Notatki z Analizy II L2019, FUW

Jakub Korsak

14 maja 2019

1 Wykład (26.02.2019)

Przykład 1 *funkcje wielu zmiennych:*

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ - Energia potencjalna $\mathcal{V}(x,y,z)$
$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$ - Potencjał pola niestacjonarnego $\mathcal{V}(x,y,z,t)$
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ - Natężenie pola $\mathcal{E}(x,y,z)$
$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^4$
$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^6$
$\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^1$
$\mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^1$

Niech $X \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in X, Y \subset \mathbb{R}^m$. Mówimy, że odwzorowanie $T : X \to Y$ jest ciągłe, jeżeli

$$\underset{x_n \to x_0}{\forall}, T(x_n) \to T(x_0)$$

UWAGA: $x_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Pytanie: Czy ciągłość w $\mathbb{R}^n \iff$ ciągłosc w $\mathbb{R}^1$?

Przykład 2 *Niech funkcja*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq y \end{cases}$$

czy f - ciągła w $(0,0)$? dla trajektorii I:

$$\lim_{y_n \to 0}(\lim_{x_n \to 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{y_n \to 0}(0) = 0$$

dla trajektorii II:

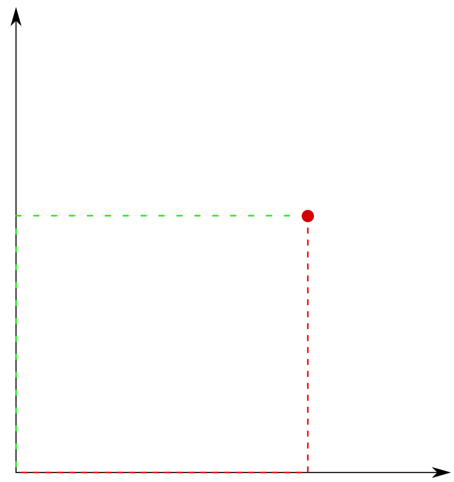
$$\lim_{x_n \to 0}(\lim_{y_n \to 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{x_n \to 0}(0) = 0$$

weźmy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq \lim_{x_n \to 0, y_n \to 0} f(0,0)$$

(X, d_X) - przestrzeń wektorowa z metryką d_X,
(Y, d_Y) - p.w. z metryką d_Y
Niech $x_0 \in X$. Mówimy, że $T : X \to Y$ - ciągłe, jeżeli

$$\underset{\epsilon > 0}{\forall} \ \underset{\delta}{\exists} \ \underset{x \in X}{\forall}, \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x_0), T(x)) < \epsilon$$



Rysunek 1: trajektoria I i II

Dowód 1 *Heine* $\iff$ *Cauchy*

$\Longrightarrow_{\text{(przez sprzeczność)}}$:

zakładamy, że

$$\underset{x_n \to x_0}{\forall} T(x_n) \to T(x_0) \quad \wedge \quad \underset{\epsilon>0}{\exists}, \underset{\delta<0}{\forall}, \underset{x \in X}{\exists} (*) : d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x_n), T(x_0) \geqslant \epsilon$$

Skoro $T(x_n) \to T(x_0) \underset{x_n \to x_0}{\forall}$, to w szczególności warunek spełniony dla ciągu, który jest taki:

skoro $(*)$, to dla $\epsilon > 0$ weźmy $\delta = 1$,

$$\underset{x_1}{\exists} \quad d_X(x_1, x_0) < 1 \wedge d_Y(T(x_1), T(x_0)) \geqslant \epsilon$$

$\delta = \frac{1}{2}$:

$$\underset{x_2}{\exists} \quad d_X(x_2, x_0) < \frac{1}{2} \wedge d_Y(T(x_2), T(x_0)) \geqslant \epsilon$$

$\delta = \frac{1}{3}$:

$$\underset{x_3}{\exists} \quad d_X(x_3, x_0) < \frac{1}{3} \wedge d_Y(T(x_3), T(x_0)) \geqslant \epsilon$$

$$\vdots$$

$\delta = \frac{1}{n}$:

$$\underset{x_n}{\exists} \quad d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \wedge d_Y(T(x_n), T(x_0)) \geqslant \epsilon$$

Zauważmy, że taki ciąg $x_n \to x_0 \wedge T(x_n) \not\to T(x_0)$ i sprzeczność $\square$

$\Longleftarrow$ Wiemy, że $\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{x}{\exists}. d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x), T(x_0)) < \epsilon$ (trójkąt),

oraz, że $x_n \to x_0$, czyli:

$$\underset{\delta_1}{\forall}\underset{N}{\exists}\underset{n>N}{\forall} \quad d_X(x_n, x_0) < \delta_1(\text{trójkąt2})$$

Chcemy pokazać, że $T(x_n) \to T(x_0)$, czyli, że

$$\underset{\epsilon_1>0}{\forall}\underset{N_1}{\exists}\underset{n>N_1}{\forall} \quad d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \epsilon_1(\text{dla } x_n \to x_0)$$

Przyjmijmy $\epsilon = \epsilon_1$. Oznacza to, że $\underset{\delta}{\exists}$ spełniająca warunek (trójkąt) dla ϵ_1. Połóżmy $\delta_1 = \delta$ we wzorze (trójkąt2), czyli wiemy, że

$$\underset{N}{\exists}\underset{n>N}{\forall} \quad d_X(x_n, x_0) < \delta_1,$$

ale na mocy (trójkąt), wiemy, że

$$d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \epsilon_1 \square$$

1.1 Różniczkowalność:

Niech $\mathbb{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{O}$ - otwarty, $f : \mathbb{O} \to \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{Q}, x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$

Mówimy, że f ma w punkcie x pochodną cząstkową w kierunku x^k, jeżeli istnieje granica $g = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0+h, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h} \equiv \frac{\partial}{\partial x} f\Big|_{x=x_0}$

Przykład 3 *różniczkowalność*

Niech $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$. $\frac{\partial}{\partial x} f = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$, $\frac{\partial}{\partial y} f = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$.

UWAGA: do policzenia pochodnej czątkowej potrzebujemy układu współrzędnych, tj. (rys) Niech $\mathbb{O} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{O}$ - otwarte, $x_0 \in \mathbb{O}, e \in \mathbb{O}, T : \mathbb{O} \to \mathbb{R}$.

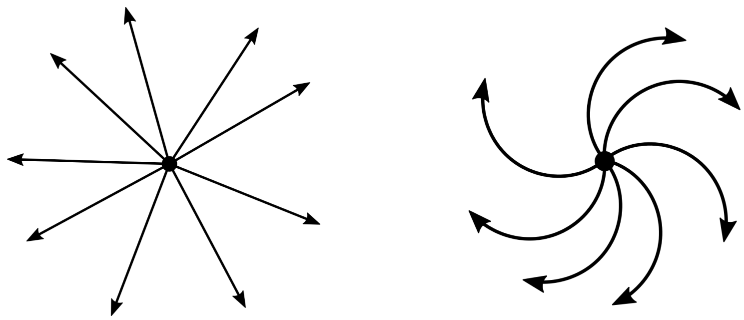
Mówimy, że T ma w x_0 pochodną kierunkową (*spoiler:* pochodną słabą), jeżeli istnieje granica

$$g = \lim_{t\to 0} \frac{T(x_0 + te) - T(x_0)}{t} \equiv \nabla_e T(x_0)$$

1.2 Obserwacja:

Jeżeli np. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, e_x = (1, 0)$ i $e_y = (0, 1)$, to

$$\nabla_{e_x} T = \frac{\partial}{\partial x} T \text{ i } \nabla_{e_y} T = \frac{\partial}{\partial y} T$$



Rysunek 2: Problemy: Umiemy tak jak po lewej, ale nic nie potrafimy zrobić z tym po prawej

Przykład 4

$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Wówczas $x_0 + te = (0 + t1, 0)$, $x_0 = (0,0), e_x = \binom{1}{0}$

$$\nabla_{e_x} f|_x = (0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{|t0|} - \sqrt{|00|}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} f \bigg|_{(0,0)}$$

UWAGA: $f(x) = \sqrt{x}, \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \pm\infty$

Przykład 5

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq y \end{cases}$$

$e = \binom{h_1}{h_2}$. Pochodna: $\nabla_e f|_{x=(0,0)}, (x_0 + te = (th_1, th_2))$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0,0)}{t} = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2} = \frac{h_2^2}{h_1}$$

2 Wykład (01.03.2019)

Definicja 1 *Norma: niech X - przestrzeń wektorowa.*
Odwzorowanie $||.|| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ nazywamy normą, jeżeli:

$$\underset{x \in X}{\forall} \quad ||x|| \geqslant 0 \tag{1}$$

$$\underset{\alpha \in \mathbb{R}}{\forall}, \underset{x \in \mathbb{X}}{\forall} \quad ||\alpha x|| = |\alpha| ||x|| \tag{2}$$

$$\underset{x,y \in X}{\forall} \quad ||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \tag{3}$$

$$\underset{x \in X}{\forall} \quad ||x|| = 0 \iff x = 0 \tag{4}$$

Przestrzeń X wraz z normą $||.||$ nazywamy przestrzenią unormowaną (*spoiler:* przestrzenią Banacha).

Przykład 6

$||v|| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}, X \to \mathbb{R}^n \quad (v \in X) \implies ||v|| = sup(|x^1|, \dots), f \in C([a,b])$, to $||f|| = sup_{x \in [a,b]}(f(x))$

UWAGA: mając normę możemy zdefiniować metrykę $\underset{x,y \in X}{\forall} d(x,y) = ||x-y||$, natomiast niekażdą metryką da się utworzyć przy pomocy normy.

Przykład 7 *metryka zdefiniowana przy pomocy normy ma np. taką własność:*

$$d(a_x, a_y) = ||a_x - a_y|| = |a| ||x-y|| = ad(x,y),$$

czyli taka metryka się skaluje natomiast funkcja

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

jest metryką, ale tej własności nie posiada.

Definicja 2 *Pochodna mocna (trzecie podejście)*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x_0), \text{ dla } x \in V \subset \mathbb{R}^n.$$

- taka definicja jest niemożliwa (nie mamy dzielenia wektorów).

$$f(x+h) - f(x) = f'(x_0)h + r(x_0, h), \text{ gdzie } \frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0 \text{ przy } ||h|| \to 0$$

ale to może mieć już inną dziedzinę

Definicja 3 *Niech* $U \subset X, V \subset Y$
U, V *- otwarte,* $\quad T : U \to V; x, h \in U$
Mówimy, że T *- różniczkowalne w punkcie* x_0*, jeżeli prawdziwy jest wzór*

$$\underset{h \in U}{\forall} \quad T(x_0 + h) - T(x_0) = L_{x_0}(h) + r(x_0, h),$$

gdzie $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$*, a* L_{x_0} *- liniowe* $: X \to Y$.

Odwzorowanie $L_{x_0}(h)$ nazywamy pochodną T w punkcie x_0. Czasami $L_{x_0}(h)$ możemy przedstawić w postaci $L_{x_0}(h) = T'(x_0)h$, to $T'(x_0)$ nazywamy pochodną odwzorowania T.

UWAGI: Dlaczego $L_{x_0}(h)$, a nie $T'(x_0)h$?

Dlatego, że czasami pochodna może wyglądać tak:

$$\int_0^1 h(x) \sin x dx$$

, a tego nie da sie przedstawić jako

$$\left(\int_0^1 \sin x dx \right) h(x)$$

Przykład 8

$T(x + h) - T(x) = T'(x_0)h + r(x_0, h)$
1. Niech $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, czyli $x_0 \in \mathbb{R}, h \in R$. Wtedy $T(x)$ - wektor (3 el.), $T'(x)$ - wektor (3 el.)
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad x_0$ - wektor (3 el.), h - wektor (3.el), $T'(x)$ - p.wektor (3 el.)
3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad x_0$ - wektor (2 el.), h - wektor (2 el.), $T(x)$ - wektor (3 el.), $T'(x)$ - macierz (3x2)
4. $f(x, y) = xy^2, h = \binom{h_x}{h_y}$

$f(x_0 + hx, y_0 + hy) - f(x_0, y_0) = (x_0 + hx)(y_0 + hy)^2 - x_0 y_0^2 = x_0 y_0^2 + 2y_0 x_0 h_y + x_0 h_y^2 + h_y y_0^2 + h_x h_y 2y_0 + h_x h_y) = (y_0^2, 2xx_0)\binom{h_x}{h_y} + x_0 h_y^2 + h_x h_y^2 + 2y_0 h_x h_y.$

Czy $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$?

Weźmy $||\binom{h_x}{h_y}|| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$.
Wówczas $x_0 h_y^2 + h_x h_y^2 + 2y_0 h_x h_y \leqslant x_0 ||h||^2 + ||h||^3 + 2y_0 ||h||^2 = ||h||^2 (x_0 + 2y_0 + ||h||)$
Zatem $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \leqslant \frac{||h||^2(|x_0| + 2y_0 + ||h||)}{||h||} \to 0.$

$f(x,y) = xy^2, T'(x) = [y^2, 2xy]$.
zauważmy, że $y^2 = \frac{\partial}{\partial x} f, 2xy = \frac{\partial}{\partial y} f$

UWAGA: skąd wiemy, że gdy $h \to 0$, to $||h|| \to 0$?
Czyli: czy norma jest odwzorowaniem ciągłym w $h = 0$?
<odpowiedź za tydzień>

Twierdzenie 1 *Jeżeli f - różniczkowalna w $x_0 \in U$, to dla dowolnego $e \in U$,*

$$\nabla_e f(x_0) = f'(x_0)e$$

Dowód 2

Pytanie 1 *Czy z faktu istnienia pochodnych cząstkowych wynika różniczkowalność funkcji?*

Przykład 9

$f(x,y) = \sqrt{|xy|}, x_0 = \binom{0}{0}$, dla $f(x,y)$ policzyliśmy pochodne cząstkowe w x_0 $\frac{\partial}{\partial x} f = 0, \frac{\partial}{\partial y} f = 0$.

$h = \binom{h_x}{h_y}, x_0 = \binom{0}{0}, f(x_0+h) - f(x_0) = \sqrt{h_x h_y} - \sqrt{0} = \sqrt{h_x h_y} = (0,0)\binom{h_x}{h_y} + \sqrt{h_x h_y}$, gdzie $r(x_0, h) = \sqrt{h_x h_y}$.
Czyli f - różniczkowalna, jeżeli $\underset{h_x, h_y}{\forall} \frac{\sqrt{h_x h_y}}{||h||} \to 0$.
Niech $||h|| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$ i niech $|h_x| > |h_y|$. $||h|| = |h_x|$.

Dalej mamy: $\frac{\sqrt{h_x h_y}}{|h_x|} \sqrt{\frac{h_y}{h_x}} \not\to 0$ przy $h_x \to 0$, $\sqrt{\frac{|h_y|}{|h_x|}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Czyli istnienie pochodnych cząstkowych nie oznacza różniczkowalności.

Twierdzenie 2 *Niech $O \subset \mathbb{R}^n, O$ - otwarty. $f : O \to Y, x_0 \in O$.*
Jeżeli istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial x_i} f, i = 1, \ldots, n$ i są ciągłe w x_0, wtedy $\underset{h \in \mathbb{R}^n}{\forall} f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h^i + r(x_0, h)$, gdzie $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$

Dowód 3 *(dla $O = \mathbb{R}^3$)*

Niech $x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \\ h^3 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} & f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h_2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \\ &= f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) + \\ &+ f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) + \\ &+ f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \quad \overbrace{=}^{\text{tw. o w. średniej}} \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial x_0^1} f(c_1)h^1 + \frac{\partial}{\partial x_0^2} f(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3)h^2 + \frac{\partial}{\partial x_0^3} f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h_2, c_3)h^3 =$
$(\frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3))h^1 +$
$+ (\frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3))h^2 +$
$+ (\frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, c_3) - \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3))h^3$
gdzie $c_1 \in]x_0^1, x_0^1 + h^1[, \quad c_2 \in]x_0^2, x_0^2 + h^2[, \quad c_3 \in]x_0^3, x_0^3 + h^3[$

Wystarczy pokazać, że $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$, gdy $h \to 0$.

Zauważmy, że każde wyrażenie tworzące resztę jest postaci *coś* h^i, a $\lim\limits_{||h|| \to 0} \frac{h^i}{||h||} =$ $\{\{$ *dla normy np.* $||h|| = max|h^i|$ $\}\} \neq 0$. (np. $\frac{h^1}{h^1} \to 1$)

Oznacza to, że jeżeli $\frac{r(x,h)}{||h||} \to 0$ - spełniony, to każde wyrażenie typu

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)\Big)h^1 \to 0$$

Czyli np. $\lim\limits_{||h|| \to 0} \frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \iff (\frac{\partial f}{\partial x^1}$ - ciągła$)\Box$

3 Wykład (05.03.2019)

Uwaga: Jeżeli np. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, to znaczy, że
$f(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}$, $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, wówczas

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f_2 \end{bmatrix}$$

Przykład 10

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3 y \end{bmatrix}$$

Wtedy pochodne czątkowe: $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2 y \end{bmatrix}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix}$
$f(x+h) - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} h^x + \frac{\partial f}{\partial y} h^y + r((x,y),h) = \begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2 y \end{bmatrix} h^x + \begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix} h^y +$
$r((x,y),h) = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2 y & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^x \\ h^y \end{bmatrix} + r((x,y),h)$

$$\text{Czyli } f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

i ogólniej: jeżeli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, to

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

3.1 Uzupełnienie:

Niech V - przestrzeń wektorowa z normą $||.||$ i $x_0 \in V$,
wówczas $f(x) = ||x||, f : V \to \mathbb{R}^1$ - ciągła w x_0.

