Notatki z Analizy II L2019, FUW

Jakub Korsak

27 marca 2019

1 Wykład (26.02.2019)

Przykład 1 *funkcje wielu zmiennych:*

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ - Energia potencjalna $\mathcal{V}(x, y, z)$
$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$ - Potencjał pola niestacjonarnego $\mathcal{V}(x, y, z, t)$
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ - Natężenie pola $\mathcal{E}(x, y, z)$
$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^4$
$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^6$
$\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^1$
$\mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^1$

Niech $X \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in X, Y \subset \mathbb{R}^m$. Mówimy, że odwzorowanie $T : X \to Y$ jest ciągłe, jeżeli

$$\underset{x_n \to x_0}{\forall}, T(x_n) \to T(x_0)$$

UWAGA: $x_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Pytanie: Czy ciągłość w $\mathbb{R}^n \iff$ ciągłosc w $\mathbb{R}^1$?

Przykład 2 *Niech funkcja*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq y \end{cases}$$

czy f - ciągła w $(0,0)$? dla trajektorii I:

$$\lim_{y_n \to 0}(\lim_{x_n \to 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{y_n \to 0}(0) = 0$$

dla trajektorii II:

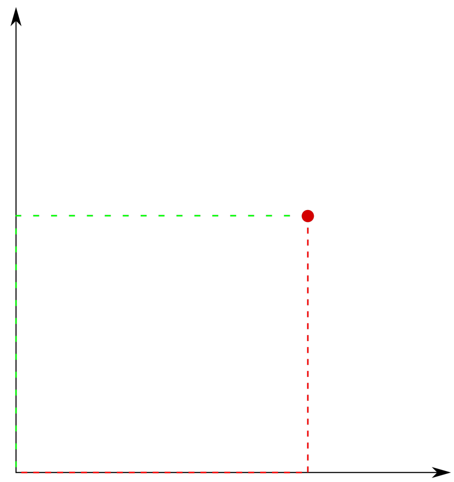
$$\lim_{x_n \to 0}(\lim_{y_n \to 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{x_n \to 0}(0) = 0$$

weźmy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq \lim_{x_n \to 0, y_n \to 0} f(0,0)$$

(X, d_X) - przestrzeń wektorowa z metryką d_X,
(Y, d_Y) - p.w. z metryką d_Y
Niech $x_0 \in X$. Mówimy, że $T : X \to Y$ - ciągłe, jeżeli

$$\underset{\epsilon > 0}{\forall} \; \underset{\delta}{\exists} \; \underset{x \in X}{\forall}, \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x_0), T(x)) < \epsilon$$



Rysunek 1: trajektoria I i II

Dowód 1 *Heine* $\iff$ *Cauchy*

$\implies_{\text{(przez sprzeczność)}}$:

zakładamy, że

$$\underset{x_n \to x_0}{\forall} T(x_n) \to T(x_0) \quad \wedge \quad \underset{\epsilon>0}{\exists}, \underset{\delta<0}{\forall}, \underset{x\in X}{\exists} (*) : d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x_n), T(x_0) \geqslant \epsilon$$

Skoro $T(x_n) \to T(x_0) \underset{x_n \to x_0}{\forall}$, to w szczególności warunek spełniony dla ciągu, który jest taki:

skoro $(*)$, to dla $\epsilon > 0$ weźmy $\delta = 1$,

$$\underset{x_1}{\exists} \quad d_X(x_1, x_0) < 1 \wedge d_Y(T(x_1), T(x_0)) \geqslant \epsilon$$

$\delta = \frac{1}{2}$:

$$\underset{x_2}{\exists} \quad d_X(x_2, x_0) < \frac{1}{2} \wedge d_Y(T(x_2), T(x_0)) \geqslant \epsilon$$

$\delta = \frac{1}{3}$:

$$\underset{x_3}{\exists} \quad d_X(x_3, x_0) < \frac{1}{3} \wedge d_Y(T(x_3), T(x_0)) \geqslant \epsilon$$

$$\vdots$$

$\delta = \frac{1}{n}$:

$$\underset{x_n}{\exists} \quad d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \wedge d_Y(T(x_n), T(x_0)) \geqslant \epsilon$$

Zauważmy, że taki ciąg $x_n \to x_0 \wedge T(x_n) \not\to T(x_0)$ i sprzeczność $\square$

$\Longleftarrow$ Wiemy, że $\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{x}{\exists}. d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x), T(x_0)) < \epsilon$ (trójkąt),

oraz, że $x_n \to x_0$, czyli:

$$\underset{\delta_1}{\forall} \underset{N}{\exists} \underset{n>N}{\forall} \quad d_X(x_n, x_0) < \delta_1 (\text{trójkąt2})$$

Chcemy pokazać, że $T(x_n) \to T(x_0)$, czyli, że

$$\underset{\epsilon_1>0}{\forall} \underset{N_1}{\exists} \underset{n>N_1}{\forall} \quad d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \epsilon_1 (\text{dla } x_n \to x_0)$$

Przyjmijmy $\epsilon = \epsilon_1$. Oznacza to, że $\underset{\delta}{\exists}$ spełniająca warunek (trójkąt) dla ϵ_1. Połóżmy $\delta_1 = \delta$ we wzorze (trójkąt2), czyli wiemy, że

$$\underset{N}{\exists} \underset{n>N}{\forall} \quad d_X(x_n, x_0) < \delta_1,$$

ale na mocy (trójkąt), wiemy, że

$$d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \epsilon_1 \square$$

1.1 Różniczkowalność:

Niech $\mathbb{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{O}$ - otwarty, $f : \mathbb{O} \to \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{Q}, x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$

Mówimy, że f ma w punkcie x pochodną cząstkową w kierunku x^k, jeżeli istnieje granica $g = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0+h, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h} \equiv \frac{\partial}{\partial x} f\Big|_{x=x_0}$

Przykład 3 *różniczkowalność*

Niech $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$. $\frac{\partial}{\partial x} f = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$, $\frac{\partial}{\partial y} f = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$.

UWAGA: do policzenia pochodnej czątkowej potrzebujemy układu współrzędnych, tj. (rys) Niech $\mathbb{O} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{O}$ - otwarte, $x_0 \in \mathbb{O}, e \in \mathbb{O}, T : \mathbb{O} \to \mathbb{R}$.

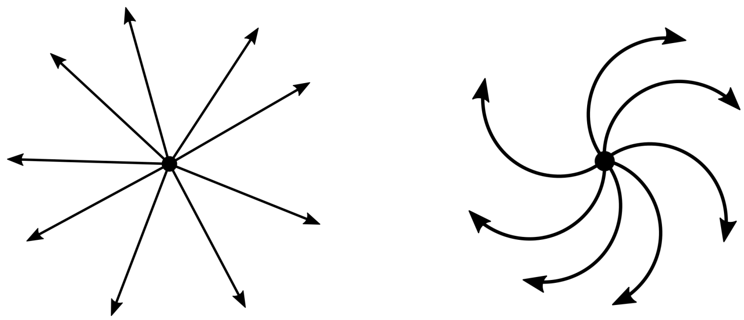
Mówimy, że T ma w x_0 pochodną kierunkową (*spoiler:* pochodną słabą), jeżeli istnieje granica

$$g = \lim_{t\to 0} \frac{T(x_0 + te) - T(x_0)}{t} \equiv \nabla_e T(x_0)$$

1.2 Obserwacja:

Jeżeli np. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, e_x = (1, 0)$ i $e_y = (0, 1)$, to

$$\nabla_{e_x} T = \frac{\partial}{\partial x} T \text{ i } \nabla_{e_y} T = \frac{\partial}{\partial y} T$$



Rysunek 2: Problemy: Umiemy tak jak po lewej, ale nic nie potrafimy zrobić z tym po prawej

Przykład 4

$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Wówczas $x_0 + te = (0 + t1, 0)$, $x_0 = (0, 0), e_x = \binom{1}{0}$

$$\nabla_{e_x} f|_x = (0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{|t0|} - \sqrt{|00|}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} f \Big|_{(0,0)}$$

UWAGA: $f(x) = \sqrt{x}, \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \pm\infty$

Przykład 5

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq y \end{cases}$$

$e = \binom{h_1}{h_2}$. Pochodna: $\nabla_e f|_{x=(0,0)}$, $(x_0 + te = (th_1, th_2))$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0,0)}{t} = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2} = \frac{h_2^2}{h_1}$$

2 Wykład (01.03.2019)

Definicja 1 *Norma: niech X - przestrzeń wektorowa.*
Odwzorowanie $||.|| : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ nazywamy normą, jeżeli:

$$\underset{x\in X}{\forall} \quad ||x|| \geqslant 0 \tag{1}$$

$$\underset{\alpha\in\mathbb{R}}{\forall}, \underset{x\in\mathbb{X}}{\forall} \quad ||\alpha x|| = |\alpha|||x|| \tag{2}$$

$$\underset{x,y\in X}{\forall} \quad ||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \tag{3}$$

$$\underset{x\in X}{\forall} \quad ||x|| = 0 \iff x = 0 \tag{4}$$

Przestrzeń X wraz z normą $||.||$ nazywamy przestrzenią unormowaną (*spoiler:* przestrzenią Banacha).

Przykład 6

$||v|| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}, X \to \mathbb{R}^n \quad (v \in X) \implies ||v|| = sup(|x^1|, \dots), f \in C([a,b])$, to $||f|| = sup_{x\in[a,b]}(f(x))$

UWAGA: mając normę możemy zdefiniować metrykę $\underset{x,y\in X}{\forall} d(x,y) = ||x-y||$, natomiast niekażdą metryką da się utworzyć przy pomocy normy.

Przykład 7 *metryka zdefiniowana przy pomocy normy ma np. taką własność:*

$$d(a_x, a_y) = ||a_x - a_y|| = |a|||x-y|| = ad(x,y),$$

czyli taka metryka się skaluje natomiast funkcja

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

jest metryką, ale tej własności nie posiada.

Definicja 2 *Pochodna mocna (trzecie podejście)*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x_0), \ \ dla\ x \in V \subset \mathbb{R}^n.$$

- taka definicja jest niemożliwa (nie mamy dzielenia wektorów).

$$f(x+h) - f(x) = f'(x_0)h + r(x_0,h), \text{ gdzie } \frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0 \text{ przy } ||h|| \to 0$$

ale to może mieć już inną dziedzinę

Definicja 3 *Niech* $U \subset X, V \subset Y$
U, V *- otwarte,* $\quad T : U \to V; x, h \in U$
Mówimy, że T *- różniczkowalne w punkcie* x_0*, jeżeli prawdziwy jest wzór*

$$\underset{h \in U}{\forall} \quad T(x_0 + h) - T(x_0) = L_{x_0}(h) + r(x_0, h),$$

gdzie $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$*, a* L_{x_0} *- liniowe* $: X \to Y$*.*

Odwzorowanie $L_{x_0}(h)$ nazywamy pochodną T w punkcie x_0. Czasami $L_{x_0}(h)$ możemy przedstawić w postaci $L_{x_0}(h) = T'(x_0)h$, to $T'(x_0)$ nazywamy pochodną odwzorowania T.

UWAGI: Dlaczego $L_{x_0}(h)$, a nie $T'(x_0)h$?

