Ostatnio było:

$$A \subset D : \underset{x \in A}{\forall} \mathcal{O}(f, x) < \varepsilon; A - \text{kostka, to}$$
$$\underset{\Pi}{\exists} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon |A|.$$

Twierdzenie 1 *(Lebesgue'a) niech D - kostka, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, f - ograniczona.*
Wówczas f - (całkowalna na D) $\iff$ (zbiór nieciągłości funkcji f jest miary Lebesgue'a zero)

Dowód 1 $\Longleftarrow$
Chcemy pokazać, że

$$\underset{\Pi}{\exists} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon,$$

przy założeniu, że zbiór nieciągłośći jest miary L. zero.

Wprowadźmy zbiór $A_n = \left\{x \in D, \mathcal{O}(f, x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$

$$np.\ A_2 = \left\{x \in D, \mathcal{O}(f, x) \geqslant \frac{1}{2}\right\}.$$

Obserwacja 1 $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$
a zbiór $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *będzie zbiorem wszystkich punktów nieciągłości funkcji f na D.*

Tw. Lebesgue'a udowodnimy dla wybranego A_n, bo przeliczalna suma zbiórów miary L. zero też jest zbiorem miary L. zero.

Uwaga 1 *Zbiór A_n jest zbiorem domkniętym (bo lemat).*
Wiemy, że A_n jest zbiorem miary L. zero gdy itnieje $P_i \subset D$, (P_i - kostki), że $A_n \subset \bigcup P_i$, $\sum |P_i|$ - dowolnie mała (skończona lub nieskończona suma).

Niech $\varepsilon > 0$*. Wiemy, że*

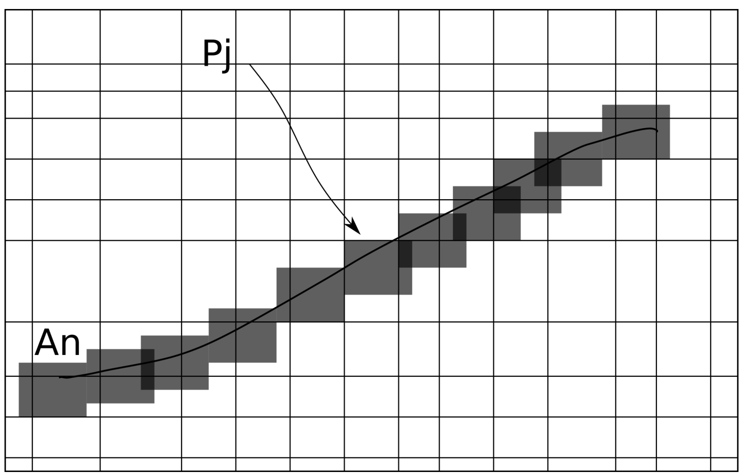
$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\,.\underset{N}{\exists}.\,\underset{n>N}{\forall}\,\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Wybierzmy zatem taki indeks n *dla zbioru* A_n*, że* $\frac{1}{n} < \varepsilon$*. Wiemy, że* A_n *- domknięty i ograniczony (bo* $A_n \subset D$*, a* D *- kostka w* $\mathbb{R}^n$*), to znaczy, że* A_n *jest zbiorem zwartym, a* $\{P_i\}$ *jest jego pokryciem. Możemy więc wybrać z niej skończone podpokrycie* $\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ *takie, że*

$$A_n \subset \bigcup_{j=1}^{k} P_j$$

$$\sum_{j=1}^{k} |P_j| < \frac{1}{n}.$$

(możemy tak zrobić, bo zawsze możemy wybrać taką rodzinę $\{P_i\}$*, że* $\sum |P_i|$ *- dowolnie mała. Wybierzmy podział* Π *zbioru* D *taki, że* Π *jest na tyle drobny, że*



odtwarza pokrycie A_n *zbioru* $\bigcup P_j$*. Oznacza to, że podział* Π *możemy podzielić na dwa podziały*

