12.1.14d

Ser på

12.1.15

Har at $u(x,y) = a\ln(x^2+y^2) + b$ er en løsning på Laplacelikningen, $\nabla^2 u = 0$, og kan sjekke dette ved

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} a\ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} a\ln\left(x^2+y^2\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2ax}{x^2+y^2}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2ay}{x^2+y^2}\right] \\ &= \frac{2a\left(x^2+y^2\right) - 4ax^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{2a\left(x^2+y^2\right) - 4ay^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= 0\end{aligned} \tag{1}$$

og har dermed at u oppfyller Laplacelikningen, skal så finne den spesielle løsningen for $u\left(x^2+y^2=1\right) = 110$ og $u\left(x^2+y^2=100\right) = 0$ og har da likningssettet

$$\left\{\begin{array}{rcl} a\ln(1) + b & = & 110 \\ a\ln(100) + b & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow b = 110, \quad a = -\frac{110}{\ln(100)} \tag{2}$$

og har dermed

$$u(x,y) = -\frac{110}{\ln(100)}\ln\left(x^2+y^2\right) + 110 \tag{3}$$