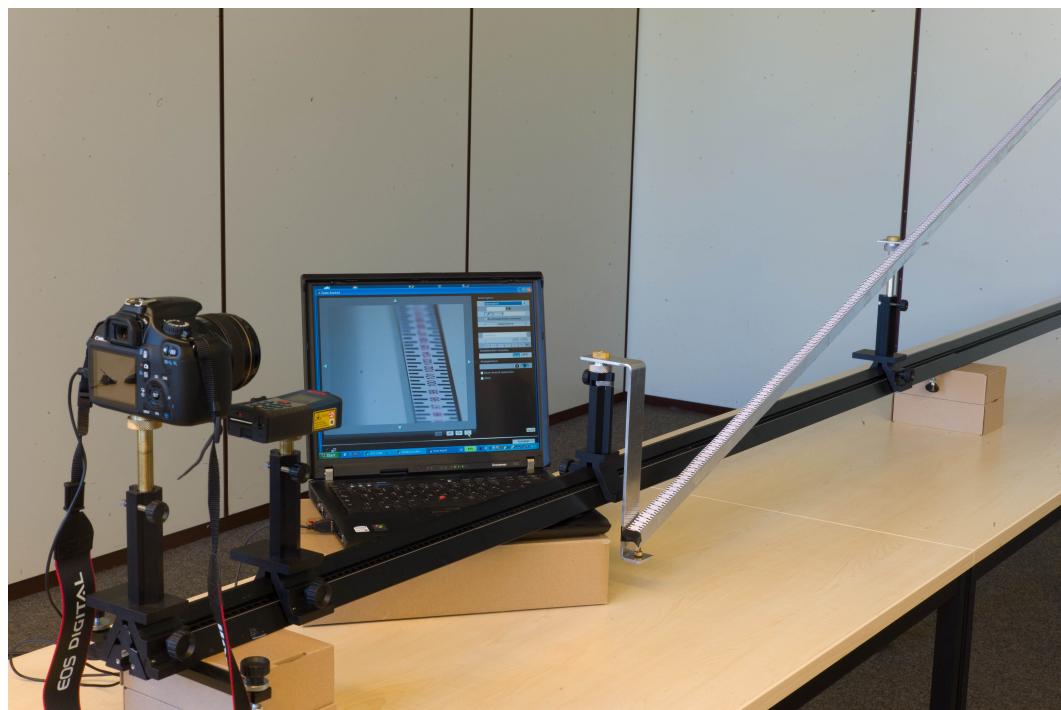


**Grundpraktikum Physik
Teil II**

RWTH Aachen

I. Physikalisches Institut B

Dr. Th. Kirn, Prof. Dr. F. Raupach, Prof. Dr. St. Schael



<http://accms04.physik.rwth-aachen.de/~praktapp>
Version vom 29.01.2015

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung	7
0.1 Arbeitsablauf	8
0.1.1 Blockpraktikum in der vorlesungsfreien Zeit nach dem Semester	8
0.1.2 Semesterbegleitendes Praktikum	9
0.2 Benutzung der Notebooks	10
0.3 Versuchsvorbereitung	10
0.4 Bewertung	10
0.5 Zeitlicher Ablauf	11
1 Wellen	13
1.1 Versuchsziele	13
1.2 Grundlagen	14
1.3 Versuche mit Ultraschall	19
1.3.1 Versuchsaufbau	19
1.3.2 Versuchsdurchführung	20
1.4 Versuche mit elektromagnetischen Mikrowellen	28
1.4.1 Versuchsaufbau	28
1.4.2 Versuchsdurchführung	30
2 Optik I	39
2.1 Geometrical Optics	39
2.1.1 Theory	40
2.1.2 Experimental Setup	45
2.1.3 Carrying out the Experiment	47
2.2 Diffraction	50
2.2.1 Theory	50
2.2.2 Experimental Setup	55
2.2.3 Conducting the Experiment	56
2.2.4 Appendix	59
2.3 Die visuelle Schärfentiefe	64
2.3.1 Einleitung	64
2.3.2 Grundlagen	64
2.3.3 Versuch	75
2.3.4 Kameraeinstellungen und Objektive	82

2.3.5	Anhang	83
2.4	Spektrometer	91
2.4.1	Prismenspektrometer	91
2.4.2	Gitterspektrometer	108
3	Optik II - Interferometrie	119
3.1	Grundlagen	121
3.1.1	Herleitung der Interferenzbedingung für Maxima	122
3.2	Aufbau des Michelson-Interferometers	125
3.2.1	Laser als Lichtquelle	127
3.2.2	Spiegel und Strahlteiler	127
3.3	Durchführung	128
3.3.1	Vorjustierung	128
3.3.2	Erzeugung der Interferenzringe	129
3.4	Wellenlängenbestimmung	131
3.4.1	Grundlagen	131
3.4.2	Aufbau zur Wellenlängenbestimmung	132
3.4.3	Versuchsdurchführung	134
3.4.4	Auswertung	135
3.5	Druckabhängigkeit des Brechungsindex von Luft	137
3.5.1	Grundlagen	137
3.5.2	Aufbau zur Bestimmung von $n_{Luft}(P)$	138
3.5.3	Durchführung	141
3.5.4	Auswertung	142
3.6	Bestimmung des Brechungsindex von CO ₂	143
3.6.1	Grundlagen	143
3.6.2	Aufbau	144
3.6.3	Durchführung	145
3.6.4	Auswertung	145
3.7	Abschlussbemerkungen	146
3.8	Anhang	147
3.8.1	Anhang A: Phywe Bedienungsanleitung: DIN-Laser	147
3.8.2	Anhang B: Phywe Betriebsanleitung: Handmeßgerät Druck und Drucksensor	153
4	Elektrizitätslehre	161
4.1	Grundlagen, Definitionen	162
4.1.1	Wechselstromwiderstände	164
4.2	Vorversuche	167
4.2.1	Kalibration Spannungsmessgeräte	167
4.2.2	Kalibration Strommessgeräte	168
4.3	Hauptversuche zu Wechselstromschwingkreisen	170
4.3.1	Serienschwingkreis von L, R und C	170
4.3.2	Parallelschwingkreis von L, R und C	176

4.4	Eigenständige Versuche	183
4.5	Anhang	184
5	Atomphysik - Millikan-Versuch	187
5.1	Millikan-Versuch	187
5.1.1	Einleitung	189
5.1.2	Theorie	190
5.1.3	Teile des Versuchs	194
5.1.4	Messanleitung	196
5.1.5	Hinweise zur Auswertung des Versuchs	206
5.1.6	Betrachtung verschiedener Fehlerquellen	211
5.2	Der Versuch zur Temperaturstrahlung	227
5.2.1	Einleitung und Aufgaben	227
5.2.2	Theorie	227
5.2.3	Versuchsdurchführung	232
5.2.4	Auswertung	237
5.2.5	Fehlerbetrachtung	240
5.2.6	Quellenangaben	241
5.2.7	Anhang: Betriebsanleitung Thermosäule	242

Kapitel 0

Einleitung

In dem Grundpraktikum für Physiker und Mathematiker (Bachelor und Lehramt) sollen die Studenten moderne Arbeitsmethoden in der Physik kennen- und anwenden lernen. Dabei sollen folgende Kompetenzen erworben werden:

- Anwendung physikalischen Wissens aus den Vorlesungen
- Aufbau eines Experimentes
- Computerunterstützte Messung und Auswertung
- Präsentation der Ergebnisse
- Arbeiten in der Gruppe

Die Studenten sollen sich intensiv mit dem Versuch, dem physikalischen Hintergrund, den Messmethoden und der Auswertung der Daten auseinandersetzen. Für jedes Versuchsgebiet stehen daher für die Durchführung und Auswertung jeweils zwei Tage im Blockpraktikum und drei Tage im semesterbegleitenden Praktikum zur Verfügung.

Das Praktikum wird wie folgt gegliedert:

- Die Studenten erarbeiten insgesamt vier Versuche aus den Arbeitsgebieten: Atomphysik, Elektrizitätslehre, Optik und Wellenlehre.
- Der Stoff orientiert sich an den Vorlesungen Experimentalphysik I,II und III, in denen die physikalischen Grundlagen vermittelt worden sind..
- Eine Arbeitsgruppe besteht aus maximal vier Studenten und einem Tutor. Jeder Tutor betreut einen Versuch während des Praktikums und jeweils zwei Arbeitsgruppen gleichzeitig.
- Maximal drei Arbeitsgruppen arbeiten in einem Raum unter der Betreuung von zwei Tutoren.

Zu Beginn des Praktikums gibt es eine einführende Veranstaltung, in der den Studenten die Voraussetzungen, Gruppeneinteilungen, Praktikumsregeln, Labor- und Sicherheitshinweise etc. vermittelt werden.

0.1 Arbeitsablauf

Die Tutoren wählen aus, welchen Versuch aus einem Arbeitsgebiet die Studenten durchführen werden. Dies ist natürlich nur in dem Umfang möglich, wie es die vorhandenen Versuchsaufbauten zulassen. Die Studenten müssen sich daher auf alle Versuche eines Arbeitsgebietes vorbereiten. Jeder Student aus einer Gruppe muss während des Praktikums mindestens einmal die Ergebnisse der Gruppe präsentiert haben. Das Praktikum endet mit einem Abschlusstest.

0.1.1 Blockpraktikum in der vorlesungsfreien Zeit nach dem Semester

Das Praktikum wird im Sommersemester (Wintersemester) für 192 (48) Studenten ausgelegt, die in 48 (12) Arbeitsgruppen A01-A12 (A01-A03), B01-B12 (B01-B03), C01-C012 (C01-C03) und D01-D12 (D01-D03) eingeteilt werden. Die Gruppen sind vormittags (von 08:30 Uhr bis 13:00 Uhr) im Wechsel jeweils drei Tage aktiv und bereiten einen Tag die Versuche vor.