Dowód 4

Chcemy pokazać, że $\underset{\epsilon>0}{\forall} \underset{\delta}{\exists} \underset{x}{\forall} \quad d_x(x,x_0) < \delta \implies d_{\mathbb{R}}(f(x), f(x_0)) < \epsilon$
ale $d_x(x,y) = ||x-y||, d_{\mathbb{R}^1}(x,y) = |x-y|$.

Chcemy pokazać, że $\underset{\epsilon>0}{\forall} \underset{\delta}{\exists} \underset{x}{\forall} \quad ||x - x_0|| < \delta \implies \big| ||x|| - ||x_0|| \big| < \epsilon$
ale $||x|| = ||x-y+y|| \leqslant ||x-y|| + ||y||, ||x|| - ||y|| \leqslant ||x-y||$,

$||y|| = ||y - x + x|| \leqslant ||y - x|| + ||x||$,
$||y|| - ||x|| \leqslant ||x - y||$, czyli $\Big|||x|| - ||y||\Big| \leqslant ||x - y||$. Niech $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, otrzymujemy $\epsilon > \frac{\epsilon}{2} > ||x - y|| \leqslant \Big|||x|| - ||y||\Big| \geqslant 0 \Box$

Pytanie 2 *Niech $f(x, y) = 7x + 6y^2$ i $g(t) = \begin{bmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{bmatrix}$. Wówczas $h(t) = (f \circ g)(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ile wynosi pochodna?*

$$f' = [7, 12y], g' = \begin{bmatrix} -sin(t) \\ cos(t) \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 3 *Niech $G : U \to Y, U \subset X, U$ - otwarte , X - przestrzeń wektorowa unormowana, $F : G(U) \to Z, G(U) \subset V$*
G - różniczkowalna w $x_0 \in U$, F - różniczkowalna w $G(x_0) \in U$.

$$G(x_0 + h_1) - G(x_0) = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1),\ gdy\ \frac{r(x_0, h_1)}{||h_1||_x} \to 0$$

$$F(y_0 + h_2) - F(y_0) = F'(y_0)h_2 + r_2(y_0, h_2),\ gdy\ \frac{r(y_0, h_2)}{||h_2||_y} \to 0$$

Wówczas: $(F \circ G)$ - różniczkowalna w x_0

oraz $(F \circ G)'(x_0) = F'(x)|_{x=G(x_0)}\, G'(x_0)$

Dowód 5

$$\begin{aligned}
&F(G(x_0 + h)) - F(G(x_0)) = \\
&F(G(x_0) + G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) - F(G(x_0)) = \\
&F(G(x_0)) + F'(G(x_0))(G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) + r_2(G(x_0)) \\
&G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) - F(G(x_0))
\end{aligned}$$

zatem:
$F(G(x_0)) + F(G(x_0 + h)) = F'(G(x_0))G'(x_0)h_1 + F'(G(x_0))r_1(x_0, h_1) + r_2(G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1))$

Wystarczy pokazać, że $\frac{r_3}{||h_1||} \to 0$, ale $\frac{r_3}{||h_1||} = F'(G(x_0))\frac{r_1(x_0,h_1)}{||h_1||} + \underbrace{\frac{r_2(G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1))}{||G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)||}}_{\to 0 \text{ kiedy } h_1 \to 0}$

$\underbrace{\frac{||G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)||}{||h_1||}}_{\text{jest ograniczony}}$, ale jeżeli $h_1 \to 0$, to $h_2 = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)$, zatem
$F(G(x))$ - różniczkowalna w x_0 $\quad \Box$

Przykład 11

$f(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3y \end{bmatrix}, \varphi(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}, h(t) = (f \circ \varphi)(t), h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2.$

Policzmy h'. $f' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix}, \varphi'(t) = \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix}$, tzn. $H' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix}\Bigg|_{x=2t^2, y=t^3} \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} 2(2t^2)^2 4t + 4(2t^2)(t^3)3t^2 \\ 3(2t^2)^2 t^3 4 + (2t^3)^3 3t^2 \end{bmatrix}$

Weźmy przykład: Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \Psi(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \Psi_1(r,\varphi) \\ \Psi_2(r,\varphi) \end{bmatrix}$
$\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\Psi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Niech $H(r,\varphi) = (f \circ \Psi)(r,\varphi)$, czyli $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Szukamy pochodnej H, ale $f' = [\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}], \Psi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$

$$\text{Czyli } H' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]\Bigg|_{x=\Psi_1(r,\varphi), y=\Psi_1(r,\varphi)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Co daje: $\left[\frac{\partial H}{\partial r}, \frac{\partial H}{\partial \varphi}\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Psi_2}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi}\right]\Bigg|_{x=\Psi_1(r,\varphi), y=\Psi_2(r,\varphi)}$

4 Wykład (08.03.2019)

$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\Psi_1(r,\varphi),\\ y=\Psi_2(r,\varphi)}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Psi_2}{\partial r}$
$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi}$

Konwencja z ćwiczeń z fizyki:

$H(r,\varphi) = (f \circ \Psi)(r,\varphi)$
$H(r,\varphi) = f(r,\varphi)$

$$\Psi_1(r,\varphi) = x(r,\varphi)$$
$$\Psi_2(r,\varphi) = y(r,\varphi)$$

$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$
$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}$

Przykład 12

$$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

Interpretacja geometryczna Rozważmy zbiór

$P_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$ np. $f(x,y) = x^2+y^2 : P_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = c\}$

Załóżmy, że $f(x,y)$ - taka, że P_c - można sparametryzować jako

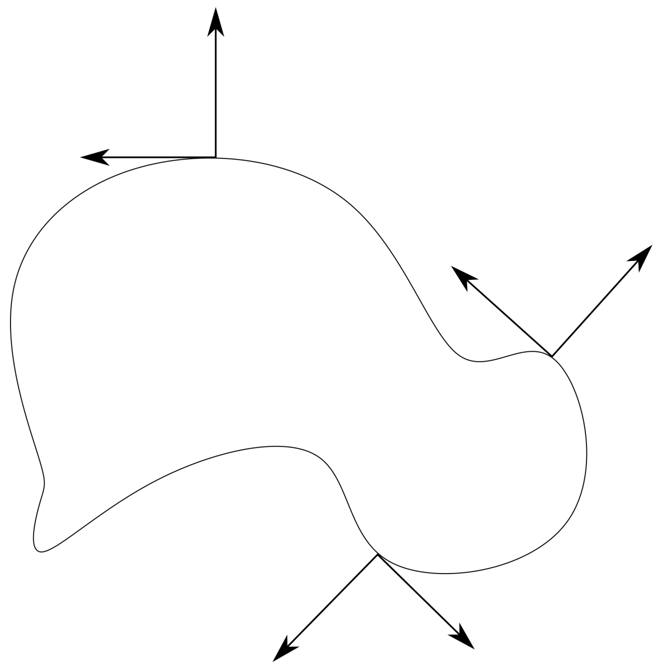
$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, t \in D, \text{ to znaczy, że } P_c = \{(x(t),y(t)), t \in D\}$$

Przykład 13

Niech $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$. Wtedy $P_c = \{(c\cos t, c\sin t); t \in [0, 2\pi]\}$

$f(x(t),y(t)) = c \quad \underset{t\in D}{\forall}$ - powierzchnie ekwipotencjalne

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} 2x, 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c\sin t \\ c\cos t \end{bmatrix} = 0$$



Rysunek 3: Trajektoria kluki

Definicja 4 *Pochodna mieszana*

$$f(x,y) = x^2y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3, \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big) = 2y^3, \quad \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial f}{\partial y}\big) = 6x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2$$

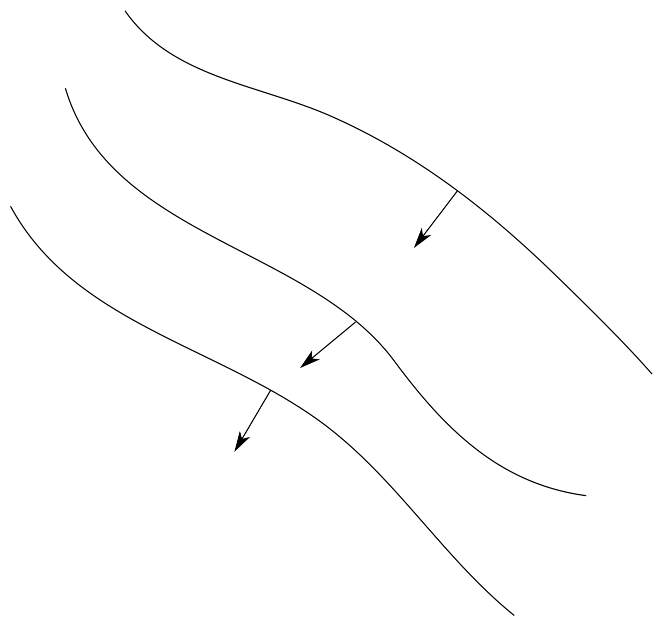
Przypadek???

Twierdzenie 4 *Niech $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, otwarty i $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$, wówczas*

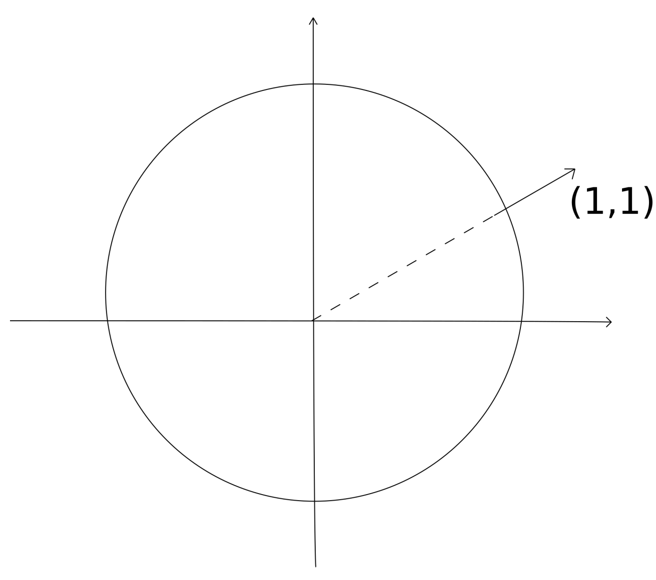
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}; i,j = 1,\ldots,n$$

Dowód 6 *Dowód dla $n = 2$*

Niech $w(x,y) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y)$
$\varphi(x) = f(x, y+k) - f(x,y)$



Rysunek 4: Powierzchnia ekwipotencjalna I



Rysunek 5: Powierzchnia ekwipotencjalna II

wówczas

$$
\begin{aligned}
& w=\varphi(x+h)-\varphi(x)=\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi) h= \\
& =\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\Big] h=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta)\Big) h k, \\
& \text{gdzie } x<\xi<x+h, \quad y<\eta<y+k
\end{aligned}
$$

Niech $\Psi(y)=f(x+h, y)-f(x, y)$
$w(x, y)=\Psi(y+k)-\Psi(y)=\frac{\partial \Psi}{\partial y}(\eta_1) k=\Big[\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, \eta_1)-\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_1)\Big] k=$ $\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta)\Big) k h$, czyli $\underset{\xi \in]x, x+h[}{\exists}$, $\quad \xi_1 \in]x, x+h[, \quad \eta \in]y, y+k[, \quad \eta_1 \in]y, y+k[\quad (y<\eta_1<y+k)$

Jeżeli $h \rightarrow 0$
$\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_1, \eta_1)\Big)$
to $\xi \rightarrow x, \xi_1 \rightarrow x, \eta \rightarrow y, \eta_1 \rightarrow y$, czyli:

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)
$$

Jeżeli każda z tych wielkości jest ciągła $\square$

Wzór Taylora Niech $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ - otwarty
$\varphi(t)=f(x_0+t h), h \in \mathbb{R}^n, t \in[0,1]$

Dla $h=\begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{bmatrix}, x_0=\begin{bmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix}, \varphi(t)=f(x_0^1+t h^1, x_0^2+t h^2, \ldots, x_0^n+t h^n)$

$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\left.\frac{\partial f}{\partial x^1}\right|_{x=x_0+t h} h_1+\left.\frac{\partial f}{\partial x^2}\right|_{x=x_0+t h} h_2+\cdots+\left.\frac{\partial f}{\partial x^n}\right|_{x=x_0+t h} h_n=\sum_{i=1}^n \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x_0+t h} h_i$
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}=\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left.\frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j}\right|_{x_0+t h} h_j h_i$
$\vdots$
$\frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k}=\sum_{i^1, \ldots, i^k}^n \frac{\partial^{(k)} f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^i} h_{i_1} \ldots h_{i_k}$
$\varphi(t)=\varphi(0)=\varphi'(0)(t-0)+\frac{\varphi''(0)}{2!}(t-0)^2+\cdots+\frac{\varphi^k(0)}{k}(t-0)^k+r(\ldots)$
Czyli:

$$
\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(0)+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\frac{\varphi'''(0)}{3!}+\cdots+\frac{\varphi^k(0)}{k!}+r(\ldots)
$$

$$
f(x_0+h)-f(x_0)=\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) h_i+\frac{1}{2!} \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) h_i h_j+\ldots\ldots \square
$$

5 Wykład (12.03.2019)

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)h^i + \frac{1}{2!}\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)h^i h^j + \cdots + \frac{1}{p!}$$

$$\sum_{\substack{i_1=1\\ \vdots \\ i_p=1}}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_p+1}}(x_0)h^{i_1}\ldots h^{i_p} + R_{p+1}(x_0,h)$$

$$\text{gdzie } R_{p+1}(h) = \frac{1}{(p+1)!}\sum_{\substack{i_1=1\\ \cdots \\ i_{p+1}=1}}^{n} \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_p+1}} \underset{\substack{0<\theta<1\\ \text{wersja } \mathbb{R}^n \text{ dla}\\ "x_0<c<x_0+h"}}{(x_0+\theta h)} h^{i_1}\ldots h^{i_{p+1}}$$

Obserwacja 1 $\lim\limits_{h\to 0} \frac{R_{p+1}(x_0,h)}{||h||^p} \to 0$

Przykład 14

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2y^3, f'(x,y) = \begin{bmatrix}2xy^3, 3x^2y^2\end{bmatrix}.$

Jeżeli $h = \begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}$, to wtedy

$$\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}h^i h^j = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}h^1h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}h^1h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}h^2h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2}h^2h^2 =$$

$$= \begin{bmatrix}h_1, h_1\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}$$

To czy ta macierz jest uśmiechnięta etc. (dodatnio/ujemnie określona) na algebrze.

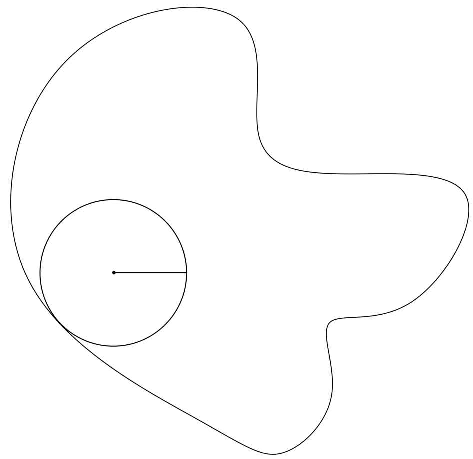
Minima i maksima

Przypomnienie Niech $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}, \mathcal{O}\subset\mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ - otwarty, $x_0 \in \mathcal{O}$
Mówimy, że f ma w x_0 minimum lokalne, jeżeli:

$$\underset{\eta>0}{\exists} \quad \underset{\substack{x\in K(x_0,\eta)\\ K(x_0,\eta)\subset\mathcal{O}\\ x\neq x_0}}{\forall} \quad f(x) > f(x_0), \{f(x) < f(x_0)\} \leftarrow \text{ maksimum}$$

Albo inaczej:

$$\underset{\eta>0}{\exists} \ \underset{h}{\forall} \ ||h|| < \eta, \quad x_0 + h \in \mathcal{O}, h \neq 0, \text{ to wtedy } f(x_0+h) > f(x_0)$$



Rysunek 6: istnieje otoczenie, dla którego $f(x) > f(x_0)$ (nie musi być styczne!)

