$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1,\quad G:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\quad M=\{x: G(x)=0\}\,.$$

Badamy różnicę $f(x_0+h)-f(x_0)$ (jest fajna bo możemy ją rozwinąć ze wzoru Taylora)
Próbujemy ożenić te języki. Zbadajmy $G'(x)$.

- $G'(x)$ - jest macierzą $[G']_{m,n}$

$$G(x_1,\dots,x_n)=\begin{bmatrix} G^1(x_1,\dots,x_n)\\ G^2(x_1,\dots,x_n)\\ \vdots\\ G^m(x_1,\dots,x_n)\end{bmatrix}.$$

$$[G'(x)]=\begin{bmatrix}\frac{\partial G^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial G^1}{\partial x^n}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial G^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial G^m}{\partial x^n}\end{bmatrix}.$$

$$[G'(x)]:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m.$$

Pytanie 1 *Jaki jest "wymiar" zbioru M?*

Albo, jeżeli $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, to wiąż $G(x)=0$ zadaje funkcję

$$\varphi(x):\mathbb{R}^{n-m}\to\mathbb{R}^m.$$

Taką, że $G(x^1,\dots,x^{n-m},\varphi^1(x^1,\dots,x^{n-m}),\dots,\varphi^m(x^1,\dots,x^{n-m}))$, (jeżeli $\det G_y(x)\neq 0$)

Jeżeli $\det G'_y(x)\neq 0$, to znaczy, że w macierzy

$$G'=\begin{bmatrix}\frac{\partial G_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x^{n-m}} & \frac{\partial G_1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial y^m}\\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial G_m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial G_m}{\partial x^{n-m}} & \frac{\partial G_m}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial G_m}{\partial y^m}\end{bmatrix}.$$

Gdzie $x\overset{\text{ozn}}{=}(x^1,\dots,x^{n-m},y^1,\dots,y^m)$. Żeby podkreślić to, że niektóre współrzędne $(y^1,\dots,y^m)$ można uzyskać z innych $(x^1,\dots,x^{n-m})$ poprzez funkcję $\varphi: x=\varphi(y)$

Gdy założymy, że $\det G'_y\neq 0$, to znaczy, że
m-liniowo niezależnych kolumn, bo

$$\dim imG'(x)=m=\dim\mathbb{R}^m \text{ i } G'(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m.$$

Oznacza to, że

$$\dim\ker G'(x)=n-m.$$

(tw. o rzędzie (paweł odpalił kiedyś))

Oznaczmy $X_1 = \ker G'(x)$ i $X_2 = imG'(x)$ $(\dim X_1 = n - m, \dim X_2 = m)$ Oznacza to, że każdy wektor $h \in \mathbb{R}^n$ da się przedstawić jako $h = h_1 + h_2, h_1 \in X_1, h_2 \in X_2$ czyli $\mathbb{R}^n = X_1 \bigoplus X_2$

Oznacza to, że możemy tak wybrać bazę, że

$$X_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n-m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, X_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} \right\}, \quad x^1, \dots, x^{n-m}, y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}.$$

Co więcej,

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi^1(x^1, \dots, x^{n-m}) \\ \vdots \\ \varphi^m(x^1, \dots, x^{n-m}) \end{bmatrix}, \quad x^i \in \mathcal{O} : \det(G'_y) \neq 0.$$

A co możemy powiedzieć o wierszach $G'(x)$? - jest ich m i są liniowo niezależne

Jeżeli $h = h_1 + h_2, \quad h_1 \in X_1, h_2 \in X_2$, to możemy powiedzieć, że

$$h_2 = \varphi(h_1).$$

Zatem dalej piszemy

$$h_2 = \varphi(0 + h_1) = \varphi(0) + \varphi'(0)h_1 + r(0, h_1).$$

gdzie $(r\frac{0,h_1}{\|h_1\|} \underset{\|h_1\| \to 0}{\longrightarrow} 0)$ (bo z tw. o funkcji uwikłanej wiemy, że φ - różniczkowalna, co więcej $\varphi' = -(G'_y)^{-1}G'_x$ a $\varphi'(0) = -(G'_y(0))^{-1}G'_x(0)$ czyli $\varphi'(0)h_1 = -(G'_y(0))^{-1}G'_x(0)h_1 = 0$

Zatem

$$h_2 = \varphi(h_1) = r(0, h_1).$$

gdzie

$$\frac{r(0, h_1)}{\|h_1\|} \underset{h_1 \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

czyli h_2 maleje szybciej niż $\|h_1\|$

Chcemy zbadać różnicę

$$f(x_0 + h) - f(x_0).$$

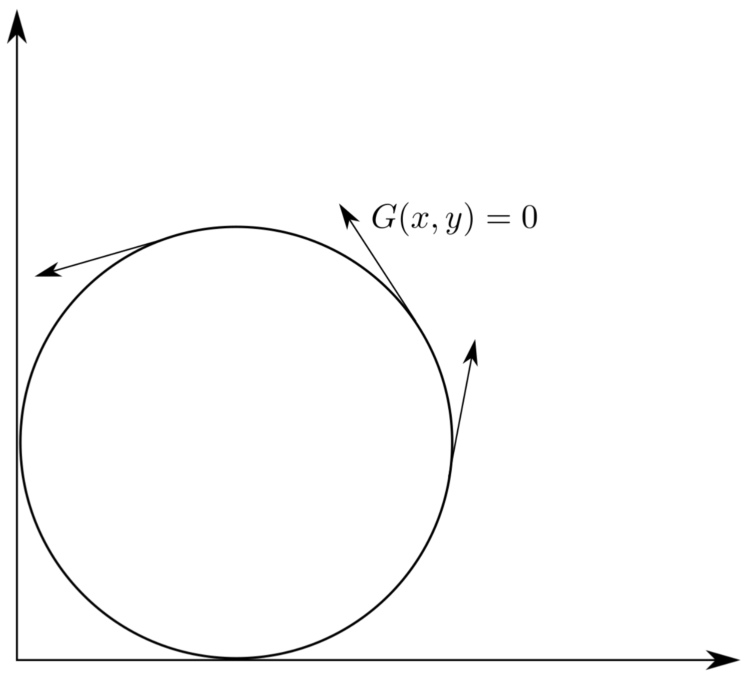
Skoro $h \in \mathbb{R}^n$, to możemy przedstawić h jako

$$h = h_\parallel + h_\perp, \quad h_\parallel \in X_1, h_\perp \in X_2.$$

czyli

$$G'(x_0)h_{\|} = 0?.$$

Przykład 1 *niech* $G(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 1$, $G' = (2(x-1), 2(y-1))$



Rysunek 1: biedronka i szprycha

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + h_\perp + h_{\|}) - f(x_0).$$

W małym otoczeniu h będzie bardziej decydował $h_{\|}$, bo zawsze mogę zmniejszyć h i w efekcie $h_\perp$ się zmniejszy