

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) h^i + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) h^i h^j + \dots + \frac{1}{p!} \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial^p f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_p+1}}(x_0) h^{i_1} \dots h^{i_p} + R_{p+1}(x_0, h)$$

$$\text{gdzie } R_{p+1}(h) = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\substack{i_1=1 \\ \dots \\ i_{p+1}=1}}^n \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{p+1}}} (x_0 + \theta h) h^{i_1} \dots h^{i_{p+1}}$$

$0 < \theta < 1$
wersja \mathbb{R}^n dla
" $x_0 < c < x_0 + h$ "

Obserwacja 1 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_{p+1}(x_0, h)}{\|h\|^p} \rightarrow 0$

Przykład 1

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 y^3, f'(x, y) = [2xy^3, 3x^2 y^2].$$

Jeżeli $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$, to wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} h^i h^j &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} h^1 h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} h^1 h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} h^2 h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2} h^2 h^2 = \\ &= \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

To czy ta macierz jest uśmiechnięta etc. (dodatnio/ujemnie określona) na algebrze.

Minima i maksima

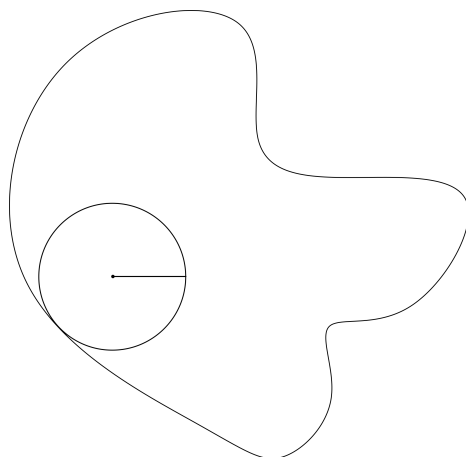
Przypomnienie Niech $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ - otwarty, $x_0 \in \mathcal{O}$

Mówimy, że f ma w x_0 minimum lokalne, jeżeli:

$$\exists_{\eta > 0} \quad \forall_{\substack{x \in K(x_0, \eta) \\ K(x_0, \eta) \subset \mathcal{O} \\ x \neq x_0}} \quad f(x) > f(x_0), \{f(x) < f(x_0)\} \leftarrow \text{maksimum}$$

Albo inaczej:

$$\exists_{\eta > 0} \quad \forall_h \quad \|h\| < \eta, \quad x_0 + h \in \mathcal{O}, h \neq 0, \text{ to wtedy } f(x_0 + h) > f(x_0)$$



Rysunek 1: istnieje otoczenie, dla którego $f(x) > f(x_0)$ (nie musi być styczne!)

Stwierdzenie 1 jeżeli $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{O}$ - otwarty, $x_0 \in \mathcal{O}, f$ - posiada w x_0 minimum lub maksimum lokalne, to

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, i = 1, \dots, n$$

(działa tylko w prawo, bo możliwe punkty przegięcia ((siodła)))

Dowód 1

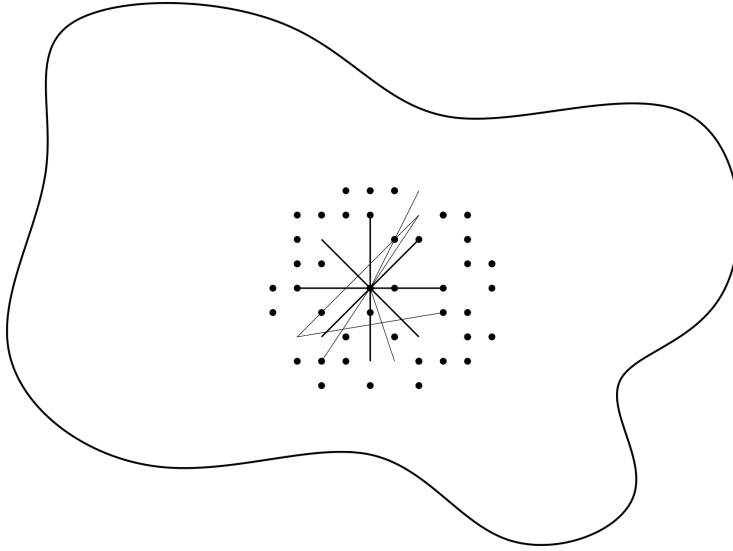
Niech $g_h(t) = f(x_0 + th)$ i $g : [0, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}$.