Stwierdzenie 1 *jeżeli* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O}$ *- otwarty,* $x_0 \in \mathcal{O}, f$ *- posiada w* x_0 *minimum lub maksimum lokalne, to*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, i = 1, \ldots, n$$

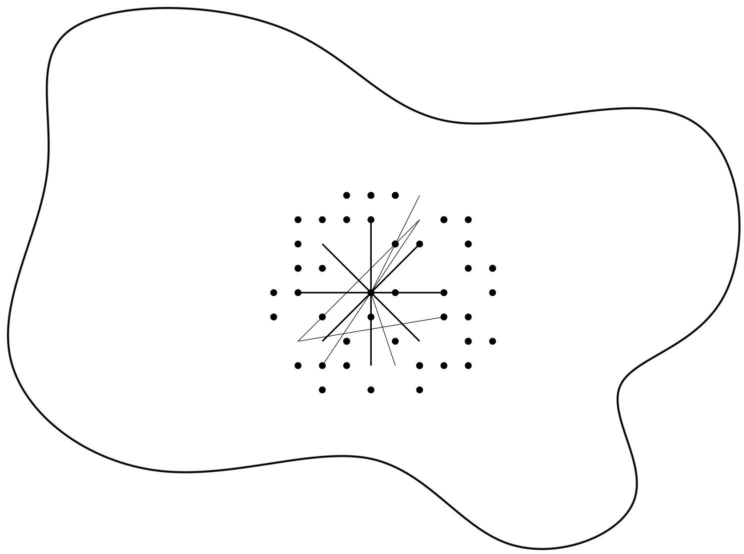
(działa tylko w prawo, bo możliwe punkty przegięcia ((siodła)))

Dowód 7

Niech $g_h(t) = f(x_0 + th)$ i $g : [0, \epsilon[\to \mathbb{R}$.
Zauważmy, że jeżeli f ma minimum lub maksimum w x_0, to znaczy, że $g_h(t)$ ma minimum lub maksimum w $t = 0$, czyli $\frac{\partial}{\partial t} g_h(t)\big|_{t=0}$

Czyli:

$$x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)$$
$$h = \left(h^1, h^2, \ldots, h^n\right)$$



Rysunek 7

$$\frac{d}{dt}g_h(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}f(x_0^1 + th^1, \ldots, x_0^n + th^n)\Big|_{t=0} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0 + th^1)h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0 + th^2)h^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0 + th^n)\Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)h^i = 0 \quad |\forall_h : ||h|| < \eta, \text{ to znaczy: } \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0_{i=1,\ldots,n} \square$$

Twierdzenie 5 *Niech* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in \mathcal{O}, \quad \mathcal{O}$ *- otwarty, a* f *- klasy* $C^{2p}(\mathcal{O})$ *oraz* $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(2p-1)}(x_0) = 0$ *i*

$$\exists_{c>0} \ \exists_{\eta>0} \ \forall_{h \in K(x_0,\eta)} : \quad \sum_{\substack{i_1=1 \\ \vdots \\ i_{2p}=1}}^{n} \frac{\partial^{(2p)} f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_{2p}}}(x_0)h^{i_1} \ldots h^{i_{2p}} \geqslant c||h||^{2p} (\leqslant c||h||^{2p})$$

to f *ma w* x_0 *minimum (maksimum) lokalne.*

Dowód 8 *(dla minimum)*
(wersja uproszczona dla f *klasy* $C^{2p+1}(\mathcal{O})$*)*

Jeżeli f spełnia założenie z twierdzenia, to wtedy

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{1}{(2p)!}(\Delta)\sum_{\substack{i_1=1\\ \vdots \\ i_{2p}=1}}^{2p}\frac{\partial^{(2p)}f(x_0)}{\partial x^{i_1}\dots x^{i_{(2p)}}}h^{i_1}\dots h^{i_{(2p)}}+r_{2p+1}(x_0+h)$$

Wiemy też , że $\underset{c>0}{\exists}\quad\underset{\eta>0}{\exists}\quad\underset{\substack{\text{Chodzi o to, żeby reszta}\\ \text{nie mogła tego przekroczyć}}}{(\Delta)\geqslant c||h||^{2p}}$

Chcemy pokazać, że $\underset{\eta}{\exists}\ \underset{||h||<\eta}{\forall}\left|r_{2p+1}(x,h)\right|\leqslant \underset{\substack{\text{albo 7,}\\ \text{albo 2019}}}{\frac{c}{2}||h||^{2p}}$

Czyli chcemy zbadać wielkość:

$$\frac{1}{(2p+1)!}\sum_{\substack{i_1=1\\ \vdots \\ i_{2p+1}=1}}^{n}\frac{\partial^{(2p+1)}f(x_0+\theta h)}{\underset{0<\theta<1}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_{(2p+1)}}}}h^{i_1}\dots h^{i_{(2p+1)}}=\text{ /*tu potrzebne założenie, że } f \text{ - klasy } C^{2p+1}(\mathcal{O})\text{*/} = r_{2p+}$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{h\to 0}\frac{r_{2p+1}(x_0+h)}{||h||^{2p}}\to 0$, ale zatem

$$\underset{M>0}{\forall}\quad\underbrace{\underset{N}{\exists},\ \underset{n>N}{\forall}}_{\substack{\text{bez sensu!}\\ \underset{\eta}{\exists},\ \underset{||h||<\eta}{\forall}}}\ \frac{r_{2p+1}(x_0+h)}{||h||^{2p}}<M$$

$$\text{czyli: }\left|\frac{r_{2p+1}(x_0,h)}{||h||^{2p}}\right|<M$$

$$\underset{M}{\forall}\quad\underset{\eta}{\exists}\underset{||h||<\eta}{\forall}\quad\left|r_{2p+1}(x_0,h)\right|<M\big|\big|h\big|\big|^{2p}$$

Kładziemy $M=\frac{c}{2}$ i mamy

$$\underset{\eta}{\exists},\underset{||h||<\eta}{\forall}\quad f(x_0+h)-f(x_0)\geqslant\frac{c}{2}||h||^{2p}\quad\square$$

Uwaga: Dlaczego warunek $(|||)>c||h||^{2p}$, a nie po prostu $()>0$?

Przykład 15

$f(x,y)=x^2+y^4$, $\frac{\partial f}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3$.
$f'()=0\iff(x,y)=(0,0)$
Badamy: $f(0+h)-f(0)=\begin{bmatrix}h_1,h_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&2y^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_1,h_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}=2h_1^2$

Czyli $f(0+h)-f(0)\ 2h_1^2$ - minimum? maksimum? - zależy w którą stronę.
$h=\begin{bmatrix}h_1\\0\end{bmatrix}$ - minimum

$h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix}$ - równo.
Coś takiego - siodło.

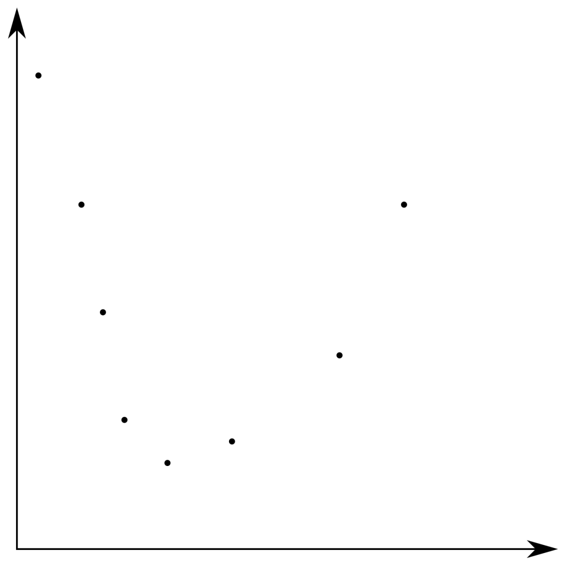
Widzimy zatem, że nie jest spełniony warunek $\underset{c}{\exists} [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \geqslant c \left|\left| h \right|\right|^2$, bo dla $h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad 0 \ngeqslant c \left|\left| \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \right|\right|$

Kilka fajnych zastosowań

$$\frac{mv^2}{2} = [\quad v \quad] \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & & \\ & \frac{m}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ v \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\frac{I\omega^2}{2} = [\quad \omega \quad] \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \omega \\ \\ \end{bmatrix}$$

6 Wykład (15.03.2019)



Rysunek 8: Inne podejście: iterujemy funkcję na jej wyniku

Definicja 5 *Niech $L : V \to W, L$ - liniowe, $(V, ||.||_v), (W, ||.||_w)$ - unormowane. Mówimy, że L jest ograniczone, jeżeli*

$$\underset{A>0}{\exists}, \underset{x\in V}{\forall} ||L(x)||_w \leqslant A||x||_v$$

Przykład 16

dla $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\underset{?A}{\exists}, \forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left|\left| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right|\right| \leqslant A \left|\left| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right|\right|$$

$$Ale : \forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left|\left| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right|\right| < \frac{1}{2} \left|\left| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right|\right|$$

Twierdzenie 6 *Twierdzenie (L - ograniczone) $\iff$ (L - ciągłe)*

Dowód 9 $\Longleftarrow$

Wiemy, że $\underset{\varepsilon>0}{\forall}, \underset{\delta}{\exists}, \underset{x,x'\in V}{\forall}, \quad ||x-x'||_v < \delta \implies ||L(x)-L(x')||(*) < \varepsilon$

Chcemy pokazać, że:

$$\underset{A>0}{\exists}. \underset{x,x'\in V}{\forall} \quad ||L(x-x')|| \leqslant A||x-x'||$$

zatem wiemy, że para (ε, δ) spełniająca warunek $(*)$ istnieje.

$$\text{Ale } ||L(x-x')|| = \underbrace{\left|\left|L\left(\frac{x-x'}{||x-x'||}\right)\frac{\delta}{2}\right|\right|\frac{||x-x'||2}{\delta}}_{\text{własność liniowości i normy}} \leqslant \varepsilon\frac{||x-x'||2}{\delta}$$

Co wiemy o $\left|\left|\frac{x-x'}{||x-x'||}\frac{\delta}{2}\right|\right|_v < \delta$?

$$\underset{x,x'\in V}{\forall}||L(x-x')||_w \leqslant \frac{2\varepsilon}{\delta}||x-x'||_v$$

$$\text{Szukane } A = \frac{2\varepsilon}{\delta} \text{ istnieje!} \quad \square$$

$\Longrightarrow$

$$\text{Wiemy, że } \underset{A}{\exists}. \underset{x,x'\in V}{\forall}.||L(x-x')|| \leqslant A||x-x'|| \tag{5}$$

Chcemy pokazać, że jeżeli $x_n \to x_0$, to $L(x_n) \to L(x_0)$, ale $0 \leqslant ||L(x_n) - L(x_0)||_w = ||L(x_n - x_0)||_w \leqslant A||x_n - x_0||$(bo (5))

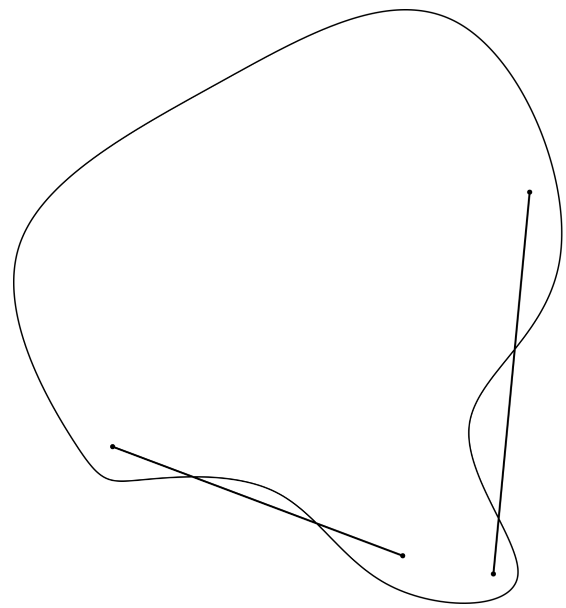
$$0 \leqslant ||L(x_n) - L(x_0)||_w \leqslant A||x_n - x_0||(\text{wszystko dąży do 0}) \quad \square$$

Definicja 6 *Wielkość* $\underset{A}{inf}\{\underset{x\in V}{\forall}||L(x)||_w \leqslant A||x||_v\}$ *nazywamy normą odwzorowania* L *i oznaczamy* $A \overset{ozn}{=} ||L||$.

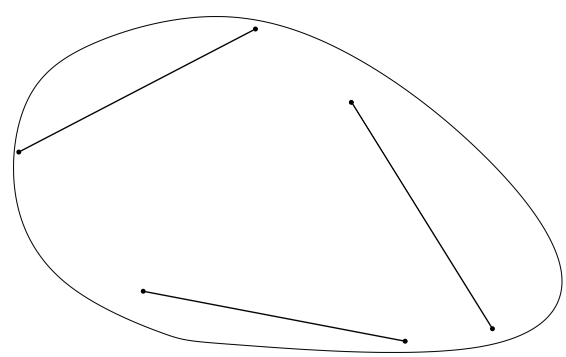
Definicja 7 *Niech* $U \subset \mathbb{R}^m$ *- jest zbiorem wypukłym, jeżeli* $\underset{a,b\in U}{\forall}. \quad [a,b] \overset{def}{=} \{a(1-t)+bt, t\in[0,1]\} \subset U$

Stwierdzenie 2 *Niech* $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, U$ *- otwarte, wypukły* $\underset{M}{\exists}. \underset{x\in U}{\forall}||f'(x)|| \leqslant M$, *to* $\underset{a,b\in U}{\forall}||f(b)-f(a)||_n \leqslant M||b-a||_m$ *(jakiekolwiek skojarzenia z Twierdzeniem Lagrange zupełnie przypadkowe *wink* *wink*)*

Dowód 10



Rysunek 9: zbiór wklęsły



Rysunek 10: zbiór wypukły

niech $\gamma(t) = a(1-t) + bt, t \in [0,1], \quad g(t) = f(\gamma(t)), g : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$

$$\text{Czyli } g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}, \text{ zatem } \|g(1) - g(0)\| = \left\| \begin{bmatrix} g_1(1) - g_1(0) \\ g_2(1) - g_2(0) \\ \vdots \\ g_n(1) - g_n(0) \end{bmatrix} \right\| \overset{\text{Tw. Lagrange!}}{=}$$

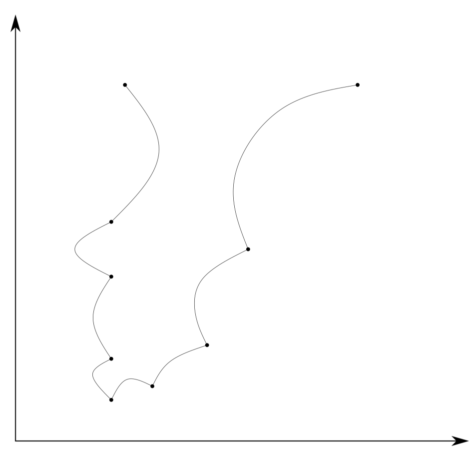
$$= \left\| \underset{0<c_i<1}{\begin{bmatrix} g_1'(c_1)(1-0) \\ g_2'(c_2)(1-0) \\ \vdots \\ g_n'(c_n)(1-0) \end{bmatrix}} \right\| \leqslant \left\| \begin{bmatrix} g_1'(c_1) \\ g_2'(c_2) \\ \vdots \\ g_n'(c_n) \end{bmatrix} \right\| \|1-0\|$$

Ale $g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) \to \|g'(t)\| = \|f'(\gamma(t))(b-a)\| \leqslant \|f'(\gamma(t))\| \, \|b-a\| \underset{\text{z zał. stw.}}{\leqslant} M$

$$\text{Czyli } \underset{t\in[0,1]}{\forall} \|g'(t)\| \leqslant M \|b-a\| \implies \|f(b) - f(a)\| \leqslant M \|b-a\| \quad \square$$

Niech X - unormowana: $P : X \to X, P$ - ciągła na X.
Interesuje nas zbieżność ciągów typu $\{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\}, x_0 \in X$

Definicja 8 *$\tilde{x} \in X$ nazywamy punktem stałym, jeżeli $P(\tilde{x}) = \tilde{x}$*



Twierdzenie 7 *Jeżeli ciąg $\{x_0, P(x_0), \dots\}$ - zbieżny i P - ciągłe, to jest on zbieżny do punktu stałego.*

Dowód 11

Niech $x_n = P^{(n)}(x_0)$. Wiemy, że x_n - zbieżny, oznaczmy granicę tego ciągu przez $\tilde{x}$. Mamy:

$$\underset{\varepsilon_1>0}{\forall} . \underset{N_1}{\exists} . \underset{n>N_1}{\forall} \quad d(x_n, \tilde{x}) < \varepsilon_1 \tag{6}$$

$$\underset{\varepsilon_2>0}{\forall} . \underset{N_2}{\exists} . \underset{n>N_2}{\forall} \quad d(x_{n-1}, \tilde{x}) < \varepsilon_2 \tag{7}$$

P - ciągłe, czyli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} . \underset{\delta}{\exists} . \underset{x'}{\forall} : \quad d(x, x') < \delta \implies d(P(x), P(x')) < \varepsilon, \text{ bo } (6)$$

Chcemy pokazać, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad d(\tilde{x}, P(\tilde{x})) < \varepsilon \tag{8}$$

Ale

$$d(\tilde{x}, P(\tilde{x})) \leqslant d(\tilde{x}, x_n) + d(x_n, P(\tilde{x})) = d(\tilde{x}, x_n) + d(P(x_{n-1}), P(\tilde{x})) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \square \tag{9}$$

Ale z (6) wynika, że $\underset{\varepsilon>0}{\forall} . \underset{\delta}{\exists} \quad d(x_{n-1}, \tilde{x}) < \delta \implies d(P(x_{n-1}), P(\tilde{x})) < \varepsilon$ (10)

Zatem znając ε z (8) przyjmujemy $\varepsilon_1 = \varepsilon$, oprócz tego znajdujemy δ przyjmując $\varepsilon_1 = \varepsilon$, a potem położymy $\varepsilon_2 = \delta$ z (7) i dzięki temu mamy (9)

Niech X - przestrzeń metryczna, odwzorowanie $P : X \to X$ nazywamy zwężającym, jeżeli:

$$\underset{q\in[0,1[}{\exists} . \underset{x,y\in X}{\forall} d(P(x), P(y)) \leqslant q d(x, y) \tag{11}$$

Twierdzenie 8 *(Zasada Banacha o lustrach)*
Jeżeli $P : X \to X, P$ - zwężające, to

1. $\underset{x_0\in X}{\forall} \quad \{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\}$ *- Zbieżny do punktu stałego $\tilde{x}$* (12)
2. *Istnieje tylko jedno $\tilde{x}$* (13)
3. $\underset{m}{\forall} \quad d(x_m, \tilde{x}) < \dfrac{q^m}{1-q} d(x_1, x_0)$ (14)

Przykład 17 *(uwaga)*

(P - nie musi być ciągłe) - potem się okaże, że ciągłość gdzieś tutaj siedzi *implicite*
- lustra w łazience koło sali 1.01 $\to$ można stanąć tak, że jedno jest przed tobą a drugie za tobą i wtedy te odbicia się ciągną w nieskończoność i zbiegają do punktu
- telewizor + kamera która go nagrywa a on wyświetla ten obraz
- mapa położona na podłodze zawiera dokładnie jeden punkt, który się pokrywa z miejscem na którym leży