Dlatego, że czasami pochodna może wyglądać tak:

$$\int_0^1 h(x) \sin x dx$$

, a tego nie da sie przedstawić jako

$$\left(\int_0^1 \sin x dx \right) h(x)$$

Przykład 8

$T(x + h) - T(x) = T'(x_0)h + r(x_0, h)$
1. Niech $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, czyli $x_0 \in \mathbb{R}, h \in R$. Wtedy $T(x)$ - wektor (3 el.), $T'(x)$ - wektor (3 el.)
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad x_0$ - wektor (3 el.), h - wektor (3.el), $T'(x)$ - p.wektor (3 el.)
3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad x_0$ - wektor (2 el.), h - wektor (2 el.), $T(x)$ - wektor (3 el.), $T'(x)$ - macierz (3x2)
4. $f(x, y) = xy^2, h = \binom{h_x}{h_y}$

$f(x_0 + hx, y_0 + hy) - f(x_0, y_0) = (x_0 + hx)(y_0 + hy)^2 - x_0 y_0^2 = x_0 y_0^2 + 2y_0 x_0 h_y + x_0 h_y^2 + h_y y_0^2 + h_x h_y 2y_0 + h_x h_y) = (y_0^2, 2xx_0)\binom{h_x}{h_y} + x_0 h_y^2 + h_x h_y^2 + 2y_0 h_x h_y$.

Czy $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$?

Weźmy $||\binom{h_x}{h_y}|| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$.
Wówczas $x_0 h_y^2 + h_x h_y^2 + 2y_0 h_x h_y \leqslant x_0 ||h||^2 + ||h||^3 + 2y_0 ||h||^2 = ||h||^2(x_0 + 2y_0 + ||h||)$
Zatem $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \leqslant \frac{||h||^2(|x_0| + 2y_0 + ||h||)}{||h||} \to 0.$

$f(x, y) = xy^2, T'(x) = [y^2, 2xy]$.
zauważmy, że $y^2 = \frac{\partial}{\partial x} f, 2xy = \frac{\partial}{\partial y} f$

UWAGA: skąd wiemy, że gdy $h \to 0$, to $||h|| \to 0$?
Czyli: czy norma jest odwzorowaniem ciągłym w $h = 0$?
<odpowiedź za tydzień>

Twierdzenie 1 *Jeżeli f - różniczkowalna w $x_0 \in U$, to dla dowolnego $e \in U$,*

$$\nabla_e f(x_0) = f'(x_0)e$$

Dowód 2

Pytanie 1 *Czy z faktu istnienia pochodnych cząstkowych wynika różniczkowalność funkcji?*

Przykład 9

$f(x, y) = \sqrt{|xy|}, x_0 = \binom{0}{0}$, dla $f(x, y)$ policzyliśmy pochodne cząstkowe w x_0 $\frac{\partial}{\partial x} f = 0, \frac{\partial}{\partial y} f = 0$.

$h = \binom{h_x}{h_y}, x_0 = \binom{0}{0}, f(x_0+h) - f(x_0) = \sqrt{h_x h_y} - \sqrt{0} = \sqrt{h_x h_y} = (0, 0)\binom{h_x}{h_y} + \sqrt{h_x h_y}$, gdzie $r(x_0, h) = \sqrt{h_x h_y}$.
Czyli f - różniczkowalna, jeżeli $\underset{h_x, h_y}{\forall} \frac{\sqrt{h_x h_y}}{||h||} \to 0$.
Niech $||h|| = \sup\{|h_x|, |h_y|\}$ i niech $|h_x| > |h_y|$. $||h|| = |h_x|$.

Dalej mamy: $\frac{\sqrt{h_x h_y}}{|h_x|} \sqrt{\frac{h_y}{h_x}} \not\to 0$ przy $h_x \to 0$, $\sqrt{\frac{|h_y|}{|h_x|}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Czyli istnienie pochodnych cząstkowych nie oznacza różniczkowalności.

Twierdzenie 2 *Niech $O \subset \mathbb{R}^n, O$ - otwarty. $f : O \to Y, x_0 \in O$.*
Jeżeli istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial x_i} f, i = 1, \ldots, n$ i są ciągłe w x_0, wtedy $\underset{h \in \mathbb{R}^n}{\forall} f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h^i + r(x_0, h)$, gdzie $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$

Dowód 3 *(dla $O = \mathbb{R}^3$)*

Niech $x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} h^1 \\ h^2 \\ h^3 \end{bmatrix}$

$$f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h_2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) =$$
$$= f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) +$$
$$+ f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3) - f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) +$$
$$+ f(x_0^1 + h^1, x_0^2, x_0^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \quad \overbrace{=}^{\text{tw. o w. średniej}}$$

$\frac{\partial}{\partial x_0^1} f(c_1)h^1 + \frac{\partial}{\partial x_0^2} f(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3)h^2 + \frac{\partial}{\partial x_0^3} f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h_2, c_3)h^3 =$
$(\frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3))h^1 +$
$+ (\frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1 + h^1, c_2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0^1, x_0^2, x_0^3))h^2 +$
$+ (\frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, c_3) - \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0^1, x_0^2, x_0^3))h^3$
gdzie $c_1 \in]x_0^1, x_0^1 + h^1[, \quad c_2 \in]x_0^2, x_0^2 + h^2[, \quad c_3 \in]x_0^3, x_0^3 + h^3[$

Wystarczy pokazać, że $\frac{r(x_0,h)}{||h||} \to 0$, gdy $h \to 0$.

Zauważmy, że każde wyrażenie tworzące resztę jest postaci *coś* h^i, a $\lim\limits_{||h|| \to 0} \frac{h^i}{||h||} =$ $\{\{$ *dla normy np.* $||h|| = max|h^i|$ $\}\} \neq 0$. (np. $\frac{h^1}{h^1} \to 1$)

Oznacza to, że jeżeli $\frac{r(x,h)}{||h||} \to 0$ - spełniony, to każde wyrażenie typu

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)\Big)h^1 \to 0$$

Czyli np. $\lim\limits_{||h|| \to 0} \frac{\partial f}{\partial x^1}(c_1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \iff (\frac{\partial f}{\partial x^1}$ - ciągła$)\square$

3 Wykład (05.03.2019)

Uwaga: Jeżeli np. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, to znaczy, że
$f(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}$, $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, wówczas

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} f_2 \end{bmatrix}$$

Przykład 10

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3 y \end{bmatrix}$$

Wtedy pochodne czątkowe: $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2 y \end{bmatrix}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix}$
$f(x+h) - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} h^x + \frac{\partial f}{\partial y} h^y + r((x,y),h) = \begin{bmatrix} 2y^2 \\ 3x^2 y \end{bmatrix} h^x + \begin{bmatrix} 4xy \\ x^3 \end{bmatrix} h^y + r((x,y),h) = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2 y & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^x \\ h^y \end{bmatrix} + r((x,y),h)$

$$\text{Czyli } f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

i ogólniej: jeżeli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, to

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

3.1 Uzupełnienie:

Niech V - przestrzeń wektorowa z normą $||.||$ i $x_0 \in V$,
wówczas $f(x) = ||x||, f : V \to \mathbb{R}^1$ - ciągła w x_0.

Dowód 4

Chccemy pokazać, że $\underset{\epsilon>0}{\forall} \underset{\delta}{\exists} \underset{x}{\forall} \quad d_x(x,x_0) < \delta \implies d_{\mathbb{R}}(f(x), f(x_0)) < \epsilon$
ale $d_x(x,y) = ||x-y||, d_{\mathbb{R}^1}(x,y) = |x-y|$.

Chcemy pokazać, że $\underset{\epsilon>0}{\forall} \underset{\delta}{\exists} \underset{x}{\forall} \quad ||x - x_0|| < \delta \implies \big| ||x|| - ||x_0|| \big| < \epsilon$
ale $||x|| = ||x-y+y|| \leqslant ||x-y|| + ||y||, ||x|| - ||y|| \leqslant ||x-y||$,

$||y|| = ||y - x + x|| \leqslant ||y - x|| + ||x||$,
$||y|| - ||x|| \leqslant ||x - y||$, czyli $\big| ||x|| - ||y|| \big| \leqslant ||x - y||$. Niech $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, otrzymujemy $\epsilon > \frac{\epsilon}{2} > ||x - y|| \leqslant \big| ||x|| - ||y|| \big| \geqslant 0 \square$

Pytanie 2 *Niech* $f(x, y) = 7x + 6y^2$ *i* $g(t) = \begin{bmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{bmatrix}$. *Wówczas* $h(t) = (f \circ g)(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Ile wynosi pochodna?*

$$f' = [7, 12y], g' = \begin{bmatrix} -sin(t) \\ cos(t) \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 3 *Niech* $G : U \to Y, U \subset X, U$ *- otwarte* , X *- przestrzeń wektorowa unormowana,* $F : G(U) \to Z, G(U) \subset V$
G *- różniczkowalna w* $x_0 \in U$, F *- różniczkowalna w* $G(x_0) \in U$.

$$G(x_0 + h_1) - G(x_0) = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1), \text{ gdy } \frac{r(x_0, h_1)}{||h_1||_x} \to 0$$

$$F(y_0 + h_2) - F(y_0) = F'(y_0)h_2 + r_2(y_0, h_2), \text{ gdy } \frac{r(y_0, h_2)}{||h_2||_y} \to 0$$

Wówczas: $(F \circ G)$ *- różniczkowalna w* x_0

oraz $(F \circ G)'(x_0) = F'(x)|_{x=G(x_0)} \, G'(x_0)$

Dowód 5

$$F(G(x_0 + h)) - F(G(x_0)) =$$
$$F(G(x_0) + G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) - F(G(x_0)) =$$
$$F(G(x_0)) + F'(G(x_0))(G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) + r_2(G(x_0))$$
$$G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)) - F(G(x_0))$$

zatem:
$F(G(x_0)) + F(G(x_0 + h)) = F'(G(x_0))G'(x_0)h_1 + F'(G(x_0))r_1(x_0, h_1) + r_2(G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1))$

Wystarczy pokazać, że $\frac{r_3}{||h_1||} \to 0$, ale $\frac{r_3}{||h_1||} = F'(G(x_0))\frac{r_1(x_0,h_1)}{||h_1||} + \underbrace{\frac{r_2(G(x_0), G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1))}{||G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)||}}_{\to 0 \text{ kiedy } h_1 \to 0}$

$\underbrace{\frac{||G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)||}{||h_1||}}_{\text{jest ograniczony}}$, ale jeżeli $h_1 \to 0$, to $h_2 = G'(x_0)h_1 + r_1(x_0, h_1)$, zatem
$F(G(x))$ - różniczkowalna w x_0 $\square$

Przykład 11

$f(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy^2 \\ x^3y \end{bmatrix}, \varphi(t) = \begin{bmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}, h(t) = (f \circ \varphi)(t), h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2.$

Policzmy h'. $f' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix}, \varphi'(t) = \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix}$, tzn. $H' = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 3x^2y & x^3 \end{bmatrix}\Bigg|_{x=2t^2, y=t^3} \begin{bmatrix} 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2t^2)^2 4t + 4(2t^2)(t^3)3t^2 \\ 3(2t^2)^2 t^3 4 + (2t^3)^3 3t^2 \end{bmatrix}$

Weźmy przykład: Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \Psi(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \Psi_1(r,\varphi) \\ \Psi_2(r,\varphi) \end{bmatrix}$

$\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\Psi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Niech $H(r,\varphi) = (f \circ \Psi)(r,\varphi)$, czyli $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Szukamy pochodnej H, ale $f' = [\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}], \Psi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$

$$\text{Czyli } H' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]\Bigg|_{x=\Psi_1(r,\varphi), y=\Psi_1(r,\varphi)} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

Co daje: $\left[\frac{\partial H}{\partial r}, \frac{\partial H}{\partial \varphi}\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Psi_2}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi}\right]\Bigg|_{x=\Psi_1(r,\varphi), y=\Psi_2(r,\varphi)}$

4 Wykład (08.03.2019)

$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\Psi_1(r,\varphi),\\ y=\Psi_2(r,\varphi)}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Psi_2}{\partial r}$
$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi}$

Konwencja z ćwiczeń z fizyki:

$H(r,\varphi) = (f \circ \Psi)(r,\varphi)$
$H(r,\varphi) = f(r,\varphi)$

$$\Psi_1(r,\varphi) = x(r,\varphi)$$
$$\Psi_2(r,\varphi) = y(r,\varphi)$$

$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$
$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}$

