15.3.5

Skal finne konvergensradius for rekken

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{4^n} (z-2i)^n \tag{1}$$

bruker Cauchy-Hardamard og finner konvergensradiusen

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdot 4^{n+1}}{4^n \cdot (n+1)n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-4}{n+1} = 4 \tag{2}$$

kan også finne konvergensradiusen ved å derivere rekken to ganger

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} 4^{-n} (z-2i)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n+2} (z-2i)^n = 4^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4} - \frac{i}{2}\right)^n \tag{3}$$

dette er en geometrisk rekke og vet at den konvergerer for

$$\left|\frac{z}{4} - \frac{i}{2}\right| < 1 \Rightarrow |z-2i| < 4 \tag{4}$$

og har dermed også her konvergensradius $R = 4$.

15.3.8

Ser på rekken

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)} z^n \tag{5}$$

og finner konvergensradius ved Cauchy-Hardamard

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot (n+1)(n+2)}{n(n+1)\cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = \frac{1}{3} \tag{6}$$

kan også integrere funksjonen to ganger og får da

$$\iint f(z) dz dz = \tag{7}$$

15.3.10

Ser på rekken

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{2^n \cdot k!\,(n-k)!} z^n \tag{8}$$

og finner ved Cauchy-Hardamard

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot 2^{n+1} k!(n+1-k)!}{2^n k!(n-k)! \cdot (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n-k+1)}{(n+1)} = 2 \tag{9}$$

15.4.3

Ser på

$$f(z) = \sin \frac{z^2}{2} \tag{10}$$

og vil finne Maclaurin-rekken som representerer $f(z)$ og setter $u = z^2/2$ og kan da skrive

$$\sin \frac{z^2}{2} = \sin u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{1+2n}}{(1+2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2+4n}}{2^{1+2n}(1+2n)!} = \frac{z^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n}}{2^{2n}(1+2n)!} \tag{11}$$

for å finne konvergens setter vi $u = z^4$ og ser kun på selve rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^n}{2^{2n}(1+2n)!} \tag{12}$$

kan bruke Cauchy-Hadamard og finner konvergensradiusen

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{2n+2}(2n+3)!}{2^{2n}(1+2n)!} \right| \xrightarrow{n\to\infty} \infty \tag{13}$$

og Maclaurin-rekken konvergerer for alle $z \in \mathbb{C}$.

15.4.4

Ser så på

$$f(z) = \frac{z+2}{1-z^2} = \frac{z+2}{(1-z)(1+z)} \tag{14}$$

og kan finne ved delbrøksoppspaltning

$$\frac{z+2}{(1-z)(1+z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z} \tag{15}$$

som gir $A = 3/2, B = 1/2$ og kan dermed skrive

$$f(z) = \frac{3}{2}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3}{2} z^n + \frac{1}{2}(-z)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3}{2} + \frac{(-1)^n}{2} \right] z^n \tag{16}$$

15.4.8

Ser så på

$$f(z) = \sin^2 z \tag{17}$$

og vet at

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{1+2n}}{(1+2n)!} \tag{18}$$

og dermed har vi

$$\sin^2 z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2+4n}}{[(1+2n)!]^2} \tag{19}$$

15.4.23

Ser på summen

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} \tag{20}$$

og vil finne taylorrekka rundt $z_0 = -i$, og kan bruke

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \tag{21}$$

og kan se at vi har

$$\frac{d^n}{dz^n}(z-i)^{-2} = -(n+1)!(z-i)^{-n-2} \Rightarrow f^{(n)}(-i) = \frac{-(n+1)!}{(-2i)^{n+2}} \tag{22}$$

og har da

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{i^n \cdot 2^{n+2}}(z+i)^n \tag{23}$$

15.4.24

16.1.2

16.1.6

16.1.13