Oppg. 1

a) Har en Poisson-fordeling og definerer da

$$L(\mathbf{x}, \lambda_R) = f(x_1, \lambda_R) \cdots f(x_n, \lambda_R) \tag{1}$$

med

$$f(x_i, \lambda_R) = \frac{\lambda_R^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda_R} \tag{2}$$

og finner så

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda_R} = \frac{\partial}{\partial \lambda_R} \left\{ \ln \left[\frac{\lambda_R^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{j=1}^n x_j!} e^{-n\lambda_R} \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial \lambda_R} \left\{ \ln \lambda_R \sum_{i=1}^n x_i - \ln \prod_{j=1}^n x_j! - n\lambda_R \right\} = \frac{1}{\lambda_R} \sum_{i=1}^n x_i - n \tag{3}$$

setter vi så likning (3) lik 0 finner vi

$$\hat{\lambda}_R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \tag{4}$$

ser også at $\hat{\lambda}_R = \overline{X}$ og har da

$$\mathrm{E}\left[\hat{\lambda}_R\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n}\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n} \cdot n\lambda_R = \lambda_R \tag{5}$$

og ser så på

$$\mathrm{Var}\left[\hat{\lambda}_R\right] = \mathrm{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2} \cdot n\lambda_R = \frac{\lambda_R}{n} \tag{6}$$

ved sentralgrenseteoremet er dette normalfordelt.

b) Setter da opp hypotesene

$$H_0 : \lambda_R = 10, \quad H_1 : \lambda_R < 10 \tag{7}$$

og kan sette opp ved sentralgrenseteoremet

$$T = \frac{\overline{X} - \lambda_R}{\sqrt{\mathrm{Var}\left[X\right]}} \approx -1.34164 \tag{8}$$

for H_0 og kan så finne p-verdien

$$p = \mathrm{P}\left[T \leq -1.34164\right] = 0.0901 \tag{9}$$

og har dermed med $\alpha = 0.05$ at vi ikke forkaster hypotesen.

c) Antar $\lambda_R = 9$ og fortsetter å operere med $\alpha = 0.05$ og vil finne

$$F(x) = \sum_{n=0}^x f(x) = e^{-9} \sum_{n=0}^x \frac{9^n}{n!} = 0.9 \tag{10}$$

og finner ved tabell $x = 13$

$$p = \mathrm{P}\left[T \leq -\frac{1}{3}\sqrt{n}\right] \leq 0.05 \tag{11}$$

og ved å se i tabell trenger vi da

$$-\frac{1}{3}\sqrt{n} = -1.65 \Rightarrow \tag{12}$$

Oppg. 2

a) Ser på $Y_i = ax_i(1-x_i) + \epsilon_i$ for $i = 1, 2, \ldots, n$ og har

$$\mathrm{E}\left[Y_i|x_i\right] = ax_i(1-x_i), \quad \mathrm{Var}\left[Y_i|x_i\right] = \sigma_0^2 = 0.025^2 \tag{13}$$

ser på sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for a og har $Y_i \sim N(ax_i(1-x_i), \sigma^2)$ og dermed

$$L(a) = f(\mathbf{y}; a) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left\{-\frac{\left[y_i - ax_i(1-x_i)\right]^2}{2\sigma_0^2}\right\} \tag{14}$$

og har dermed

$$\ln L(a) = \sum_{i=1}^{n} \left\{-\ln\sqrt{2\pi} - \ln\sigma_0 - \frac{\left[y_i - ax_i(1-x_i)\right]^2}{2\sigma_0}\right\} \tag{15}$$

og videre

$$\begin{aligned} \partial_a \ln L(a) = \frac{1}{\sigma_0}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \hat{a}x_i(1-x_i)\right]\left[x_i(1-x_i)\right] = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}\left[x_i(1-x_i)\right] y_i = \hat{a}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(1-x_i)\right]^2 \\ \hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(1-x_i)y_i}{\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(1-x_i)\right]^2} \end{aligned} \tag{16}$$

b) Skriver om

$$\hat{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i(1-x_i)y_i}{\sum_{j=1}^{n}\left[x_j(1-x_j)\right]^2} = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i, \quad a_i = \frac{x_i(1-x_i)}{\sum_{j=1}^{n}\left[x_j(1-x_j)\right]^2} \tag{17}$$

der a_i er en konstant og kan videre se

$$\mathrm{E}\left[\hat{a}\right] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left[y_i a_i\right] = \sum_{i=1}^{n} ax_i(1-x_i)a_i = a\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(1-x_i)\right]^2}{\sum_{j=1}^{n}\left[x_j(1-x_j)\right]^2} = a \tag{18}$$

og ser videre på variansen

$$\mathrm{Var}\left[\hat{a}\right] = \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\left[a_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_0^2 = \frac{\sigma_0^2\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(1-x_i)\right]^2}{\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[x_j(1-x_j)\right]^2\right\}^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{j=1}^{n}\left[x_j(1-x_j)\right]^2} \tag{19}$$

og ser ikke en sammenheng med en fordeling.
c) Setter opp hypotesetesten

$$H_0 : a = 0, \quad H_1 : a < 0 \tag{20}$$

og kan fra informasjonen sette opp

$$T = \frac{\overline{a} - a}{\sqrt{\mathrm{Var}\left[a\right]}} = \frac{\overline{a}}{\mathrm{Var}\left[a\right]} \tag{21}$$

og har at

$$\begin{aligned} \overline{a} = \frac{1}{9}\frac{\sum_{i=1}^{9} x_i(1-x_i)y_i}{\sum_{j=1}^{9}\left[x_j(1-x_j)\right]^2} \approx -0.031503 \\ \mathrm{Var}\left[a\right] = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{j=1}^{9}\left[x_j(1-x_j)\right]^2} \approx 0.0018752 \end{aligned} \tag{22}$$

og kan sette opp

$$p = \mathrm{P}\left[T \leq \frac{\overline{a}}{\sqrt{\mathrm{Var}\left[a\right]}} = -0.7275\right] = 0.2327 \tag{23}$$

og kan dermed ikke forkaste hypotesen med signifikansnivå.