Dowód 12 *ad. 2*

Załóżmy, że $\underset{\tilde{x}_1,\tilde{x}}{\exists} P(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1, P(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_2, \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$
Wtedy $d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = d(P(\tilde{x}_1), P(\tilde{x}_2)) < qd(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$
Dalej:

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \leqslant qd(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \text{ ale } 0 \leqslant q \leqslant 1, \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2 \implies \text{sprzeczność!} \quad \square$$

Obserwacja 2

$d(x_{n+1}, x_n) = d(P(x_n), P(x_{n-1})) \leqslant qd(x_n, x_{n-1}) = qd(P(x_{n-1}), P(x_{n-2})) \leqslant q^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leqslant q^n d(x_1, x_0)$

Co, jeżeli zamiast $n+1$ weźmiemy $n+m$? $d(x_{n+m}, x_n) \leqslant d(x_{n+m}, x_{n+m+1}) + d(x_{n+m-1}, x_n) \leqslant d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + d(x_{n+m-2}, x_n) \leqslant \cdots \leqslant d(x_{n+m}, x_{n+m-1} + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \leqslant (q^{n+m-1} + \cdots + q^{n+2} + q^{n+1} + q^n) d(x_1, x_0) \leqslant q^n \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) d(x_1, x_0) \underset{0 \leqslant q < 1}{\leqslant} \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$

Czyli $d(x_{n+m}, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$
Skoro X - zupełna, to jeżeli x_n - Cauchy, to znaczy, że jest zbieżny w X. Czyli czy

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \underset{N}{\exists} \underset{n,m > N}{\forall} \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon?$$

Załóżmy, że $m > n$ i $m = n + k$. Wtedy

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \underset{N}{\exists} \underset{n > N}{\forall} \quad d(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon? \text{ TAK!}$$

Dla N takiego, że $\frac{q^N}{1-q} d(x_1, x_0) < \varepsilon$. Stąd wiadomo, że x_n - Cauchy, czyli jest zbieżny. $x_n \to \tilde{x}$, zatem jeżeli $d(x_{n+m}, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \to d(\tilde{x}, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$ $\square$

7 Wykład (19.03.2019)

Twierdzenie 9 *(o lokalnej odwracalności)*

Niech $f : E \to E, E$ *- otwarty,* $E \subset \mathbb{R}^N, f$ *- różniczkowalna w sposób ciągły na* E*.*

$(f$ *- klasy* $\mathcal{C}^1(E)), \underset{a,b\in E}{\exists} : f(a) = b \wedge f'(a)$ *- odwracalna* $(det(f'(a)) \neq 0)$*, to:*

1. $\underset{U,V\subset E}{\exists}, \underset{a\in U, b\in V}{\exists}, U, V$ *- otwarte,* f *- bijekcja między* U, V
2. $\underset{g:V\to U}{\exists} . \underset{x\in V}{\forall}, f(g(x)) = x, g$ *- ciągła i różniczkowalna na* V

Uwaga: Dowód składa się z trzech części:

1. Pokażemy, że $\underset{U,V}{\exists} : f$ - bijekcja na U, V
2. Pokażemy, że U, V - otwarte
3. Pokażemy, że $\underset{g:V\to U}{\exists}, g$ - różniczkowalna na V i ciągła.

Przykład 18

$f(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix}, f'(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$
$det(f'(x, y)) = e^{2x} \neq 0$, ale $f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$ (czyli funkcja jest okresowa)

Dowód 13

Część I:
Szukamy $U, V : f$ - bijekcja miedzy U i V Skoro $f'(a)$ - odwracalne, to znaczy, że $\underset{(f'(a))^{-1}}{\exists}$, zatem $\underset{\lambda}{\exists} : 2\lambda\|(f'(a))^{-1}\| = 1$

Wiemy, że $f'(x)$ - ciągła w $x = a$, czyli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} . \underset{\delta}{\exists} . \underset{x}{\forall}, d(x, a) < \delta \implies \|f'(x) - f(a)\| < \varepsilon \tag{15}$$

Połóżmy $\varepsilon = \lambda$.
Oznacza to, że

$$\underset{\delta_\lambda}{\exists} . \underset{x}{\forall} x \in K(a, \delta_\lambda) \implies \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda \tag{16}$$

Więc $U = K(a, \delta_\lambda)$, niech $V = f(U)$. Chcemy pokazać, że f - bijekcja między U i V.

Wprowadźmy funkcję pomocniczą:

$$\varphi_y(x) = x + [f'(a)]^{-1}(y - f(x)), x, y \in E \tag{17}$$

Pytanie 3 *Co by było gdyby $\varphi_y(x)$ posiadała punkt stały? (jakie własności x by z tego faktu wynikały)*
dla $x \in U, y \in V, (y \in f(a))$?

Z zasady Banacha wiemy, że odwzorowanie zwężające ma dokładnie jeden punkt stały, czyli $\underset{y\in V}{\forall} . \underset{x\in U}{\exists} : f(x) = y$

O f - z taką własnością mówimy, że jest 1-1 na U. (iksa nie obchodzą sąsiedzi, f musi być ciągłe to będzie bijekcja)

Policzmy $\varphi_y'(x) = \mathbb{I} + (f'(a))^{-1}(-f'(x)) = (f'(a))^{-1}(f'(a) - f'(x))$, więc $\|\varphi_y'(x)\| = \|f'(a)^{-1}(f'(a)-f'(x))\| \leqslant \|(f'(a)^{-1})\|\|f'(a)-f'(x)\| \leqslant \underset{x\in U}{\forall} \frac{1}{2\lambda}\lambda = \frac{1}{2}$

Pamiętamy, że jeżeli $\underset{M}{\exists}\|\varphi_y'(x)\| \leqslant M$, to $\underset{x,y}{\forall}\|\varphi(x) - \varphi(y)\| < M\|x - y\|$

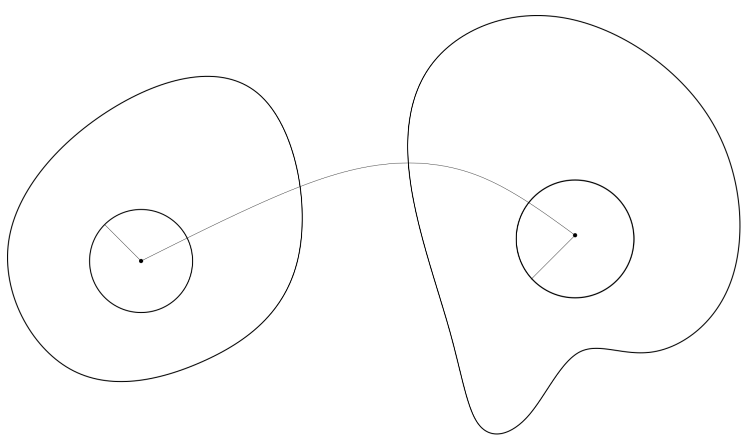
Zatem skoro $\|\varphi_y'(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$, to

$$\underset{x_1,x_2\in U}{\forall}\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,$$

więc φ - zwężający na U, więc posiada dokładnie jeden punkt stały $\underset{y\in V}{\forall}$. Zatem f - bijekcja między U i V.

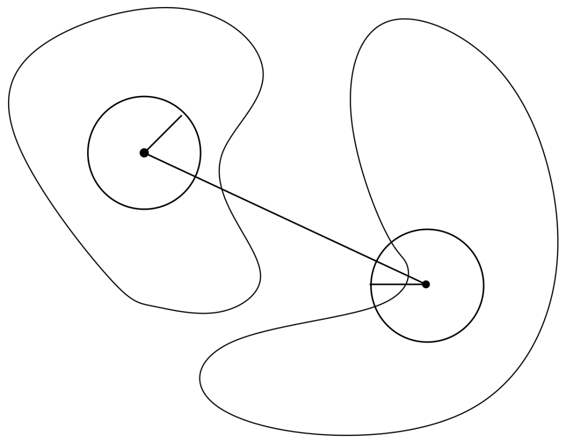
Część II - otwartość U i V

1. Zbiór U - otwarty (bo tak go zdefiniowaliśmy) ($U = K(a, \delta_1)$), więc $\underset{x_0\in U}{\exists}, \underset{r}{\exists} K(x_0, r) \subset U$, lub równoważnie $\|x - x_0\| \leqslant r \wedge x \in U$.
Chcemy pokazać, że dla $y_0 = f(x_0) \underset{K(y_0,\lambda r)\subset V}{\exists}$, czyli że V - otwarty.



Rysunek 11: Trochę jak listy do św. Mikołaja (??)

Weźmy $y \in K(y_0, \lambda r)$. Zauważmy, że $\varphi_{y_1}(x_1)$ - zwężające, jeżeli $y_1 \in V, x_1 \in U$
Jeżeli pokażemy, że dla $\|y - y_0\| < \lambda r, \varphi_y(x)$ - zwężająca na $K(x_0, r) \subset U$, to będziemy wiedzieli, że $\|y - y_0\| < \lambda r$ oraz $y \in V \iff K(y_0, \lambda r) \subset V$



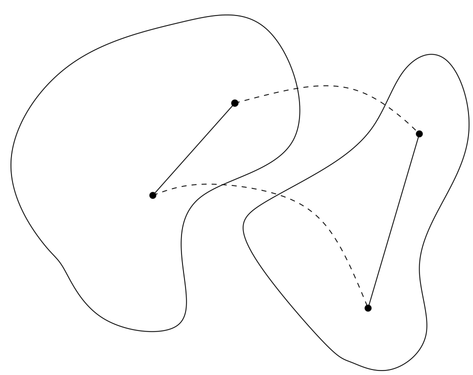
Rysunek 12: Nie ok.

Żeby pokazać, że $\varphi_y(x)$ - zwężające na $K(x_0, r)$, zbadamy tę wielkośc dla $x \in K(x_0, r)$. $\|\varphi_y(x) - x_0\|$, chcielibyśmy, aby $\|\varphi_y(x) - x_0\| \leqslant r$ i $\|y - y_0\| < \lambda r$, ale z drugiej strony

$$\|\varphi_y(x)-x_0\| = \|\varphi_y(x)-\varphi_y(x_0)+\varphi_y(x_0)-x_0\| \leqslant \|\varphi_y(x)-\varphi_y(x_0)\|+\|\varphi y(x_0-x_0)\|$$

Ale $\|\varphi_y(x_0)-x_0\| \leqslant \|(f'(a))^{-1}\|\|y-y_0\| \leqslant \frac{1}{2\lambda}\lambda r = \frac{r}{2}$, więc $\|\varphi_y(x)-x_0\| \leqslant r$, jeżeli $\|y - y_0\| < \lambda r, \|x - x_0\| \leqslant r$.

Stąd wiemy , że punkt stały dla $\varphi_y(x) : x \in K(x_0, r)$ należy do $K(x_0, r)$ i $\|y - y_0\| < \lambda r$, zatem $y = f(x)$, czyli V - otwarty.



Rysunek 13

Część III:

Szukamy $g : V \to U$

Skoro f - bijekcja między U i V, to znaczy, że $\underset{g:V\to U}{\exists} f(g(x)) = x \underset{x\in V}{\forall}$.

Chcemy pokazać, że $g(x)$ - różniczkowalne. Wiemy, że f - różniczkowalna w

$x \in U$, czyli

$$\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h}{\|h\|} \overset{h\to 0}{\to} 0, x, x+h \in V$$

Jeżeli pokażemy, że

$$\frac{g(y+k)-g(y)-[f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} \overset{k\to 0}{\to} 0 \tag{18}$$

to będziemy wiedzieli, że:
1. g - różniczkowalne dla $y \in V$
2. $g'(y) = [f'(x)]^{-1}$.
W tym celu pokażemy, że:
1. $(\|k\| \to 0) \implies (\|h\| \to 0)$
2. $[f'(x)]^{-1}$ istnieje dla $x \in U$. (na razie wiemy, że $(f'(a))^{-1}$ istnieje)

Ad 1. Zauważmy, że

$$\varphi_y(x+h)-\varphi_y(x) = x+h+[f'(a)]^{-1}(y-f(x+h))-x-[f'(a)]^{-1}(y-f(x)) =$$

$$= h+[f'(a)]^{-1}(y-f(x+h)-y+f(x)) = h-(f'(a))^{-1}(f(x+h)-f(x)),$$

$$czyli\|\varphi_y(x+h)-\varphi_y(x)\| = \|h-(f'(a))^{-1}(k)\| \leqslant \frac{1}{2}\|h\|,$$

zatem $\|h-(f'(a))^{-1}k\| \leqslant \frac{1}{2}\|h\| \implies \|k\| \geqslant \|h\|, k = f(x+h)-f(x)$

Stąd ostatecznie mamy: $\frac{g(y+k)-g(y)-[f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} = [f'(x)]^{-1}\frac{hf'(x)-f(x+h)+f(x)}{\|k\|} \leqslant \frac{[f'(x)]^{-1}}{\lambda}\frac{hf'(x)-f(x+h)+f(x)}{\|h\|} \to 0$, o ile $\underset{[f'(x)]^{-1}}{\exists}$

Pytanie 4 *skąd wiadomo, że* $(f'(x))^{-1}$*?*

Wiemy, że $f'(a)$ jest odwracalna, więc $(f'(a))^{-1}$ istnieje, $a \in U$.
Chcemy pokazać, że $f'(x)$ jest odwracalna dla $x \in U$. Oznacza to, że

$$0 < \|f'(x)y\| \text{ dla } y \neq 0, x \in U.$$

Pamiętamy, że $2\lambda\|(f'(a))^{-1} = 1$ oraz U - taka, że

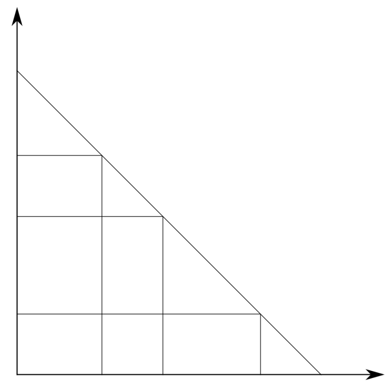
$$\underset{x\in U}{\forall}\|f'(x)-f'(a)\| < \lambda.$$

Zatem

$$0 \leqslant \frac{1}{\|(f'(a))^{-1}\|}\|y\| = \|(f'(x)+f'(a)-f'(x))y\| \leqslant \|f'(a)-f'(x)\|\|y\|+\|f'(x)\|\|y\|.$$

Dalej $2\lambda\|y\| \leqslant \lambda\|y\| + \|f'(x)y\|$ dla $x \in U$
$0 \leqslant \lambda\|y\| \leqslant \|f'(x)y\|$ dla $y = 0$
Czyli

$$\underset{x\in U}{\forall}\|f'(x)y\| > 0 \quad \square.$$



Rysunek 14: (a)

8 Wykład (22.03.2019)

Zabawki działające dzięki wnioskom z Tw. wyżej

Definicja 9 *Funkcje uwikłane*

$$x + y = 1 \quad \text{(a)}.$$
$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{(b)}.$$
$$H(x, y) = \sin xe^{xy} + \operatorname{tg} y - x = 0.$$

Przykład 19 *Równanie gazowe*

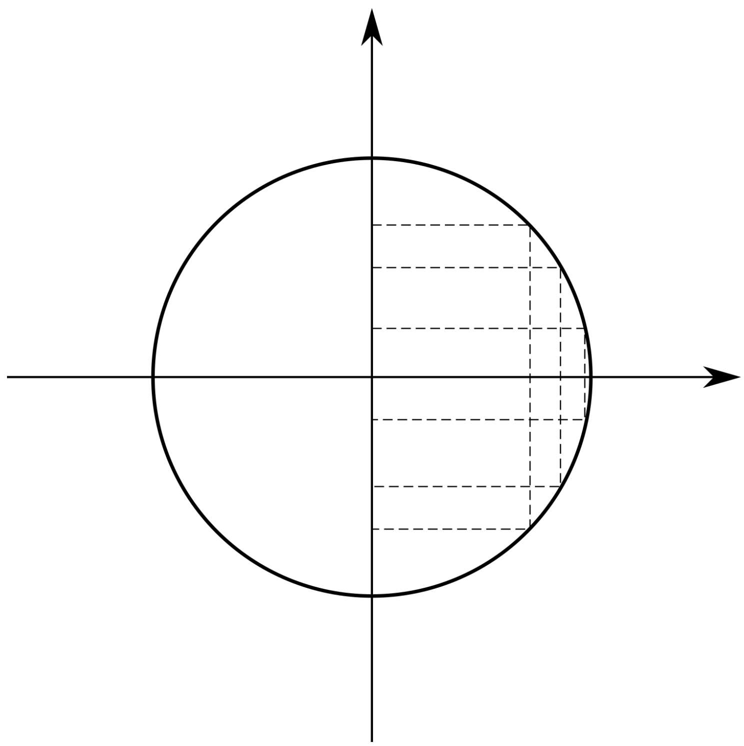
$$H(p, V, T) = 0, H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1.$$
$$p(V, T) = 0, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1.$$
$$V(p, T) = 0, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1.$$
$$T(p, V) = 0, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1.$$

istnienie przedziałów, w których funkcja uwikłana zadaje inne funkcje

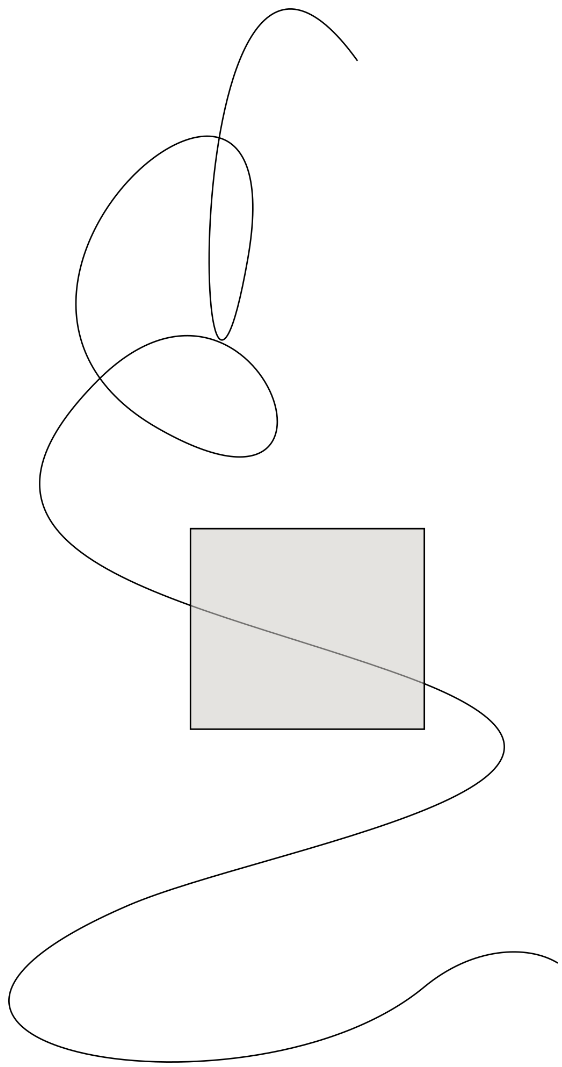
Przykład 20

$$H(x, y) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1.$$

Pytanie 5 *Czy istnieje $y(x) : H(x, y(x)) = 0$, dla $x \in V$?*



Rysunek 15: (b)



