## 13.7.22

Skal finne prinsipialverdien til $z = (2i)^{2i}$ og har da

$$z = 2^{2i} \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2i} = e^{\ln 2 \cdot 2i} e^{-\pi} = e^{-\pi} e^{i \cdot 2\ln 2} \tag{1}$$

Har $2\ln 2 < \pi$ og har dermed $\arg z = 2\ln 2$.

## 14.1.3

Ser på kurven

$$\mathcal{C} : z(t) = t + 4t^2 i, t \in [0, 1] \tag{2}$$

## 14.1.11

Ser på $\mathcal{C}$ fra $(-1, 2)$ til $(1, 4)$ og kan representere den på følgende måte

$$z(t) = t + 3ti. \tag{3}$$

## 14.1.20

Ser på $\mathcal{C}$ gitt ved

$$4(x-2)^2 + 5(y+1)^2 = 20 \Rightarrow \frac{1}{5}(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y+1)^2 = 1 \tag{4}$$

kan da skrive

$$x - 2 = \sqrt{5}\cos t, \quad y + 1 = 2\sin t \tag{5}$$

og har da ved $z = x + iy$

$$z(t) = \sqrt{2}\sin t + 2 + i\left(2\cos t - 1\right) \tag{6}$$

## 14.1.22

Ser på integralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathrm{Re} z dz, \quad \mathcal{C} : y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 \tag{7}$$

fra $1 + i$ til $3 + 3i$ og kan parametrisere kurven ved

$$z(t) = t + i\left(1 + \frac{1}{2}(t-1)^2\right), t \in (1, 3) \tag{8}$$

og har da

$$z'(t) = 1 + ti - i \tag{9}$$

som da gir oss

$$\int_{\mathcal{C}} \mathrm{Re} z dz = \int_1^3 \left[\mathrm{Re} z(t)\right] z'(t) dt = \int_1^3 \left[t + t^2 i - it\right] dt = 4(1-i) + \frac{26}{3}i = 4 + \frac{14}{3}i \tag{10}$$

## 14.1.26

Ser på integralet

$$\int_{\mathcal{C}} (z + z^{-1}) dz, \quad \mathcal{C} : z(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi) \tag{11}$$

kan dele opp og ser fordi $z$ er analytisk på hele $\mathbb{C}$ så har vi

$$\int_{\mathcal{C}} (z + z^{-1}) dz = \int_{\mathcal{C}} z dz + \int_{\mathcal{C}} z^{-1} dz = \int_{\mathcal{C}} z^{-1} dz \tag{12}$$

kan så finne

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i \tag{13}$$

## 14.1.29

Ser på integralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathrm{Im} z^2 dz = \int_{\mathcal{C}_1} \mathrm{Im} z^2 dz + \int_{\mathcal{C}_2} \mathrm{Im} z^2 dz + \int_{\mathcal{C}_3} \mathrm{Im} z^2 dz \tag{14}$$

med $\mathcal{C}$ gitt av trekanten gitt av punktene $0, 1, i$ og $\mathcal{C}_1$ linja mellom $0, 1$ og $\mathcal{C}_2$ linja mellom $1, i$ og $\mathcal{C}_3$ linja mellom $i, 0$. Vet at $\mathrm{Im} z^2 = 0 \ \ \forall z \in \mathbb{R}$ og har dermed integralet over $\mathcal{C}_1$ lik 0. Har da parameterfremstillingene

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 : &\quad z(t) = 1 - t + it &&, t \in [0, 1] \\ \mathcal{C}_3 : &\quad z(t) = it &&, t \in [0, 1] \end{aligned} \tag{15}$$

og finner så

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathrm{Im} z^2 dz &= \int_0^1 (i - 1) \mathrm{Im} \left[ (1 - t + it)^2 \right] dt + \int_0^1 i \mathrm{Im} \left[ (it)^2 \right] dt \\ &= \int_0^1 (i - 1) \left[ 2t - 2t^2 \right] dt \\ &= (2i - 2) \int_0^1 \left[ t - t^2 \right] dt \\ &= (2i - 2) \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] \\ &= \frac{1}{3} i - \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{16}$$

