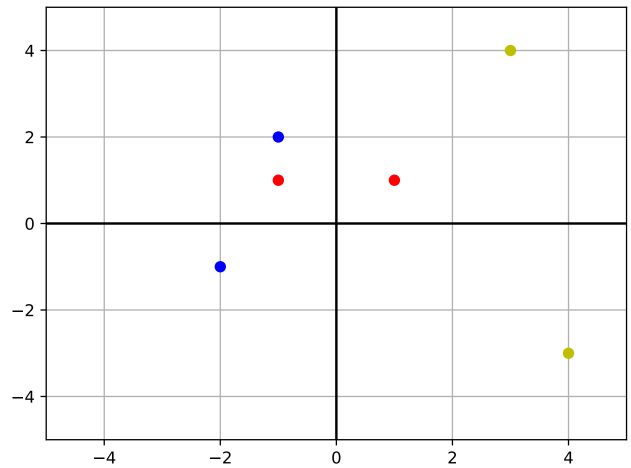
13.1.2

Plotter



og ser da at alle punktene er rotert med $\pi/2$

13.1.3

Ser på

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1}$$

og kan fra dette finne

$$\frac{26-18i}{6-2i} = \frac{26\cdot 6+18\cdot 2}{6^2+2^2} + i\frac{-6\cdot 18+26\cdot 2}{6^2+2^2} = \frac{24}{5} - \frac{7}{5}i \tag{2}$$

13.1.14

Har $z_1 = -2+5i, z_2 = 3-i$ og ser på

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{-2-5i}{3+i} = -\frac{11}{10} - \frac{13}{10}i \tag{3}$$

og

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{-2+5i}{3-i}\right)} = \overline{\left(-\frac{11}{10}+\frac{13}{10}\right)} = -\frac{11}{10} - \frac{13}{10}i \tag{4}$$

13.1.16

Ser på

$$\text{Im}\frac{1}{z} = \text{Im}\frac{1}{x+iy} = -\frac{y}{x^2+y^2} \tag{5}$$

og

$$\text{Im}\frac{1}{z^2} = \text{Im}\frac{1}{x^2-y^2+2xyi} = \frac{2xy}{x^4+y^4-2x^2y^2+4x^2y^2} = \frac{2xy}{x^4+y^4+2x^2y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \tag{6}$$

ved å bruke (1).

13.2.1

Har generelt

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} e^{i \arctan \frac{y}{x}} \tag{7}$$

og kan dermed finne

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \tag{8}$$

13.2.8

Finner først ved (1)

$$\frac{7 + 4i}{3 - 2i} = 1 + 2i \tag{9}$$

bruker så (7) og finner

$$1 + 2i = \sqrt{5} e^{i \arctan 2} \tag{10}$$

13.2.11

Ser på

$$\arg\left(\sqrt{3} \pm i\right) = \arctan \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\pi}{6} \tag{11}$$

13.2.21

Skal finne z slik at

$$z^3 = r^3 e^{3i\theta} = 1 - i = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} \tag{12}$$

og har da $r = 2^{\frac{1}{6}}$ og $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$ og dermed

$$z = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n\right)}, \quad n \in \{0, 1, 2\} \tag{13}$$

13.2.25

Skal finne z slik at

$$z^4 = r^4 e^{4i\theta} = i = e^{-i \frac{\pi}{2}} \tag{14}$$

og har da $r = 1$ og $\theta = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\pi n, n \in \mathbb{Z}$ og dermed

$$z = e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\pi n\right)}, \quad n \in \{0, 1, 2, 3\} \tag{15}$$

13.3.6

Ser på alle z som oppfyller

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) < 1 \tag{16}$$

har da for $z = x + iy$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} < 1 \tag{17}$$

og har dermed

$$x^2 + y^2 > x \Rightarrow y > \sqrt{x - x^2} \tag{18}$$

13.3.15

Ser på

$$f(z) = |z|^2 \text{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = r^2 \cdot \text{Im}\left(\frac{1}{r}e^{-i\theta}\right) = -r\sin\theta \tag{19}$$

kan da se på grensen når z går mot 0 og dermed

$$\lim_{r\to 0}(-r\sin\theta) = 0 \tag{20}$$

siden $f(0) = 0$ så er denne funksjonen er kontinuerlig.

13.3.16

Ser på

$$f(z) = \frac{\text{Im}z^2}{|z|^2} = \frac{r^2\sin 2\theta}{r^2} = \sin 2\theta \tag{21}$$

ser at grensa når $r = 0$ ikke er entydig og f er dermed ikke kontinuerlig.

13.3.18

Ser på

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i} \tag{22}$$

og har da

$$f'(z) = \frac{z-i-z-i}{z^2-2zi-1} = \frac{-i}{z^2-2zi-1} \tag{23}$$

og har dermed

$$f'(i) = \tag{24}$$