Rysunek 16: (c)

$$\frac{dH}{dx}(x,y(x)) = \frac{d}{dx}(H(x,y)\circ g(x)).$$

$$H' = \left[\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}\right].$$

$$g(x) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2, g(x) = \begin{bmatrix} x \\ y(x) \end{bmatrix}, g'(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ y'(x) \end{bmatrix}.$$

$$H'(x,y)g'(x) = 0 \implies \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial y}}.$$

Więc

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-\cos y + ye^{xy} - 1}{xe^y + \frac{1}{\cos^2 y}}.$$

Przykład 21

$$H(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \begin{bmatrix} 2e^{x_1} + x_2x_3 - 4x_3 + 3 \\ x^2\cos x_1 - 6x_1 + 2x_3 - x_5, H : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3 \end{bmatrix}.$$

$$H(x_1,\ldots,x_5) = 0 \text{ może zadać funkcję } g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2.$$

$$x_4(x_1,x_2,x_3), x_5(x_1,x_2,x_3).$$

$$g(x_1,g_2,g_3) = \begin{bmatrix} g_1(x_1,x_2,x_3) \\ g_2(x_1,x_2,x_3 \end{bmatrix}.$$

Obserwacja 3 $H(0,1,3,2,7) = 0$

$$H : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2, H(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) = 0.$$

$$H(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) = \begin{bmatrix} H_1(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) \\ H_2(x_1,x_2,y_1,y_2,y_2) \end{bmatrix}.$$

Pytanie 6 *Czy* $H(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) = 0$ *zadaje nam*

$$g_1(y_1,y_2,y_3).$$

$$g_2(y_1,y_2,y_3)?$$

czyli $g(y_1,y_2,y_3) = \begin{bmatrix} g_1(y_1,y_2,y_3) \\ g_2(y_1,y_2,y_3) \end{bmatrix}, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$H_1(g_1(y_1,y_2,y_3), g_2(y_1,y_2,y_3), y_1,y_2,y_3) = 0.$$

$$H_2(g_1(y_1,y_2,y_3), g_2(y_1,y_2,y_3), y_1,y_2,y_3) = 0.$$

Szukamy g'.

$$g' = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \frac{\partial g_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \frac{\partial g_3}{\partial y_3} \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_2} + \frac{\partial H_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_1} + \frac{\partial H_1}{\partial y_1} = 0.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_3} + \frac{\partial H_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_1} + \frac{\partial H_1}{\partial y_1} = 0.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_3} + \frac{\partial H_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_3} + \frac{\partial H_1}{\partial y_3} = 0.$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_1} + \frac{\partial H_2}{\partial y_1} = 0.$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_2} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_2} + \frac{\partial H_2}{\partial y_2} = 0.$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_3} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_3} + \frac{\partial H_2}{\partial y_3} = 0.$$

napięcie rośnie (6 równań oho)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \frac{\partial H_1}{\partial x)2} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} & \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}}_{H'_x} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \frac{\partial g_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2}{\partial y_3} \end{bmatrix}}_{g'} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial y_1} & \frac{\partial H_1}{\partial y_2} & \frac{\partial H_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial H_2}{\partial y_1} & \frac{\partial H_2}{\partial y_2} & \frac{\partial H_2}{\partial p_3} \end{bmatrix}}_{H'_y}.$$

$$H'_x g' = -H'_y \implies g' = -(H'_x)^{-1} H'_y.$$

Twierdzenie 10 *(o funkcji uwikłanej)*
Niech $H : E \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m, H \in \mathcal{C}^1$ *na* E. $(x_0, y_0) \in E, H(x_0, y_0) = 0, (x_0, y_0) = (x_0^1, \ldots, x_0^n, y_0^1, \ldots, y_0^m), H$ *- odwracalna.*
Wówczas istnieje $U \subset E$ *takie, że* $(x_0, y_0) \in U, \underset{W \subset \mathbb{R}^n}{\exists}$*, że* $x_0 \in W, \underset{x \in W}{\forall} \underset{y}{\exists!} H(x, y) = 0, (x, y) \in U$.
Jeżeli $y = \varphi(x)$*, to* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *i* $\varphi \in \mathcal{C}^1$ *na* W. $\varphi'(x) = -(H'_y)^{-1} H'_x$

Dowód 14 *Oznaczenia:*

$$H(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) = \begin{bmatrix} H^1(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) \\ \vdots \\ H^2(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) \end{bmatrix}.$$

$$H'_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial H^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial H^1}{\partial y^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H^m}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial H^m}{\partial y^n} \end{bmatrix}, H'_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial H^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial H^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial H^m}{\partial x^n} \end{bmatrix}.$$

Wprowadźmy funkcję $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$

$$F(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \\ H^1(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) \\ \vdots \\ H^m(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) \end{bmatrix}.$$

Jakie własności ma F*?*

$$F(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ale

$$F' = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & H'_x & & H'_y \end{bmatrix}, \det F' = \det H'_y.$$

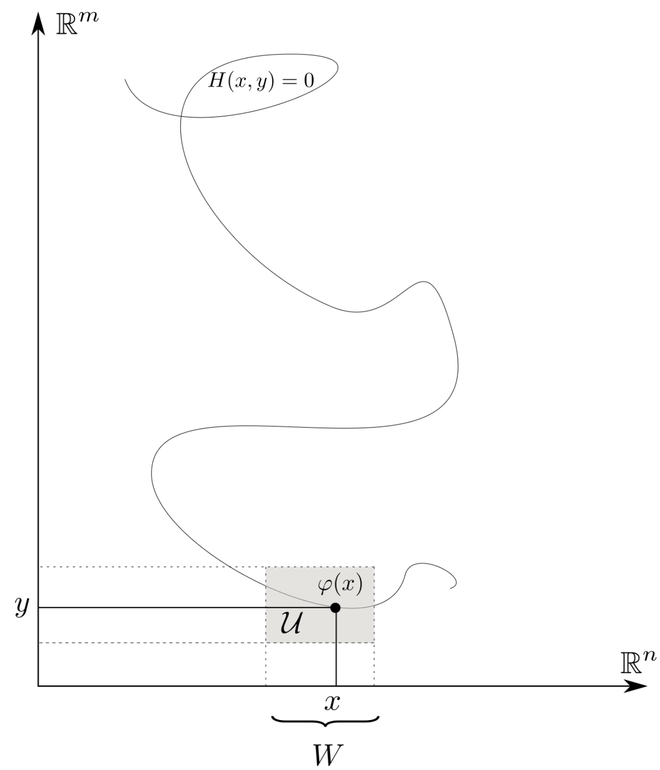
Jeżeli $H'_y(x_0, y_0)$ *- odwracalna, to* $F'(x_0, y_0)$ *- też. Oznacza to (na podstawie tw. o lokalnej odwracalności), że*

$$\underset{U \subset \mathbb{R}^{n+m}}{\exists}, (x_0, y_0) \in U, \underset{V \subset \mathbb{R}^{n+m}}{\exists}, (x_0, 0) \in V.,$$

że F *jest bijekcją między* U *i* V *oraz* $\exists F^{-1} : V \to U, F^{-1}$ *- różniczkowalna taka, że*

$$F^{-1}(x, \alpha) = (a(x, \alpha), b(x, \alpha)), x, \alpha \in V.,$$

gdzie $a(x, \alpha) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n, \quad b(x, \alpha) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$



Rysunek 17

9 Wykład (26.03.2019)

końcówka dowodu:

Dla $(x', y') \in \mathcal{V}$,

$$F^{-1}(x', y') = (a(x', y'), b(x', y')).$$

Wiemy, że $a : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ i $b : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ istnieją i są różniczkowalne, bo F^{-1} istnieje. Co jeszcze wiemy o funkcjach a i b?

Wiemy że

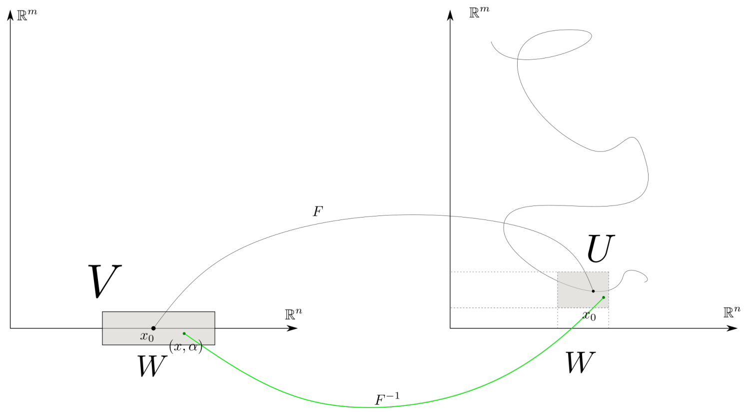
$$(x', y') = F(F^{-1}(x', y') = F(\underbrace{a(x', y')}_{n}, \underbrace{b(x', y')}_{m}).$$

Oznacza to, że

$$a(x', y') = x'.$$

Czyli $a(x', y')$ jest identycznością, czyli:

$$(x', y') = F(x', b(x', y')) \implies x' = x \implies (x, y') = F(x, b(x, y')).$$



Rysunek 18

Czyli jeżeli $y = b(x, 0)$, to wtedy

$$F(x, y) = (x, 0), \text{ czyli } (x, H(x, y)) = (x, 0).$$

Czyli dla $y = (x, 0)$ otrzymujemy, że

$$H(x, y) = 0.$$

Jeżeli oznaczymy $b(x, 0) \overset{\text{ozn}}{=} \varphi(x)$, to znaczy, że znaleźliśmy funkcję $\varphi(x), \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ taką, że

$$H(x, \varphi(x)) = 0 \quad \square.$$

Definicja 10 *Ekstrema związane*

przykład:

$$f(x, y) = x+y, \quad G(x, y) = (x-1)^1+(y-1)^2-1, \quad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, G(x, y) = 0\right\}.$$

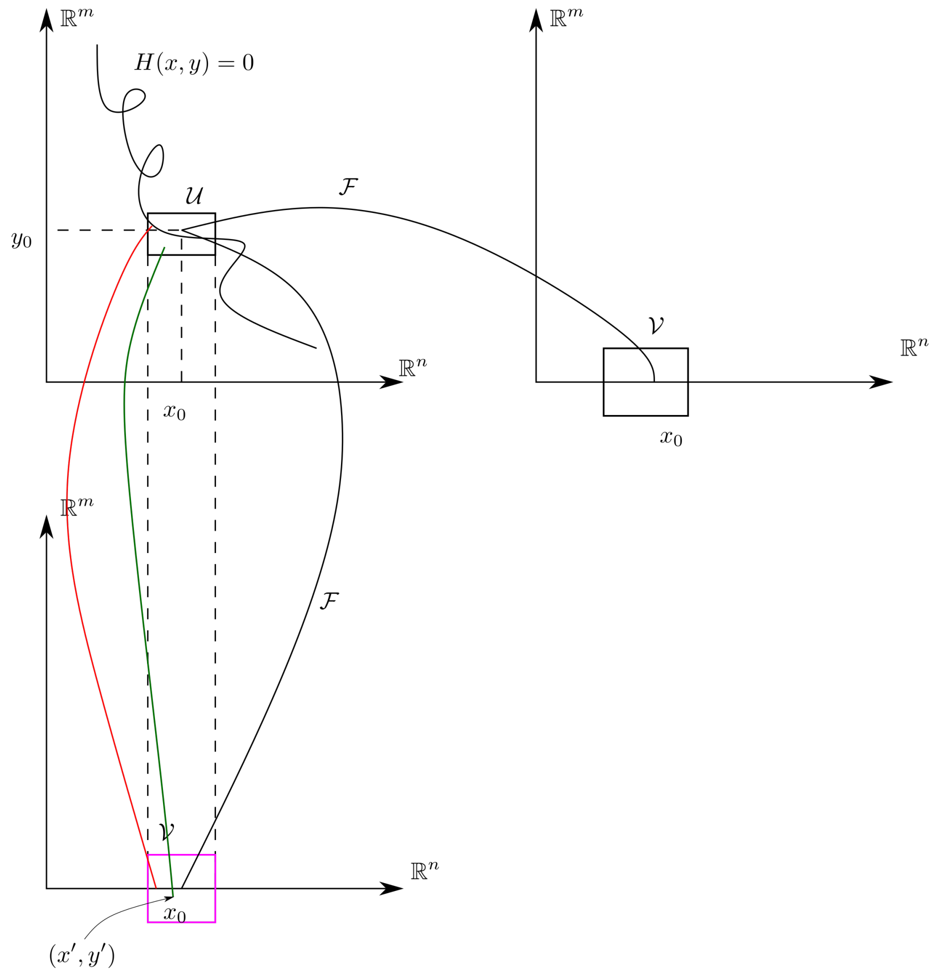
Szukamy minimum lub maksimum f na M

Rozważmy linię o stałej wartości $x + y$

Definicja 11 *Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ i $M \subset \mathbb{R}^n$ - zbiór.*
Mówimy, że f ma minimum/maksimum związane na zbiorze M, w punkcie $x_0 \in M$, jeżeli

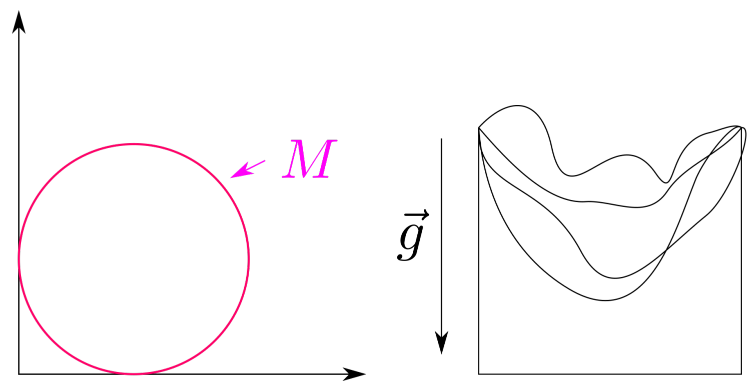
$$\underset{r}{\exists} \underset{\substack{h \\ \|h\|<r \\ (x_0+h)\in M}}{\forall} \quad f(x_0 + h) \leqslant f(x_0).$$

Ekstrema związane podejście I

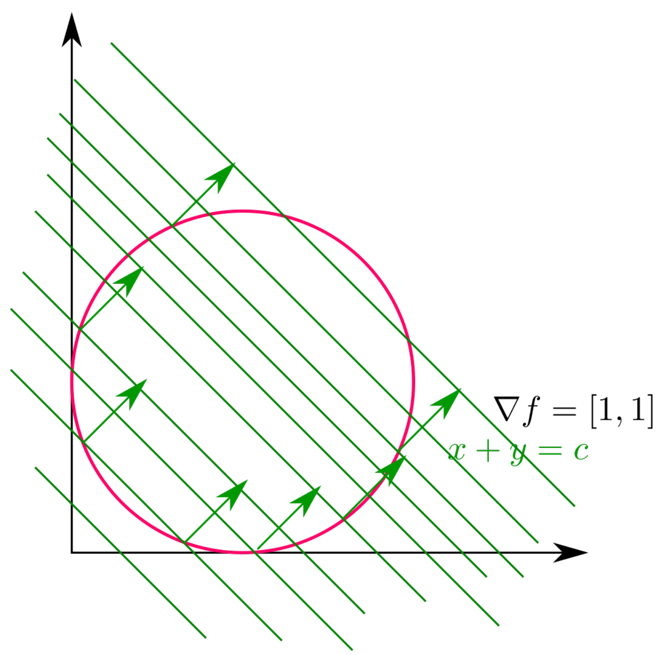


$\mathbb{R}^m$
$H(x,y)=0$
$\mathcal{U}$
$\mathcal{F}$
y_0
$\mathbb{R}^n$
x_0
$\mathbb{R}^m$
$\mathcal{V}$
$\mathbb{R}^n$
x_0
$\mathbb{R}^m$
$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$
$\mathbb{R}^n$
x_0
(x',y')

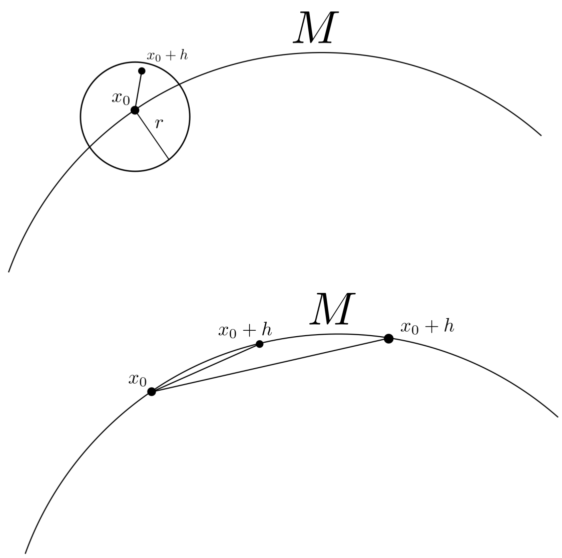
Rysunek 19



Rysunek 20: $G(x, y)$ i sznurek o stałej długości w polu grawitacyjnym



Rysunek 21: Biedronka łazi po obręczy rowerowej z włączonym wentylatorem, gdzie wyląduje???