Przykład 12

$$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

Interpretacja geometryczna Rozważmy zbiór

$P_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$ np. $f(x,y) = x^2+y^2 : P_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = c\}$

Załóżmy, że $f(x,y)$ - taka, że P_c - można sparametryzować jako

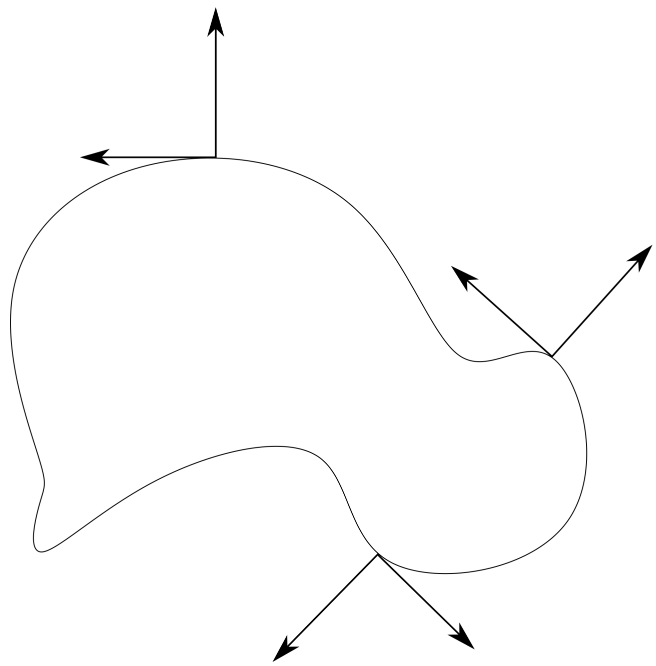
$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, t \in D, \text{ to znaczy, że } P_c = \{(x(t), y(t)), t \in D\}$$

Przykład 13

Niech $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$. Wtedy $P_c = \{(c\cos t, c\sin t); t \in [0, 2\pi]\}$

$f(x(t), y(t)) = c \quad \underset{t\in D}{\forall}$ - powierzchnie ekwipotencjalne

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} 2x, 2y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -c\sin t \\ c\cos t \end{bmatrix} = 0$$



Rysunek 3: Trajektoria kluki

Definicja 4 *Pochodna mieszana*

$$f(x,y) = x^2y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3, \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = 2y^3, \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 6x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2$$

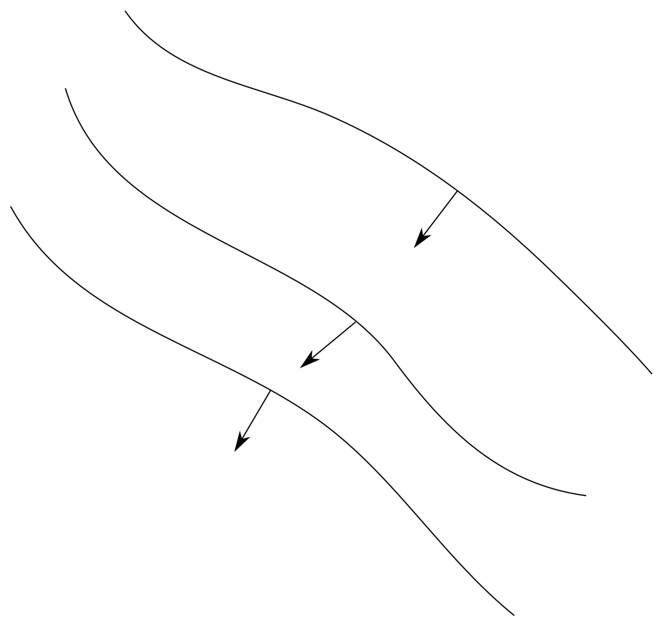
Przypadek???

Twierdzenie 4 *Niech* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, *otwarty i* $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$, *wówczas*

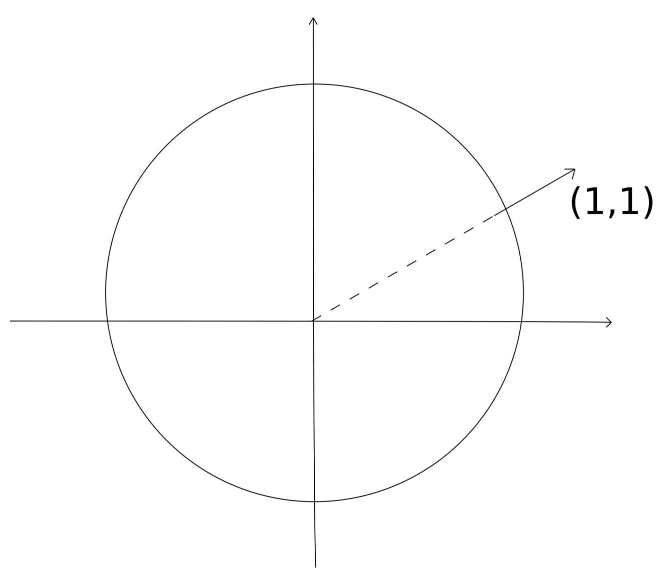
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}; i, j = 1, \ldots, n$$

Dowód 6 *Dowód dla* $n = 2$

Niech $w(x,y) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y)$
$\varphi(x) = f(x, y+k) - f(x,y)$



Rysunek 4: Powierzchnia ekwipotencjalna I



Rysunek 5: Powierzchnia ekwipotencjalna II

wówczas

$$w = \varphi(x+h) - \varphi(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\xi)h =$$
$$= \Big[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\Big]h = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)\Big)hk,$$
$$\text{gdzie } x < \xi < x+h, \quad y < \eta < y+k$$

Niech $\Psi(y) = f(x+h,y) - f(x,y)$
$w(x,y) = \Psi(y+k) - \Psi(y) = \frac{\partial\Psi}{\partial y}(\eta_1)k = \Big[\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,\eta_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,\eta_1)\Big]k = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)\Big)kh$, czyli $\underset{\xi\in]x,x+h[}{\exists}, \quad \xi_1 \in]x,x+h[, \quad \eta \in]y,y+k[, \quad \eta_1 \in]y,y+k[\quad (y<\eta_1<y+k)$
Jeżeli $h \to 0$
$\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\xi,\eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi_1,\eta_1)\Big)$
to $\xi \to x, \xi_1 \to x, \eta \to y, \eta_1 \to y$, czyli:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$$

Jeżeli każda z tych wielkości jest ciągła $\Box$
Wzór Taylora Niech $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ - otwarty
$\varphi(t) = f(x_0 + th), h \in \mathbb{R}^n, t \in [0,1]$

Dla $h = \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix}, \varphi(t) = f(x_0^1 + th^1, x_0^2 + th^2, \dots, x_0^n + th^n)$

$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_{x=x_0+th} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\Big|_{x=x_0+th} h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\Big|_{x=x_0+th} h_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{x_0+th} h_i$
$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j}\Big|_{x_0+th} h_j h_i$
$\vdots$
$\frac{\partial^k\varphi}{\partial t^k} = \sum_{i^1,\dots,i^k}^n \frac{\partial^{(k)} f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i}} h_{i_1}\dots h_{i_k}$
$\varphi(t) = \varphi(0) = \varphi'(0)(t-0) + \frac{\varphi''(0)}{2!}(t-0)^2 + \dots + \frac{\varphi^k(0)}{k}(t-0)^k + r(\dots)$
Czyli:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \frac{\varphi'''(0)}{3!} + \dots + \frac{\varphi^k(0)}{k!} + r(\dots)$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)h_i + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)h_i h_j + \dots\dots \Box$$

5 Wykład (12.03.2019)

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)h^i + \frac{1}{2!}\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)h^i h^j + \dots + \frac{1}{p!}$$

$$\sum_{\substack{i_1=1\\ \vdots \\ i_p=1}}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_p+1}}(x_0)h^{i_1}\dots h^{i_p} + R_{p+1}(x_0,h)$$

$$\text{gdzie } R_{p+1}(h) = \frac{1}{(p+1)!}\sum_{\substack{i_1=1\\ \dots \\ i_{p+1}=1}}^{n} \frac{\partial^{p+1} f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_p+1}} \underbrace{(x_0+\theta h)}_{\substack{0<\theta<1\\ \text{wersja } \mathbb{R}^n \text{ dla} \\ \text{"}x_0<c<x_0+h\text{"}}} h^{i_1}\dots h^{i_{p+1}}$$

Obserwacja 1 $\lim\limits_{h\to 0} \frac{R_{p+1}(x_0,h)}{||h||^p} \to 0$

Przykład 14

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2y^3, f'(x,y) = \begin{bmatrix}2xy^3, 3x^2y^2\end{bmatrix}.$

Jeżeli $h = \begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}$, to wtedy

$$\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}h^ih^j = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1\partial x^1}h^1h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^1\partial x^2}h^1h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2\partial x^1}h^2h^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2\partial x^2}h^2h^2 =$$

$$= \begin{bmatrix}h_1, h_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}$$

To czy ta macierz jest uśmiechnięta etc. (dodatnio/ujemnie określona) na algebrze.

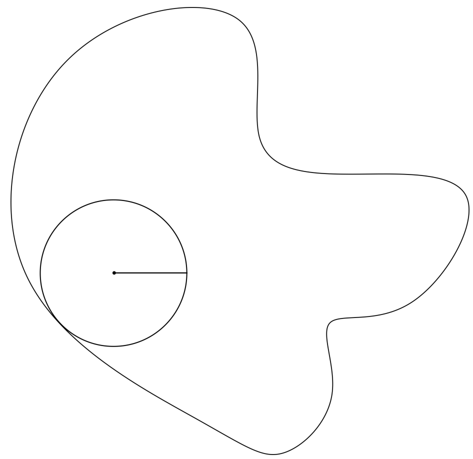
Minima i maksima

Przypomnienie Niech $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}, \mathcal{O}\subset\mathbb{R}^n, \mathcal{O}$ - otwarty, $x_0\in\mathcal{O}$
Mówimy, że f ma w x_0 minimum lokalne, jeżeli:

$$\underset{\eta>0}{\exists} \quad \underset{\substack{x\in K(x_0,\eta)\\ K(x_0,\eta)\subset\mathcal{O}\\ x\neq x_0}}{\forall} \quad f(x) > f(x_0), \{f(x) < f(x_0)\} \leftarrow \text{ maksimum}$$

Albo inaczej:

$$\underset{\eta>0}{\exists} \ \underset{h}{\forall} \ ||h|| < \eta, \quad x_0+h\in\mathcal{O}, h\neq 0, \text{ to wtedy } f(x_0+h) > f(x_0)$$



Rysunek 6: istnieje otoczenie, dla którego $f(x) > f(x_0)$ (nie musi być styczne!)

