

Oppg. 1

a) Har en Poisson-fordeling og definerer da

$$L(\mathbf{x}, \lambda_R) = f(x_1, \lambda_R) \cdots f(x_n, \lambda_R) \quad (1)$$

med

$$f(x_i, \lambda_R) = \frac{\lambda_R^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda_R} \quad (2)$$

og finner så

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda_R} = \frac{\partial}{\partial \lambda_R} \left\{ \ln \left[\frac{\lambda_R^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{j=1}^n x_j!} e^{-n\lambda_R} \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial \lambda_R} \left\{ \ln \lambda_R \sum_{i=1}^n x_i - \ln \prod_{j=1}^n x_j! - n\lambda_R \right\} = \frac{1}{\lambda_R} \sum_{i=1}^n x_i - n \quad (3)$$

setter vi så likning (3) lik 0 finner vi

$$\hat{\lambda}_R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4)$$

ser også at $\hat{\lambda}_R = \bar{X}$ og har da

$$\mathbb{E}[\hat{\lambda}_R] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n} \cdot n\lambda_R = \lambda_R \quad (5)$$

og ser så på

$$\text{Var}[\hat{\lambda}_R] = \text{Var}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2} \cdot n\lambda_R = \frac{\lambda_R}{n} \quad (6)$$

ved sentralgrenseteoremet er dette normalfordelt.

b) Setter da opp hypotesene

$$H_0 : \lambda_R = 10, \quad H_1 : \lambda_R < 10 \quad (7)$$

og kan sette opp ved sentralgrenseteoremet

$$T = \frac{\bar{X} - \lambda_R}{\sqrt{\text{Var}[X]}} \approx -1.34164 \quad (8)$$

for H_0 og kan så finne p -verdien

$$p = \mathbb{P}[T \leq -1.34164] = 0.0901 \quad (9)$$

og har dermed med $\alpha = 0.05$ at vi ikke forkaster hypotesen.

c) Antar $\lambda_R = 9$ og fortsetter å operere med $\alpha = 0.05$ og vil finne

$$F(x) = \sum_{n=0}^x f(x) = e^{-9} \sum_{n=0}^x \frac{9^n}{n!} = 0.9 \quad (10)$$

og finner ved tabell $x = 13$

$$p = \mathbb{P}\left[T \leq -\frac{1}{3}\sqrt{n}\right] \leq 0.05 \quad (11)$$

og ved å se i tabell trenger vi da

$$-\frac{1}{3}\sqrt{n} = -1.65 \Rightarrow \quad (12)$$

Oppg. 2

a) Ser på $Y_i = ax_i(1 - x_i) + \epsilon_i$ for $i = 1, 2, \dots, n$ og har

$$E[Y_i|x_i] = ax_i(1 - x_i), \quad \text{Var}[Y_i|x_i] = \sigma_0^2 = 0.025^2 \quad (13)$$

ser på sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for a og har $Y_i \sim N(ax_i(1 - x_i), \sigma^2)$ og dermed

$$L(a) = f(\mathbf{y}; a) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left\{-\frac{[y_i - ax_i(1 - x_i)]^2}{2\sigma_0^2}\right\} \quad (14)$$

og har dermed

$$\ln L(a) = \sum_{i=1}^n \left\{ -\ln \sqrt{2\pi} - \ln \sigma_0 - \frac{[y_i - ax_i(1 - x_i)]^2}{2\sigma_0^2} \right\} \quad (15)$$

og videre

$$\begin{aligned} \partial_a \ln L(a) &= \frac{1}{\sigma_0} \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{a}x_i(1 - x_i)] [x_i(1 - x_i)] = 0 \\ \sum_{i=1}^n [x_i(1 - x_i)] y_i &= \hat{a} \sum_{i=1}^n [x_i(1 - x_i)]^2 \\ \hat{a} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i(1 - x_i)y_i}{\sum_{i=1}^n [x_i(1 - x_i)]^2} \end{aligned} \quad (16)$$