## 14.2.4

Har at en funksjon, la oss kalle den $f(z)$, har følgende egenskaper

$$\int_{R_1} f(z) dz = 2, \quad \int_{R_3} f(z) dz = 6 \tag{17}$$

hvor $R_r$ er sirkelen med sentrum i origo og radius $r$, vil se om funksjonen er analytisk i annulusen $1 < |z| < 3$ og kaller dette området $R$. Vet at for en analytisk funksjon på hele domenet $D$ og med en lukket kurve $\mathcal{C} \subset D$ har vi

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0 \tag{18}$$

siden vi vet at

$$\oint_{\partial R} f(z) dz = \int_{R_1} f(z) dz - \int_{R_3} f(z) dz = -4 \neq 0 \tag{19}$$

så er ikke $f(z)$ analytisk på hele $R$.

## 14.2.13

Ser på integralet over enhetssirkelen mot klokka

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(z^2 - 1.2\right)^{-1} dz \tag{20}$$

og siden dette er integralet over en lukket kurve i et enkeltsammenhengende domene hvor integranden er analytisk har vi

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(z^2 - 1.2\right)^{-1} dz = 0 \tag{21}$$

## 14.2.22

Ser på integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{Re} z dz = \int_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} \mathrm{Re} z dz, \quad \mathcal{C}_1 : z(t) = e^{it}, t \in [0, \pi], \mathcal{C}_2 : z(t) = t, t \in [-1, 1] \tag{22}$$

og har dermed

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathrm{Re} z dz = \int_0^{\pi} \mathrm{Re}\left[e^{it}\right] ie^{it} dt = i \int_0^{\pi} e^{it} dt = e^{i\pi} - 1 = -2 \tag{23}$$

og

$$\int_{\mathcal{C}_2} \mathrm{Re} z dz = \int_{-1}^{1} t dt = 0 \tag{24}$$

og har dermed

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{Re} z dz = -2 \tag{25}$$

## 14.2.23

Ser på integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{2z - 1}{z^2 - z} dz \tag{26}$$

kaller integranden $f(z)$ og ser at for $z = 0, 1$ er funksjonen ikke analytisk. Ser dermed på kurvene $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ som er en sirkel med radius 1 rundt disse punktene og har da

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \oint_{\mathcal{C}_1} f(z) dz + \oint_{\mathcal{C}_2} f(z) dz \tag{27}$$

har da parameterfremstillingene

$$\begin{array}{lll} \mathcal{C}_1 : & z(t) = e^{it} & t \in [0, 2\pi) \\ \mathcal{C}_2 : & z(t) = 2 + e^{it} & t \in [0, 2\pi) \end{array} \tag{28}$$

og kan dermed skrive

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} \frac{2e^{it} - 1}{e^{it}\left(e^{it} - 1\right)} ie^{it} dt + \int_0^{2\pi} \frac{4 + 2e^{it} - 1}{\left(2 + e^{it}\right)\left(2 + e^{it} - 1\right)} ie^{it} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \left[\frac{2e^{it} - 1}{e^{it} - 1} + \frac{3e^{it} + 2e^{2it}}{\left(e^{it} + 2\right)\left(e^{it} + 1\right)}\right] dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{\left(2e^{it} - 1\right)\left(e^{2it} + 3e^{it} + 2\right) + 2e^{3it} + e^{2it} - 3e^{it}}{\left(e^{it} - 1\right)\left(e^{it} + 1\right)\left(e^{it} + 2\right)} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{4e^{3it} + 6e^{2it} - 2e^{it} - 2}{\left(e^{it} - 1\right)\left(e^{it} + 1\right)\left(e^{it} + 2\right)} dt \end{aligned} \tag{29}$$

## 14.2.28

Ser på integralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\tan \frac{z}{2}}{16z^4 - 81} dz \tag{30}$$

hvor $\mathcal{C}$ er kvadretet definert av hjørnene $\pm 1, \pm i$, og ser at integranden ikke er analytisk i

$$z^4 = \frac{81}{16} \Rightarrow |z| = \frac{3}{2} \tag{31}$$

den er heller ikke analytisk for

$$\cos z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \tag{32}$$

vet at på kvadratets maksimale distanse fra origo er 1 og funksjonen er analytisk innenfor dette området, og har dermed

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\tan \frac{z}{2}}{16z^4 - 81} dz = 0 \tag{33}$$