$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2, \textit{ takie że}$$
$$\Delta$$
$$\Pi_1 \cap \left\{ \bigcup_j P_j \right\} \neq \phi$$
$$\textit{oraz } \Pi_2 \cap \left\{ \bigcup_j P_j \right\} = \phi.$$

Δ *: każda kostka z* $\{P_j\}$ *składa się z kostek należących do* Π_1

$|\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi)| = |\overline{S}(f,\Pi_1) - \underline{(}f,\Pi_1) + \overline{S}(f,\Pi_2) - \underline{S}(f,\Pi_2)|$, *ale*

$$\overline{S}(f,\Pi_1) - \underline{S}(f,\Pi_1) = \sum_{Q_i \in \Pi_i} (\underset{x \in Q_i}{sup} f - \underset{x \in Q_I}{inf} f) Q_i| \tag{1}$$

Gdzie wiemy, że $\sum |Q_i| < \frac{1}{n}$, *a* f *- ograniczona na* D *czyli*

$$\underset{M}{\exists}.\underset{x \in D}{\forall} |f(x)| < \frac{M}{4}.$$

Czyli

$$|\sup_{x \in D} f - \inf_{x \in D} f| < M.$$

Zatem

$$\textit{(1)} \leqslant M \cdot \sum |Q_i| \leqslant M \cdot \frac{1}{n}.$$

Ale

$$\overline{S}(f,\Pi_2) - \underline{S}(f,\Pi_2) = \sum_{R_j \in \Pi_2} (\sup_{x \in R_j} f - \inf_{x \in R_j} f)|R_j|$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \sum |R_j| \leqslant \frac{1}{n}|D|.$$

Zatem

$$|\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) \leqslant M \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n}|D| = \frac{1}{n} \cdot const.$$

czyli możemy tak zwiększyć n, *że* $\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \frac{1}{n} \cdot const < \varepsilon \quad \square$
Dlaczego wynika z tego prawdziwość dowodu dla całego A*?*
np. dla A_{2019} *działa, ale co dalej. Bo* A_k *dla* $k > n$ *też spełniają warunek, że* $\frac{1}{k} \cdot const < \varepsilon$, *a* A_j *dla* $j < n$ *jest takie, że* $A_j \subset A_n$
$\Longrightarrow$
Wiemy, że f *- całkowalne, czyli*

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall}.\underset{\Pi}{\exists} |\overset{S}{(}f,\Pi) - \underset{S}{(}f,\Pi)| < \varepsilon/n.$$

(chcemy pokazać, że A_n *jest zbiorem miary L. zero)*

$$\Pi = \{T_i\}$$
$$\frac{\varepsilon}{n} > |\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi)| =$$
$$\sum |\sup_{x \in T_i} f - \inf_{x \in T_i} f||T_i|(*).$$

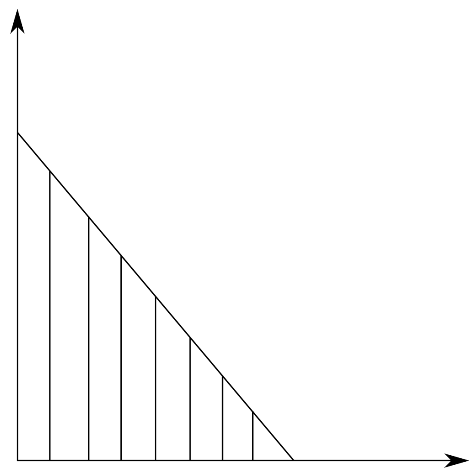
z podziału T_i wybieram takie kostki P_i, że $|\sup_{x\in P_i} f - \inf_{x\in P_i} f \geqslant \frac{1}{n}$.
Wówczas

$$(*) \geqslant \sum_{P_i} \frac{1}{n}|P_i| = \frac{1}{n}\sum |P_i|$$

$$\textit{czyli } \underset{\varepsilon>0}{\forall} \frac{\varepsilon}{n} > \frac{1}{n}\sum |P_i|, \textit{ gdzie } P_i \textit{ jest pokryciem } A_n.$$

