6.1.1

Har $f(t) = 2t + 8$ og skal finne Laplace transformen $\mathscr{L}[f](s)$ og vet da

$$\mathscr{L}[f](s) = \mathscr{L}[2t+8](s) = 2\mathscr{L}[t](s) + 8\mathscr{L}[1](s) = \frac{2}{s^2} + \frac{8}{s} \tag{1}$$

6.1.12

Skal finne $\mathscr{L}[f](s)$ og kan skrive $f(t) = (t-1)(1-u(t-1)) + 1$ og har også fra teorem

$$\mathscr{L}[g(t-a)u(t-a)](s) = e^{-as}\mathscr{L}[g(t)](s) \tag{2}$$

og kan dermed skrive

$$\mathscr{L}[f(t)](s) = \mathscr{L}[t](s) - \mathscr{L}[(t-1)u(t-1)](s) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\mathscr{L}[t](s) = \frac{1-e^{-s}}{s^2} \tag{3}$$

6.1.23

Skal vise at dersom $\mathscr{L}[f(t)](s) = F(t)$ og c er en positiv konstant har vi $\mathscr{L}[f(ct)](s) = F(s/c)/c$, prøver og sette inn i definisjonen av Laplace

$$\mathscr{L}[f(ct)](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(ct)dt \tag{4}$$

gjør en substitusjon med $u = ct$ med $du = cdt$ og får da videre

$$\mathscr{L}[f(ct)](s) = \frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-s\frac{t}{c}} f(u)du = \frac{1}{c}\mathscr{L}[f(ct)]\left(\frac{s}{c}\right) = \frac{F\left(\frac{s}{c}\right)}{c} \tag{5}$$

og kan dermed sette inn for å finne $\mathscr{L}[\cos\omega t](s)$ og vet at $\mathscr{L}[\cos t](s) = \frac{s}{(s^2+1)}$ og har dermed

$$\mathscr{L}[\cos\omega t](s) = \frac{s/c}{c\left((s/c)^2+1\right)} \tag{6}$$

6.1.26

Bruker delbrøkoppspaltning

$$\begin{gathered}\frac{5s+1}{s^2-25} = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s+5} \\ 5s+1 = As + 5A + Bs - 5B\end{gathered} \tag{7}$$

har dermed likningssettet

$$A + B = 5 \wedge 5A - 5B = 1 \tag{8}$$

og har dermed $A = 26/10, B = 24/10$ og har da

$$\frac{5s+1}{s^2-25} = \frac{26}{10(s-5)} + \frac{24}{10(s+5)} \tag{9}$$

og finner dermed

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5s+1}{s^2-25}\right](t) = \frac{26}{10}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-5}\right](t) + \frac{24}{10}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+5}\right](t) = \frac{13}{5}e^{5t} + \frac{12}{5}e^{-5t} \tag{10}$$

6.1.36

Har $f(t) = \sinh t \cos t$ kan skrive ut

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)\cos t = \frac{1}{2}\left(e^t \cos t - e^{-t}\cos t\right) \tag{11}$$

og har dermed

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = \frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^t \cos t\right](s) - \frac{1}{2}\mathscr{L}\left[e^{-t}\cos t\right](s) = \frac{1}{2}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right) \tag{12}$$

6.1.40

Har $f(t) = \frac{4}{s^2-2s-3}$ kan bruke delbrøkoppspaltning

$$\begin{gathered} f(t) = \frac{4}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} \\ 4 = A(s+1) + B(s-3) \end{gathered} \tag{13}$$

som gir

$$A + B = 0 \wedge A - 3B = 4 \tag{14}$$

og kan dermed se at vi må ha $B = -1, A = 1$, og finner dermed

$$\mathscr{L}^{-1}\left[f\right](t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-3}\right](t) = e^{3t} - e^{-t} \tag{15}$$

6.2.4

Ser på likningen $y'' + 9y = 10e^{-t}$ med $y(0) = y'(0) = 0$ og ved å Laplace transformere likningen får vi

$$s^2 Y + 9Y = \frac{10}{s+1} \Rightarrow Y = \frac{10}{(s+1)\left(s^2+9\right)} \tag{16}$$

har dermed

$$\begin{gathered} Y = \frac{10}{(s+1)\left(s^2+9\right)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+9} \\ 10 = As^2 + 9A + Bs^2 + Bs + Cs + C \end{gathered} \tag{17}$$

ser en løsning $A = 1, B = -1, C = 1$ og har dermed

$$Y = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2+9} - \frac{s}{s^2+9} \tag{18}$$

kan så finne

$$y = \mathscr{L}^{-1}\left[Y\right](t) = e^{-t} + \frac{1}{3}\sin 3t - \cos 3t \tag{19}$$

