

Ostatnio zastanawialiśmy się nad taką sytuacją, że mieliśmy operator  $P_a(x)$  i on miał być zwężający.

$P_a(x) : X \rightarrow X$  - zwężający .

$c \in X : \{c, P_a(c), P_a(P_a(c)) \rightarrow \tilde{x}(a)\}$ , gdzie  $P(\tilde{x}(a)) = \tilde{x}(a)$ .

**Dowód 1** Chcemy pokazać, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} . \exists_{\delta > 0} . \forall_{a'} d(a, a') < \delta \implies d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) < \varepsilon.$$

Wiemy, że  $P_a$  - ciągła ze względu na  $a$ :

$$\forall_{\varepsilon_1 > 0} . \exists_{\delta_1 > 0} . \forall_{a'} d(a, a') < \delta_1 \implies d(P_a, P_{a'}) < \varepsilon_1 \quad (1)$$

Wiemy, że  $\forall_{c' \in X}$  ciąg  $\{c', P_{a'}(c'), P_{a'}(P_{a'}(c')) \dots\} \rightarrow \tilde{x}(a')$  Ale, jeżeli przyjmiemy za  $c = \tilde{x}(a')$ , to ciąg:

$$\{\tilde{x}(a'), P_a(\tilde{x}(a')), P_a(P_a(\tilde{x}(a')))\} \rightarrow \tilde{x}(a).$$

Ale z zasady banacha wiemy, że jeżeli  $P_a$  - zwężający, to

$$d(\tilde{x}(a), x_0) \leq \frac{1}{1-q} d(x_1, x_0).$$

Wyberzmy  $x_0 = \tilde{x}(a')$ . Wówczas

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) &\leq \frac{1}{1-q} d(P_a(\tilde{x}(a')), \tilde{x}(a')) = \\ &= \frac{1}{1-q} d(P_a(\tilde{x}(a')), P_{a'}(\tilde{x}(a'))). \end{aligned}$$

**Pytanie 1** Jak ten obiekt ma się do  $d(P_a, P_{a'})$ ?

$$d(P_a, P_{a'}) = \sup_{x \in X} d(P_a(x), P_{a'}(x)).$$

Więc, jeżeli  $d(P_{a'}, P_a) < \varepsilon_1$ , to znaczy, że  $d(P_a(\tilde{x}(a')), P_{a'}(\tilde{x}(a'))) < \varepsilon_1$

$$\text{Czyli } d(\tilde{x}(a), \tilde{x}(a')) \leq \frac{1}{1-q} \varepsilon_1.$$

Czyli jeżeli otrzymamy  $\varepsilon_1$ , to biorąc  $\varepsilon_1$  taki, że  $\varepsilon_1 \frac{1}{1-q} < \varepsilon$  i znajdujemy  $\delta_1$  z zależności 1 i wiemy, że jeżeli

$$d(a', a) < \delta_1 \implies d(\tilde{x}(a'), \tilde{x}(a)) < \varepsilon \quad \square.$$

**Przykład 1** (odwzorowanie zwężające)

$$\int \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x), x(t_0) = x_0.$$

Wiemy, że  $x(t)$  jest punktem stałym odwzorowania

$$P(g) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds \implies g_0, P(g_0), P(P(g_0)) \dots \rightarrow x(t).$$

$$\frac{dx}{dt} = t + x, x(0) = 0.$$

$$f(t, x) = t + x \cdot t_0 = 0, x_0 = 0.$$

Czy  $f$  jest lipszycowalna?

$$\forall_{t \in [a, b]} \|t + x - (t + x')\| = \|x - x'\| = 1 \|x - x'\| \implies L = 1.$$

Czyli jest. Policzmy kilka wyrazów ciągu

$$\begin{matrix} g_0 & , & P(g_0) & , & P(P(g_0)) & , & \dots \\ x^0(t) & & x^1(t) & & x^2(t) & & \end{matrix}$$

$$x^0(t) = x_0(t) = 0$$

$$x^1(t) = P(x^0(t)) = P(0) = 0 + \int_0^t f(s, x^0(s)) ds = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2}$$

$$x^2(t) = P(x^1(t)) = P\left(\frac{t^2}{2}\right) = 0 + \int_0^t f(s, x^1(s)) ds = \int_0^t \left(s + \frac{s^2}{2}\right) ds = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \times 3}$$

$$x^3(t) = P(x^2(t)) = 0 + \int_0^t \left(s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{2 \times 3}\right) ds = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2 \times 3} + \frac{t^4}{2 \times 3 \times 4}$$

