\left[e^{iw}-e^{-iw}-\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{iw}+\frac{2}{iw}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}w}\left[2\sin w+\frac{2}{w}\cos w-\frac{2}{w}\right] \\
&= \frac{2w\sin w+2\cos w-2}{\sqrt{2\pi}w^2}
\end{aligned} \tag{32}$$