- 1. Tag: **Anwesenheitspflicht vormittags von 08:30 bis 13:00 Uhr**

Der Versuchstag beginnt mit einer Vorbesprechung mit dem Tutor, während dieser geeignete Versuchsaufbauten, -durchführungen und -auswertungen erarbeitet werden sollen. Danach erfolgt der Versuchsaufbau mit der Inbetriebnahme aller für die Messung erforderlicher Geräte sowie des Computers. Pro Arbeitsgruppe sollen zwei Versuchsaufbauten in Betrieb genommen werden, die identisch oder unterschiedlich sein können, je nach Fragestellung. Die Messdaten werden aufgezeichnet und die Auswertung soweit durchgeführt, dass erste, vorläufige Ergebnisse diskutiert werden können. Die Versuchsaufbauten/-einstellungen, die Namen der Dateien und die vorläufigen Ergebnisse werden in Form eines Messprotokolls dokumentiert. Der Vormittag endet mit der Rückgabe der Versuchsaufbauten und der Computer. Die Tutoren zeichnen die Messprotokolle ab. Die Messprotokolle sowie auf einen Datenträger gespeicherte Versuchsdaten und Analyseprogramme werden später an das erstellte Protokoll angehängt. Ohne die abgezeichneten Messprotokolle, Daten oder Auswertungsprogramme wird der Versuch als nicht bestanden gewertet. Zur weiteren Versuchsauswertung steht nachmittags der CIP-Pool der Physik zur Verfügung.

- 2. Tag:

Die Auswertung der Versuche wird im CIP-Pool der Physik oder auf eigenen Computern zu Hause weitergeführt und abgeschlossen. Das Protokoll wird von der Arbeitsgruppe gemeinsam erarbeitet.

- 3. Tag: **Anwesenheitspflicht nachmittags von 14:00 bis 18:30 Uhr**

Die Arbeitsgruppe gibt vormittags bis 10:00 Uhr ein Protokoll ab in den aufgestellten Kästen vor den Räumen MBP2 203 und 204 des Modulbaus 2 der Physik, welches die Messergebnisse beider Versuchsaufbauten beschreibt und vergleicht. Die Arbeitsgruppe arbeitet die Präsentation zu dem Versuch aus. Die Tutoren lesen und bewerten das

Protokoll. Nachmittags von 14:00 bis 18:30 Uhr werden die Versuchsergebnisse in den Arbeitsgruppen präsentiert und diskutiert. Die Präsentation erfolgt für die maximal drei Arbeitsgruppen, die an dem gleichen Arbeitsgebiet experimentiert haben, zusammen in einem Raum. Im Anschluss werden die Protokolle mit den Tuto ren besprochen.

0.1.2 Semesterbegleitendes Praktikum

Das Praktikum im Semester ist für 48 Studenten ausgelegt, die in 12 Arbeitsgruppen A01-A12 eingeteilt werden. Die Gruppen sind am Versuchstag vormittags von 09:00 Uhr bis 13:00 Uhr aktiv. Die Versuchsdurchführungen werden alternierend mit den Protokollbesprechungen und Präsentationen durchgeführt.

- **Versuchstag: Anwesenheitspflicht vormittags von 09:00 bis 13:00 Uhr**

Der Versuchstag beginnt mit einer Vorbesprechung mit dem Tutor, während dieser geeignete Versuchsaufbauten, -durchführungen und -auswertungen erarbeitet werden sollen. Danach erfolgt der Versuchsaufbau mit der Inbetriebnahme aller für die Messung erforderlicher Geräte sowie des Computers. Pro Arbeitsgruppe sollen zwei Versuchsaufbauten in Betrieb genommen werden, die identisch oder unterschiedlich sein können, je nach Fragestellung. Die Messdaten werden aufgezeichnet und die Auswertung soweit durchgeführt, dass erste, vorläufige Ergebnisse diskutiert werden können. Die Versuchsaufbauten/-einstellungen, die Namen der Dateien und die vorläufigen Ergebnisse werden in Form eines Messprotokolls dokumentiert. Der Vormittag endet mit der Rückgabe der Versuchsaufbauten und der Computer. Die Tuto ren zeichnen die Messprotokolle ab. Die Messprotokolle sowie auf einen Datenträger gespeicherte Versuchsdaten und Analyseprogramme werden später an das erstellte Protokoll angehängt. Ohne die abgezeichneten Messprotokolle, Daten oder Auswertungsprogramme wird der Versuch als nicht bestanden gewertet. Zur weiteren Versuchsauswertung steht nachmittags der CIP-Pool der Physik zur Verfügung.

- **Versuchsauswertung und Protokollerstellung, -abgabe:**

Die Auswertung der Versuche wird im CIP-Pool der Physik oder auf eigenen Computern zu Hause weitergeführt und abgeschlossen. Das Protokoll wird von der Arbeitsgruppe gemeinsam erarbeitet, welches die Messergebnisse beider Versuchsaufbauten beschreibt und gegebenenfalls vergleicht. Die Abgabe des Protokolls muss Montag vormittags bis 10:00 Uhr elektronisch (email-Adresse wird in der Einführung bekannt gegeben) oder persönlich im Sekretariat des I. Physikalischen Institutes B, Raum 28C207, erfolgen.

- **Präsentationstag: Anwesenheitspflicht vormittags von 09:00 bis 13:00 Uhr**

Die Arbeitsgruppe präsentiert den Versuch (Aufbau, Durchführung, Auswertung und Interpretation) in Form einer elektronischen Folien-Präsentation. Die Präsentation erfolgt für die maximal drei Arbeitsgruppen, die an dem gleichen Arbeitsgebiet experimentiert haben, zusammen im Versuchsräum. Im Anschluss werden die Protokolle mit den Tuto ren besprochen.

0.2 Benutzung der Notebooks

Für die Durchführung der Versuche erhält jede Arbeitsgruppe zwei Notebooks mit WLAN-Verbindung. **Die Praktikumsteilnehmer benötigen dazu den bei der Immatrikulation durch das Rechenzentrum zugewiesenen Zugang.** Die Notebooks stehen nur für die Arbeiten im Praktikum zur Verfügung und können nicht mit nach Hause genommen werden. Auf den Notebooks läuft als Betriebssystem Windows 7 und die für die Versuchsdurchführung benötigten Messwerterfassungsprogramme sind installiert. Für die Präsentationen steht das OpenOffice Packet zur Verfügung. Die statistischen Auswertungen der Versuche (Mittelwerte, lineare Regression, etc.) sollen mit MAPLE, PYTHON oder ROOT durchgeführt werden.

Die Studenten haben nur Schreibzugriff auf den User-Bereich. Als ersten Arbeitsschritt legt jede Arbeitsgruppe, sobald sie ein Notebook erhält, im User-Bereich ein Verzeichnis mit dem Gruppennamen an. In diesem Verzeichnis sollten alle Dateien, die zu dem Versuch gehören, abgespeichert werden und am Ende der Arbeitsphase auf Datenträger kopiert werden. Der User-Bereich wird bei jedem Wechsel zwischen den Gruppen gelöscht, so dass alle ungesicherten Daten unwiederbringlich verloren sind.

Private Notebooks sind erlaubt. Der Besitzer ist für den erfolgreichen Einsatz zur Messwerterfassung eigenverantwortlich.

0.3 Versuchsvorbereitung

Die Versuchsbeschreibungen sollen den Studenten eine Vorbereitung auf den Versuch ermöglichen und eine Anleitung für die Versuchsdurchführung sein. Die physikalischen Grundlagen zu den Versuchsthemen werden in den Versuchsanleitungen nur bedingt hergeleitet. Es ist daher unerlässlich, entsprechende Physikbücher für die Vorbereitung zu verwenden. Besonders geeignet sind die folgenden Bücher:

- W. Walcher, "Praktikum der Physik", Teubner Taschenbuch.
- Demtröder, "Experimentalphysik", Band 1 und 2.
- P.A. Tipler, "Physik", Spektrum Verlag.
- Gerthsen, Kneser, Vogel, "Physik", Springer Verlag

0.4 Bewertung

Die Teilnahme an den vier Versuchs- und Präsentationsterminen ist Pflicht! Jeder Versuch muss mit der Bewertung **OK** bestanden werden!

Studenten, die aus Krankheitsgründen an einem Termin entschuldigt fehlen (ärztliches Attest muss vorgelegt werden), müssen den Versuch nachholen. Bei zwei fehlenden Versuchen muss das Praktikum wiederholt werden.

Vorbereitung:

Während der Vorbesprechung zu Beginn eines Versuchstages werden die physikalischen Grundlagen zu den Versuchsthemen, sowie die Versuchsdurchführung und Auswertung besprochen. Wenn der Student nicht vorbereitet ist, kann er an dem Versuch nicht teilnehmen! Studenten die einmal nicht auf einen Versuch vorbereitet sind, müssen den Versuch nachholen, bei zweimaliger Nichtvorbereitung gilt das Praktikum als **nicht bestanden**.

Protokoll:

Die max. vier Studenten einer Gruppe geben ein gemeinsames Protokoll ab. Die Tutoren lesen und bewerten das Protokoll. Der Versuch gilt als bestanden, wenn die Bewertung **OK** erfolgt. Sollte das Protokoll mit **Nicht OK** bewertet werden, kann das Protokoll einmal korrigiert und am nächsten Versuchstag wiedervorgelegt werden.

Präsentation:

Jeder Student einer Arbeitsgruppe muss mindestens einmal die Ergebnisse seiner Gruppe präsentieren. Die Präsentation wird für den vortragenden Studenten einer Gruppe gewertet. Die Präsentation gilt als bestanden bei der Bewertung **OK**. Bei der Bewertung **Nicht OK** kann die Präsentation einmal überarbeitet und am nächsten Tag wiederholt werden.

Nicht selbsterarbeitete Versuchsergebnisse, Protokolle oder Präsentationen werden als Täuschungsversuch und das Praktikum als nicht bestanden bewertet.

Abschlusstest und Gesamtnote:

Am Ende des Grundpraktikums wird ein Abschlusstest durchgeführt. Aus der im Abschluss- test gezeigten Leistung ermittelt sich die Endnote für das physikalische Grundpraktikum. Der Abschlusstest gilt als **bestanden**, wenn mindestens eine ausreichende Leistung erreicht wurde. Er gilt als **nicht bestanden**, wenn eine nicht ausreichende Leistung erreicht wurde, dann gilt das Praktikum als **nicht bestanden**.

0.5 Zeitlicher Ablauf

Das Praktikum beginnt mit der Einführungsveranstaltung und endet mit dem Abschlusstest. Der zeitliche Ablauf des Praktikums, die Raumeinteilung, sowie die Einteilung der Studenten in die Arbeitsgruppen und in den Abschlusstest werden gesondert bekannt gegeben.