Czyli A_n jest zbiorem miary L. zero $\square$

Przykład 1 $f(x,y) = x\sin(xy), \quad A = [0,1]\times[0,1]$
$\int_A f \overset{?}{=} \int_0^1 \varphi_1(x)dx \overset{?}{=} \int_0^1 \varphi_2(y)dy$,
gdzie $\varphi_1(x) = \int_0^1 x\sin(xy)dy$, $\varphi_2(y) = \int_0^1 x\sin(xy)dx$



Rysunek 1: życie było by proste gdybyśmy mogli tak robić

$$\int_A f = \int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x,y) \overset{?}{=} \int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x,y).$$

Twierdzenie 2 *(Fubiniego)*
Niech $f : A\times B \to \mathbb{R}$. $A\subset\mathbb{R}^l, B\subset\mathbb{R}^k, A\times B\subset\mathbb{R}^n$, *$f$ - ograniczona i całkowalna na $A\times B$. Oznaczmy $x^l \in A, y^k \in B$, A, B - kostki.*
Niech

$$\varphi(x) = \overline{\int_B} f(x^l,y^k)dy^k, \psi(x) = \underline{\int_B} f(x^l,y^k)dy^k.$$

Wówczas

$$\int_{A\times B} f = \int_A \varphi = \int_A \psi.$$

Uwaga 2 *całkowalnośc na $A \times B$ nie oznacza całkowalności na np. B.*

Dowód 2 *Niech $\{Q_i\} = \Pi_1$ - podział zbioru A, $\{R_j\} = \Pi_2$ - podział zbioru B. Wówczas $\Pi_1 \times \Pi_2$ - podział $A \times B$.*

$$\begin{aligned}
&\underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) = \\
&= \sum_{\substack{Q_i \\ R_j}} \inf_{\substack{x \in Q_i \\ y \in R_j}} f(x,y)|Q_i||R_j| \leqslant \\
&\sum_{Q_i} \sum_{R_j} \inf_{x \in Q_i} \inf_{y \in R_j} f(x,y)|Q_i||R_j| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{Q_i} \inf_{x \in Q_i} \underbrace{\sum_{R_j} \inf_{y \in R_j} f(x,y)|R_j|}_{\textit{suma dolna dla } \psi(x)} |Q_i| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{Q_i} \underbrace{\inf_{x \in Q_i} \psi(x)|Q_i|}_{\textit{bo suma dolna} \leqslant \textit{całki dolnej}} = \underset{S}{(}\psi, \Pi_1).
\end{aligned}$$

Ale $\underline{\int_A}\psi(x) = \sup_{\Pi} \left| \sum_{Q_i} \inf_{x \in Q_i} \psi(x)|Q_i| \right|$.
Czyli $\underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) \leqslant \underline{S}(\psi, \Pi_1)$. *Analogicznie możemy pokazać, że*

$$\underline{S}(\psi, \Pi_1) \leqslant \underline{S}(\varphi, \Pi_1) \leqslant \overline{S}(\varphi, \Pi_1) \leqslant \overline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2).$$

Zatem

$$\underline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) \leqslant \underline{\underline{S}(\psi, \Pi_1)} \leqslant \overline{S}(\psi, \Pi_1) \leqslant \underline{\overline{S}(\varphi, \Pi_1)} \leqslant \overline{S}(f, \Pi_1 \times \Pi_2).$$

Skoro f - całkowalna na $A \times B$, to

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} . \underset{\Pi}{\exists} |\overline{S}(f, \Pi) - \underline{S}(f, \Pi)| < \varepsilon.$$

Co oznacza, że $\int_A \psi$ i $\int_B \varphi$ - istnieją i wynoszą $\int_{A \times B} f$ $\square$