Rysunek 22

Niech $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$
$G(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$
$M = \{(x,y), G(x,y) = 0\}$ Szukamy minimum/maksimum f. Można wyliczyć $y(x)$ z więzów, wstawić do f i zbadać ekstrema funkcji jednej zmiennej $g(x) = f(x, y(x))$. Kiedy nie umiemy wyliczyć $y(x)$ z więzów, możemy założyć, że $y(x)$ jednak istnieje i $G(x, y(x)) = 0$. Wtedy:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}.$$

$$\text{czyli: } g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{-\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}} = 0 \implies \underline{\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}}.$$

A co by było, gdyby $G(x,y) = 0$ zadawał funkcję $x(y)$?

$$G(x(y), y) = 0.$$

Czyli badalibyśmy wtedy funkcję

$$P(y) = f(x(y), y) \quad P'(y) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

ale

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} \implies \frac{\partial f}{\partial x}\frac{-\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}}+\frac{\partial f}{\partial y}=0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x} \tag{19}$$

Co oznacza warunek 19?
Wiemy, że

$$f'=\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right] G'=\left[\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y}\right], \text{ czyli.}$$

$$V=[A,B] \quad W=[C,D] \text{ i } AD=BC.$$

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\lambda\in\mathbb{R}.$$

Stąd wiadomo, że

$$A=B\lambda, \quad C=D\lambda.$$

$$V=[B\lambda,B], \quad B=[\lambda,1], \quad W=[D\lambda,D], \quad D=[\lambda,1].$$

Czyli warunek na to, aby $G'(x)=0$, albo $P'(y)=0$ oznacza, że

$$\underset{\substack{\lambda\in\mathbb{R}\\ \lambda\neq 0}}{\exists} f'=\lambda G', \quad G(x,y)=C.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\lambda\frac{\partial G}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\frac{\partial G}{\partial y}=0 \tag{20}$$

Wielkość λ często nazywa się *mnożnikiem Lagrange*

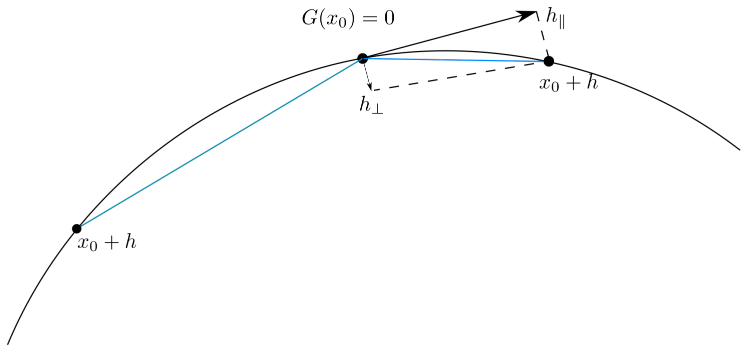
Obserwacja 4 *Do warunku (20) można dojść na sktóry przez funkcję $H(x,y)=f(x,y)-\lambda G(x,y)$ i badanie $H(x,y)$ tak, jakby była to funkcja $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1$ bez żadnych więzów.*

$$\frac{\partial H}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial H}{\partial y}=0\,(\ +\textit{ warunek } G(x,y)=0).$$

Pytanie 7 *Co ze zbadaniem $G''(x)$ lub $P''(y)$?*
Odpowiedź: lepiej inaczej. . . (XD), to znaczy, potrzebujemy nowego języka.

Przy liczeniu ekstremów funkcji jednej zmiennej badaliśmy

$$f(x_0+h)-f(x_0)\tilde{=}f''(x_0)(h,h).$$



Rysunek 23

10 Wykład (29.03.2019)

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, \quad G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad M = \{x : G(x) = 0\}.$$

Badamy różnicę $f(x_0 + h) - f(x_0)$ (jest fajna bo możemy ją rozwinąć ze wzoru Taylora)
Próbujemy ożenić te języki. Zbadajmy $G'(x)$.

- $G'(x)$ - jest macierzą $[G']_{m,n}$

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} G^1(x_1, \ldots, x_n) \\ G^2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ G^m(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}.$$

$$[G'(x)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial G^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial G^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial G^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial G^m}{\partial x^n} \end{bmatrix}.$$

$$[G'(x)] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Pytanie 8 *Jaki jest "wymiar" zbioru M?*

Albo, jeżeli $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, to wiąż $G(x) = 0$ zadaje funkcję

$$\varphi(x) : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m.$$

Taką, że $G(x^1, \ldots, x^{n-m}, \varphi^1(x^1, \ldots, x^{n-m}), \ldots, \varphi^m(x^1, \ldots, x^{n-m}))$, (jeżeli $\det G_y(x) \neq 0$)

Jeżeli $\det G'_y(x) \neq 0$, to znaczy, że w macierzy

$$G' = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x^{n-m}} & \frac{\partial G_1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial y^m} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial G_m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial G_m}{\partial x^{n-m}} & \frac{\partial G_m}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial G_m}{\partial y^m} \end{bmatrix}.$$

Gdzie $x \overset{\text{ozn}}{=} (x^1, \dots, x^{n-m}, y^1, \dots, y^m)$. Żeby podkreślić to, że niektóre współrzędne $(y^1, \dots, y^m)$ można uzyskać z innych $(x^1, \dots, x^{n-m})$ poprzez funkcję $\varphi : x = \varphi(y)$

Gdy założymy, że $\det G'_y \neq 0$, to znaczy, że

m-liniowo niezależnych kolumn, bo

$$\dim imG'(x) = m = \dim \mathbb{R}^m \text{ i } G'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Oznacza to, że

$$\dim \ker G'(x) = n - m.$$

(tw. o rzędzie (paweł odpalił kiedyś))

Oznaczmy $X_1 = \ker G'(x)$ i $X_2 = imG'(x)$ $(\dim X_1 = n - m, \dim X_2 = m)$ Oznacza to, że każdy wektor $h \in \mathbb{R}^n$ da się przedstawić jako $h = h_1 + h_2, h_1 \in X_1, h_2 \in X_2$ czyli $\mathbb{R}^n = X_1 \bigoplus X_2$

Oznacza to, że możemy tak wybrać bazę, że

$$X_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n-m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, X_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} \right\}, \quad x^1, \dots, x^{n-m}, y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}.$$

Co więcej,

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi^1(x^1, \dots, x^{n-m}) \\ \vdots \\ \varphi^m(x^1, \dots, x^{n-m}) \end{bmatrix}, \quad x^i \in \mathcal{O} : \det(G'_y) \neq 0.$$

A co możemy powiedzieć o wierszach $G'(x)$? - jest ich m i są liniowo niezależne

Jeżeli $h = h_1 + h_2, \quad h_1 \in X_1, h_2 \in X_2$, to możemy powiedzieć, że

$$h_2 = \varphi(h_1).$$

Zatem dalej piszemy

$$h_2 = \varphi(0 + h_1) = \varphi(0) + \varphi'(0)h_1 + r(0, h_1).$$

gdzie $(r\frac{0,h_1}{\|h_1\|} \underset{\|h_1\|\to 0}{\to} 0)$ (bo z tw. o funkcji uwikłanej wiemy, że φ - różniczkowalna, co więcej $\varphi' = -(G'_y)^{-1}G'_x$ a $\varphi'(0) = -(G'_y(0))^{-1}G'_x(0)$ czyli $\varphi'(0)h_1 = -(G'_y(0))^{-1}G'_x(0)h_1 = 0$

Zatem

$$h_2 = \varphi(h_1) = r(0, h_1).$$

gdzie

$$\frac{r(0,h_1)}{\|h_1\|} \underset{h_1\to 0}{\to} 0.$$

czyli h_2 maleje szybciej niż $\|h_1\|$

Chcemy zbadać różnicę

$$f(x_0 + h) - f(x_0).$$

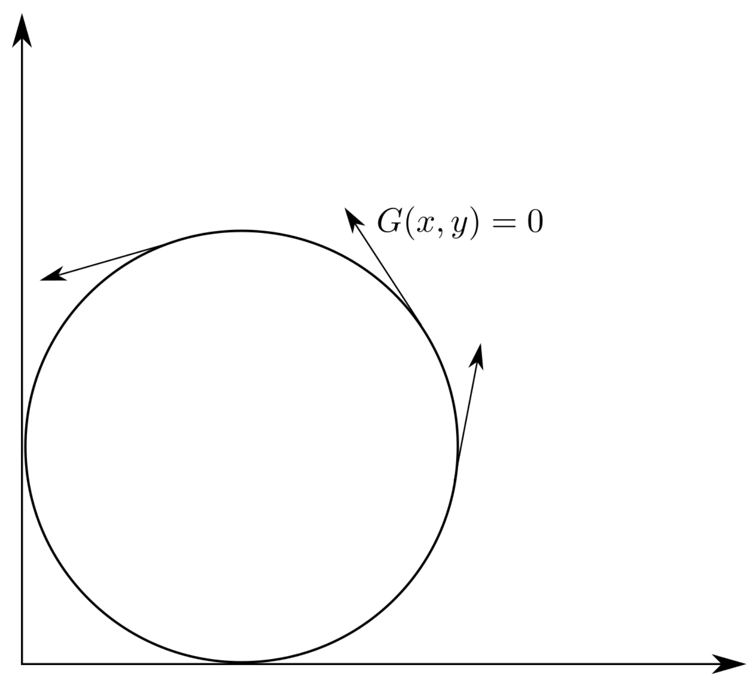
Skoro $h \in \mathbb{R}^n$, to możemy przedstawić h jako

$$h = h_\parallel + h_\perp, \quad h_\parallel \in X_1, h_\perp \in X_2.$$

czyli

$$G'(x_0)h_\parallel = 0?.$$

Przykład 22 *niech* $G(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 1$, $G' = (2(x-1), 2(y-1))$



Rysunek 24: biedronka i szprycha

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f(x_0+h_\perp+h_\parallel)-f(x_0).$$

W małym otoczeniu h będzie bardziej decydował $h_\parallel$, bo zawsze mogę zmniejszyć h i w efekcie $h_\perp$ się zmniejszy

Wiemy, że

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\frac{1}{2!}f''(x_0)(h,h)+r_1(x_0,h).$$

bo f - różniczkowalna

$$G(x_0+h)-G(x_0)=G'(x_0)h+\frac{1}{2!}G''(x_0)(h,h)+r_2(x_0,h).$$

bo G - różniczkowalna

niech

$$\Lambda=[\lambda_1,\ldots,\lambda_m]\,,\lambda_i\in\mathbb{R}.$$

Wtedy

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)-\Lambda(G(x_0+h)-G(x_0))=(f'(x_0)-\Lambda G'(x_0))h.$$

Dalej dostajemy

$$(f'(x_0)-\Lambda G'(x_0))h+\frac{1}{2!}(f''(x_0)-\Lambda G''(x_0))(h,h)+r_1(x_0,h)+r_2(x_0,h).$$

Ale dla minimum lub maksimum chcemy, aby

$$f'(x_0)=\Lambda G'(x_0).$$

więc dla minimum / maksimum $f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{1}{2}(f''(x_0)-\Lambda G''(x_0))(h,h)+r_1(x_0,h)+r_2(x_0,h)$

Zatem jako, że $\frac{r_1(0,h)}{\|h\|^2}\underset{\|h\|^2}{\to}0$, $\frac{r_2(0,h)}{\|h\|^2}\underset{\|h\|^2}{\to}0$, to o znaku $f(x_0+h)-f(x_0)$ decyduje znak

$$(f''(x_0)-\Lambda G''(x_0))(h,h).$$

Wiemy, że $h\in\mathbb{R}^n i\mathbb{R}^n=X_1\bigoplus X_2$, czyli $h=h_\perp+h_\parallel$

$$f''(x_0)-\Lambda G''(x_0))(h,h)=\underbrace{f''(x_0)\Lambda G''(x_0)}_{\square}(h_\parallel+h_\perp,h_\perp+h_\parallel).$$

$$=(\square)(h_\perp,h_\perp)+(\square)(h_\perp,h_\parallel)+(\square)(h_\parallel,h_\perp)+(\square)(h_\parallel,h_\parallel).$$

Pytanie 9 *Króre z powyższych wyrażeń jest najmniejsze (które z powyższych wyrażeń są o rząd mniejsze od pozostałych dla* $\|h\|\to 0$

Wiemy, że

$$\|h_\perp\|\ \|h_\parallel\|.$$

Oznacza to, że dla małych $\|h_\parallel\|$ o znaku decyduje

$$(f''(x_0)-\Lambda G''(x_0))(h_\parallel,h_\parallel).$$

Twierdzenie 11 *Niech* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, f \in \mathcal{C}^2(U), G : U_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, G \in \mathcal{C}^2(U_2), \underset{x_0}{\exists} G(x_0) = 0, G'(x_0)$ *- ma rząd maksymalny* (m) *oraz*

$$\underset{\Lambda}{\exists}\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m], \lambda_i \in \mathbb{R}, f'(x_0) - \Lambda G'(x_0) = 0.$$

to jeżeli

$$(f''(x_0) - \Lambda G''(x_0))(h_\parallel, h_\parallel) > 0, h_\parallel \overset{def}{=} \left\{G'(x_0)h_\parallel = 0\right\}.$$

to f *posiada w* x_0 *minimum lokalne* (< 0, *to maksimum lokalne) na zbiorze* $M = \{x \in \mathbb{R}^n, G(x) = 0\}$

11 Wykład (02.04.2019)

11.1 Równania różniczkowe

Interesuje nas następująca sytuacja: $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$
$x(t_0) = x_0$
$x(1) : [a, b] \to \mathbb{R}$
$f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Przykład 23

$$\frac{dx}{dt} = -kx(t)$$
$$x(t) = ce^{-kt}.$$

Pytanie: czy to, że równanie jest pierwszego rzędu bardzo nam przeszkadza?

Przykład 24 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
$\dot{x} = p$
$\dot{p} = \ddot{x} = -\omega^2 x$
$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}}_{\frac{d}{dt}x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}}_{f(x,t)}$

Definicja 12 *Niech* $I \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$
$f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{O}$ *taka, że* $t \in I, x \in \mathbb{R}^n, f(t, x) \to f(t, x)$
Mówimy, że f *spełnia warunek Lipschitza, jeżeli*

$$\underset{L>0}{\exists}.\underset{t\in I}{\forall}.\underset{x,x'\in\mathcal{O}}{\forall}.\|f(t, x) - f(t, x')\| \leqslant L\|x - x'\|.$$

Uwaga 1 *Znane* t, x *nie występują w warunku Lipschitza na równych prawach*

Pytanie 10 *Czy jeżeli*

$$f : \mathcal{O} \to \mathcal{O} \text{ takie, że } \underset{L>0}{\exists}.$$

że

$$\underset{x,x'}{\forall}\|f(x) - f(x')\| \leqslant L\|x - x'\|.$$

to czy f *jest ciągła?*

Twierdzenie 12 *Niech* $[a, b] \subset \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ *- domknięty i* $f : [a, b]\times\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ *takie, że* f *- ciągła na* $[a, b] \times \mathcal{O}$ *oraz* f *spełnia warunek Lipschitza na* $\mathcal{O}$*, to znaczy:*

$$\underset{L>0}{\exists}.\underset{t\in[a,b]}{\forall}.\underset{x,x'\in\mathcal{O}}{\forall}\|f(t, x) - f(t, x')\| \leqslant L\|x - x'\|.$$