6.2.13

Har likningen $y' - 6y = 0$ med $y(-1) = 4$, bruker Laplace transformasjon selv om det er nærmest trivielt å løse likningen som en separabel differensial likning. Vi setter $\tilde{t} = t + 1$ og har da $\tilde{y}' - 6\tilde{y} = 0$ med $\tilde{y}(0) = 4$ og dermed

$$s\tilde{Y} - 4 - 6\tilde{Y} = 0 \Rightarrow \tilde{Y} = \frac{4}{s-6} \Rightarrow \tilde{y} = 4e^{6\tilde{t}} \tag{20}$$

og har dermed

$$y = 4e^{6(t+1)} \tag{21}$$

6.3.8

Har $f(t) = t^2$ for $1 < t < 2$ som er 0 ellers, og kan skrive funksjonen som

$$f(t) = t^2 \left(u(t-1) - u(t-2)\right) \tag{22}$$

hvor u er Heavyside-funksjonen, og kan finne transformen

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 e^{-st} \cdot 0 dt + \int_1^2 e^{-st} t^2 dt + \int_2^\infty e^{-st} \cdot 0 dt \tag{23}$$

kan dermed bruke delvis integrasjon og dermed

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[f(t)\right](s) &= \int_1^2 e^{-st} t^2 dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} t^2\right]_1^2 - \left[\frac{1}{s^2} e^{-st} t\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{s^2} e^{-st} dt \\ &= -\frac{4}{s} e^{-2s} + \frac{1}{s} e^{-s} - \frac{2}{s^2} e^{-2s} + \frac{1}{s^2} e^{-s} + \frac{1}{s^3} e^{-2s} - \frac{1}{s^3} e^{-s} \\ &= \left(\frac{-1 + s + s^2}{s^3}\right) e^{-s} + \left(\frac{1 - 2s - 4s^2}{s^3}\right) e^{-2s} \end{aligned} \tag{24}$$

6.3.15

Ser på $\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = e^{-2s}/s^6$ og kan bruke fra teorem

$$\mathscr{L}\left[g(t-a)u(t-a)\right](s) = e^{-as} \mathscr{L}\left[g(t)\right](s) \tag{25}$$

og kan dermed se at vi i dette tilfellet har $f(t) = g(t-a)u(t-a), a = 2, \mathscr{L}\left[g(t)\right](s) = 1/s^6$ og kan dermed finne

$$g(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^6}\right](t) = \frac{t^5}{5!} \tag{26}$$

og har dermed

$$f(t) = \frac{(t-2)^5}{5!} u(t-2) \tag{27}$$

6.3.25

Ser på $y'' + y = 2t$ for $0 < t < 1$ og $y'' + y = 2$ for $t > 1$ med $y(0) = 0, y'(0) = -2$, kan skrive

$$f(t) = (2t - 2)\left(1 - u(t-1)\right) + 2 \tag{28}$$

og kan dermed ta Laplace av likningen

$$\begin{aligned} s^2 Y - 2 + Y &= \frac{2 - 2e^{-s}}{s^2} \\ Y &= \frac{2 - 2e^{-s} + s^2}{s^2\left(s^2+1\right)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)} - \frac{2e^{-s}}{s^2\left(s^2+1\right)} \end{aligned} \tag{29}$$

finner så invers Laplace av de forskjellige leddene og legger merke til at

$$\frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)} = \mathscr{L}\left[t\right](s) \cdot \mathscr{L}\left[\sin t\right](s) = \mathscr{L}\left[t * \sin t\right](s) \tag{30}$$

og kan så finne

$$\begin{aligned} t * \sin t &= \int_0^t (t \sin\tau - \tau \sin\tau)\, d\tau \\ &= -t\cos t + t + t\cos t - \sin t \\ &= t - \sin t \end{aligned} \tag{31}$$

og har dermed

$$y = \mathscr{L}^{-1}[Y](t) = 2t - \sin t - 2u(t-1)(t - 1 - \sin(t-1)) \tag{32}$$

kan sjekke svaret og ser

$$\begin{aligned} y' &= 2 - \cos t - 2u(t-1) - 2u(t-1)\cos(t-1) \\ y'' &= \sin t - 2\sin(t-1)u(t-1) \end{aligned} \tag{33}$$

og finner da at

$$y + y'' = 2t - \sin t + \sin t = 2t \tag{34}$$

for $0 < t < 1$ og

$$y + y'' = 2t - \sin t - 2t + 2 + 2\sin(t-1) + \sin t - 2\sin(t-1) = 2 \tag{35}$$

men ser at $y'(0) = 1$, men dersom vi heller skriver

$$y = 2t - 4\sin t - 2u(t-1)(t - 1 - \sin(t-1)) \tag{36}$$

og siden denne endringen vil bidra til en faktor på 4 i et ledd i y'' og y som kansellerer hverandre, vil denne løsningen også være en løsning på differensiallikningen og initialbetingelsene vil være oppfylt.