Kapitel 1

Wellen

1.1 Versuchsziele

Vorbemerkung: Die Versuchsbeschreibung befasst sich hauptsächlich mit den in diesem Versuch zu messenden Phänomenen und behandelt deswegen nur deren Hintergrund. Zum Verständnis des Versuches ist aber oft auch die Kenntnis des gesamten Hintergrundes (z.B. die Herleitung der Wellengleichung) von Nöten. In dieser Anleitung werden einige Aufgaben gestellt, deren Lösen bei der Vorbereitung auf den Versuch hilfreich sind.

Vorsicht: Selbst in einigen guten Lehrbüchern sind gewisse Herleitungen und Aussagen (z.B. die Eulerschen Gleichungen, Lage der Maxima bei Einzelspalt) nicht richtig niedergeschrieben.

Es werden unterschiedliche Phänomene von Zentimeterwellen untersucht. Die Messungen werden entweder mit Ultraschallwellen ($\lambda \approx 1\text{cm}$) oder mit elektromagnetischen Mikrowellen ($\lambda \approx 3\text{cm}$) durchgeführt. Vorversuche zum Versuchsaufbau sind Kalibration der Strecken-, Winkel- und Intensitätsmessung. Danach folgen die Hauptmessungen:

- Bestimmung der Wellenlänge
- Beugungs- und Interferenzeffekte an Spalten
- Brechungs-, Reflexions- und Polarisationsphänomene

1.2 Grundlagen

Kenntnisse: Wellengleichung mit Herleitung für Schall und elektromagnetische Wellen, Kugelwellen, ebene Wellen, Intensität, Überlagerung, Beugungs-, Brechungs- und Polarisationsphänomene

Wellen sind Störungen einer Feldgröße $a(\vec{x}, t)$, die in Raum und Zeit fortschreiten. Bei ungedämpfter Ausbreitung werden sie durch folgende Wellengleichung beschrieben:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} a(\vec{x}, t) = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) a(\vec{x}, t) \quad (1.1)$$

Im Falle von **Schallwellen** sind die Feldgrößen der Schalldruck p und die Schallschnelle u . Da der Schalldruck eine skalare Größe ist und die Schallschnelle in Ausbreitungsrichtung liegt, handelt es sich bei Schall in Gasen um longitudinale Wellen. Grundlagen für die Herleitung der Wellengleichung und die funktionalen Zusammenhänge sind die Eulerschen Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x} p(x, t) = -\varrho \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = -\frac{1}{\kappa p_0} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) \quad (1.2)$$

mit Außendruck p_0 , Adiabatenexponent $\kappa = c_P/c_V$, und Gasdichte ϱ .

Im Gegensatz dazu sind **elektromagnetische Wellen** transversal. Die Feldgrößen sind das elektrische Feld \vec{E} und das magnetische Feld \vec{H} , welche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen. Grundlagen der Wellengleichung sind die Maxwellschen Gleichungen:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{j} \quad (1.3)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}, \quad \text{bzw. in isotropen Medien} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

ϵ_0 ist die Influenz-, μ_0 die Induktionskonstante des Vakuums. ϵ_r ist die relative Dielektrizität und μ_r die relative Permeabilität des Mediums. Im Vakuum – ohne polarisierbares oder magnetisierbares Medium – ist die Polarisation $\vec{P} = 0$ und die Magnetisierung $\vec{M} = 0$, also $\epsilon_r = \mu_r = 1$. Außerdem gibt es keine freien Ladungen und Stromdichten, d.h. $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$.

Aufgabe: Man zeige, daß die Phasengeschwindigkeit c folgendermaßen von den Eigenschaften des Mediums abhängt:

$$c_{Schall, Gas} = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho}}, \quad c_{e.m. Welle} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} \quad (1.4)$$

Tip: Für eine Feldgröße die Wellengleichung aus den Euler- bzw. Maxwellgleichungen ableiten.

Allgemeine Lösungen der Wellengleichung 1.1 sind:

a) Ebene Wellen, die sich – senkrecht zu einer Ebene – in eine Raumrichtung \vec{x} ausbreiten:

$$a(\vec{x}, t) = a_0 \cdot f\left(\frac{\vec{c} \cdot \vec{x}}{c} \pm c \cdot t\right) \quad (1.5)$$

b) Kugelwellen, die sich – ausgehend von Punktquellen – in den Raum ausbreiten:

$$a(r, t) = a_0 \cdot \frac{r_0}{r} f(r \pm c \cdot t) \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\vec{x}| \quad (1.6)$$

Für die Intensität $I := P/A$ einer Welle gilt allgemein: $I \sim a^2$

Harmonische ebene Wellen sind eine spezielle Lösung der Wellengleichung 1.1:

$$a(x, t) = a_0 \cdot \sin(\omega t \pm kx + \varphi) \quad \text{Kreisfrequenz } \omega = 2\pi f \quad \text{Kreiswellenzahl } k = 2\pi/\lambda \quad (1.7)$$

Aufgabe: Wie sieht die Intensität $I(x, t)$ einer harmonischen ebenen Welle aus? Mit Cassy wird die Intensität über einen hinreichend langen Zeitraum Δt gemittelt:

$$\bar{I} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} I(x, t) dt \quad (1.8)$$

Was ergibt sich für die harmonische ebene Welle und die Kugelwelle?

Die Phasengeschwindigkeit c (hier in Richtung der x -Achse) steht mit der Wellenlänge λ und der Frequenz f in folgendem Zusammenhang:

$$c = \omega/k = f \cdot \lambda \quad (1.9)$$

Ohne Dispersion ist c unabhängig von ω und gleich der Gruppengeschwindigkeit $c_{gr} = \partial\omega/\partial k$.

Aufgabe: Die Schallwellen werden mit einem Piezo-Kristall, die Mikrowellen mittels einer Gunn-Diode erzeugt. In welchem Frequenzbereich werden diese Bauteile hier betrieben?

Die Phasenlage φ und die Amplitude a_0 werden durch die Anfangsbedingungen, die die Lösung erfüllen muß, bestimmt. Die Anfangsbedingungen werden durch den jeweiligen Aufbau bestimmt, z.B. durch weiche oder harte Reflexionswände, etc. Während die Phasenlage bei gewissen Untersuchungen keine Auswirkung hat (z. B. bei der Abstandsabhängigkeit der Intensität einer Kugelwelle), spielt sie bei Interferenzen die entscheidende Rolle.

Erreichen mehrere Wellen einen Ort im Raum, so wird die Gesamtwirkung durch die Addition der Einzelamplituden bestimmt. Diese Superposition führt z.B. zu stehenden Wellen vor Reflektoren, Beugungsmustern an Einzel- und Mehrfachspalt, etc.

In diesem Versuch sollen mehrere Phänomene von Wellen untersucht werden. Im Folgenden werden kurz die wichtigsten Formeln gegeben, die für eine Auswertung der Versuche notwendig sind. Auf eine Herleitung wird hier verzichtet.

Die **stehende Welle** ist die einfachste Form der Überlagerung von Wellen.

Trifft eine ebene harmonische Welle auf einen geeigneten Reflektor, so überlagern sich die einfallende und die reflektierte zu einer stehenden Welle.

Aufgabe: Man zeige durch Superposition, daß für u bzw. $|\vec{E}|$ gilt:

$$a(x, t) = 2a_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(kx) \quad \text{mit Reflektor bei } x = 0 \quad (1.10)$$

Tip: Die Phasendifferenz zwischen ein- und auslaufender Welle ergibt sich aus der Randbedingung für $u(x = 0, t)$ bzw. $|\vec{E}|(x = 0, t)$ am passenden Reflektor.

Die zeitlichen und räumlichen Periodizitäten sind entkoppelt, und es gibt Orte (sog. Knoten), an denen zu jeder Zeit $a(x) = 0$ ist. Diese Positionen haben einen Abstand von $\lambda/2$ zueinander, und mit ihrer Messung wird die Wellenlänge bestimmt.

Aufgabe: Wie sieht die zeitlich gemittelte Intensität $I(x, t)$ bei der stehenden Welle aus?

Beugung Trifft eine ebene Welle senkrecht auf ein Gitter äquidistanter Spalte im Abstand d zueinander, mit gleicher Einzelpaltbreite b , so ergibt sich aus der Superposition der Einzelwellen mit unterschiedlicher Phasenlage $\Delta\varphi = \Delta \cdot k$ hinter dem Gitter ein Beugungsbild. Die nebenstehende Abbildung illustriert den Gangunterschied Δ für zwei einlaufende Wellenzüge.

Bei großen Empfängerabständen $r_0 \gg d^2/\lambda$ ist die Fraunhofer-Näherung zulässig.

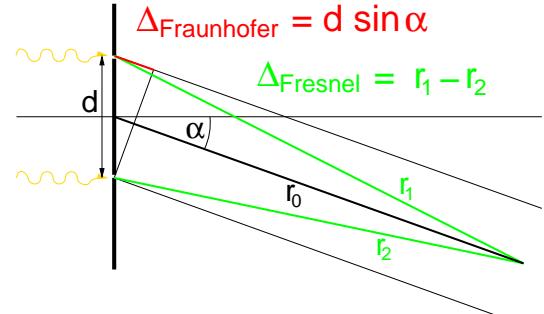


Abbildung 1.1: Fraunhofer-Näherung

Unter dem Winkel α zur Einfallsrichtung ergibt sich in Fraunhofer-Näherung:

$$I(\alpha) = I_0 \cdot \left[\frac{\sin(\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha)}{\pi \frac{b}{\lambda} \sin \alpha} \right]^2 \cdot \left[\frac{\sin(N\pi \frac{d}{\lambda} \sin \alpha)}{\sin(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \alpha)} \right]^2 \quad (1.11)$$

Der erste Term beschreibt die Einhüllende, die durch die Beugung am Einzelpalt zustande kommt, der zweite Term die Interferenz durch die N bestrahlten Spalten.

Aufgabe: Folgende Extremwerte sind ohne numerische Näherung berechenbar:

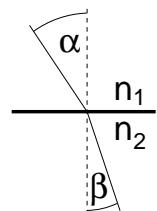
$$\text{Einzelpalt Minima: } \sin \alpha_n = n \cdot \lambda / b \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

$$\text{N-fachspalt Maxima: } \sin \alpha_m = m \cdot \lambda / d \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

Brechung Wellen werden beim Übergang von verschiedenen dichten Materialien wie in nebenstehender Abbildung gebrochen. Es gilt das Gesetz von Snellius:

$$n_1 \cdot \sin \alpha = n_2 \cdot \sin \beta \quad \text{mit} \quad n_i = c_{\text{vakuum}} / c_i \quad (1.14)$$

Im Medium i mit Brechungsindex n_i ist die Phasengeschwindigkeit c_i .