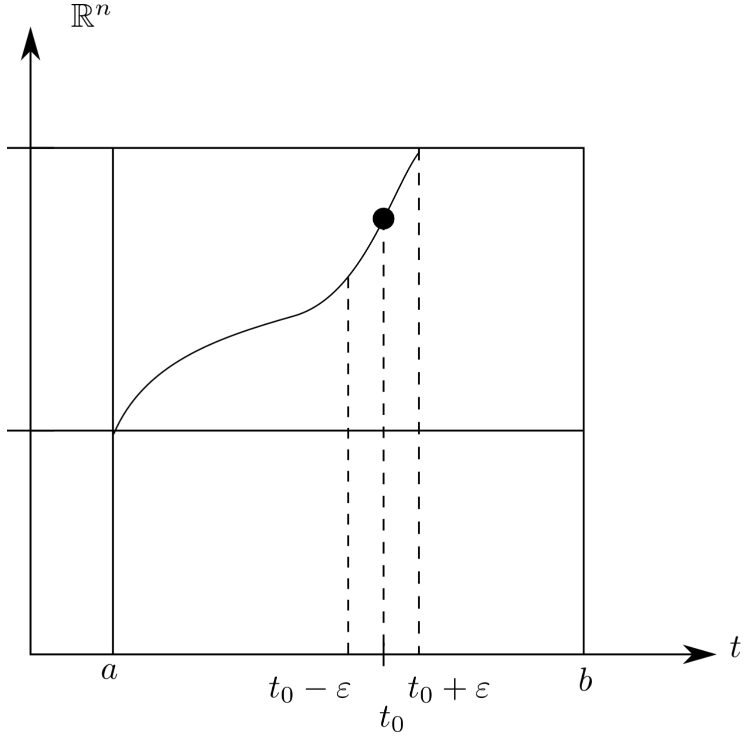
Wówczas

$$\underset{t_0\in[a,b]}{\forall}\cdot\underset{x_0\in\mathcal{O}}{\forall}\cdot\underset{\varepsilon>0}{\exists},\ \textit{że dla } t\in]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[$$

równanie ma jednoznaczne rozwiązania, które są ciągłe ze względu na x_0

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\tag{21}$$

Uwaga 2 *Problem 21 nazywamy problemem Cauchy.*
Ciągłość f *na* $[a,b]\times\mathcal{O}$ *jest mocniejszym warunkiem niż Lipschytzowalność na* $\mathcal{O}$



Rysunek 25

Dowód 15 *Skoro* f *- ciągła na* $[a,b]\times\mathcal{O}$*, to znaczy, że* f *jest ograniczona, czyli*

$$\underset{M>0}{\exists}\cdot\underset{y_1>0}{\exists}\cdot\underset{y_2>0}{\exists},\quad \|f(t,x)\|\leqslant M.$$

$t\in K(t_0,y_1), x\in K(x_0,y_2)$.
Zauważmy, że problem 21 możemy zapisać jako

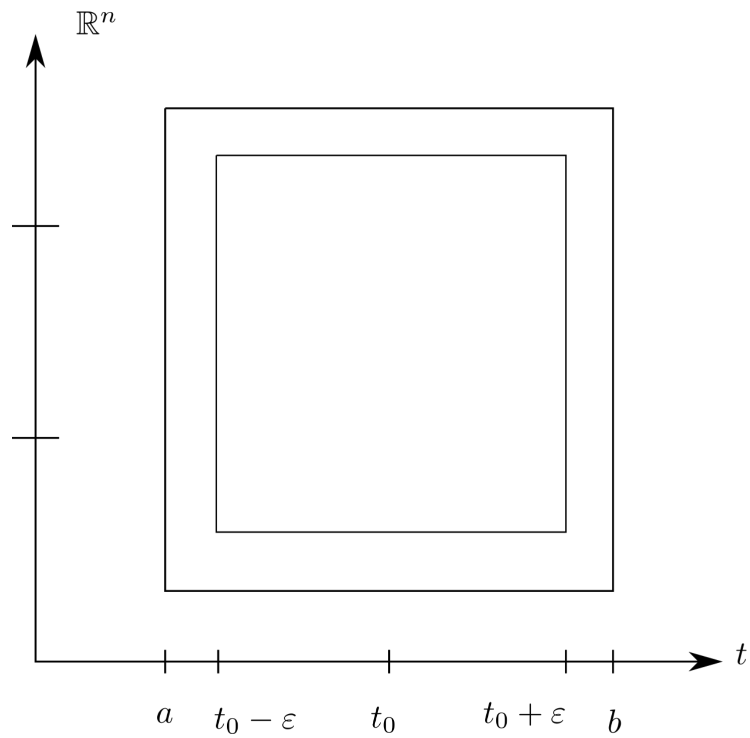
$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))ds\tag{22}$$

Czyli, jeżeli znajdziemy $x(t)$ takie, co spełnia 22, to raslkdj problem 21.
Rozważmy odwzorowanie

$$\underset{g\in a}{P(g)}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds.$$

$A = \{C : [t - r_1, t_0 + r_1] \to \mathbb{R}^n\}$ *funkcja ciągła na kuli o wartościach w* $\mathbb{R}^n$.

Co by było, gdyby P miało punkt stały? Czyli $\underset{x(t)\in A}{\exists}$ *takie, że* $P(x(t)) = x(t)$



Rysunek 26

Oznaczałoby to, że

$$x(t) = -x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Co więcej, gdyby P było zwężające, to z zasady Banacha wiemy, że punkt stały jest tylko jeden. Zatem, jeżeli znajdziemy podzbiór A taki, że P - zwężające, to udowodnimy jednoznaczność. Problem 22

Niech $E = \left\{ g \in \mathcal{C}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathbb{R}^n, \|g(t) - \overset{g_0(t)}{x_0}\| \underset{\textit{ważne!}}{\leqslant} r_2 \right\}$, *czyli*

$$g \in E \iff \underset{t_0-\varepsilon\leqslant t\leqslant t_0+\varepsilon}{sup} \|g(t) - x_0\| \leqslant r_2.$$

i

$$g : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n.$$

i g - ciągła.
(domkniętość ze względu na zasdę Banacha $(x_0 \overset{ozn}{=} g_0(t))$*)*
Szukamy takiego ε*, żeby:*

$$P(g) \in E \quad g \in E \tag{23}$$

$$P \text{ - zwężająca na } E. \tag{24}$$

bo jeżeli 24 jest spełniona, to wiemy, że istnieje punkt stały.
Jeżeli 23 jest spełniona, to wiemy, że punkt stały należy do E
Warunek 23: $P(g) \in E$*, czyli*

$$\sup_{t_0-\varepsilon \leqslant t_0 \leqslant t_0+\varepsilon} \|P(g(t)) - x_0\| \leqslant r_2.$$

czyli

$$\sup_{t_0-\varepsilon \leqslant t_0 \leqslant t_0+\varepsilon} \|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s))ds - x_0\| \leqslant \sup_{t_0-\varepsilon \leqslant t_0 \leqslant t_0+\varepsilon} \int_{t_0}^t \|f(s, g(s))\|ds \leqslant .$$

$$\sup_{t_0-\varepsilon \leqslant t_0 \leqslant t_0+\varepsilon} |t - t_0| M = \varepsilon M.$$

Jeżeli chcemy aby $\varepsilon M \leqslant r_2$
to znaczy, że $\varepsilon \leqslant \frac{r_2}{M}$
i jednocześnie $\varepsilon \leqslant r_1$
czyli aby warunek 23 był spełniony

$$\varepsilon < min\left\{\frac{r_2}{M}, r_1\right\}.$$

Warunek 24. Chcemy aby P było zwężające, czyli:

$$\underset{g_1, g_2 \in E}{\forall} P(g_1) - P(g_2) \leqslant q\|q_1 - q_2\|.$$

Zatem:

$$\|P(g_1) - P(g_2)\| = \sup_{t_0-\varepsilon \leqslant t_0 \leqslant t_0+\varepsilon} \|x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g_1(s))ds - (x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g_2(s))ds\| = .$$

$$\sup_{t_0-\varepsilon \leqslant t_0 \leqslant t_0+\varepsilon} \| \int_{t_0}^t f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))ds\| \leqslant \sup_{t_0-\varepsilon \leqslant t_0 \leqslant t_0+\varepsilon} \int_{t_0}^t \|f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))\|ds \leqslant .$$

$$\sup_{t_0-\varepsilon \leqslant t_0 \leqslant t_0+\varepsilon} \int_{t_0}^t L\|g_1 - g_2\| = \varepsilon L \underbrace{\|g_1 - g_2\|}_{\substack{\in E \\ \|g_1 - g_2\| < 2r_2}}.$$

Zatem, jeżeli P ma być zwężające na E, to $\varepsilon L < 1$*, czyli* $\varepsilon < \frac{1}{L}$ *i* $g \in E$
Zatem, aby istniało rozwiązanie jednoznaczne problemu 21

$$\varepsilon < min\left\{\frac{r_2}{M}, r_1, \frac{1}{L}\right\} \quad \square.$$

Do pełnego dowodu brakuje nam ciągłości rozwiązania ze względu na zmiany x_0

Lemat:
niech A, X - przestrzenie metryczne, $P_a(x), a \in A, x \in X$ - odwzorowanie zwężające i ciągłe ze względu na $a \in A$
Niech $\tilde{x}(a)$ taki, że $P(\tilde{x}(a)) = \tilde{x}(a)$. Zwężające, to znaczy, że

$$\underset{a\in A}{\forall}.\underset{x,x'}{\forall}.\|P_a(x) - P_a(x')\| \leqslant q\|x - x'\|.$$

Wówczas funkcja $\tilde{x}(a)$ jest ciągła na A.

Uwaga 3 *Odwzorowanie $P(g)$ wygląda tak:*

$$P(g(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds.$$

Więc rolę parametru a pełnią x_0, t_0 i $P(g(t))$ jest ciągłe ze względu na x_0 i t_0.

12 Wykład (05.04.2019)

Ostatnio zastanawialiśmy się nad taką sytuacją, że mieliśmy operator $P_a(x)$ i on miał być zwężający.

$$P_a(x) : X \to X \text{ - zwężający }.$$

$$c \in X : \{c, P_a(c), P_a(P_a(c)) \to \tilde{x}(a)\}, \text{ gdzie } P(\tilde{x}(a)) = \tilde{x}(a).$$

Dowód 16 *Chcemy pokazać, że*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} . \underset{\delta>0}{\exists} . \underset{a'}{\forall} d(a, a') < \delta \implies d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) < \varepsilon.$$

Wiemy, że P_a - ciągła ze względu na a:

$$\underset{\varepsilon_1>0}{\forall} . \underset{\delta_1>0}{\exists} . \underset{a'}{\forall} d(a, a') < \delta_1 \implies d(P_a, P_{a'}) < \varepsilon \tag{25}$$

Wiemy, że $\underset{c' \in X}{\forall}$ ciąg $\{c', P_{a'}(c'), P_{a'}(P_{a'}(c')) \ldots\} \to \tilde{x}(a')$ Ale, jeżeli przyjmiemy za $c = \tilde{x}(a')$, to ciąg:

$$\{\tilde{x}(a'), P_a(\tilde{x}(a')), P_a(P_a(\tilde{x}(a')))\} \to \tilde{x}(a).$$

Ale z zasady banacha wiemy, że jeżeli P_a - zwężający, to

$$d(\tilde{x}(a), x_0) \leqslant \frac{1}{1-q} d(x_1, x_0).$$

Wybierzmy $x_0 = \tilde{x}(a')$. Wówczas

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) &\leqslant \frac{1}{1-q} d(P_a(\tilde{x}(a')), \tilde{x}(a')) = \\ &= \frac{1}{1-q} d(P_a(\tilde{x}(a')), P_{a'}(\tilde{x}(a'))). \end{aligned}$$

Pytanie 11 *Jak ten obiekt ma się do $d(P_a, P_{a'})$?*

$$d(P_a, P_{a'}) = \sup_{x \in X} \quad d(P_a(x), P_{a'}(x)).$$

Więc, jeżeli $d(P_{a'}, P_a) < \varepsilon_1$, to znaczy, że $d(P_a(\tilde{x}(a')), P_{a'}(\tilde{x}(a'))) < \varepsilon_1$

$$\text{Czyli } d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) \leqslant \frac{1}{1-q} \varepsilon_1.$$

Czyli jeżeli otrzymamy ε_1, to biorąc ε_1 taki, że $\varepsilon_1 \frac{1}{1-q} < \varepsilon$ i znajdujemy δ_1 z zależności 25 i wiemy, że jeżeli

$$d(a', a) < \delta_1 \implies d(\tilde{x}(a'), \tilde{x}(a)) < \varepsilon \quad \square.$$

Przykład 25 *(odwzorowanie zwężające)*

$$\int \frac{dx(t)}{dt} = f(t,x), x(t_0) = x_0.$$

Wiemy, że $x(t)$ jest punktem stałym odwzorowania

$$P(g) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds \implies g_0, P(g_0), P(P(g_0)) \ldots \to x(t).$$

$$\frac{dx}{dt} = t + x, x(0) = 0.$$

$$f(t,x) = t + x.t_0 = 0, x_0 = 0.$$

Czy f jest lipszycowalna?

$$\underset{t\in[a,b]}{\forall} \|t + x - (t + x')\| = \|x - x'\| = 1\|x - x'\| \implies L = 1.$$

Czyli jest. Policzymy kilka wyrazów ciągu

$$\underset{x^0(t)}{g_0}, \underset{x^1(t)}{P(g_0)}, \underset{x^2(t)}{P(P(g_0))}, \ldots.$$

$x^0(t) = x_0(t) = 0$

$x^1(t) = P(x^0(t)) = P(0) = 0 + \int_0^t f(s, x^0(s))ds = \int_0^t sds = \frac{t^2}{2}$

$x^2(t) = P(x^1(t)) = P(\frac{t^2}{2}) = 0 + \int_0^t f(s, x^1(s))ds = \int_0^t (s + \frac{s^2}{2})ds = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2\times 3}$

$x^3(t) = P(x^2(t)) = 0 + \int_0^t \left(s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{2\times 3}\right) ds = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2\times 3} + \frac{t^4}{2\times 3\times 4}$

$\vdots$

$\vdots \to \infty$

$e^t - t - 1.$

Przykład 26 $\frac{dx}{dt} = 2tx, \quad x(0) = 1,$ *czyli* $f(t,x) = 2tx, \quad t_0 = 0$

dla $\underset{t\in[a,b]}{\forall}$

$$\|2tx - 2tx'\| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |t|2\|x - x'\|.$$

Czyli f *- lipszycowalna z* $L = \sup_{t\in[a,b]} |t| \times 2$

$$\begin{aligned}
&x^0(t) = 1 \\
&x^1(t) = P(x^0(t)) = 1 + \int_0^t f(s,1)ds = 1 + \int_0^t 2sds = 1 + t^2 \\
&x^2(t) = P(x^1(t)) = 1 + \int_0^t 2s(1+s^2)ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} \\
&x^3(t) = P(x^2(t)) = 1 + \int_0^t 2s(1+s^2+\frac{t^4}{2}) = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3} \\
&\vdots \to \infty \\
&e^{t^2}.
\end{aligned}$$

Przykład 27

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) \end{bmatrix}, x_1(0) = 0, x_2(0) = 1.$$

$$f(t,x) = f(t, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
&x^0(t) = \begin{bmatrix} x_1^0(t) \\ x_2^0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&x^1(t) = P(x^0(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ -0 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \\
&x^2(t) = P\left(\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{bmatrix}\right) = P\left(\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ -s \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} \\
&x^3 = P\left(\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}\right) = P\left(\begin{bmatrix} t \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 - \frac{s^2}{2} \\ -s \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} t - \frac{t^3}{2\times 3} \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} \\
&\vdots \to \infty \\
&\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Twierdzenie 13 *Jeżeli odwzorowania*

$$t \in [a,b] \to A(t)$$
$$t \in [a,b] \to b(t).$$

Gdzie $A(t) \in L(x, x), b(t) : \mathbb{R}^1 \to X$ są ciągłe, to równanie

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Ma dla dowolnych $t_0 \in [a, b], x_0 \in X$ jednoznacznie określone rozwiązanie na $t \in]a, b[$
Czym to się różni od twierdzenia o jednoznaczności warunku Cauchy? Nie ma tutaj mowy o żadnej lipszycowalności. Zawężono za to klasę funkcji występującej w równaniu. Zamiast $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times \mathcal{O}$, mamy $]a, b[\times X$

Dowód 17 *Chcemy sprawdzić, czy $f(t, x) = A(t)x(t) + b(t)$ spełnia warunek Lipschitza. Wiemy, że $A(t)$ i $b(t)$ są ciągłe na przedziale domkniętym $[a, b]$. Zatem, istnieje $\sup\limits_{t\in[a,b]} \|b(t)\| = C$, a $A : X \to X$ i A jest liniowe zatem istnieje norma tego odwzorowania*

$$\sup_{t\in[a,b]} \|A(t)\| = L.$$

Zatem

$$\forall_{t\in[a,b]} \|A(t)x+b(t)-(A(t)x'+b(t)\| = \|A(t)(x-x')\| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} \|A(t)\|\|x-x'\| = L\|x-x'\|.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności wiemy, że istnieją przedziały $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ oraz $\mathcal{O} = K(x_0, r_2)$ takie, że dla

$$\varepsilon = min \left\{ |a - t_0|, r_1, \frac{r_2}{M}, |b - t_0|, \frac{1}{L} \right\} \tag{26}$$

Gdzie r_1, r_2 były takie, że na zbiorze $K(t_0, r_1) \times K(x_0, r_2)$ funkcja $f(t, x)$ była ograniczona. Zależy nam na tym, aby w warunku 26 wyeliminować r_2
Ale $\|A(t)x + b(t)\| \leqslant \|A(t)x\| + \|b(t)\|$ dla $x \in K(x_0, r_2)$

$$\begin{aligned}
&= \|A(t)x\| + C \leqslant L\|x\| + C = \\
&= L\|x - x_0 + x_0\| + C \leqslant \\
&\leqslant L\|x - x_0\| + L\|x_0\| + C \leqslant \\
&\leqslant Lr_2 + L\|x_0\| + C.
\end{aligned}$$

13 Wykład (05.04.2019)

$\varepsilon = min\left\{|t_0 - a|, |t_0 - b|, \frac{1}{L}, \frac{r_2}{M}\right\}$
$]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$//Chcielibyśmy, żeby ε nie zależał od punktu w którym zaczniemy.
Rys. 28

$$\begin{aligned}
\|A(t)x(t) + b(t)\| &\leqslant L(\|x_0\| + r_2) + c \\
\frac{r_2}{M} \geqslant \frac{r_2}{L(\|x_0\| + r_2) + c} &= \\
\text{Połóżmy } r_2 &= \|x_0\| + c \\
= \frac{\|x_0\| + c}{L(\|x_0\| + \|x_0\| + c) + c} &= \\
\frac{\|x_0\| + c}{L(2\|x_0\| + c) + c} \geqslant \frac{\|x_0\| + c}{L(2\|x_0\| + c + c) + c + \|x_0\|} &= \\
\frac{1}{2L+1}&, \text{ zatem} \\
\varepsilon = min\left\{|t_0 - a|, |t_0 - b|, \frac{1}{L}, \frac{1}{2L+1}\right\}&.
\end{aligned}$$

(r_1 - pomijamy, bo $A(t)$ - ciągła na $[a, b]$.) Oznacza to, że wartość ε nie zależy od x, zatem rozwiązanie początkowo określone na $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times K(x_0, r_2)$ możemy przedłużyć do określonego na całym $[a, b] \times X$!