Stwierdzenie 1 *jeżeli* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O}$ *- otwarty,* $x_0 \in \mathcal{O}, f$ *- posiada w* x_0 *minimum lub maksimum lokalne, to*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0, i = 1, \ldots, n$$

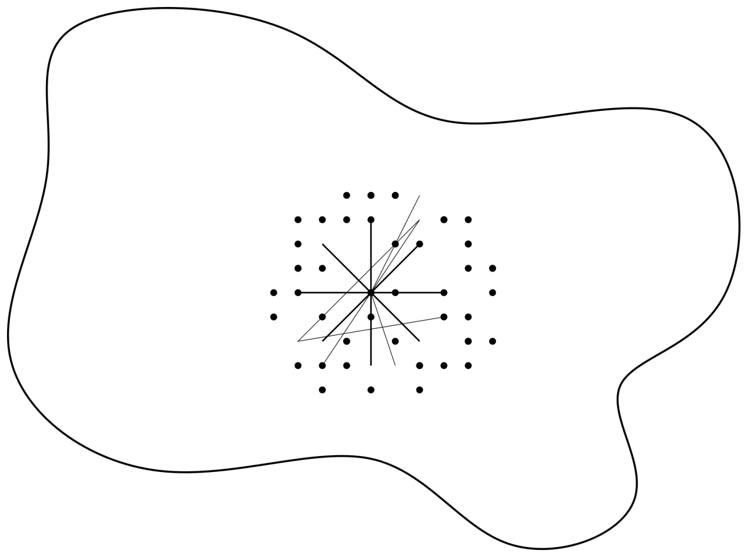
(działa tylko w prawo, bo możliwe punkty przegięcia ((siodła)))

Dowód 7

Niech $g_h(t) = f(x_0 + th)$ i $g : [0, \epsilon[\to \mathbb{R}$.
Zauważmy, że jeżeli f ma minimum lub maksimum w x_0, to znaczy, że $g_h(t)$ ma minimum lub maksimum w $t = 0$, czyli $\frac{\partial}{\partial t} g_h(t)\big|_{t=0}$

Czyli:

$$x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)$$
$$h = \left(h^1, h^2, \ldots, h^n\right)$$



Rysunek 7

$$\frac{d}{dt}g_h(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}f(x_0^1+th^1,\ldots,x_0^n+th^n)\Big|_{t=0} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0+th^1)h^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0+th^2)h^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0+th^n)\Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)h^i = 0 \quad |\underset{h}{\forall} : ||h|| < \eta, \text{ to znaczy: } \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0_{i=1,\ldots,n}\square$$

Twierdzenie 5 *Niech* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in \mathcal{O}, \quad \mathcal{O}$ *- otwarty, a* f *- klasy* $C^{2p}(\mathcal{O})$ *oraz* $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(2p-1)}(x_0) = 0$ *i*

$$\underset{c>0}{\exists} \quad \underset{\eta>0}{\exists} \quad \underset{h\in K(x_0,\eta)}{\forall} : \quad \sum_{\substack{i_1=1\\ \vdots \\ i_{2p}=1}}^{n} \frac{\partial^{(2p)} f}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_{2p}}}(x_0)h^{i_1}\ldots h^{i_{2p}} \geqslant c||h||^{2p} (\leqslant c||h||^{2p})$$

to f *ma w* x_0 *minimum (maksimum) lokalne.*

Dowód 8 *(dla minimum)*
(wersja uproszczona dla f *klasy* $C^{2p+1}(\mathcal{O})$*)*

Jeżeli f spełnia założenie z twierdzenia, to wtedy

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{1}{(2p)!}(\Delta)\sum_{\substack{i_1=1\\ \vdots\\ i_{2p}=1}}^{2p}\frac{\partial^{(2p)}f(x_0)}{\partial x^{i_1}\dots x^{i_{(2p)}}}h^{i_1}\dots h^{i_{(2p)}}+r_{2p+1}(x_0+h)$$

Wiemy też , że $\underset{c>0}{\exists}\ \underset{\eta>0}{\exists}\ \underset{\substack{\text{Chodzi o to, żeby reszta}\\ \text{nie mogła tego przekroczyć}}}{(\Delta)\geqslant c||h||^{2p}}$

Chcemy pokazać, że $\underset{\eta}{\exists}\ \underset{||h||<\eta}{\forall}\Big|r_{2p+1}(x,h)\Big|\leqslant \underset{\substack{\text{albo 7,}\\ \text{albo 2019}}}{\tfrac{c}{2}||h||^{2p}}$

Czyli chcemy zbadać wielkość:

$$\frac{1}{(2p+1)!}\sum_{\substack{i_1=1\\ \vdots\\ i_{2p+1}=1}}^{n}\frac{\partial^{(2p+1)}f(x_0+\theta h)}{\underset{0<\theta<1}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_{(2p+1)}}}}h^{i_1}\dots h^{i_{(2p+1)}}=\ /\text{*tu potrzebne założenie, że } f \text{ - klasy } C^{2p+1}(\mathcal{O})\text{*}/=r_{2p+}$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{h\to0}\frac{r_{2p+1}(x_0+h)}{||h||^{2p}}\to 0$, ale zatem

$$\underset{M>0}{\forall}\quad\underbrace{\underset{N}{\exists},\underset{n>N}{\forall}}_{\substack{\text{bez sensu!}\\ \underset{\eta}{\exists},\ \underset{||h||<\eta}{\forall}}}\ \frac{r_{2p+1}(x_0+h)}{||h||^{2p}}<M$$

$$\text{czyli: }\left|\frac{r_{2p+1}(x_0,h)}{||h||^{2p}}\right|<M$$

$$\underset{M}{\forall}\quad\underset{\eta}{\exists}\underset{||h||<\eta}{\forall}\quad\Big|r_{2p+1}(x_0,h)\Big|<M\Big|\Big|h\Big|\Big|^{2p}$$

Kładziemy $M=\frac{c}{2}$ i mamy

$$\underset{\eta}{\exists},\underset{||h||<\eta}{\forall}\quad f(x_0+h)-f(x_0)\geqslant\frac{c}{2}||h||^{2p}\quad\square$$

Uwaga: Dlaczego warunek $(|||)>c||h||^{2p}$, a nie po prostu $()>0$?

Przykład 15

$f(x,y)=x^2+y^4$, $\frac{\partial f}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3$.
$f'()=0\iff(x,y)=(0,0)$
Badamy: $f(0+h)-f(0)=\begin{bmatrix}h_1,h_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&2y^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_1,h_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}=2h_1^2$

Czyli $f(0+h)-f(0)\ 2h_1^2$ - minimum? maksimum? - zależy w którą stronę.
$h=\begin{bmatrix}h_1\\0\end{bmatrix}$ - minimum

$h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix}$ - równo.
Coś takiego - siodło.

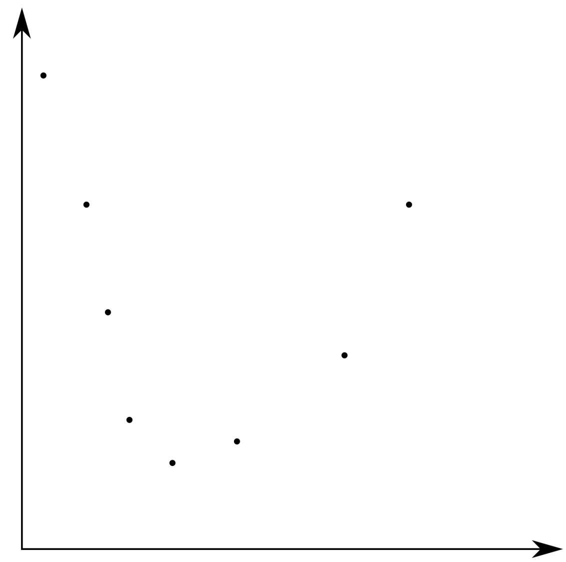
Widzimy zatem, że nie jest spełniony warunek $\underset{c}{\exists} [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \geqslant c\left|\left|h\right|\right|^2$, bo dla $h = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad 0 \ngeqslant c\left|\left|\begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix}\right|\right|$

Kilka fajnych zastosowań

$$\frac{mv^2}{2} = \begin{bmatrix} & v & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & & \\ & \frac{m}{2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ v \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\frac{I\omega^2}{2} = \begin{bmatrix} & \omega & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \omega \\ \\ \end{bmatrix}$$

6 Wykład (15.03.2019)



Rysunek 8: Inne podejście: iterujemy funkcję na jej wyniku

Definicja 5 *Niech $L : V \to W, L$ - liniowe, $(V, ||.||_v), (W, ||.||_w)$ - unormowane. Mówimy, że L jest ograniczone, jeżeli*

$$\underset{A>0}{\exists}, \underset{x \in V}{\forall} ||L(x)||_w \leqslant A||x||_v$$

Przykład 16

dla $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\underset{?A}{\exists}, \forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| \leqslant A \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|$$

$$Ale : \forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| < \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|$$

Twierdzenie 6 *Twierdzenie (L - ograniczone) $\iff$ (L - ciągłe)*

Dowód 9 $\Longleftarrow$

Wiemy, że $\underset{\varepsilon>0}{\forall}, \underset{\delta}{\exists}, \underset{x,x'\in V}{\forall}, \quad ||x-x'||_v < \delta \implies ||L(x)-L(x')||(*) < \varepsilon$

Chcemy pokazać, że:

$$\underset{A>0}{\exists}. \underset{x,x'\in V}{\forall} \quad ||L(x-x')|| \leqslant A||x-x'||$$

zatem wiemy, że para (ε, δ) spełniająca warunek $(*)$ istnieje.

$$\text{Ale } ||L(x-x')|| = \underbrace{\left|\left|L\left(\frac{x-x'}{||x-x'||}\right)\frac{\delta}{2}\right|\right|\frac{||x-x'||2}{\delta}}_{\text{własność liniowości i normy}} \leqslant \varepsilon\frac{||x-x'||2}{\delta}$$

Co wiemy o $\left|\left|\frac{x-x'}{||x-x'||}\frac{\delta}{2}\right|\right|_v < \delta$?

$$\underset{x,x'\in V}{\forall} ||L(x-x')||_w \leqslant \frac{2\varepsilon}{\delta}||x-x'||_v$$

$$\text{Szukane } A = \frac{2\varepsilon}{\delta} \text{ istnieje!} \quad \square$$

$\Longrightarrow$

$$\text{Wiemy, że } \underset{A}{\exists}. \underset{x,x'\in V}{\forall}. ||L(x-x')|| \leqslant A||x-x'|| \tag{5}$$

Chcemy pokazać, że jeżeli $x_n \to x_0$, to $L(x_n) \to L(x_0)$, ale $0 \leqslant ||L(x_n) - L(x_0)||_w = ||L(x_n - x_0)||_w \leqslant A||x_n - x_0||$(bo (5))

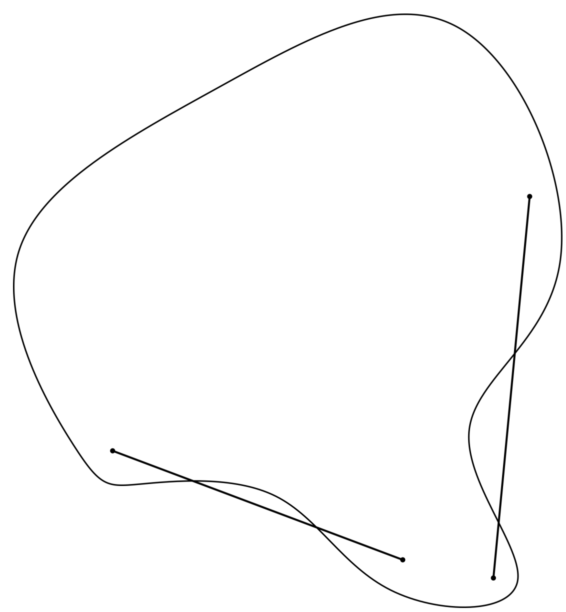
$$0 \leqslant ||L(x_n) - L(x_0)||_w \leqslant A||x_n - x_0||(\text{wszystko dąży do 0}) \quad \square$$

Definicja 6 *Wielkość* $\underset{A}{inf}\{\underset{x\in V}{\forall}||L(x)||_w \leqslant A||x||_v\}$ *nazywamy normą odwzorowania* L *i oznaczamy* $A \overset{ozn}{=} ||L||$.