Polarisation Transversale Wellen können mit geeigneten Hilfsmitteln polarisiert werden. Im Allgemeinen ist eine 'Einzelwelle' elliptisch polarisiert, mit den beiden Extremfällen zirkularer und linearer Polarisation. Bei linear polarisierten Wellen kann durch Polarisationsfilter die Schwingungsebene quasi gedreht werden und die Intensität sinkt gemäß dem Gesetz von Malus:

$$I(\alpha) = I_0 \cdot \cos^2 \alpha \quad (1.15)$$

α ist hier der Winkel zwischen den Polarisationsebenen der einfallenden Welle und des Polarisators.

Elektromagnetische Wellen sind transversal und somit polarisierbar. Beim Abstrahlen der Welle von einer ortsfesten Antenne liegt die Schwingungsebene in der Ausdehnungsrichtung des Antennendipols, im benutzten Aufbau der Gunn-Diode.

Aufgabe: Ist auch der Empfänger eine zum Sendedipol parallel stehende Dipolantenne, so wirkt er als Analysator ebenfalls polarisierend. Man zeige anhand geeigneter Orthogonal-Zerlegung der Feldvektoren, daß sich dann folgender Intensitätsverlauf ergibt: $I(\alpha) = I_0 \cdot \cos^4 \alpha$.

Kalibration des Weg- bzw. Winkelaufnehmers Bei diesen Versuchen werden in fast allen Fällen Signalstärken gegen Strecken oder Winkel aufgezeichnet. Zur Orts- und Winkel-messung wird ein Mehrgang-Drehpotentiometer verwendet, dessen gemessener Widerstand in eine Strecke bzw. einen Winkel umgerechnet werden muß. Wegen der Bauteiletoleranz solcher Potentiometer im Prozentbereich muß der Weg- bzw. Winkelaufnehmer in einem Vorversuch kalibriert werden. Alle Messungen müssen über einen adäquaten Zeitraum (z.B. 100ms) durchgeführt werden. Messungen mit Momentanwerten erzeugen ein falsches Bild hinsichtlich der Fehlerbestimmung. Zur Kalibration werden die mit dem Bandmaß gemessenen Orte S bzw. an dem Drehtisch abgelesene Winkel ϕ gegen den Widerstand Rb1 des Potentiometers wie in Abb. 1.2 aufgezeichnet. Bei äquidistanten Kalibrationspunkten mit ähnlichen Einzelfehlern reduziert die Parametrisierung $S - \bar{S} = K \cdot (R - \bar{R})$ bzw. $\phi - \bar{\phi} = K \cdot (R - \bar{R})$ die Anpassung auf eine Ursprungsgerade (\bar{S} [$\bar{\phi}$] und \bar{R} sind jeweils die Mittelwerte der gemessenen Orte [Winkel] und Widerstände). Die Steigung der Ausgleichsgeraden liefert den Kalibrationsfaktor K zur Umrechnung von Widerstandseinheiten auf Längen- bzw Winkel-einheiten. Wie bei allen Ausgleichsrechnungen sind die Einzelfehler auf der x- und y-Achse zu berücksichtigen. Führen Sie eine lineare Regression durch und erstellen Sie einen Residuengraph. Wie groß ist das χ^2 pro Freiheitsgrad? Kann man anhand von Residuengraph und χ^2 pro Freiheitsgrad von einer guten Einzelfehlerabschätzung ausgehen? Die durch die lineare Regression bestimmte Unsicherheit von K muß bei den folgenden Messungen als systematischer Fehler berücksichtigt werden, d.h. er liefert unabhängig von den jeweiligen Einzel-Meßwerten einen zusätzlichen Beitrag als Skalenfehler bei der Umrechnung des Endergebnisses von $k\Omega$ auf m bzw. Grad.

Fehlerabschätzung Die Messungen der Welleneigenschaften werden mit Sensor-CASSY aufgezeichnet. Dabei kommen verschiedene Meßaufnehmer zum Einsatz, die vor der Messung kalibriert werden (Weg/Winkelaufnehmer und Ultraschallwandler bzw. Mikrowellenantennen mit nachgeschalteten Verstärkern). Neben diesen systematischen Fehlerquellen beeinflussen

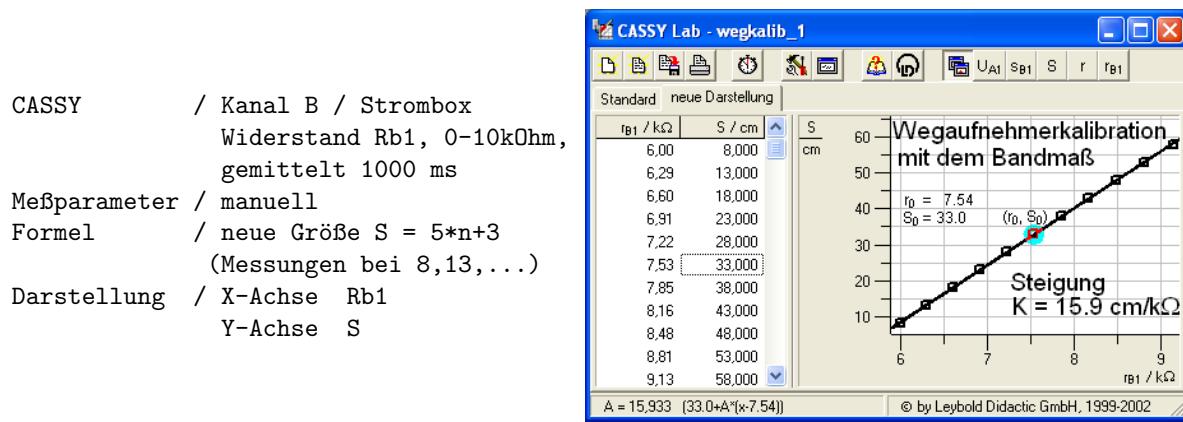


Abbildung 1.2: CASSY-LAB Kalibration des Wegaufnehmers.

Umweltbedingungen die Messungen (z.B. die Raumtemperatur während der Ultraschallmessungen).

Die Schätzung der statistischen Fehler geschieht durch Mehrfachmessungen (Mittelwert/RMS) oder durch Variation der Meßwertintervalls z.B. für Peakwertbestimmungen. Mittels Fehlerfortpflanzung wird schließlich die Güte der Messung (Vertrauensbereich) ermittelt. I. A. reduziert sich der Fehler durch eine sinnvolle Verteilung der Meßwerte (kleinere Abstände und damit mehr Meßwerte an kritischen Stellen wie z.B. Beugungsminima/maxima oder Knoten der stehenden Wellen).

Um die begrenzte Meßzeit effektiv auszunutzen, ist es sinnvoll, schon während der Messung die einzelnen Fehlerbeiträge getrennt zu bestimmen. Dominiert ein Beitrag den Meßfehler, sollte der weitere Aufwand in dessen Reduzierung investiert werden.

Hinweis: Die im CASSY-Handbuch angegebenen Fehler beziehen sich auf Toleranzen von Gerät zu Gerät. Die Wiederholgenauigkeit bei Benutzung eines Geräts – nach evtl. Kalibration – ist wesentlich höher und kann mit der Ablesegenauigkeit abgeschätzt werden.

1.3 Versuche mit Ultraschall

1.3.1 Versuchsaufbau

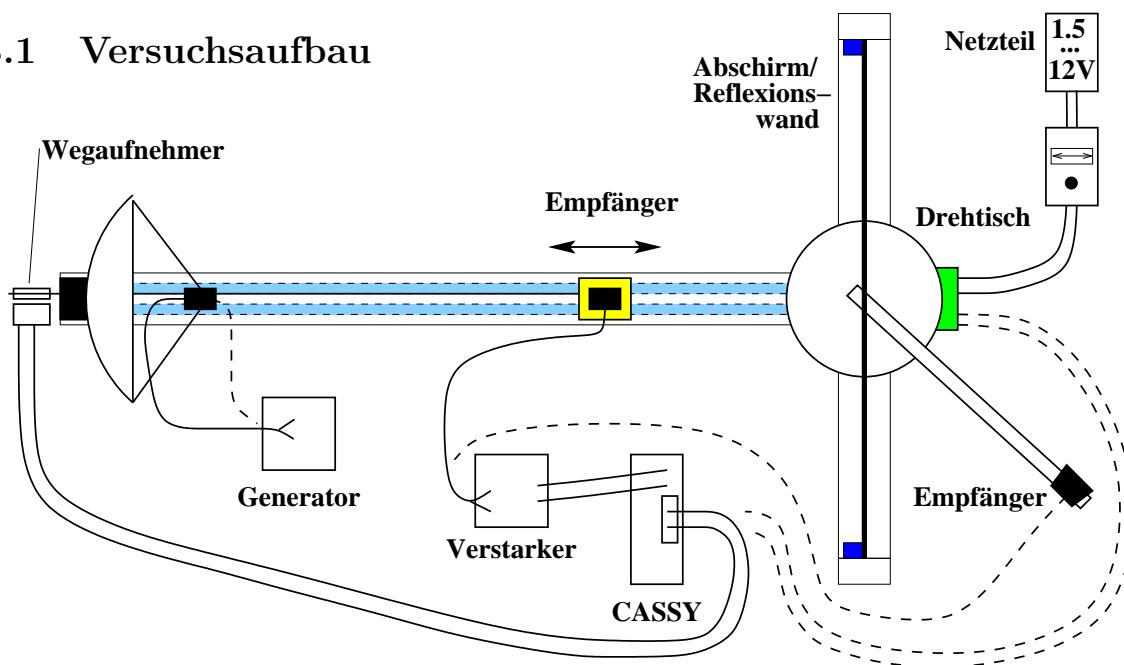


Abbildung 1.3: Prinzipieller Versuchsaufbau Ultraschall. Die durchgezogene Verkablung entspricht Teil a), die gestrichelte nachfolgenden Versuchsteilen

Benötigte Geräte:

- Sensor-CASSY mit Stromquellenbox LEYBOLD 542 031
- 3 Piezoelemente ELWE/NEVA als Ultraschallwandler. Durch den Piezoelektrischen Effekt führen mechanische Deformation bei polaren Kristallen zu Dipolverschiebungen mit – an den Außenflächen abgreifbaren – meßbaren Potentialdifferenzen. Umgekehrt führt eine außen angelegte Spannung zu Kristalldeformation. Damit sind sie als Sender und Empfänger einsetzbar – wegen der kleinen Auslenkungen z.B. als Fuß in Rastertunnelmikroskopen oder umgekehrt als Kristalltonabnehmer in Plattenspielern. Hier benutzt man sie wegen ihrer niedrigen Trägheit als Hochfrequenztonwandler mit einer Resonanzfrequenz von ca. 40 kHz, die allerdings leicht von der Kristallgeometrie abhängt.
- Generator LEYBOLD 416 014 Mit Hilfe des Drehpotentiometers kann die Anregungsfrequenz zwischen 35-40kHz variiert werden. Ein Umschalter ermöglicht die Wahl zwischen kontinuierlichem und gepulstem Betrieb. Bei allen Versuchsteilen wird der kontinuierliche Modus beibehalten. Das Gerät besitzt einen Zeitschalter, der nach längerem Betrieb den Generator automatisch abstellt. Von Zeit zu Zeit sollte geprüft werden, ob das Gerät noch aktiv ist (rote Kontroll-LED).
- Verstärker (AC-Amplifier) LEYBOLD 416 013 mit regelbarer Verstärkung. Dieser Verstärker kann das Signal sowohl als Wechselspannung (z.B. für Messungen mit einem

Oszilloskop) als auch als Gleichspannung ausgeben. In diesem Versuch wird stets der Gleichspannungsausgang (Schalterstellung =) auf den Spannungseingang des Sensor-CASSYs gegeben. Der Verstärker besitzt einen Zeitschalter, der nach längerem Betrieb das Gerät automatisch abstellt. Von Zeit zu Zeit sollte geprüft werden, ob das Gerät noch aktiv ist (rote Kontroll-LED).

- Parabolspiegel mit Halter
- Wegaufnehmer LEYBOLD 529 031 mit Faden und Befestigungsmuffe
- Mechanischer Aufbau mit motorgetriebenem Drehtisch, Reflexionswand
- verschiedene Aufsätze für mechanischen Aufbau: Schiebetisch mit Sensorhalterung, Dipolhalter, verstellbarer Reflexionswandhalter
- diverse Netzgeräte und Kabel

Der Versuchsaufbau besteht aus einem (in Versuchsteil e) zwei) Ultraschallwandler(n) als Sender und einem Ultraschallwandler als Empfänger. Der Sender bleibt während einer Messung ortsfest, der Empfänger wird je nach Versuchsteil auf verschiedene Weise bewegt oder auch ortsfest gehalten. Außer in den Versuchsteilen a) (Abstandsmessung) und e) (aktiver Dipol) wird ein Parabolspiegel zur Erzeugung von homogenen, ebenen Wellen benutzt. Zur Fixierung des Senders bzw. Führung des Empfängers wird ein T-förmiges Schienenkreuz mit aufgesetztem motorgetriebenem Drehtisch verwendet. Abb. 1.3 zeigt den prinzipiellen Versuchsaufbau. Man baue die Grundschaltung (Versorgung Sender, Verstärker Empfänger, Strombox für Bewegungsmessung) einschließlich Sensor-CASSY auf. Jeder Versuchsteil ist durch seine eigene Variante des Versuchsaufbaus charakterisiert, welche im nächsten Kapitel beschrieben werden. Es ist darauf zu achten, daß die Intensität der Welle am Messort stark vom Aufbau abhängt (offensichtlich ist die maximale Intensität hinter einem Doppelspalt größer als hinter einem Einfachspalt der gleichen Breite). Somit muß bei jeder Messung der Messbereich und die Verstärkung angepasst werden, um eine optimale Ausnutzung des CASSY-Messbereichs ('Binningeffekte' der Digitalisierung) zu erzielen. Die Frequenz sollte einmal eingestellt und danach nicht mehr verändert werden, da sich sonst die Wellenlänge ändert. Der Drehtischmotor ist für Spannungen bis 6V ausgelegt. Ein Vorwiderstand ermöglicht das Betreiben mit dem stufenweise regelbaren 12V-Netzgerät. Die Drehgeschwindigkeit kann durch Umschalten der Ausgangsspannung am Netzgerät verändert werden. Die Messungen sollten bei möglichst kleiner Drehgeschwindigkeit erfolgen, damit die Mittelungszeit des Sensor-CASSY die Messung minimal beeinträchtigt. (Warum?) Mit dem Umschalter kann die Drehrichtung gewählt werden. Läuft der Drehteller nicht von alleine an, so kann mit dem Taster der Vorwiderstand kurzzeitig überbrückt werden.

1.3.2 Versuchsdurchführung

a) Abstandsmessung

Der Piezowandler liefert ein zum Schalldruck p proportionales Signal, das im Verstärker durch Quadrieren gleichgerichtet wird. Das Gleichspannungsausgangssignal U sollte somit

proportional zur Schallintensität sein: $U \sim p^a$ mit $a = 2$. Um diesen Exponenten a zu bestimmen, wird das Empfängersignal U in Abhängigkeit des Abstands r zum Sender gemessen. Bei einer Kugelwelle gilt gemäß Gl. 1.6 für den Schalldruck: $p(r) \sim 1/r$ und damit $U \sim r^{-a}$. Mit dem Kalibrationsexponenten a kann dann von Signalspannung U auf Intensität umgerechnet werden: $I \sim U^{2/a}$ (siehe Aufgabe zur Intensität in Kapitel "Grundlagen").

Für diese Messung wird der Sender direkt auf den Empfänger gerichtet und letzterer auf dem Schlitten auf der Schiene montiert. Der Parabolspiegel und die Abschirm/Reflexionswand werden hier nicht benutzt, damit nicht ungewollt stehende Wellen, etc. erzeugt werden. Der Wegaufnehmer ist ein Mehrgang-Drehpotentiometer und wird an die Strombox angeschlossen. Nach der Kalibration des Wegaufnehmers (vgl. Abb. 1.2) kann die Abstandsabhängigkeit des Schalldrucks aufgezeichnet werden. Abb. 1.4 zeigt eine solche Messung:

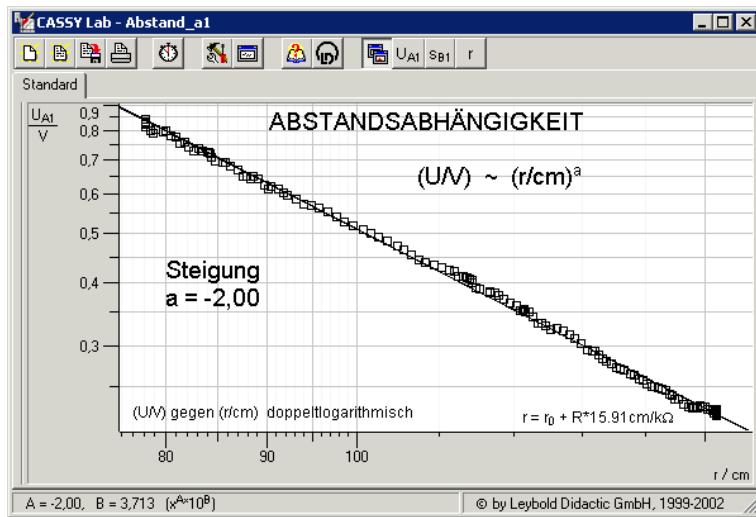


Abbildung 1.4: Signalspannung gegen Abstand r

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

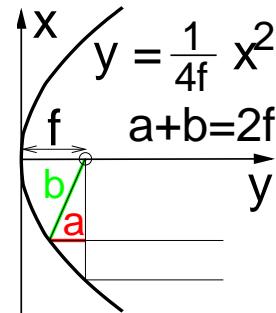
- CASSY-Lab Beispiel zur Aufzeichnung der Meßwerte:

```
CASSY      / Kanal A / Spannung Ua1      +- Umax V,  gemittelt 200ms
            Kanal B / Widerstand rB1,   0-10kOhm,  gemittelt 200ms
Meßparameter / automatisch Intervall 200 ms
Formel       / neue Größe S = 100.0+15.9*(rB1-5.0)      # S0, K, r0
Darstellung / X-Achse S
              Y-Achse Ua1
```

- Die Frequenz des Generators ist mit einem Drehpotentiometer in einem kleinen Bereich zwischen 35-40kHz veränderbar. Die Eigenfrequenz der Ultraschallwandler kann von Gerät zu Gerät leicht variieren. Daher sollte die Generatorfrequenz so getrimmt werden, daß ein möglichst großes Signal gemessen werden kann. Danach stets diese Einstellung beibehalten.

- Auf parallaxenfreie Streckenmessung achten (Faden horizontal, entlang der Führungsschiene). Vor der ersten Messung den Absolutwert (Offset S_0) der umgerechneten Strecke S überprüfen.
- Um den Exponenten der Abstandsabhängigkeit zu bestimmen, werden die Messungen in doppelt-logarithmischer Darstellung aufgetragen (siehe Abb. 1.4 als Beispiel). Warum wählt man diese Darstellung? Aus dem Ergebnis wird der Kalibrationsexponent a zwischen Intensität und angezeigter Spannung bestimmt.
- Bei geringem Abstand zwischen Sender und Empfänger ist die Welle noch nicht ideal kugelförmig. Außerdem geht der Fehler des Abstandsoffsets S_0 zwischen Sender und Empfänger (die beide in einem Gehäuse eingeschlossen sind) stärker ein als bei größerer Entfernung. In großer Entfernung wird das Signal ggü. dem Rauschen kleiner. Man suche also einen Bereich, in dem die Messungen in der doppelt-logarithmischen Darstellung gut durch eine Gerade beschrieben werden.
- Fehlerabschätzung: Abstandsmessung mit Absolutfehler in S_0 und Kalibrationsfaktor von K . Regression mit statistischem Fehler (Fehlerfortpflanzung für doppelt-log. Auftragung). Man erstelle einen Residuengraph (in einfacher oder doppelt-log. Darstellung). Ist etwas Auffälliges zu erkennen?