Definicja 13 *Rezolwenta*

Rozwiązaniem problemu

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + b(t)$$
$$x(t_0) = x_0.$$

jest funkcja $x(t, t_0, x_0)$

Pytanie 12 *Czy istnieje*

$$R(t, t_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Takie, że

$$x(t) = R(t, t_0)x_0?.$$

(Jeżeli $x_0, x(t) \in \mathbb{R}^n$)

Pytanie 13 *Jakie własności $R(t, t_0)$ powinno posiadać?*

- $R(t, t_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, R$ - liniowy
  Bo jeżeli $x_1(t), x_1(t_0) = x_0^1$ i $x_2(t), x_2(t_0) = x_0^2$ są rozwiązaniem, to chcielibyśmy, by $x_1(t) + x_2(t)$ też było rozwiązaniem z wartością początkową $x_0^1 + x_0^2$. Rys 30

- funkcja $R(t, t_0)$
- $\underset{t,t_0,s\in\mathcal{O}\subset\mathbb{R}}{\forall} R(t, t_0) = R(t, s)R(s, t_0)$
- $\underset{t_0\in\mathcal{O}}{\forall} R(t_0, t_0) = \mathbb{I}$, bo $x(t) = R(t, t_0)x_0$

  Ad 3. Wstawiając t_0 do trzeciej kropki otrzymujemy $R(t_0, t_0) = R(t_0, s)R(s, t_0) \rightarrow \underset{t,s\in\mathcal{O}}{\forall} R(s, t) = R(t, s)^{-1}$
-
  $$\begin{aligned} &\frac{dR(t, to)}{dt} = A(t)R(t, t_0),\\ &R(t_0, t_0) = \mathbb{I}. \end{aligned}$$

  bo wtedy $x(t) = R(t, t_0)x_0$ jest rozwiązaniem problemu

  $$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)\\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned}$$

  bo $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(R(t, t_0)x_0) = A(t)R(t, t_0)x_0 = A(t)x(t)$ i $x(t_0) = R(t_0, t_0)x_0 = \mathbb{I}x_0 = x_0$

Zatem na mocy twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań wiemy, że założenie $x(t) = R(t, t_0)x_0$ da nam jednoznaczne rozwiązanie.

Pytanie 14 *A co z $b(t)$? (ten wektorek co by to był, ale go nie ma)*

Chcemy rozwiązać problem

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + b(t)\\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned}$$

Załóżmy, że rozwiązanie tego problemu możemy przedstawić jako

$$x(t) = R(t, t_0)C(t), C(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Ale

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\left(R(t, t_0)c(t)\right) = \frac{dR(t, t_0)}{dt}c(t) + R(t, t_0)\frac{dc}{dt} = A(t)R(t, t_0)c(t_) + R(t, t_0)\frac{dc}{dt}.$$

Zatem mogę napisać, że

$$A(t)R(t, to)c(t) + R(t, t_0)\frac{dc}{dt} = A(t)R(t, t_0)c(t) + b(t).$$

(cudowne skrócenie)

$$R(t,t_0)\frac{dc}{dt} = b(t) \qquad /R(t,t_0)^{-1}.$$

$$\frac{dc}{dt} = R(t,t_0)^{-1}b(t).$$

$$\frac{dc}{dt} = R(t,t_0)b(t).$$

$$c(t) - \alpha = \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)b(s)ds, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ale $c(t_0) = x_0$, więc $\alpha = x_0$.

$$c(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)b(s)ds.$$

Zatem

$$x(t) = R(t,t_0)c(t) = R(t,t_0)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)b(s)ds\right) = .$$

$$R(t,t_0)x_0 + R(t,t_0)\int_{t_0}^{t} R(t_0,s)b(s)ds = .$$

$$R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{R(t,t_0)R(t_0,s)}_{R(t,s)}b(s)ds.$$

Zatem rozwiązanie problemu wygląda tak:

$$x(t) = R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)ds.$$

dygresja:
dają nam rozkład gęstości masy $\rho(x')$. Jak wygląda potencjał?

$$\varphi(x) = \int \frac{\rho(x')dv'}{\|x - x'\|}.$$

W tym przypadku rezolwenta to $\frac{1}{\|x-x'\|}$

Pytanie 15 *Czy rezolwenta istnieje?*

Funkcja $R(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}$ spełnia warunki $1-5$ dla rezolwenty

- $R(t,t_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
- $R(t,t_0)$ - jest ciągła względem t i t_0

- $R(t,\alpha)R(\alpha,t_0) = R(t,t_0)$, bo $e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds} = e^{\int_{t_0}^{\alpha} A(s)ds + \int_{\alpha}^{t} A(s)ds}$
  $R(t,t_0) = R(t,\alpha)R(\alpha,t_0)$

- $R(t_0,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t_0} A(s)ds} = \mathbb{I}$

- $\frac{dR}{dt} = A(t)R(t,t_0)$
  Dowód:

$$\frac{R(t+h,t_0) - R(t,t_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(e^{\int_{t_0}^{t+h} A(s)ds} - e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}\right) = .$$

$$= \frac{1}{h}\left[e^{\int_{t_0}^{t+h} A(s)ds} e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds} - e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds}\right] = .$$

$$\frac{1}{h}\left[e^{\int_{t}^{t+h} A(s)ds} - \mathbb{I}\right] e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds} - \frac{1}{h}\left[e^{hA(\beta)-\mathbb{I}}\right] R(t,t_0) = .$$

$$\frac{1}{h}\left[\mathbb{I} + \frac{hA(\beta)}{1} + \frac{(hA(\beta))^2}{2!} + \ldots = \mathbb{I}\right] R(t,t_0) = .$$

$$\underset{t<\beta<t+h}{A(\beta)R(t,t_0)} + h[...] \to A(t)R(t,t_0).$$

$((((\int_t^{t+h} A(s)ds = (t+h-t)A(\beta)))))$

Przykład 28

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(0) \\ p(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} e^{\int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ds} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix} = e^{t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

14 Wykład (05.04.2019)

Przykład 29

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(t=0) \\ p(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = e^{(t-0)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$w(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda) = -(1-\lambda^2) = 0 \iff \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.$$

$$f(\lambda) = e^{\lambda t}, f(\lambda) = q(\lambda)w(\lambda) + a\lambda + b.$$

$$f(-1) = -a + b, f(1) = a + b.$$

$$b = \frac{f(-1) + f(1)}{2} = \frac{e^{-t} + e^{t}}{2}, a = \frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}.$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\frac{e^{t} - e^{-t}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{e^{t} + e^{-t}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)}_{R(t,t_0)} \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix}.$$

Pytanie 16 *Czy można znaleźć rozwiązanie bez liczenia $R(t, t_0)$?*

Obserwacja 5 *Załóżmy, że macierz $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ma n różnych wartości własnych.*

$$\begin{matrix} \lambda_1, & \qquad \lambda_2, \lambda_3, \ldots \\ v_1, & \qquad v_2, v_3, \ldots. \end{matrix}$$

Obserwacja 6 *Jeśli $v \in ker(A - \lambda \mathbb{I})$, to znaczy, że*

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ A^2 v &= \lambda^2 v \\ A^n v &= \lambda^n v \\ e^A v &= e^{\lambda t} v. \end{aligned}$$

Jeżeli zatem przdstawimy warunek początkowy jako sumę:

$$\overline{x_0} = x_0' + x_0^2 + \ldots + x_0^n$$
$$e^{A(t-t_0)}\overline{x_0} = sum_{i=1}^{n} e^{A(t-t_0)} x_0^i = sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i (t-t_0)} x_0^i$$
$$.$$

Obserwacja 7 *najogólniesza postać λ_j(pierwiastki równania $w(\lambda) = 0$) to*

$$\lambda_j = a_j + ib_j.$$

Zatem dowolne rozwiązanie problemu jednorodnego przy n różnych wartościach własnych może być jedynie kombinacją funkcji typu

$$\cos(bt), \quad \sin(bt), \quad e^{at}, \quad ch(at), \quad sh(at), \quad e^{at}\sin(bt), \quad e^{at}\cos(bt).$$

I niewiele więcej.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + a\dot{x} + \omega^2 x = 0 \\ \dot{x} = p \\ \dot{p} = \ddot{x} = -a\dot{x} - \omega^2 x \\ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Załóżmy, że macierz $A \in M_n^n$ ma k różnych wartości własnych i A nie zależy od czasu

$$\begin{aligned} \lambda_1 \to n_1 \\ \lambda_2 \to n_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \to n_k - V_k = ker(A - \lambda_k \mathbb{I})^{n_k}. \end{aligned}$$

(gdzie $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$)

$$\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \bigoplus V_{\lambda_2} \bigoplus .. \bigoplus V_{\lambda_k}.$$

i teraz rozkładamy warunek początkowy:

$$x_0 = \underset{V_{\lambda_1}}{x_0^1} + \underset{V_{\lambda_2}}{x_0^2} + \ldots + x_0^k.$$

Wówczas

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 = \sum_{i=1}^{k} e^{A(t-t_0)}x_0^i = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I} + A(t-t_0) - \lambda\mathbb{I}(t-t_0)}x_0^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} e^{(A-\lambda\mathbb{I})(t-t_0)}x_0^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^j (A - \lambda_j \mathbb{I})^j}{j!} x_0^i \right)$$

ale $x_0^i \in ker(A - \lambda_i \mathbb{I}^{n_i}) = \lambda_\lambda =$

$$= \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i(t-t_0)\mathbb{I}} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^j}{j!} (A - \lambda_i \mathbb{I})^j \right) x_0^i.$$

Przykład 30 *Rozwiązać równanie:*

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + 2x_3$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3$$
$$\frac{dx_3}{dt} = 2x_3$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, w(\lambda) = det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right).$$

$$w(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

$$\lambda_1 = 1, n_1 = 2$$
$$\lambda_2 = 2, n_2 = 1.$$

$$ker(A - \lambda_2 \mathbb{I}).$$

$$\begin{bmatrix}1-2 & 1 & 2\\ 0 & 1-2 & 1\\ 0 & 0 & 2-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=0$$

$$-a+b+2c=0$$

$$-b+c=0$$

$$c=b$$

$$-a-b+2b=0$$

$$a=3b$$

$$v\in V_{\lambda_2}\iff v=\begin{bmatrix}3b\\ b\\ b\end{bmatrix}=b\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 1\end{bmatrix}, V_{\lambda_2}=\left\langle\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\right\rangle$$

$$V_{\lambda_1}=ker(A-\lambda_1\mathbb{I})^2$$

$$\begin{bmatrix}1-1 & 1 & 2\\ 0 & 1-1 & 1\\ 0 & 0 & 2-1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$c=0, v\in V_{\lambda_1}\iff v=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda_1}=\left\langle\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\right\rangle$$

$$\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=x_0^1\in V_{\lambda_1}+x_0^2\in V_{\lambda_2} \qquad \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=(-2)\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{k}e^{\lambda_i(t-to)\mathbb{I}}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(t-t_0)^j}{j!}(A-\lambda_i\mathbb{I})^j\right)x_0^i=$$

$$=e^{\lambda_1(t)\mathbb{I}}\left(\sum_{j=0}^{2-1}\frac{t^j}{j!}(A-\lambda_1)^j\right)x_0^1+e^{\lambda_2 t\mathbb{I}}(\mathbb{I})\,x_0^2=$$

$$=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}=e^t\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\frac{t^1}{1!}\begin{bmatrix}1-1 & 1 & 2\\ 0 & 1-1 & 1\\ 0 & 0 & 2-1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+e^{2t}\mathbb{I}\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=$$

$$=e^t(a+bt)+e^{2t}+C.$$

14.1 Baza rozwiązań

Obserwacja 8 *Jeżeli* $x(t) = R(t, t_0)x_0$ *i* $R(t, t_0) \in M_n^n$, *to znaczy, że*

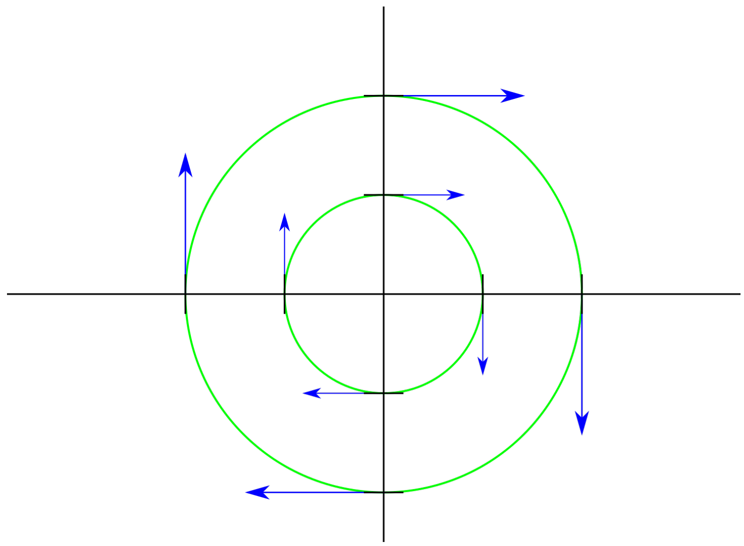
$$x(t) = [||||||||] \begin{bmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix} = x_0^1 \, [|] + x_0^2 \, [|] + \ldots + x_0^n \, [|] \, .$$

Pytanie 17 *Czy* $\det(R(t, t_0)) \neq 0$*?*

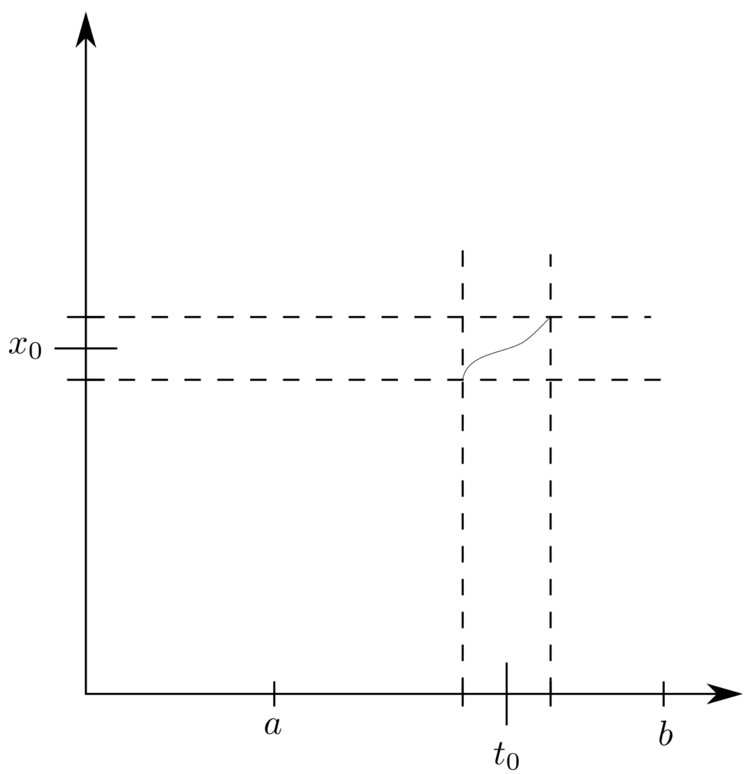
Jeżeli tak, to kolumny $R(t, t_0)$ możemy potraktować jako wektory rozpinające przestrzeń rozwiązań i $\det R(t, t_0) \neq 0 \underset{t \in [a,b]}{\forall}$.

W bazie wektorów własnych macierz e^{At} wygląda tak (zakładamy n wartości własnych):

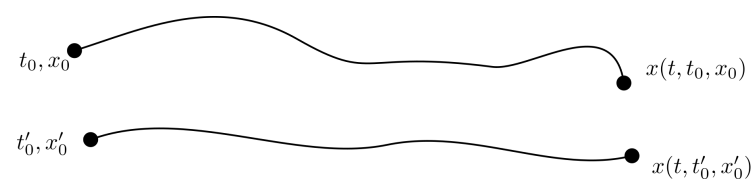
$$\det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = e^{t(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)} = e^{t * TrA} \neq 0.$$



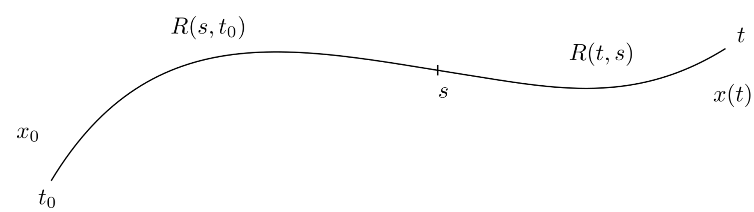
Rysunek 27



Rysunek 28: Czego byśmy chcieli.



Rysunek 29: Mała zmiana może dać rozwiązanie w podobnym miejscu ale nie musi



Rysunek 30: Jak pośpimy minutę dłużej to nic się nie stanie (świat jest ciągły)