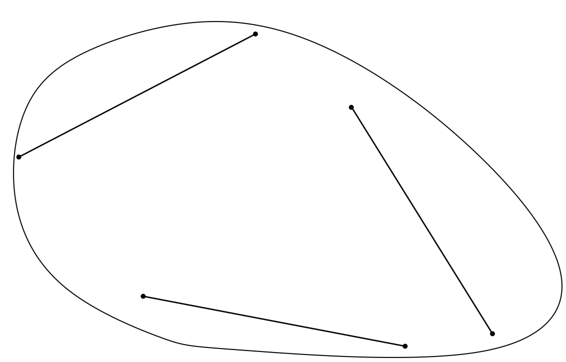
Definicja 7 *Niech* $U \subset \mathbb{R}^m$ *- jest zbiorem wypukłym, jeżeli* $\underset{a,b\in U}{\forall}. \quad [a,b] \overset{def}{=} \{a(1-t)+bt, t\in[0,1]\} \subset U$

Stwierdzenie 2 *Niech* $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, U$ *- otwarte, wypukły* $\underset{M}{\exists}. \underset{x\in U}{\forall}||f'(x)|| \leqslant M$*, to* $\underset{a,b\in U}{\forall}||f(b)-f(a)||_n \leqslant M||b-a||_m$ *(jakiekolwiek skojarzenia z Twierdzeniem Lagrange zupełnie przypadkowe *wink* *wink*)*

Dowód 10



Rysunek 9: zbiór wklęsły



Rysunek 10: zbiór wypukły

niech $\gamma(t) = a(1-t) + bt, t \in [0,1], \quad g(t) = f(\gamma(t)), g : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$

$$\text{Czyli } g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}, \text{ zatem } \|g(1) - g(0)\| = \left\| \begin{bmatrix} g_1(1) - g_1(0) \\ g_2(1) - g_2(0) \\ \vdots \\ g_n(1) - g_n(0) \end{bmatrix} \right\| \overset{\text{Tw. Lagrange!}}{=}$$

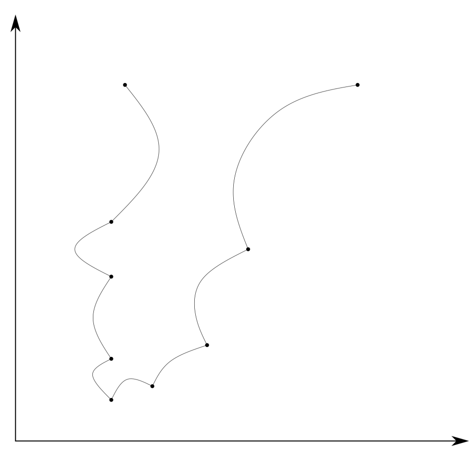
$$= \left\| \underset{0<c_i<1}{\begin{bmatrix} g_1'(c_1)(1-0) \\ g_2'(c_2)(1-0) \\ \vdots \\ g_n'(c_n)(1-0) \end{bmatrix}} \right\| \leqslant \left\| \begin{bmatrix} g_1'(c_1) \\ g_2'(c_2) \\ \vdots \\ g_n'(c_n) \end{bmatrix} \right\| \|1-0\|$$

Ale $g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) \to \|g'(t)\| = \|f'(\gamma(t))(b-a)\| \leqslant \|f'(\gamma(t))\| \, \|b-a\| \underset{\text{z zał. stw.}}{\leqslant} M$

$$\text{Czyli } \underset{t\in[0,1]}{\forall} \|g'(t)\| \leqslant M \|b-a\| \implies \|f(b) - f(a)\| \leqslant M \|b-a\| \quad \square$$

Niech X - unormowana: $P : X \to X, P$ - ciągła na X.
Interesuje nas zbieżność ciągów typu $\{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\}, x_0 \in X$

Definicja 8 *$\tilde{x} \in X$ nazywamy punktem stałym, jeżeli $P(\tilde{x}) = \tilde{x}$*



Twierdzenie 7 *Jeżeli ciąg $\{x_0, P(x_0), \dots\}$ - zbieżny i P - ciągłe, to jest on zbieżny do punktu stałego.*

Dowód 11

Niech $x_n = P^{(n)}(x_0)$. Wiemy, że x_n - zbieżny, oznaczmy granicę tego ciągu przez $\tilde{x}$. Mamy:

$$\underset{\varepsilon_1>0}{\forall} . \underset{N_1}{\exists} . \underset{n>N_1}{\forall} \quad d(x_n, \tilde{x}) < \varepsilon_1 \tag{6}$$

$$\underset{\varepsilon_2>0}{\forall} . \underset{N_2}{\exists} . \underset{n>N_2}{\forall} \quad d(x_{n-1}, \tilde{x}) < \varepsilon_2 \tag{7}$$

P - ciągłe, czyli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} . \underset{\delta}{\exists} . \underset{x'}{\forall} : \quad d(x, x') < \delta \implies d(P(x), P(x')) < \varepsilon, \text{ bo } (6)$$

Chcemy pokazać, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad d(\tilde{x}, P(\tilde{x})) < \varepsilon \tag{8}$$

Ale

$$d(\tilde{x}, P(\tilde{x})) \leqslant d(\tilde{x}, x_n) + d(x_n, P(\tilde{x})) = d(\tilde{x}, x_n) + d(P(x_{n-1}), P(\tilde{x})) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \square \tag{9}$$

Ale z (6) wynika, że $\underset{\varepsilon>0}{\forall} . \underset{\delta}{\exists} \quad d(x_{n-1}, \tilde{x}) < \delta \implies d(P(x_{n-1}), P(\tilde{x})) < \varepsilon$ (10)

Zatem znając ε z (8) przyjmujemy $\varepsilon_1 = \varepsilon$, oprócz tego znajdujemy δ przyjmując $\varepsilon_1 = \varepsilon$, a potem położymy $\varepsilon_2 = \delta$ z (7) i dzięki temu mamy (9)

Niech X - przestrzeń metryczna, odwzorowanie $P : X \to X$ nazywamy zwężającym, jeżeli:

$$\underset{q \in [0,1[}{\exists} . \underset{x,y \in X}{\forall} d(P(x), P(y)) \leqslant q d(x, y) \tag{11}$$

Twierdzenie 8 *(Zasada Banacha o lustrach)*
Jeżeli $P : X \to X, P$ - zwężające, to

1. $\underset{x_0 \in X}{\forall} \quad \{x_0, P(x_0), P(P(x_0)), \dots\}$ *- Zbieżny do punktu stałego* $\tilde{x}$ (12)
2. *Istnieje tylko jedno* $\tilde{x}$ (13)
3. $\underset{m}{\forall} \quad d(x_m, \tilde{x}) < \dfrac{q^m}{1-q} d(x_1, x_0)$ (14)

Przykład 17 *(uwaga)*

(P - nie musi być ciągłe) - potem się okaże, że ciągłość gdzieś tutaj siedzi *implicite*
- lustra w łazience koło sali 1.01 $\to$ można stanąć tak, że jedno jest przed tobą a drugie za tobą i wtedy te odbicia się ciągną w nieskończoność i zbiegają do punktu
- telewizor + kamera która go nagrywa a on wyświetla ten obraz
- mapa położona na podłodze zawiera dokładnie jeden punkt, który się pokrywa z miejscem na którym leży

Dowód 12 *ad. 2*

Załóżmy, że $\underset{\tilde{x}_1,\tilde{x}}{\exists} P(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1, P(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_2, \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$
Wtedy $d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = d(P(\tilde{x}_1), P(\tilde{x}_2)) < qd(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$
Dalej:

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \leqslant qd(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \text{ ale } 0 \leqslant q \leqslant 1, \tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2 \implies \text{ sprzeczność!} \quad \square$$

Obserwacja 2

$d(x_{n+1}, x_n) = d(P(x_n), P(x_{n-1})) \leqslant qd(x_n, x_{n-1}) = qd(P(x_{n-1}), P(x_{n-2})) \leqslant q^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leqslant q^n d(x_1, x_0)$

Co, jeżeli zamiast $n+1$ weźmiemy $n+m$? $d(x_{n+m}, x_n) \leqslant d(x_{n+m}, x_{n+m+1}) + d(x_{n+m-1}, x_n) \leqslant d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + d(x_{n+m-2}, x_n) \leqslant \cdots \leqslant d(x_{n+m}, x_{n+m-1} + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \leqslant (q^{n+m-1} + \cdots + q^{n+2} + q^{n+1} + q^n) d(x_1, x_0) \leqslant q^n \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) d(x_1, x_0) \underset{0 \leqslant q < 1}{\leqslant} \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$

Czyli $d(x_{n+m}, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$
Skoro X - zupełna, to jeżeli x_n - Cauchy, to znaczy, że jest zbieżny w X. Czyli czy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \underset{N}{\exists} \underset{n,m>N}{\forall} \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon?$$

Załóżmy, że $m > n$ i $m = n + k$. Wtedy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \underset{N}{\exists} \underset{n>N}{\forall} \quad d(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon? \text{ TAK!}$$

Dla N takiego, że $\frac{q^N}{1-q} d(x_1, x_0) < \varepsilon$. Stąd wiadomo, że x_n - Cauchy, czyli jest zbieżny. $x_n \to \tilde{x}$, zatem jeżeli $d(x_{n+m}, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \to d(\tilde{x}, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \quad \square$

7 Wykład (19.03.2019)

Twierdzenie 9 *(o lokalnej odwracalności)*

Niech $f : E \to E, E$ *- otwarty,* $E \subset \mathbb{R}^N, f$ *- różniczkowalna w sposób ciągły na* E*.*

$(f$ *- klasy* $\mathcal{C}^1(E)), \underset{a,b\in E}{\exists} : f(a) = b \wedge f'(a)$ *- odwracalna* $(det(f'(a)) \neq 0)$*, to:*

1. $\underset{U,V\subset E}{\exists}, \underset{a\in U, b\in V}{\exists}, U, V$ *- otwarte,* f *- bijekcja między* U, V
2. $\underset{g:V\to U}{\exists} . \underset{x\in V}{\forall}, f(g(x)) = x, g$ *- ciągła i różniczkowalna na* V

Uwaga: Dowód składa się z trzech części:

1. Pokażemy, że $\underset{U,V}{\exists} : f$ - bijekcja na U, V
2. Pokażemy, że U, V - otwarte
3. Pokażemy, że $\underset{g:V\to U}{\exists}, g$ - różniczkowalna na V i ciągła.

Przykład 18

$f(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix}, f'(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$
$det(f'(x, y)) = e^{2x} \neq 0$, ale $f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$ (czyli funkcja jest okresowa)

Dowód 13

Część I:
Szukamy $U, V : f$ - bijekcja miedzy U i V Skoro $f'(a)$ - odwracalne, to znaczy, że $\underset{(f'(a))^{-1}}{\exists}$, zatem $\underset{\lambda}{\exists} : 2\lambda\|(f'(a))^{-1}\| = 1$

Wiemy, że $f'(x)$ - ciągła w $x = a$, czyli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} . \underset{\delta}{\exists} . \underset{x}{\forall}, d(x, a) < \delta \implies \|f'(x) - f(a)\| < \varepsilon \tag{15}$$

Połóżmy $\varepsilon = \lambda$.
Oznacza to, że

$$\underset{\delta_\lambda}{\exists} . \underset{x}{\forall} x \in K(a, \delta_\lambda) \implies \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda \tag{16}$$

Więc $U = K(a, \delta_\lambda)$, niech $V = f(U)$. Chcemy pokazać, że f - bijekcja między U i V.

Wprowadźmy funkcję pomocniczą:

$$\varphi_y(x) = x + [f'(a)]^{-1}(y - f(x)), x, y \in E \tag{17}$$

Pytanie 3 *Co by było gdyby $\varphi_y(x)$ posiadała punkt stały? (jakie własności x by z tego faktu wynikały)*
dla $x \in U, y \in V, (y \in f(a))$?