Alle folgenden Versuche mit einem Einzelsender benutzen ebene Schallwellen, die mit Hilfe eines Parabolspiegels erzeugt werden. Wie nebenstehend skizziert gibt es bei parabolischer Spiegelform einen Punkt, von dem aus alle Strahlen unabhängig vom Abstand x zur Achse die gleiche Weglänge – und damit auch die gleiche Phasenlage – haben. Man montiere den Ultraschallwandler im Fokus des Spiegels, und verifiziere die Ebenheit der Wellen, indem man überprüft, ob die Signalstärke des Empfängers bei verändertem Abstand konstant bleibt.



b) Stehende Welle

Die Wellenlänge wird durch Ausmessen der Schalldruckknoten bzw. -Bäuche einer stehenden Welle bestimmt. Die Abschirm/Reflexionswand wird an der Halterung befestigt und die Öffnung verschlossen. Gemessen wird wieder das Empfängersignal in Abhängigkeit des Ortes. Abb. 1.5 zeigt exemplarisch eine Messung inklusive der abgeschätzten Wellenlänge.

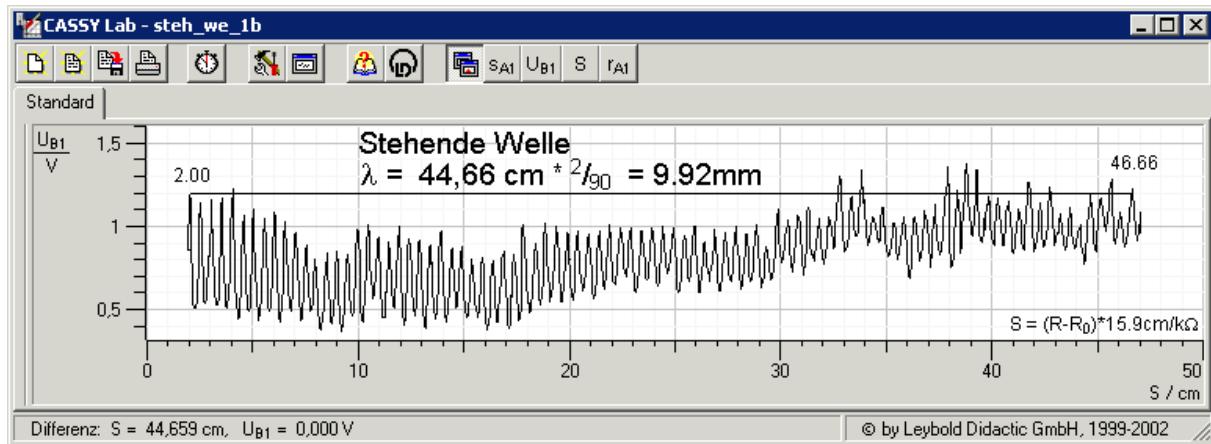


Abbildung 1.5: Stehende Schallwelle

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

- Vor dem Versuch schätze man die Wellenlänge mit Hilfe der Schallgeschwindigkeit in Luft ab.
- Langsam verschieben, damit die Mittelungszeit des Sensor-CASSY sich nicht schädlich auswirkt.
- Wie groß ist der Fehler? (Peakbestimmung, Streckenkalibration)
- Richtig abzählen – zwischen n Knoten liegen (n-1) halbe Wellenlängen

c) Beugung

Für die Untersuchung von Beugungsphänomenen stehen verschiedene Platten aus Aluminium zur Verfügung, mit denen Einzelpalte beliebiger Breite sowie Doppel- bis Vierfachspalte mit 25mm breiten Stegen in die Wand eingebaut werden können. Der Empfänger wird am Ende der am Drehteller befestigten Schiene installiert. Die Drehachse soll in der Mitte des Spalts liegen. An die Strombox wird das Potentiometer des Drehtellers angeschlossen. Aufgezeichnet wird das Empfängersignal gegen den Widerstand. Gemessen wird die Beugung an Einzelpalten verschiedener Breite, sowie an Doppel- und Mehrfachspalten. Als Beispiel sind Messwerte eines Doppelpalts in Abb. 1.6 gezeigt.

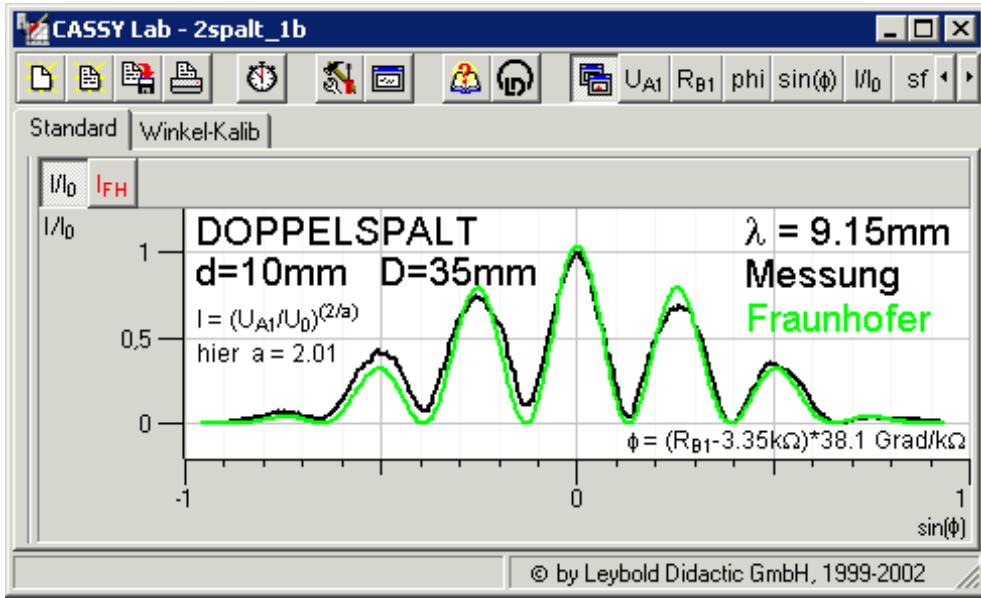


Abbildung 1.6: Intensitätsverteilung hinter einem Doppelspalt

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

- Die Winkelmessung mit dem Drehteller geschieht wie beim Wegaufnehmer über ein Drehpotentiometer. Dieses muß ebenfalls kalibriert werden. Man kann den Teller per Hand auf verschiedene Winkel einstellen und den entsprechenden Wert des Widerstandes im CASSY-Fenster ablesen. Der gesamte Meßbereich sollte kalibriert werden und mittels linearer Regression (mit Fehlerbetrachtung) ausgewertet werden. Bei allen folgenden Messungen muß darauf geachtet werden, daß der Drehteller 'schlupffrei' (insbesondere am Maximalausschlag) fährt.
- Anhand der in Teil b) bestimmten Wellenlänge wählt man sinnvolle Breiten der Spalte (nur Maximum 0. Ordnung, Maxima 1. oder 2. Ordnung). Beim Doppelspalt soll der Spaltabstand gleich groß sein wie der Abstand zwischen den beiden Sendern des aktiven Dipols (siehe Teil d)).
- Die Auswertung erfolgt durch Vergleich mit der Erwartung nach Gleichung 1.11. Dazu muß das Empfängersignal in Schallintensität umgerechnet werden (Teil a)). Eventuell muß die Nullage korrigiert werden, falls die Schallwelle nicht exakt senkrecht auf die Wand fällt. Dazu werden die links und rechts gemessenen Extrema in $\sin \alpha$ gemittelt. Man berechne die Position der Extrema nach Gl. 1.13 mit der in Teil b) ermittelten Wellenlänge und vergleiche mit der Messung.
- Die Beugungsbilder weisen häufig unvorhergesehene Unregelmäßigkeiten auf, die durch Reflexionen an sonstigen umstehenden Wänden, Aufbauten, etc. erzeugt werden. Solche Einflüsse möglichst minimieren. Um zu zeigen, daß es sich um echte physikalische Phänomene handelt (und keine Fehlmessung des Gerätes ist), die Messung wiederholen (z.B. durch Messung auf Hin- und Rückweg). Eine 'Nullmessung' mit geschlossenem

Spalt zeigt eventuelle Störungen durch Beugung an sonstigen festen (und beweglichen ...) Gegenständen (und Individuen ...) im Raum an und muß gegebenenfalls von der Messung abgezogen werden.

Bei großen Beugungsstrukturen ist die Fraunhofer-Näherung nach Abb. 1.1 evtl. nicht mehr zulässig.

d) Aktiver Dipol

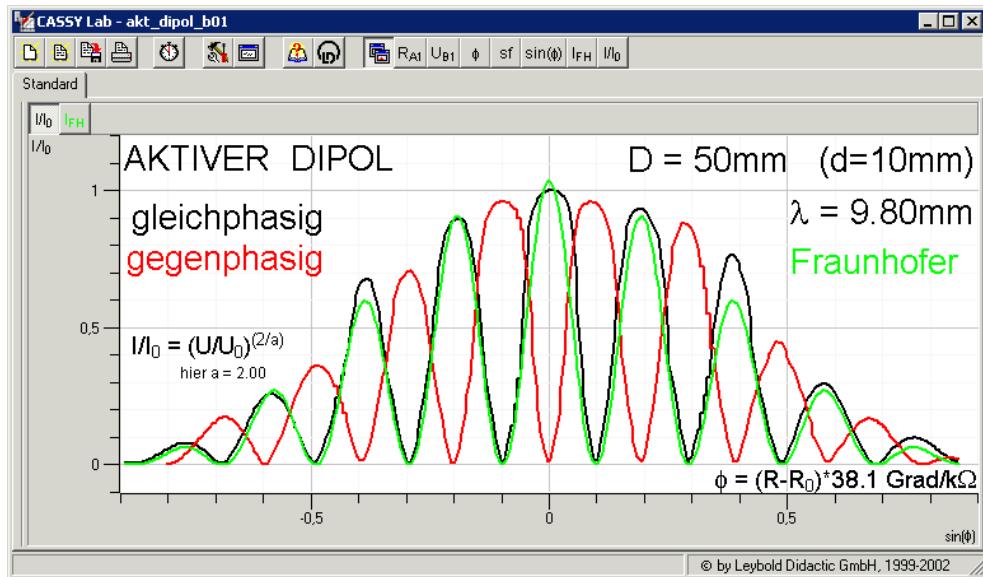


Abbildung 1.7: Intensitätsverteilung eines aktiven Dipols

Analog zum Doppelspalt kann auch ein Interferenzmuster erzeugt werden, indem man zwei mit dem gleichen Oszillator (phasenstarr) angeregte Sender nebeneinander aufstellt. Ein gleichphasiges Schwingen der beiden Sender entspricht im Prinzip einem Doppelspalt mit der Senderabstrahlcharakteristik anstelle der Einzelpaltfunktion als Einhüllende. Man kann sie jedoch auch gegenphasig anregen, was zu einem veränderten Interferenzbild führt. Die beiden Sender werden so über dem Drehtisch installiert, daß ihre Position dem eines vorher vermessenen Doppelspaltes entsprechen. Sie werden an denselben Generator angeschlossen; gegenphasiges Schwingen erreicht man durch Umpolung des Steckerpaars eines Senders. Dabei müssen die Piezowandler voneinander elektrisch isoliert eingebaut werden, da ansonsten der Oszillatortausrang über die Piezowandlergehäuse kurzgeschlossen wird. Abb. 1.7 zeigt das aufgezeichnete Empfängersignal gegen den Drehtellerwinkel für gleich- und gegenphasigen Betrieb der zwei Sender.