Zauważmy, że jeżeli f ma minimum lub maksimum w x_0 , to znaczy, że $g_h(t)$ ma minimum lub maksimum w $t = 0$, czyli $\frac{\partial}{\partial t} g_h(t) \Big|_{t=0}$

Czyli:

$$\begin{aligned} x_0 &= (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \\ h &= (h^1, h^2, \dots, h^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_h(t) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} f(x_0^1 + th^1, \dots, x_0^n + th^n) \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0 + th^1)h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0 + th^2)h^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0 + th^n) \Big|_{t=0} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)h^i = 0 \quad |\forall : ||h|| < \eta, \text{ to znaczy: } \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0_{i=1, \dots, n} \square \end{aligned}$$



Rysunek 2

Twierdzenie 1 Niech $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathcal{O}$, \mathcal{O} - otwarty, a f - klasy $C^{2p}(\mathcal{O})$ oraz $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \dots, f^{(2p-1)}(x_0) = 0$ i

$$\begin{aligned} \exists_{c>0} \quad \exists_{\eta>0} \quad \forall_{h \in K(x_0, \eta)} : \quad & \sum_{\substack{i_1=1 \\ \vdots \\ i_{2p}=1}}^n \frac{\partial^{(2p)} f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{2p}}}(x_0) h^{i_1} \dots h^{i_{2p}} \geq c \|h\|^{2p} (\leq c \|h\|^{2p}) \end{aligned}$$

to f ma w x_0 minimum (maksimum) lokalne.

Dowód 2 (dla minimum)
(wersja uproszczona dla f klasy $C^{2p+1}(\mathcal{O})$)

Jeżeli f spełnia założenie z twierdzenia, to wtedy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{(2p)!} (\Delta) \sum_{\substack{i_1=1 \\ \vdots \\ i_{2p}=1}}^{2p} \frac{\partial^{(2p)} f(x_0)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{2p}}} h^{i_1} \dots h^{i_{2p}} + r_{2p+1}(x_0 + h)$$

Wiemy też, że $\exists_{c>0} \quad \exists_{\eta>0} \quad (\Delta) \geq c \|h\|^{2p}$
Chodzi o to, żeby reszta nie mogła tego przekroczyć

Chcemy pokazać, że $\exists_{\eta} \forall_{||h|| < \eta} \left| r_{2p+1}(x, h) \right| \leq \frac{c}{2} ||h||^{2p}$
 albo 7,
 albo 2019

Czyli chcemy zbadać wielkość:

$$\frac{1}{(2p+1)!} \sum_{\substack{i_1=1 \\ \vdots \\ i_{2p+1}=1}}^n \frac{\partial^{(2p+1)} f(x_0 + \theta h)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{(2p+1)}}} h^{i_1} \dots h^{i_{(2p+1)}} = \text{/*tu potrzebne założenie, że } f \text{ - klasy } C^{2p+1}(\mathcal{O})^*/ = r_{2p+1}$$

Zauważmy, że $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_{2p+1}(x_0+h)}{||h||^{2p}} \rightarrow 0$, ale zatem

$$\forall_{M>0} \underbrace{\exists_N, \forall_{n>N}}_{\substack{\text{bez sensu!} \\ \exists, \forall \\ \eta ||h|| < \eta}} \frac{r_{2p+1}(x_0+h)}{||h||^{2p}} < M$$

$$\text{czyli: } \left| \frac{r_{2p+1}(x_0, h)}{||h||^{2p}} \right| < M$$

$$\forall_M \exists_{\eta} \forall_{||h|| < \eta} \left| r_{2p+1}(x_0, h) \right| < M ||h||^{2p}$$

Kładziemy $M = \frac{c}{2}$ i mamy

$$\exists_{\eta} \forall_{||h|| < \eta} f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \frac{c}{2} ||h||^{2p} \quad \square$$

Uwaga: Dlaczego warunek $(|||) > c||h||^{2p}$, a nie po prostu $() > 0$?

Przykład 2

$$f(x, y) = x^2 + y^4, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3.$$

$$f'() = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$$

$$\text{Badamy: } f(0+h) - f(0) = [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 2h_1^2$$

Czyli $f(0+h) - f(0) = 2h_1^2$ - minimum? maksimum? - zależy w którą stronę.

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ - minimum}$$

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \text{ - równo.}$$

Coś takiego - siodło.

$$\text{Widzimy zatem, że nie jest spełniony warunek } \exists_c [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \geq c ||h||^2,$$

$$\text{bo dla } h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad 0 \not\geq c \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \right\|$$

Kilka fajnych zastosowań

$$\frac{mv^2}{2} = \begin{bmatrix} & v & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & & \\ & \frac{m}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ v \end{bmatrix}$$

$$\frac{I\omega^2}{2} = \begin{bmatrix} & \omega & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \omega \\ \end{bmatrix}$$