Przykład 1 *funkcje wielu zmiennych:*

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$
$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^4$
$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^6$
$\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^1$
$\mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^1$

Niech $X \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in X, Y \subset \mathbb{R}^m$. Mówimy, że odwzorowanie $T : X \to Y$ jest ciągłe, jeżeli

$$\underset{x_n \to x_0}{\forall}, T(x_n) \to T(x_0)$$

UWAGA: $x_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Pytanie: Czy ciągłość w $\mathbb{R}^n \iff$ ciągłosc w $\mathbb{R}^1$?

Przykład 2 *Niech funkcja*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq y \end{cases}$$

czy f - ciągła w $(0,0)$? dla trajektorii I:

$$\lim_{y_n \to 0}(\lim_{x_n \to 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{y_n \to 0}(0) = 0$$

dla trajektorii II:

$$\lim_{x_n \to 0}(\lim_{y_n \to 0} f(x_n, y_n)) = \lim_{x_n \to 0}(0) = 0$$

weźmy $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq \lim_{x_n \to 0, y_n \to 0} f(0,0)$$

(X, d_X) - przestrzeń wektorowa z metryką d_X,
(Y, d_Y) - p.w. z metryką d_Y

Niech $x_0 \in X$. Mówimy, że $T : X \to Y$ - ciągłe, jeżeli

$$\underset{\epsilon > 0}{\forall} \ \underset{\delta}{\exists} \ \underset{x \in X}{\forall}, \quad d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x_0), T(x)) < \epsilon$$

Dowód 1 *Heine* $\iff$ *Cauchy*

Rysunek 1: trajektoria I i II

$\Longrightarrow_{\text{(przez sprzeczność)}}$:

zakładamy, że

$$\underset{x_n \to x_0}{\forall} T(x_n) \to T(x_0) \quad \wedge \quad \underset{\epsilon>0}{\exists}, \underset{\delta<0}{\forall}, \underset{x\in X}{\exists} (*) : d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x_n), T(x_0)) \geqslant \epsilon$$

Skoro $T(x_n) \to T(x_0) \underset{x_n \to x_0}{\forall}$, to w szczególności warunek spełniony dla ciągu, który jest taki:

skoro $(*)$, to dla $\epsilon > 0$ weźmy $\delta = 1$,

$$\underset{x_1}{\exists} \quad d_X(x_1, x_0) < 1 \wedge d_Y(T(x_1), T(x_0)) \geqslant \epsilon$$

$\delta = \frac{1}{2}$:

$$\underset{x_2}{\exists} \quad d_X(x_2, x_0) < \frac{1}{2} \wedge d_Y(T(x_2), T(x_0)) \geqslant \epsilon$$

$\delta = \frac{1}{3}$:

$$\underset{x_3}{\exists} \quad d_X(x_3, x_0) < \frac{1}{3} \wedge d_Y(T(x_3), T(x_0)) \geqslant \epsilon$$

$$\vdots$$

$\delta = \frac{1}{n}$:

$$\underset{x_n}{\exists} \quad d_X(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \wedge d_Y(T(x_n), T(x_0)) \geqslant \epsilon$$

Zauważmy, że taki ciąg $x_n \to x_0 \wedge T(x_n) \not\to T(x_0)$ i sprzeczność $\square$

$\Longleftarrow$ Wiemy, że $\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{x}{\exists}. d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(T(x), T(x_0)) < \epsilon$ (trójkąt),

oraz, że $x_n \to x_0$, czyli:

$$\underset{\delta_1}{\forall} \underset{N}{\exists} \underset{n>N}{\forall} \quad d_X(x_n, x_0) < \delta_1 (\text{trójkąt2})$$

Chcemy pokazać, że $T(x_n) \to T(x_0)$, czyli, że

$$\underset{\epsilon_1>0}{\forall} \underset{N_1}{\exists} \underset{n>N_1}{\forall} \quad d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \epsilon_1 (\text{dla } x_n \to x_0)$$

Przyjmijmy $\epsilon = \epsilon_1$. Oznacza to, że $\underset{\delta}{\exists}$ spełniająca warunek (trójkąt) dla ϵ_1. Połóżmy $\delta_1 = \delta$ we wzorze (trójkąt2), czyli wiemy, że

$$\underset{N}{\exists} \underset{n>N}{\forall} \quad d_X(x_n, x_0) < \delta_1,$$

ale na mocy (trójkąt), wiemy, że

$$d_Y(T(x_n), T(x_0)) < \epsilon_1 \square$$

0.1 Różniczkowalność:

Niech $\mathbb{O} \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{O}$ - otwarty, $f : \mathbb{O} \to \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{Q}, x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$

Mówimy, że f ma w punkcie x pochodną cząstkową w kierunku x^k, jeżeli istnieje granica $g = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0 + h, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h} \equiv \frac{\partial}{\partial x} f\Big|_{x=x_0}$

Przykład 3 *różniczkowalność*

Niech $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$. $\frac{\partial}{\partial x} f = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$, $\frac{\partial}{\partial y} f = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$.

UWAGA: do policzenia pochodnej czątkowej potrzebujemy układu współrzędnych, tj. (rys) Niech $\mathbb{O} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{O}$ - otwarte, $x_0 \in \mathbb{O}, e \in \mathbb{O}, T : \mathbb{O} \to \mathbb{R}$.

Mówimy, że T ma w x_0 pochodną kierunkową (*spoiler:* pochodną słabą), jeżeli istnieje granica

$$g = \lim_{t \to 0} \frac{T(x_0 + te) - T(x_0)}{t} \equiv \nabla_e T(x_0)$$

0.2 Obserwacja:

Jeżeli np. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, e_x = (1, 0)$ i $e_y = (0, 1)$, to

$$\nabla_{e_x} T = \frac{\partial}{\partial x} T \text{ i } \nabla_{e_y} T = \frac{\partial}{\partial y} T$$

Przykład 4

$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Wówczas $x_0 + te = (0 + t1, 0)$, $x_0 = (0,0), e_x = \binom{1}{0}$

$$\nabla_{e_x} f|_x = (0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{|t0|} - \sqrt{|00|}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} f \bigg|_{(0,0)}$$

UWAGA: $f(x) = \sqrt{x}, \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \pm\infty$

Przykład 5

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq y \end{cases}$$

$e = \binom{h_1}{h_2}$. Pochodna: $\nabla_e f|_{x=(0,0)}, (x_0 + te = (th_1, th_2))$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0,0)}{t} = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2} = \frac{h_2^2}{h_1}$$