$\vdots$

$\vdots \rightarrow \infty$

$$e^t - t - 1.$$

**Przykład 2**  $\frac{dx}{dt} = 2tx, \quad x(0) = 1, \text{ czyli } f(t, x) = 2tx, \quad t_0 = 0$

dla  $\forall_{t \in [a, b]}$

$$\|2tx - 2tx'\| \leq \sup_{t \in [a, b]} |t| 2 \|x - x'\|.$$

Czyli  $f$  - Lipszycowa z  $L = \sup_{t \in [a, b]} |t| \times 2$

$$x^0(t) = 1$$

$$x^1(t) = P(x^0(t)) = 1 + \int_0^t f(s, 1) ds = 1 + \int_0^t 2s ds = 1 + t^2$$

$$x^2(t) = P(x^1(t)) = 1 + \int_0^t 2s(1 + s^2) ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}$$

$$x^3(t) = P(x^2(t)) = 1 + \int_0^t 2s(1 + s^2 + \frac{t^4}{2}) ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3}$$

$$\vdots \rightarrow \infty$$

$$e^{t^2}.$$

### Przykład 3

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) \end{bmatrix}, x_1(0) = 0, x_2(0) = 1.$$

$$f(t, x) = f(t, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

$$x^0(t) = \begin{bmatrix} x_1^0(t) \\ x_2^0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^1(t) = P(x^0(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ -0 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^2(t) = P\left(\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix}\right) = P\left(\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ -s \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$x^3 = P\left(\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}\right) = P\left(\begin{bmatrix} t \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 - \frac{s^2}{2} \\ -s \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} t - \frac{t^3}{2 \times 3} \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vdots \rightarrow \infty$$

$$\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

**Twierdzenie 1** Jeżeli odwzorowania

$$t \in [a, b] \rightarrow A(t)$$

$$t \in [a, b] \rightarrow b(t).$$

Gdzie  $A(t) \in L(x, x), b(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow X$  są ciągłe, to równanie

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Ma dla dowolnych  $t_0 \in [a, b], x_0 \in X$  jednoznacznie określone rozwiązanie na  $t \in ]a, b[$

Czym to się różni od twierdzenia o jednoznaczności warunku Cauchy? Nie ma tutaj mowy o żadnej lipszycowalności. Zawężono za to klasę funkcji występującej w równaniu. Zamiast  $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[ \times \mathcal{O}$ , mamy  $]a, b[ \times X$

**Dowód 2** Chcemy sprawdzić, czy  $f(t, x) = A(t)x(t) + b(t)$  spełnia warunek Lipschitza. Wiemy, że  $A(t)$  i  $b(t)$  są ciągłe na przedziale domkniętym  $[a, b]$ . Zatem, istnieje  $\sup_{t \in [a, b]} \|b(t)\| = C$ , a  $A : X \rightarrow X$  i  $A$  jest liniowe zatem istnieje norma tego odwzorowania

$$\sup_{t \in [a, b]} \|A(t)\| = L.$$

Zatem

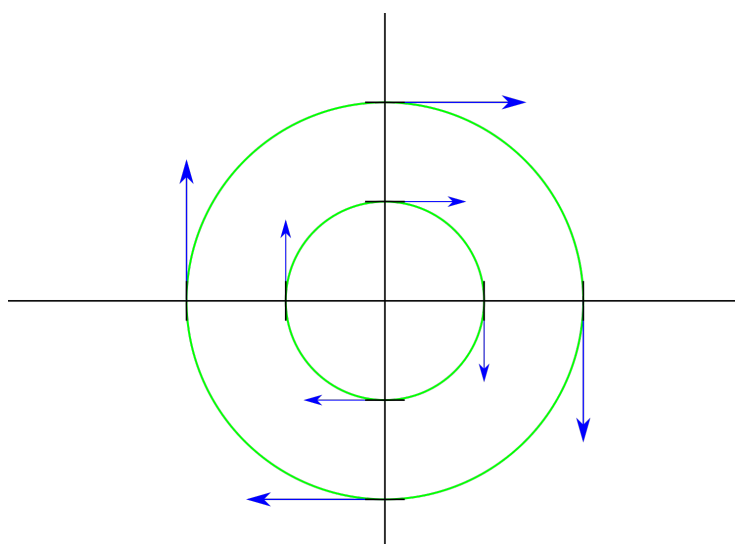
$$\forall_{t \in [a, b]} \|A(t)x + b(t) - (A(t)x' + b(t))\| = \|A(t)(x - x')\| \leq \sup_{t \in [a, b]} \|A(t)\| \|x - x'\| = L \|x - x'\|.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności wiemy, że istnieją przedziały  $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$  oraz  $\mathcal{O} = K(x_0, r_2)$  takie, że dla

$$\varepsilon = \min \left\{ |a - t_0|, r_1, \frac{r_2}{M}, |b - t_0|, \frac{1}{L} \right\} \quad (2)$$

Gdzie  $r_1, r_2$  były takie, że na zbiorze  $K(t_0, r_1) \times K(x_0, r_2)$  funkcja  $f(t, x)$  była ograniczona. Zależy nam na tym, aby w warunku 2 wyeliminować  $r_2$ . Ale  $\|A(t)x + b(t)\| \leq \|A(t)x\| + \|b(t)\|$  dla  $x \in K(x_0, r_2)$

$$\begin{aligned} &= \|A(t)x\| + C \leq L\|x\| + C = \\ &= L\|x - x_0 + x_0\| + C \leq \\ &\leq L\|x - x_0\| + L\|x_0\| + C \leq \\ &\leq Lr_2 + L\|x_0\| + C. \end{aligned}$$



Rysunek 1