b) Skriver om

$$\hat{a} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i(1 - x_i)y_i}{\sum_{j=1}^n [x_j(1 - x_j)]^2} = \sum_{i=1}^n a_i y_i, \quad a_i = \frac{x_i(1 - x_i)}{\sum_{j=1}^n [x_j(1 - x_j)]^2} \quad (17)$$

der a_i er en konstant og kan videre se

$$E[\hat{a}] = E\left[\sum_{i=1}^n a_i y_i\right] = \sum_{i=1}^n E[y_i a_i] = \sum_{i=1}^n ax_i(1 - x_i)a_i = a \frac{\sum_{i=1}^n [x_i(1 - x_i)]^2}{\sum_{j=1}^n [x_j(1 - x_j)]^2} = a \quad (18)$$

og ser videre på variansen

$$\text{Var}[\hat{a}] = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n a_i y_i\right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[a_i y_i] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_0^2 = \frac{\sigma_0^2 \sum_{i=1}^n [x_i(1 - x_i)]^2}{\left\{\sum_{j=1}^n [x_j(1 - x_j)]^2\right\}^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{j=1}^n [x_j(1 - x_j)]^2} \quad (19)$$

og ser ikke en sammenheng med en fordeling.

c) Setter opp hypotesetesten

$$H_0 : a = 0, \quad H_1 : a \neq 0 \quad (20)$$

og kan fra informasjonen sette opp

$$Z = \frac{\hat{a} - a}{\sqrt{\text{Var}[a]}} \Rightarrow Z_0 = \frac{\hat{a}}{\sqrt{\text{Var}[a]}} \quad (21)$$

og har at

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\sum_{i=1}^9 x_i(1 - x_i)y_i}{\sum_{j=1}^9 [x_j(1 - x_j)]^2} \approx -0.283528 \\ \text{Var}[a] &= \frac{\sigma_0^2}{\sum_{j=1}^9 [x_j(1 - x_j)]^2} \approx 0.0018752 \end{aligned} \quad (22)$$

og med $z_{\alpha/2} = 1.960$

$$Z_0 = -6.54746 < -z_{\alpha/2} \quad (23)$$

og må dermed forkaste hypotesen.

Oppg. 3

a) Har den stokastiske variabelen $Y_i = \beta x_i + \epsilon_i$ med $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ og kan se på differansen

$$\delta = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta} x_i)^2 \quad (24)$$

og vil finne $\hat{\beta}$ slik at α blir minst mulig, og ser da på

$$\partial_{\beta} \delta = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{\beta} x_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i = \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (25)$$

og har dermed

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{11} x_i^2} \quad (26)$$

og ved å sette inn verdier får vi

$$\beta = 0.0567 \quad (27)$$

ser videre også at

$$\mathbb{E} [\hat{\beta}] = \mathbb{E} \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right] = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [x_i y_i] = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{E} [y_i] \quad (28)$$

og kan se at

$$\mathbb{E} [y_i] = \mathbb{E} [\beta x_i] + \mathbb{E} [\epsilon_i] = \beta x_i \quad (29)$$

og kan dermed se

$$\mathbb{E} [\hat{\beta}] = \frac{\beta \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \beta \quad (30)$$

ser videre

$$\text{Var} [\hat{\beta}] = \frac{1}{[\sum_{i=1}^n x_i^2]^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \text{Var} [y_i] \quad (31)$$

og kan se at

$$\text{Var} [y_i] = \text{Var} [\beta x_i] + \text{Var} [\epsilon_i] = \sigma^2 \quad (32)$$

og dermed

$$\text{Var} [\hat{\beta}] = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{[\sum_{i=1}^n x_i^2]^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (33)$$

b) Ser på en galakse som er $x_0 = 900 \cdot 10^6$ lysår unna, og ser på den stokastiske variabelen

$$Y = \beta \sum_{i=1}^{11} x_i + \beta x_0 \quad (34)$$

og vil finne

$$\mathbb{P} [z_{0.975} \leq Y \leq z_{0.025}] = 0.05 \quad (35)$$

siden vi ikke har variansen bruker vi