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

- Man vergleiche das Interferenzmuster der gleichphasigen mit der gegenphasigen Schwingung.
- Man vergleiche das Interferenzmuster mit dem Doppelspalt aus Teil c)

e) Reflexionsfreie Wand (Interferenzen gleicher Neigung)

Analog zur optischen Linsenvergütung kann auch für Schallwellen eine reflexfreie Wand konstruiert werden. Die nebenstehende Abbildung verdeutlicht das Prinzip. Dabei soll die gestrichelte Linie nicht eine Ansammlung von Spalten, an denen Beugungserscheinungen auftreten, darstellen, sondern eine Wand, die einen Teil der Welle durchläßt und einen Teil reflektiert. Der Raum zwischen den Wänden kann als Resonator mit zwei festen Wänden aufgefaßt werden. Für bestimmte D_i ist er in Resonanz und absorbiert die einfallende Welle maximal, d.h. die reflektierte Welle verschwindet.

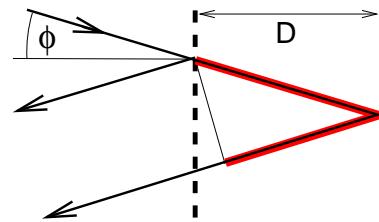


Abbildung 1.8: Reflexfreie Wand

Die Abstände $\Delta D = D_{i+1} - D_i$ zwischen solchen Positionen werden erwartet für $\Delta D = \lambda/2 \cos \phi$.

Aufgabe: Man zeige, daß für die Minima gilt: $\frac{2n+1}{2}\lambda = 2D_n \cos \phi$.

Daraus läßt sich die Formel für ΔD herleiten.

Für diesen Versuch steht ein Verschiebetisch zur Verfügung, der anstelle der Holzwand auf einer Traverse über dem Drehteller unter 30 Grad zur Einfallsrichtung montiert werden kann. Eine verschiebbare Lochplatte dient als teildurchlässige vordere und eine fest installierte als undurchlässige hintere Reflexionswand. Der Empfänger-Arm wird auf der Sender-Seite auf einen Winkel von etwa 60 Grad eingestellt, um das reflektierte Signal zu messen. Der Wegaufnehmer wird auf der Grundplatte montiert, um den Abstand D zwischen den zwei Wänden zu messen. Abb. 1.9 zeigt eine aufgezeichnete Messung des Empfängersignals in Abhängigkeit des Abstandes D , sowie die Bestimmung von ΔD .

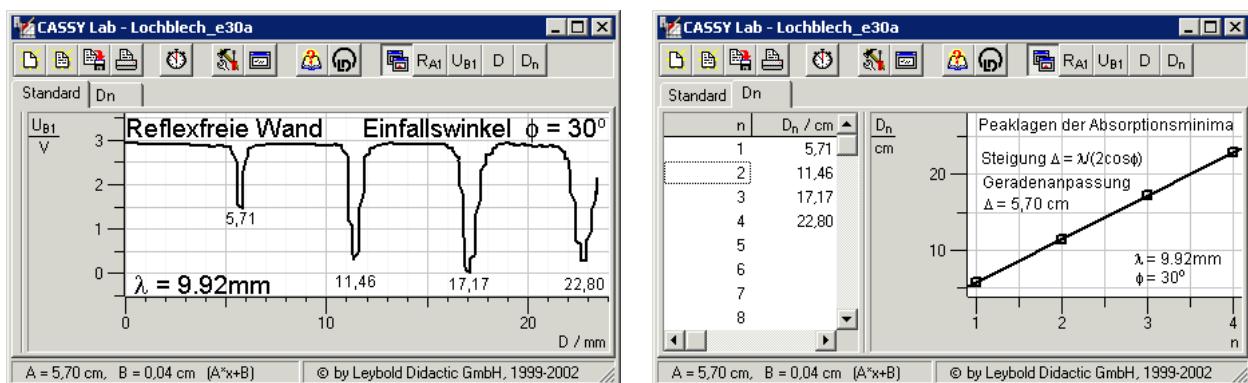


Abbildung 1.9: Reflexion an einer doppelten Wand

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

- Da hier nur kleine Wegstrecken gemessen werden, sollte der Widerstandsmeßbereich angepaßt werden ($0 - 300\Omega$)
- Auf parallaxenfreie Streckenmessung achten. Dann kann der Streckenkalibrationsfaktor K aus Teil **a)** übernommen werden. Eine Kalibration des Meßintervalls mit der Mikrometerschraube ist aber besser.
- Warum bildet sich das gemessene Muster? Wo sollte sich das erste Minimum befinden, wo die weiteren? Man vergleiche die Messung mit der Erwartung für die aus Teil **b)** erhaltenen Wellenlänge. (mittels linearer Regression, wie in Abb. 1.9 rechts gezeigt)

1.4 Versuche mit elektromagnetischen Mikrowellen

1.4.1 Versuchsaufbau

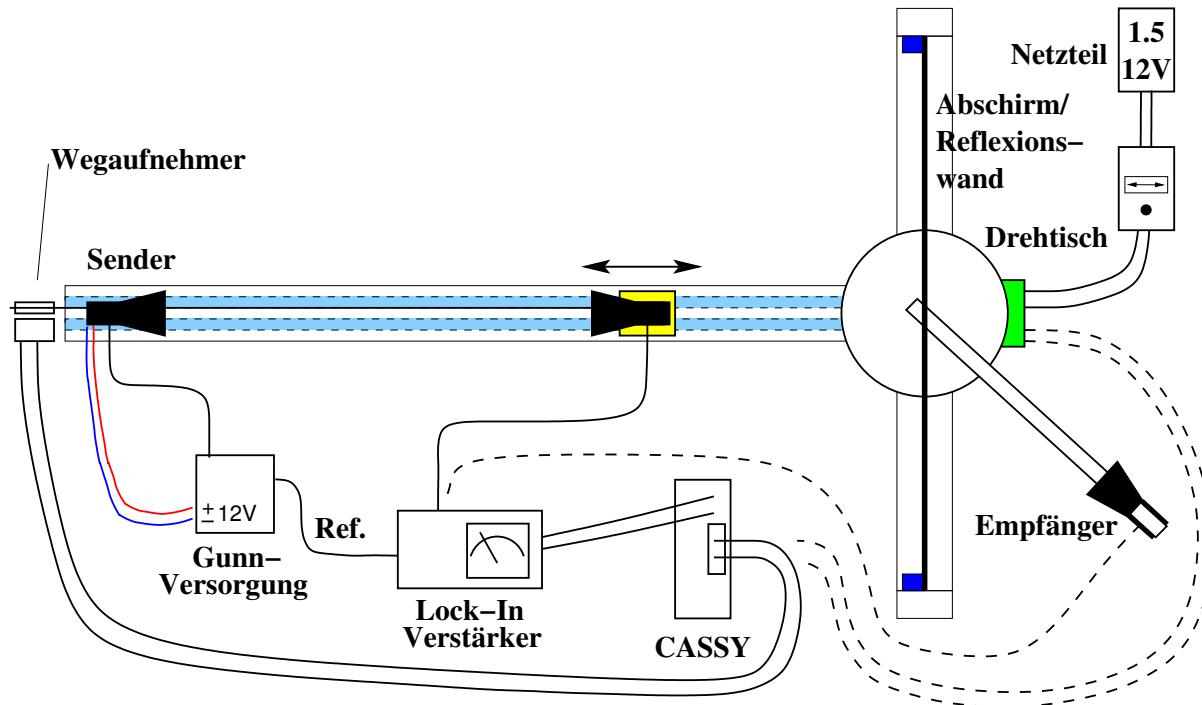
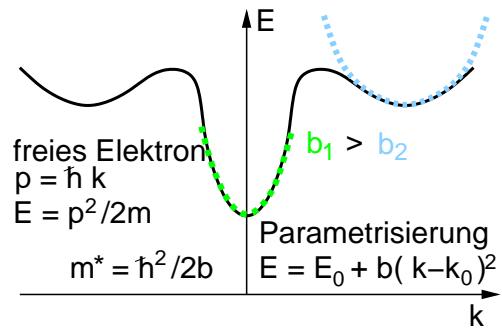


Abbildung 1.10: Versuchsaufbau Mikrowelle

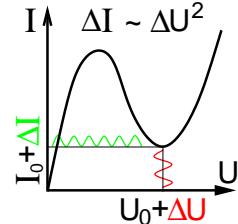
Benötigte Geräte:

- Mechanischer Aufbau mit motorgetriebenem Drehtisch und Reflexionswand
- Gunn-Versorgung mit Modulator
- Lock-In Meßverstärker
- Gunn-Oszillator mit Hornstrahler
- Empfänger mit Hornantenne
- Sensor-CASSY mit Stromquellenbox LEYBOLD 542 031
- Wegaufnehmer LEYBOLD 529 031 mit Faden und Befestigungsmuffe
- diverse Netzgeräte und Kabel
- verschiedene Aufsätze für mechanischen Aufbau: Polarisationsfilter, PE-Halbzyylinder
- Verschiedene Abstandsbleche für PE-Halbzyylinder

Der Versuchsaufbau besteht aus einem Gunn-Oszillatator als Sender und einer Hornantenne als Empfänger. Zur Erzeugung der Mikrowellen wird eine Gunn-Diode eingesetzt. Der Gunn-Effekt ist eine hochfrequente Strommodulation, die durch unterschiedliche effektive Massen m^* der Elektronen im nebenstehend skizzierten Feld des Kristallgitters zustandekommt. Abhängig von der Schichtdicke des Halbleiters ergeben sich Frequenzen im GHz Bereich.