Z zasady Banacha wiemy, że odwzorowanie zwężające ma dokładnie jeden punkt stały, czyli $\underset{y\in V}{\forall}.\underset{x\in U}{\exists} : f(x) = y$

O f - z taką własnością mówimy, że jest 1-1 na U. (iksa nie obchodzą sąsiedzi, f musi być ciągłe to będzie bijekcja)

Policzmy $\varphi'_y(x) = \mathbb{I} + (f'(a))^{-1}(-f'(x)) = (f'(a))^{-1}(f'(a) - f'(x))$, więc $\|\varphi'_y(x)\| = \|f'(a)^{-1}(f'(a)-f'(x))\| \leqslant \|(f'(a)^{-1})\|\|f'(a)-f'(x)\| \leqslant \underset{x\in U}{\forall} \frac{1}{2\lambda}\lambda = \frac{1}{2}$

Pamiętamy, że jeżeli $\underset{M}{\exists}\|\varphi'_y(x)\| \leqslant M$, to $\underset{x,y}{\forall}\|\varphi(x) - \varphi(y)\| < M\|x - y\|$

Zatem skoro $\|\varphi'_y(x)\| \leqslant \frac{1}{2}$, to

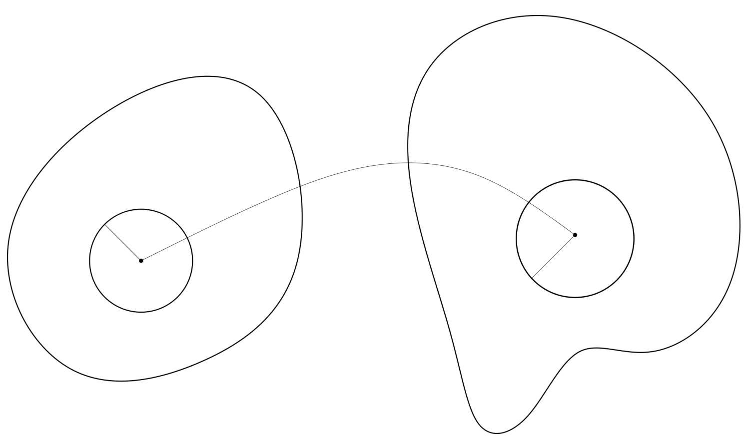
$$\underset{x_1,x_2\in U}{\forall}\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,$$

więc φ - zwężający na U, więc posiada dokładnie jeden punkt stały $\underset{y\in V}{\forall}$. Zatem f - bijekcja między U i V.

Część II - otwartość U i V

1. Zbiór U - otwarty (bo tak go zdefiniowaliśmy) $(U = K(a, \delta_1))$, więc $\underset{x_0\in U}{\exists}, \underset{r}{\exists} K(x_0, r) \subset U$, lub równoważnie $\|x - x_0\| \leqslant r \wedge x \in U$.

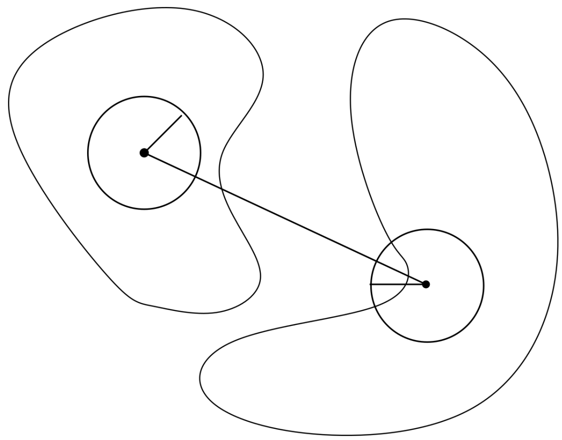
Chcemy pokazać, że dla $y_0 = f(x_0) \underset{K(y_0,\lambda r)\subset V}{\exists}$, czyli że V - otwarty.



Rysunek 11: Trochę jak listy do św. Mikołaja (??)

Weźmy $y \in K(y_0, \lambda r)$. Zauważmy, że $\varphi_{y_1}(x_1)$ - zwężające, jeżeli $y_1 \in V, x_1 \in U$

Jeżeli pokażemy, że dla $\|y - y_0\| < \lambda r, \varphi_y(x)$ - zwężająca na $K(x_0, r) \subset U$, to będziemy wiedzieli, że $\|y - y_0\| < \lambda r$ oraz $y \in V \iff K(y_0, \lambda r) \subset V$



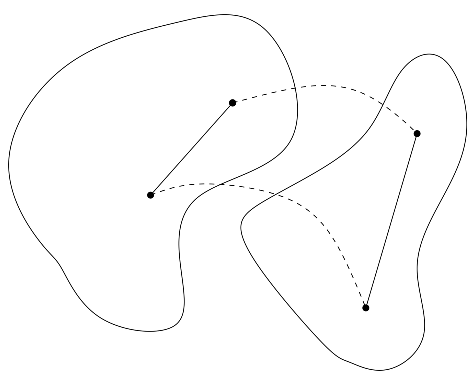
Rysunek 12: Nie ok.

Żeby pokazać, że $\varphi_y(x)$ - zwężające na $K(x_0, r)$, zbadamy tę wielkośc dla $x \in K(x_0, r)$. $\|\varphi_y(x) - x_0\|$, chcielibyśmy, aby $\|\varphi_y(x) - x_0\| \leqslant r$ i $\|y - y_0\| < \lambda r$, ale z drugiej strony

$$\|\varphi_y(x) - x_0\| = \|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0) + \varphi_y(x_0) - x_0\| \leqslant \|\varphi_y(x) - \varphi_y(x_0)\| + \|\varphi y(x_0 - x_0)\|$$

Ale $\|\varphi_y(x_0) - x_0\| \leqslant \|(f'(a))^{-1}\| \|y - y_0\| \leqslant \frac{1}{2\lambda}\lambda r = \frac{r}{2}$, więc $\|\varphi_y(x) - x_0\| \leqslant r$, jeżeli $\|y - y_0\| < \lambda r, \|x - x_0\| \leqslant r$.

Stąd wiemy , że punkt stały dla $\varphi_y(x) : x \in K(x_0, r)$ należy do $K(x_0, r)$ i $\|y - y_0\| < \lambda r$, zatem $y = f(x)$, czyli V - otwarty.



Rysunek 13

Część III:

Szukamy $g : V \to U$

Skoro f - bijekcja między U i V, to znaczy, że $\underset{g:V\to U}{\exists} f(g(x)) = x \underset{x\in V}{\forall}$.

Chcemy pokazać, że $g(x)$ - różniczkowalne. Wiemy, że f - różniczkowalna w

$x \in U$, czyli

$$\frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{\|h\|} \overset{h \to 0}{\to} 0, x, x+h \in V$$

Jeżeli pokażemy, że

$$\frac{g(y+k) - g(y) - [f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} \overset{k \to 0}{\to} 0 \tag{18}$$

to będziemy wiedzieli, że:
1. g - różniczkowalne dla $y \in V$
2. $g'(y) = [f'(x)]^{-1}$.
W tym celu pokażemy, że:
1. $(\|k\| \to 0) \implies (\|h\| \to 0)$
2. $[f'(x)]^{-1}$ istnieje dla $x \in U$. (na razie wiemy, że $(f'(a))^{-1}$ istnieje)

Ad 1. Zauważmy, że

$$\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x) = x + h + [f'(a)]^{-1}(y - f(x+h)) - x - [f'(a)]^{-1}(y - f(x)) =$$

$$= h + [f'(a)]^{-1}(y - f(x+h) - y + f(x)) = h - (f'(a))^{-1}(f(x+h) - f(x)),$$

$$czyli \|\varphi_y(x+h) - \varphi_y(x)\| = \|h - (f'(a))^{-1}(k)\| \leqslant \frac{1}{2}\|h\|,$$

zatem $\|h - (f'(a))^{-1}k\| \leqslant \frac{1}{2}\|h\| \implies \|k\| \geqslant \|h\|, k = f(x+h) - f(x)$

Stąd ostatecznie mamy: $\frac{g(y+k)-g(y)-[f'(x)]^{-1}k}{\|k\|} = [f'(x)]^{-1} \frac{hf'(x)-f(x+h)+f(x)}{\|k\|} \leqslant \frac{[f'(x)]^{-1}}{\lambda} \frac{hf'(x)-f(x+h)+f(x)}{\|h\|} \to 0$, o ile $\underset{[f'(x)]^{-1}}{\exists}$

Pytanie 4 *skąd wiadomo, że $(f'(x))^{-1}$?*

Wiemy, że $f'(a)$ jest odwracalna, więc $(f'(a))^{-1}$ istnieje, $a \in U$.
Chcemy pokazać, że $f'(x)$ jest odwracalna dla $x \in U$. Oznacza to, że

$$0 < \|f'(x)y\| \text{ dla } y \neq 0, x \in U.$$

Pamiętamy, że $2\lambda\|(f'(a))^{-1} = 1$ oraz U - taka, że

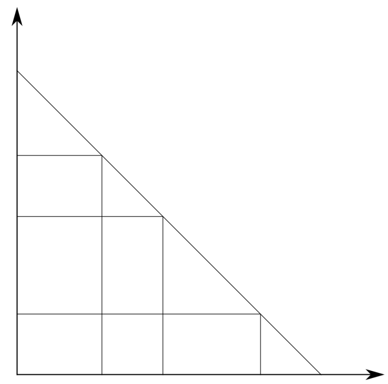
$$\underset{x \in U}{\forall} \|f'(x) - f'(a)\| < \lambda.$$

Zatem

$$0 \leqslant \frac{1}{\|(f'(a))^{-1}\|}\|y\| = \|(f'(x) + f'(a) - f'(x))y\| \leqslant \|f'(a) - f'(x)\|\|y\| + \|f'(x)\|\|y\|.$$

Dalej $2\lambda\|y\| \leqslant \lambda\|y\| + \|f'(x)y\|$ dla $x \in U$
$0 \leqslant \lambda\|y\| \leqslant \|f'(x)y\|$ dla $y = 0$
Czyli

$$\underset{x \in U}{\forall} \|f'(x)y\| > 0 \quad \square.$$



Rysunek 14: (a)

8 Wykład (22.03.2019)

Zabawki działające dzięki wnioskom z Tw. wyżej

Definicja 9 *Funkcje uwikłane*

$$x + y = 1 \quad \text{(a)}.$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{(b)}.$$

$$H(x, y) = \sin x e^{xy} + \operatorname{tg} y - x = 0.$$

Przykład 19 *Równanie gazowe*

$$H(p, V, T) = 0, H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1.$$

$$p(V, T) = 0, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1.$$

$$V(p, T) = 0, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1.$$

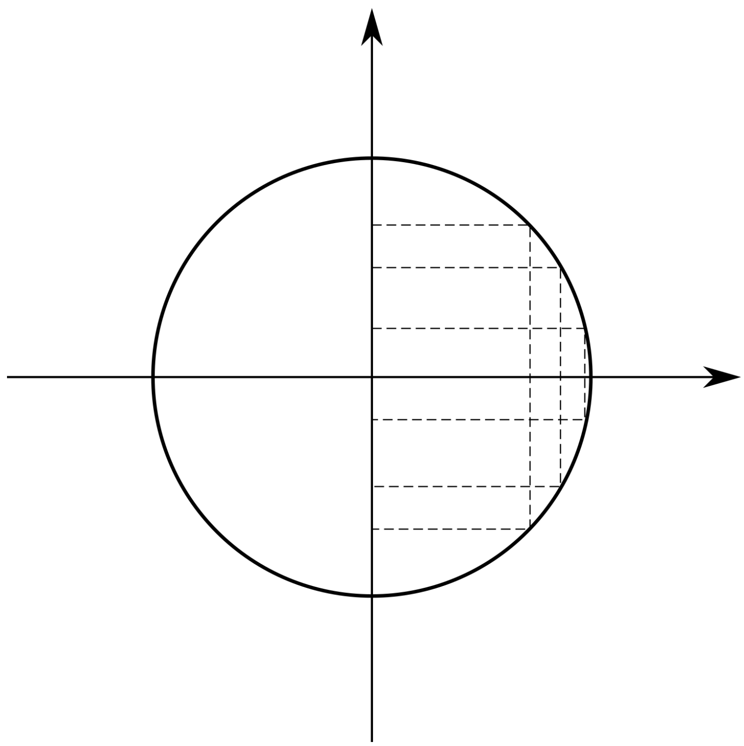
$$T(p, V) = 0, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1.$$

