

15.3.5

Skal finne konvergensradius for rekken

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{4^n} (z-2i)^n \quad (1)$$

bruker Cauchy-Hadamard og finner konvergensradiusen

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdot 4^{n+1}}{4^n \cdot (n+1)n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-4}{n+1} = 4 \quad (2)$$

15.3.8

Ser på rekken

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)} z^n \quad (3)$$

og finner konvergensradius ved Cauchy-Hadamard

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot (n+1)(n+2)}{n(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n} = \frac{1}{3} \quad (4)$$

15.3.10

Ser på rekken

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{2^n \cdot k! (n-k)!} z^n \quad (5)$$

og finner ved Cauchy-Hadamard

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 2^{n+1} k! (n+1-k)!}{2^n k! (n-k)! \cdot (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-k+1)}{(n+1)} = 2 \quad (6)$$

15.4.3

Ser på

$$f(z) = \sin \frac{z^2}{2} \quad (7)$$

og vil finne Maclaurin-rekken som representerer $f(z)$ og setter $u = z^2/2$ og kan da skrive

$$\sin \frac{z^2}{2} = \sin u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{1+2n}}{(1+2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2+4n}}{2^{1+2n} (1+2n)!} = \frac{z^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n}}{2^{2n} (1+2n)!} \quad (8)$$

for å finne konvergens setter vi $u = z^4$ og ser kun på selve rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^n}{2^{2n} (1+2n)!} \quad (9)$$

kan bruke Cauchy-Hadamard og finner konvergensradiusen

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{2n+2} (2n+3)!}{2^{2n} (1+2n)!} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad (10)$$

og Maclaurin-rekken konvergerer for alle $z \in \mathbb{C}$.

15.4.4

Ser så på

$$f(z) = \frac{z+2}{1-z^2} = \frac{z+2}{(1-z)(1+z)} \quad (11)$$

og kan finne ved delbrøksoppspaltning

$$\frac{z+2}{(1-z)(1+z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z} \quad (12)$$

som gir $A = 3/2, B = 1/2$ og kan dermed skrive

$$f(z) = \frac{3}{2} \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3}{2} z^n + \frac{1}{2} (-z)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3}{2} + \frac{(-1)^n}{2} \right] z^n \quad (13)$$

15.4.8

Ser så på

$$f(z) = \sin^2 z \quad (14)$$

og vet at

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{1+2n}}{(1+2n)!} \quad (15)$$

og dermed har vi

$$\sin^2 z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2+4n}}{[(1+2n)!]^2} \quad (16)$$

15.4.23

Ser på summen

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} \quad (17)$$

og vil finne taylorrekka rundt $z_0 = -i$, og kan bruke

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (18)$$

og kan se at vi har

$$\frac{d^n}{dz^n} (z-i)^{-2} = -(n+1)! (z-i)^{-n-2} \Rightarrow f^{(n)}(-i) = \frac{-(n+1)!}{(-2i)^{n+2}} \quad (19)$$

og har da

$$f(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{i^n \cdot 2^{n+2}} (z+i)^n \quad (20)$$

15.4.24

Ser på summen

$$e^{z(z-2)} \quad (21)$$

og finner Maclaurin-rekka med $z_0 = i/2$, og har da fra likning (18)

$$a_n = \frac{(i-2)^n}{n!} e^{-1/4-i} \quad (22)$$

og dermed

$$e^{z(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i-2)^n e^{-1/4-i}}{n!} \left(z - \frac{i}{2} \right)^n \quad (23)$$

16.1.2

Ser på summen

$$f(z) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{z^2}\right\}}{z^2} \quad (24)$$

kan se at

$$\exp\left\{-\frac{1}{z^2}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{z^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{n!} (-1)^n z^{2n} \quad (25)$$

og har dermed

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n-2} = -\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} z^{2n} \quad (26)$$

ved substitusjonen har vi at rekka konvergerer for alle $|z| > 0$.

16.1.6

Ser på summen

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} \quad (27)$$

som gir

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ C-iB &= 0 \\ -iC &= 1 \end{aligned} \quad (28)$$

som da gir $C=i, B=1, A=-1$ og har da

$$f(z) = -\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z} + \frac{i}{z^2} \quad (29)$$

16.1.13

Ser på summen

$$f(z) = \frac{z^8}{1-z^4} = \frac{u^2}{1-u} = \begin{cases} u^2 \sum_{n=0}^{\infty} u^n, & |u| < 1 \\ -u^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u^n}, & |u| > 1 \end{cases} \quad (30)$$

og har dermed rekka

$$f(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n+8}, & |z| < 1 \\ -\sum_{n=-1}^{\infty} z^{4n+8}, & |z| > 1 \end{cases} \quad (31)$$