15.3.5

Skal finne konvergensradius for rekken

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{4^n} (z - 2i)^n \tag{1}$$

bruker Cauchy-Hardamard og finner konvergensradiusen

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdot 4^{n+1}}{4^n \cdot (n+1)n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-4}{n+1} = 4 \tag{2}$$

15.3.8

Ser på rekken

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)} z^n \tag{3}$$

og finner konvergensradius ved Cauchy-Hardamard

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot (n+1)(n+2)}{n(n+1)\cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = \frac{1}{3} \tag{4}$$

15.3.10

Ser på rekken

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{2^n \cdot k!\,(n-k)!} z^n \tag{5}$$

og finner ved Cauchy-Hardamard

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot 2^{n+1} k!(n+1-k)!}{2^n k!(n-k)! \cdot (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n-k+1)}{(n+1)} = 2 \tag{6}$$

15.4.3

Ser på

$$f(z) = \sin\frac{z^2}{2} \tag{7}$$

og vil finne Maclaurin-rekken som representerer $f(z)$ og setter $u = z^2/2$ og kan da skrive

$$\sin\frac{z^2}{2} = \sin u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{1+2n}}{(1+2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2+4n}}{2^{1+2n}(1+2n)!} = \frac{z^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n}}{2^{2n}(1+2n)!} \tag{8}$$

for å finne konvergens setter vi $u = z^4$ og ser kun på selve rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^n}{2^{2n}(1+2n)!} \tag{9}$$

kan bruke Cauchy-Hadamard og finner konvergensradiusen

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{2n+2}(2n+3)!}{2^{2n}(1+2n)!} \right| \xrightarrow{n\to\infty} \infty \tag{10}$$

og Maclaurin-rekken konvergerer for alle $z \in \mathbb{C}$.

15.4.4

Ser så på

$$f(z) = \frac{z+2}{1-z^2} = \frac{z+2}{(1-z)(1+z)} \tag{11}$$

og kan finne ved delbrøksoppspaltning

$$\frac{z+2}{(1-z)(1+z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z} \tag{12}$$

som gir $A = 3/2, B = 1/2$ og kan dermed skrive

$$f(z) = \frac{3}{2}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{2}z^n + \frac{1}{2}(-z)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{3}{2} + \frac{(-1)^n}{2}\right] z^n \tag{13}$$

15.4.8

Ser så på

$$f(z) = \sin^2 z \tag{14}$$

og vet at

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{1+2n}}{(1+2n)!} \tag{15}$$

og dermed har vi

$$\sin^2 z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2+4n}}{[(1+2n)!]^2} \tag{16}$$

15.4.23

Ser på summen

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} \tag{17}$$

og vil finne taylorrekka rundt $z_0 = -i$, og kan bruke

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \tag{18}$$

og kan se at vi har

$$\frac{d^n}{dz^n}(z-i)^{-2} = -(n+1)!(z-i)^{-n-2} \Rightarrow f^{(n)}(-i) = \frac{-(n+1)!}{(-2i)^{n+2}} \tag{19}$$

og har da

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{i^n \cdot 2^{n+2}}(z+i)^n \tag{20}$$

15.4.24

Ser på summen

$$e^{z(z-2)} \tag{21}$$

og finner Maclaurin-rekka med $z_0 = i/2$, og har da fra likning (18)

$$a_n = \frac{(i-2)^n}{n!}e^{-1/4-i} \tag{22}$$

og dermed

$$e^{z(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i-2)^n e^{-1/4-i}}{n!}\left(z - \frac{i}{2}\right)^n \tag{23}$$

16.1.2

Ser på summen

$$f(z) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{z^2}\right\}}{z^2} \tag{24}$$

kan se at

$$\exp\left\{-\frac{1}{z^2}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{-\infty} -\frac{1}{n!}(-1)^n z^{2n} \tag{25}$$

og har dermed

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{-\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n-2} = -\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} z^{2n} \tag{26}$$

ved substitusjonen har vi at rekka konvergerer for alle $|z| > 0$.

16.1.6

Ser på summen

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} \tag{27}$$

som gir

$$\begin{aligned} &A + B = 0 \\ &C - iB = 0 \\ &-iC = 1 \end{aligned} \tag{28}$$

som da gir $C = i, B = 1, A = -1$ og har da

$$f(z) = -\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z} + \frac{i}{z^2} \tag{29}$$

16.1.13

Ser på summen

$$f(z) = \frac{z^8}{1-z^4} = \frac{u^2}{1-u} = \begin{cases} u^2 \sum_{n=0}^{\infty} u^n, & |u| < 1 \\ -u^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u^n}, & |u| > 1 \end{cases} \tag{30}$$

og har dermed rekka

$$f(z) = \begin{cases} z^8 \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n}, & |z| < 1 \\ -z^8 \sum_{n=-1}^{-\infty} z^{4n}, & |z| > 1 \end{cases} \tag{31}$$