istnienie przedziałów, w których funkcja uwikłana zadaje inne funkcje

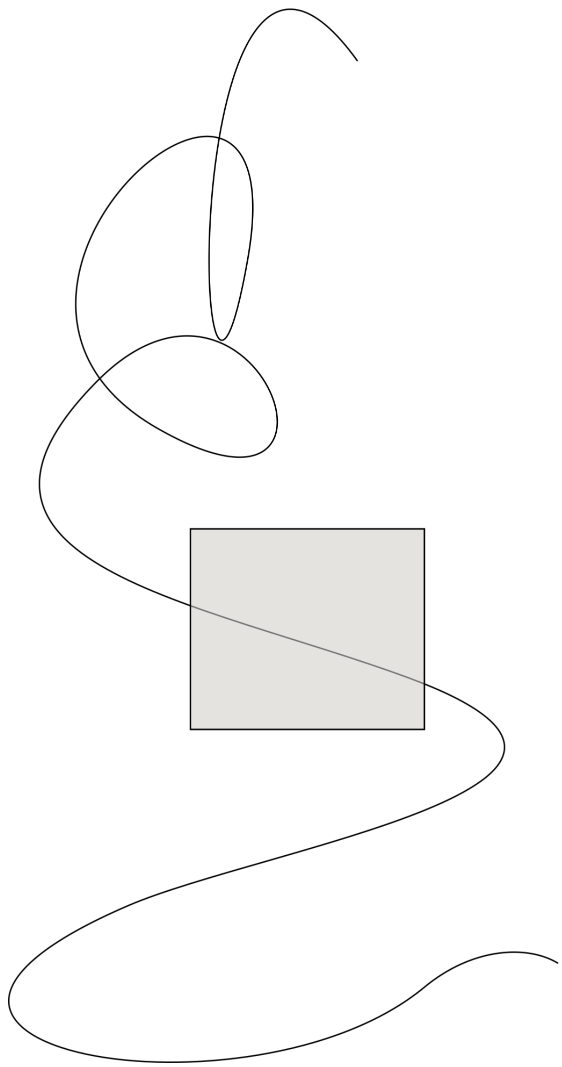
Przykład 20

$$H(x, y) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1.$$

Pytanie 5 *Czy istnieje $y(x) : H(x, y(x)) = 0$, dla $x \in V$?*



Rysunek 15: (b)



Rysunek 16: (c)

$$\frac{dH}{dx}(x, y(x)) = \frac{d}{dx}(H(x, y) \circ g(x)).$$

$$H' = \left[\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}\right].$$

$$g(x) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2, g(x) = \begin{bmatrix} x \\ y(x) \end{bmatrix}, g'(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ y'(x) \end{bmatrix}.$$

$$H'(x, y)g'(x) = 0 \implies \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial y}}.$$

Więc

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-\cos y + ye^{xy} - 1}{xe^y + \frac{1}{\cos^2 y}}.$$

Przykład 21

$$H(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{bmatrix} 2e^{x_1} + x_2x_3 - 4x_3 + 3 \\ x^2 \cos x_1 - 6x_1 + 2x_3 - x_5, H : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3 \end{bmatrix}.$$

$$H(x_1, \ldots, x_5) = 0 \text{ może zadać funkcję } g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2.$$

$$x_4(x_1, x_2, x_3), x_5(x_1, x_2, x_3).$$

$$g(x_1, g_2, g_3) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, x_3) \\ g_2(x_1, x_2, x_3 \end{bmatrix}.$$

Obserwacja 3 $H(0, 1, 3, 2, 7) = 0$

$$H : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2, H(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 0.$$

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = \begin{bmatrix} H_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \\ H_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_2) \end{bmatrix}.$$

Pytanie 6 *Czy* $H(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 0$ *zadaje nam*

$$g_1(y_1, y_2, y_3).$$

$$g_2(y_1, y_2, y_3)?$$

czyli $g(y_1, y_2, y_3) = \begin{bmatrix} g_1(y_1, y_2, y_3) \\ g_2(y_1, y_2, y_3) \end{bmatrix}, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$H_1(g_1(y_1, y_2, y_3), g_2(y_1, y_2, y_3), y_1, y_2, y_3) = 0.$$

$$H_2(g_1(y_1, y_2, y_3), g_2(y_1, y_2, y_3), y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Szukamy g'.

$$g' = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \frac{\partial g_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \frac{\partial g_3}{\partial y_3} \end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_2}+\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_1}+\frac{\partial H_1}{\partial y_1}=0.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_3}+\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_1}+\frac{\partial H_1}{\partial y_1}=0.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_3}+\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_3}+\frac{\partial H_1}{\partial y_3}=0.$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_1}+\frac{\partial H_2}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_1}+\frac{\partial H_2}{\partial y_1}=0.$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_2}+\frac{\partial H_2}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_2}+\frac{\partial H_2}{\partial y_2}=0.$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_3}+\frac{\partial H_2}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_3}+\frac{\partial H_2}{\partial y_3}=0.$$

napięcie rośnie (6 równań oho)

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \frac{\partial H_1}{\partial x)2}\\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} & \frac{\partial H_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}}_{H'_x}\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \frac{\partial g_1}{\partial y_3}\\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2}{\partial y_3}\end{bmatrix}}_{g'}=-\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial H_1}{\partial y_1} & \frac{\partial H_1}{\partial y_2} & \frac{\partial H_1}{\partial y_3}\\ \frac{\partial H_2}{\partial y_1} & \frac{\partial H_2}{\partial y_2} & \frac{\partial H_2}{\partial p_3}\end{bmatrix}}_{H'_y}.$$

$$H'_x g'=-H'_y \implies g'=-(H'_x)^{-1}H'_y.$$

Twierdzenie 10 *(o funkcji uwikłanej)*
Niech $H: E\subset\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^m, H\in\mathcal{C}^1$ *na* E. $(x_0,y_0)\in E, H(x_0,y_0)=0, (x_0,y_0)=(x_0^1,\dots,x_0^n,y_0^1,\dots,y_0^m), H$ *- odwracalna.*
Wówczas istnieje $U\subset E$ *takie, że* $(x_0,y_0)\in U, \underset{W\subset\mathbb{R}^n}{\exists}$, *że* $x_0\in W, \underset{x\in W}{\forall}\underset{y}{\exists!}H(x,y)=0, (x,y)\in U$.
Jeżeli $y=\varphi(x)$, *to* $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *i* $\varphi\in\mathcal{C}^1$ *na* W. $\varphi'(x)=-(H'_y)^{-1}H'_x$

Dowód 14 *Oznaczenia:*

$$H(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^m)=\begin{bmatrix}H^1(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^m)\\ \vdots\\ H^2(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^m)\end{bmatrix}.$$

$$H'_y=\begin{bmatrix}\frac{\partial H^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial H^1}{\partial y^n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial H^m}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial H^m}{\partial y^n}\end{bmatrix}, H'_x=\begin{bmatrix}\frac{\partial H^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial H^1}{\partial x^n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial H^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial H^m}{\partial x^n}\end{bmatrix}.$$

Wprowadźmy funkcję $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$

$$F(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \\ H^1(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) \\ \vdots \\ H^m(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) \end{bmatrix}.$$

Jakie własności ma F*?*

$$F(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ale

$$F' = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \\ & H'_x & & H'_y \end{bmatrix}, \det F' = \det H'_y.$$

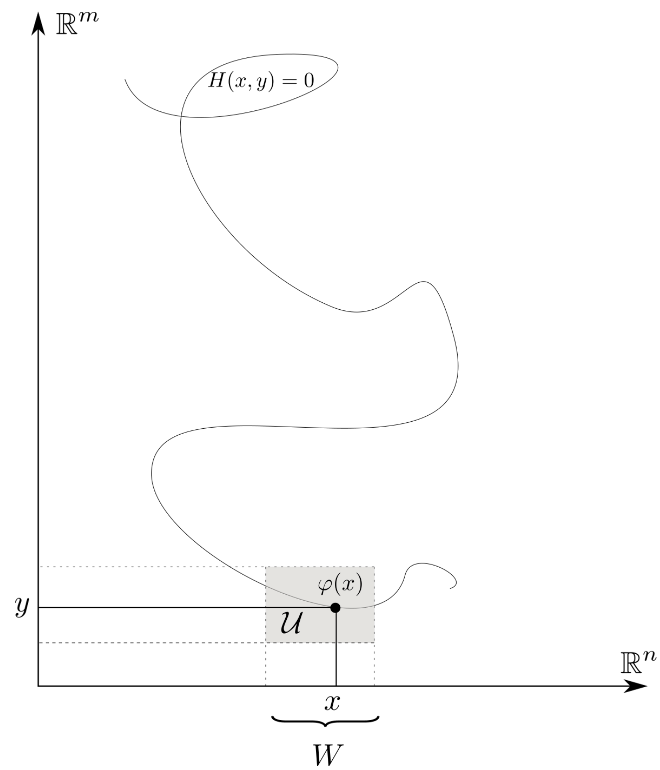
Jeżeli $H'_y(x_0, y_0)$ *- odwracalna, to* $F'(x_0, y_0)$ *- też. Oznacza to (na podstawie tw. o lokalnej odwracalności), że*

$$\underset{U \subset \mathbb{R}^{n+m}}{\exists}, (x_0, y_0) \in U, \underset{V \subset \mathbb{R}^{n+m}}{\exists}, (x_0, 0) \in V.,$$

że F *jest bijekcją między* U *i* V *oraz* $\exists F^{-1} : V \to U, F^{-1}$ *- różniczkowalna taka, że*

$$F^{-1}(x, \alpha) = (a(x, \alpha), b(x, \alpha)), x, \alpha \in V.,$$

gdzie $a(x, \alpha) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n, \quad b(x, \alpha) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$



Rysunek 17

9 Wykład (26.03.2019)

końcówka dowodu:

Dla $(x', y') \in \mathcal{V}$,

$$F^{-1}(x', y') = (a(x', y'), b(x', y')).$$

Wiemy, że $a : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ i $b : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ istnieją i są różniczkowalne, bo F^{-1} istnieje. Co jeszcze wiemy o funkcjach a i b?
Wiemy że

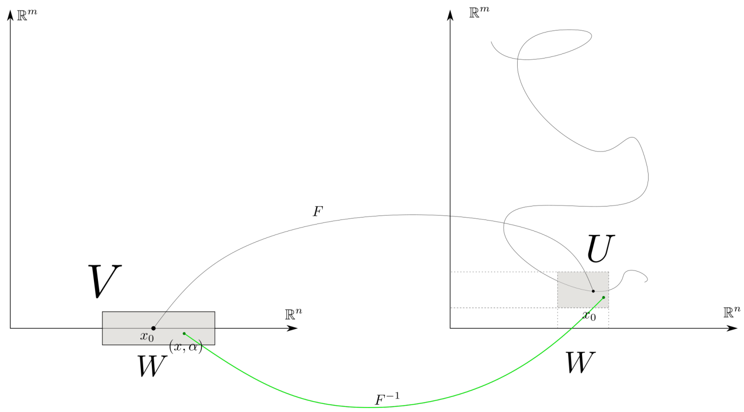
$$(x', y') = F(F^{-1}(x', y') = F(\underbrace{a(x', y')}_{n}, \underbrace{b(x', y')}_{m}).$$

Oznacza to, że

$$a(x', y') = x'.$$

Czyli $a(x', y')$ jest identycznością, czyli:

$$(x', y') = F(x', b(x', y')) \implies x' = x \implies (x, y') = F(x, b(x, y')).$$



Rysunek 18

Czyli jeżeli $y = b(x, 0)$, to wtedy

$$F(x, y) = (x, 0), \text{ czyli } (x, H(x, y)) = (x, 0).$$

Czyli dla $y = (x, 0)$ otrzymujemy, że

$$H(x, y) = 0.$$

Jeżeli oznaczymy $b(x, 0) \overset{\text{ozn}}{=} \varphi(x)$, to znaczy, że znaleźliśmy funkcję $\varphi(x), \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ taką, że

$$H(x, \varphi(x)) = 0 \quad \square.$$

Definicja 10 *Ekstrema związane*

przykład:

$$f(x, y) = x+y, \quad G(x, y) = (x-1)^1+(y-1)^2-1, \quad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, G(x, y) = 0\right\}.$$

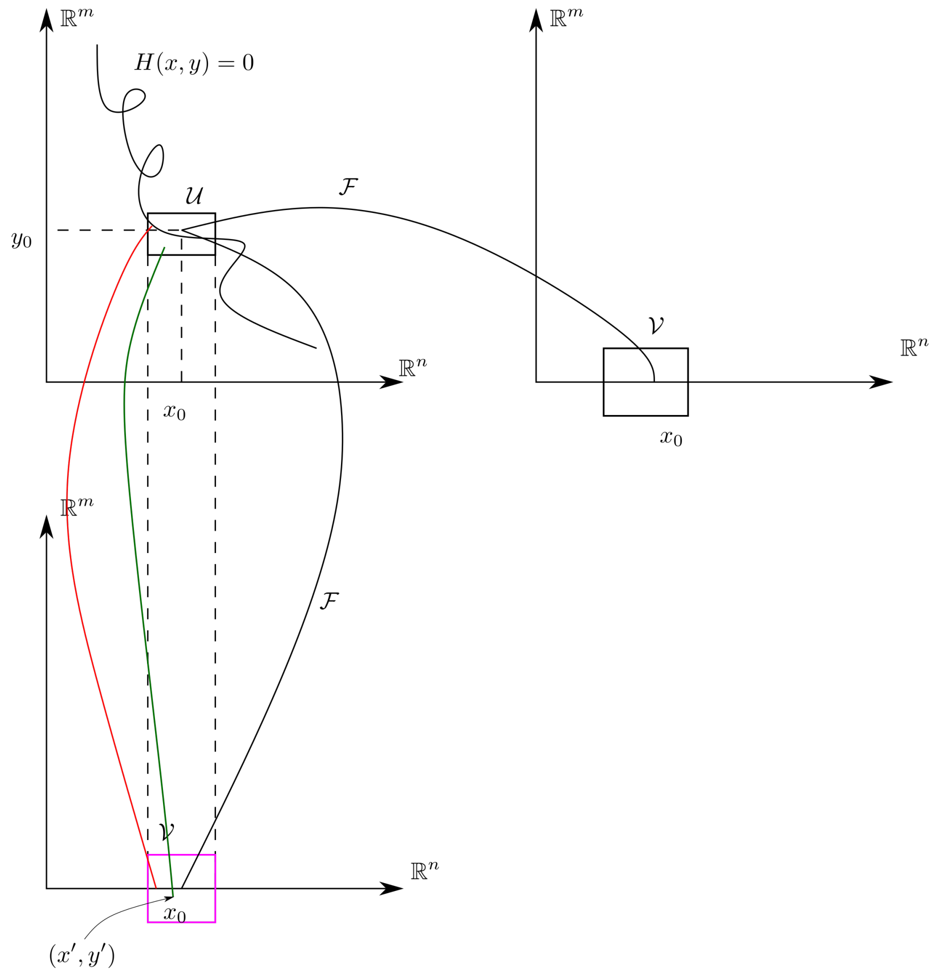
Szukamy minimum lub maksimum f na M

Rozważmy linię o stałej wartości $x + y$

Definicja 11 *Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ i $M \subset \mathbb{R}^n$ - zbiór.*
Mówimy, że f ma minimum/maksimum związane na zbiorze M, w punkcie $x_0 \in M$, jeżeli

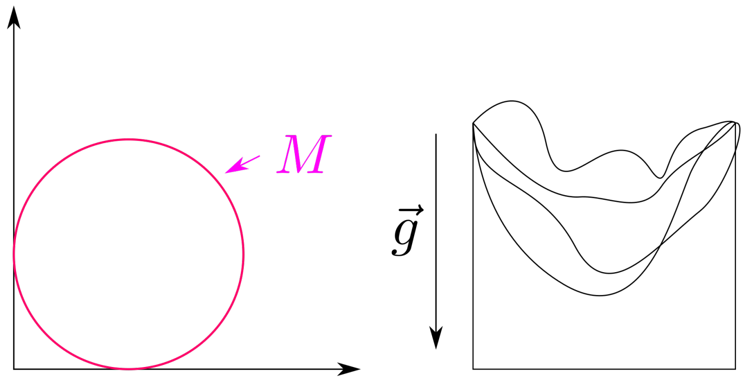
$$\underset{r}{\exists} \underset{\substack{h \\ \|h\|<r \\ (x_0+h)\in M}}{\forall} f(x_0 + h) \leqslant f(x_0).$$

Ekstrema związane podejście I

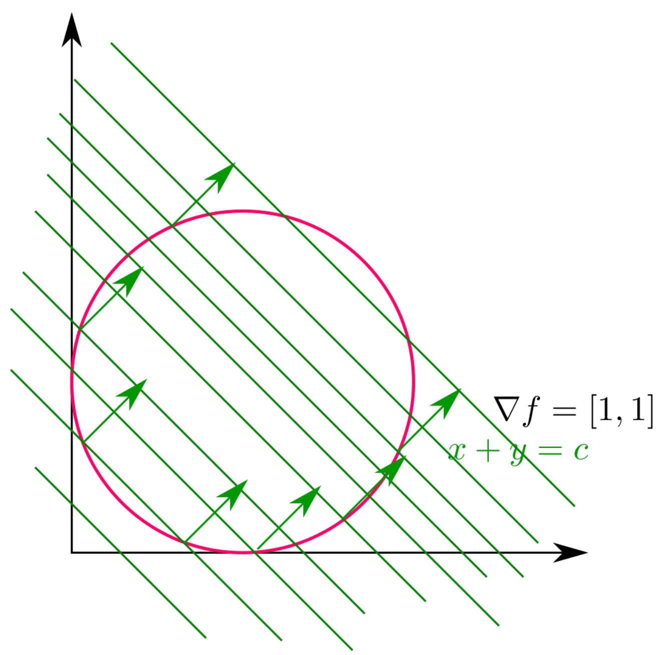


$\mathbb{R}^m$
$H(x,y)=0$
$\mathcal{F}$
$\mathcal{U}$
y_0
$\mathbb{R}^n$
x_0
$\mathbb{R}^m$
$\mathcal{V}$
$\mathbb{R}^n$
x_0
$\mathbb{R}^m$
$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$
$\mathbb{R}^n$
x_0
(x', y')

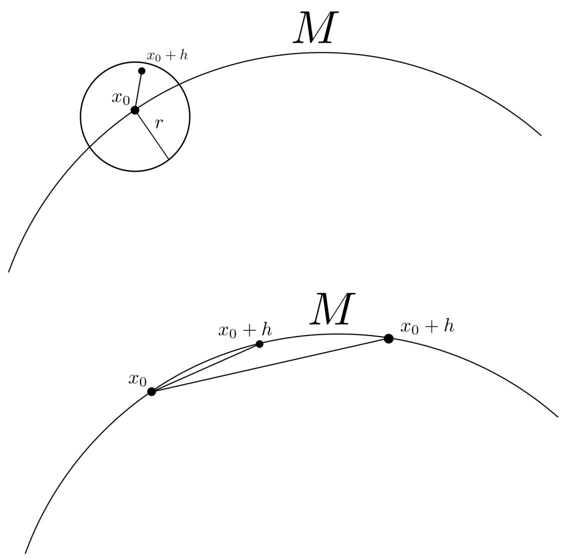
Rysunek 19



Rysunek 20: $G(x, y)$ i sznurek o stałej długości w polu grawitacyjnym



Rysunek 21: Biedronka łazi po obręczy rowerowej z włączonym wentylatorem, gdzie wyląduje???



Rysunek 22

Niech $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$
$G(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$
$M = \{(x,y), G(x,y) = 0\}$ Szukamy minimum/maksimum f. Można wyliczyć $y(x)$ z więzów, wstawić do f i zbadać ekstrema funkcji jednej zmiennej $g(x) = f(x, y(x))$. Kiedy nie umiemy wyliczyć $y(x)$ z więzów, możemy założyć, że $y(x)$ jednak istnieje i $G(x, y(x)) = 0$. Wtedy:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}.$$

$$\text{czyli: } g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{-\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}} = 0 \implies \underline{\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}}.$$

A co by było, gdyby $G(x,y) = 0$ zadawał funkcję $x(y)$?

$$G(x(y), y) = 0.$$

Czyli badalibyśmy wtedy funkcję

$$P(y) = f(x(y), y) \quad P'(y) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

ale

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} \implies \frac{\partial f}{\partial x}\frac{-\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x} \tag{19}$$

Co oznacza warunek 19?
Wiemy, że

$$f' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] G' = \left[\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}\right], \text{ czyli.}$$

$$V = [A, B] \quad W = [C, D] \text{ i } AD = BC.$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Stąd wiadomo, że

$$A = B\lambda, \quad C = D\lambda.$$

$$V = [B\lambda, B], \quad B = [\lambda, 1], \quad W = [D\lambda, D], \quad D = [\lambda, 1].$$

Czyli warunek na to, aby $G'(x) = 0$, albo $P'(y) = 0$ oznacza, że

$$\underset{\substack{\lambda\in\mathbb{R}\\ \lambda\neq 0}}{\exists} f' = \lambda G', \quad G(x, y) = C.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial G}{\partial y} = 0 \tag{20}$$

Wielkość λ często nazywa się *mnożnikiem Lagrange*

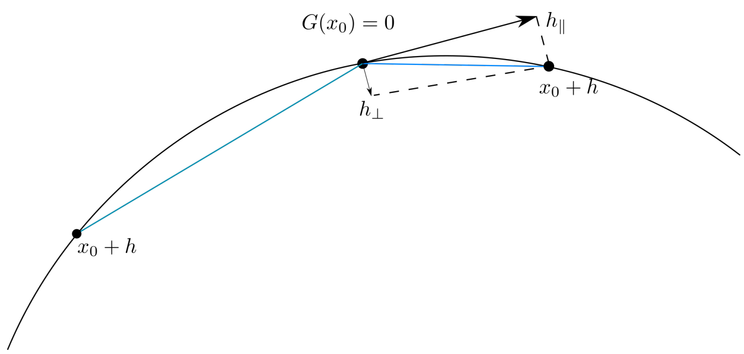
Obserwacja 4 *Do warunku (20) można dojść na sktóry przez funkcję $H(x, y) = f(x, y) - \lambda G(x, y)$ i badanie $H(x, y)$ tak, jakby była to funkcja $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ bez żadnych więzów.*

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0\,(\ + \textit{warunek } G(x, y) = 0).$$

Pytanie 7 *Co ze zbadaniem $G''(x)$ lub $P''(y)$?*
Odpowiedź: lepiej inaczej. . . (XD), to znaczy, potrzebujemy nowego języka.

Przy liczeniu ekstremów funkcji jednej zmiennej badaliśmy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \tilde{=} f''(x_0)(h, h).$$



Rysunek 23