In der Empfänger-Antenne wird eine Tunnel-Diode im nebenstehend skizzierten nicht-linearen (quadratischen) Bereich ihrer Kennlinie betrieben, um das empfangene Hochfrequenz-Signal in einen Effektivwert zu wandeln, der proportional zur Intensität ist.



Um den störungsfreien Betrieb mehrerer Anlagen im gleichen Raum zu ermöglichen, wird der Strom durch die Gunn-Diode mit einer anlagenspezifischen Frequenz f_i im kHz Bereich moduliert. Der Meßverstärker multipliziert nach dem Lock-In Prinzip das Antennensignal mit dem jew. Modulationssignal als Referenz. Signale anderer Anlagen mit Modulationsfrequenz f_j verschwinden bei Mittelung über Zeiten $t \gg 1/|f_i - f_j|$.

Sender oder Empfänger können je nach Messung auf der Schiene oder an einem Dreh-Arm bewegt werden. Zur Führung wird ein T-förmiges Schienenkreuz mit aufgesetztem motorgetriebenem Drehtisch verwendet. Abb. 1.10 zeigt den prinzipiellen Versuchsaufbau. Man baue die Grundschaltung (Gunn-Versorgung, Sender, Empfänger, Lock-In-Verstärker, Strombox für Bewegungsmessung) einschließlich Sensor-CASSY auf. Jeder Versuchsteil ist durch seine eigene Variante des Versuchsaufbaus charakterisiert, welche im nächsten Kapitel beschrieben werden. Es ist darauf zu achten, daß die Intensität der Welle am Messort stark vom Aufbau abhängt. Z.B. ist die maximale Intensität hinter einem Doppelspalt größer als hinter einem Einfachspalt der gleichen Breite. Wegen stehender Wellen im Raum kann das gemessene Signal auch von der Position oder der Orientierung des Aufbaus im Raum abhängen. Somit muß bei jeder Messung der Messbereich und die Verstärkung angepasst werden, um eine optimale Ausnutzung des CASSY-Messbereichs ('Binningeffekte' der Digitalisierung) zu erreichen.

Der Drehtischmotor ist für Spannungen bis 6V ausgelegt. Ein Vorwiderstand ermöglicht das Betreiben mit dem stufenweise regelbaren 12V-Netzgerät. Die Drehgeschwindigkeit kann durch Umschalten der Ausgangsspannung am Netzgerät verändert werden. Die Messungen sollten bei möglichst kleiner Drehgeschwindigkeit erfolgen, damit die Mittelungszeit des Sensor-CASSY die Messung minimal beeinträchtigt. (Warum?) Mit dem Umschalter kann die Drehrichtung gewählt werden. Läuft der Drehteller nicht von alleine an, so kann mit dem Taster der Vorwiderstand kurzzeitig überbrückt werden.

1.4.2 Versuchsdurchführung

a) Abstandsmessung

Das von der Empfänger-Diode demodulierte Signal wird in eine Spannung $U \sim E^a$ verstärkt. Erwartet wird $a = 2$ und damit eine Proportionalität zwischen Spannung und Intensität. Eine Abweichung kann sich aber ergeben wegen eines nicht optimal eingestellten Arbeitspunktes der Tunnel-Diode oder eines nicht-linearen Lock-In Verstärkers. Mit der Messung der Signalspannung U in Abhängigkeit des Abstands r zwischen Sender und Empfänger kann der Exponent a bestimmt werden. Für die Auswertung der folgenden Versuchsteile berechnet sich die Intensität dann zu $I \sim U^{2/a}$. Ausgenutzt wird die bekannte Abnahme der Feldstärke einer Kugelwelle (siehe Aufgabe zur Intensität in Kapitel "Grundlagen").

Um bei großen Entfernen messen zu können, wird der Empfänger am Ende des Dreh-Arms in Verlängerung der Längs-Schiene montiert. Der Sender wird auf dem Schlitten am Schienenanfang montiert und – ohne Abschirm/Reflexionswand dazwischen – auf den Empfänger gerichtet. Der Wegaufnehmer zur Bestimmung der Senderposition ist ein Mehrgang-Drehpotentiometer und wird an die Strombox angeschlossen.

Nach der Kalibration des Wegaufnehmers (vgl. Abb. 1.2) kann die Abstandsabhängigkeit des vom Verstärker ausgegebenen Signals aufgezeichnet werden. Abb. 1.11 zeigt eine solche Messung:

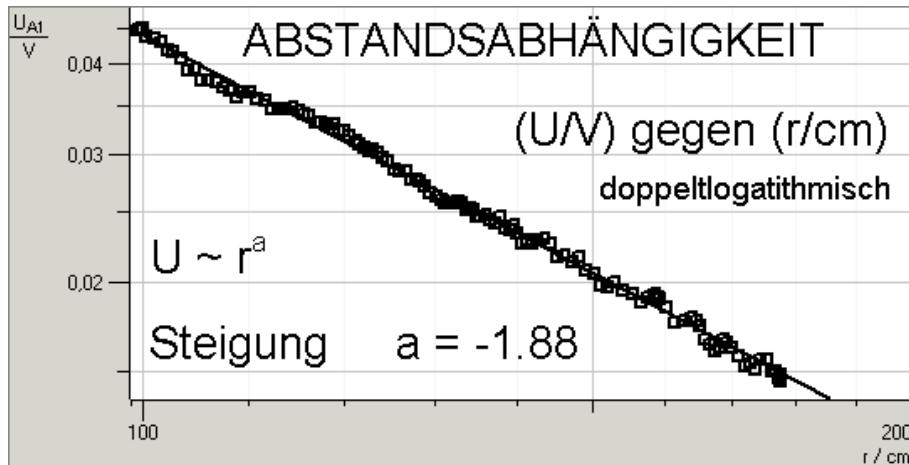


Abbildung 1.11: Signalspannung gegen Abstand r

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

- CASSY-Lab Beispiel zur Aufzeichnung der Meßwerte:

```
CASSY      / Kanal A /  Spannung Ua1  +- Umax V  gemittelt 200ms
            / Kanal B /  Widerstand rB1, 0-10kOhm, gemittelt 200ms
Meßparameter / automatisch  Intervall 200 ms
Formel       / neue Größe   S = 50.0 + 15.9*(rB1-5.0) # S0, K, R0
Darstellung / X-Achse   S
                  Y-Achse  Ua1
```

- Auf parallaxenfreie Streckenmessung achten (Faden horizontal, entlang der Führungsstrecke).
- Um den Exponenten der Abstandsabhängigkeit zu bestimmen, werden die Messungen in doppelt-logarithmischer Darstellung aufgetragen. Warum wählt man diese Darstellung? Aus dem Ergebnis wird der Exponent a zwischen Feldstärke und angezeigter Spannung bestimmt.
- Bei geringem Abstand zwischen Sender und Empfänger ist die Welle noch nicht kugelförmig und der Absolutfehler des Abstandes hat einen größeren Einfluß. Bei großen Abständen hingegen wird das Signal klein gegenüber dem Rauschen. Man suche daher einen Bereich, in dem die Messungen in der doppelt-logarithmischen Darstellung gut durch eine Gerade beschrieben werden.
- Fehlerabschätzung: Abstandsmessung mit Absolutfehler in S_0 und Kalibrationsfaktor von K . Regression mit statistischem Fehler (Fehlerfortplanzung für doppelt-log. Auftragung). Man erstelle einen Residuengraph (in einfacher oder doppelt-log. Darstellung). Ist etwas Auffälliges zu erkennen?

b) Stehende Welle

Die Wellenlänge wird durch Ausmessen der Intensitätsknoten des elektrischen Feldes einer stehenden Welle bestimmt. Die Abschirm/Reflexionswand wird mit der Aluminiumseite zum Sender hin an der Halterung befestigt und die Öffnung mit einer Aluminiumplatte (warum metallisch?) verschlossen.

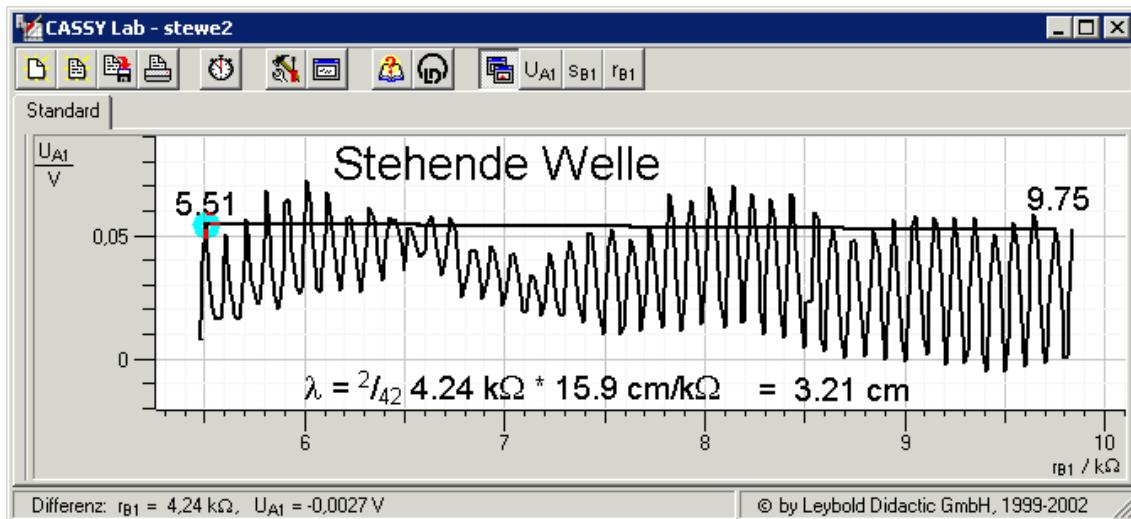


Abbildung 1.12: Mikrowellen: Stehende Welle vor einer leitenden Wand

Gemessen wird das Empfängersignal in Abhängigkeit des Abstands Empfänger-Wand.
Abb. 1.12 zeigt exemplarisch eine Messung inklusive der durch Abzählen der Knoten abgeschätzten Wellenlänge.

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

- Vor dem Versuch schätze man die Wellenlänge mit Hilfe der Lichtgeschwindigkeit in Luft ab.
- Langsam verschieben, damit die Mittelungszeit des Sensor-CASSY sich nicht schädlich auswirkt.
- Wie groß ist der Fehler? (Peakbestimmung, Streckenkalibration)
- Richtig abzählen – zwischen n Knoten liegen ($n-1$) halbe Wellenlängen

c) Beugung

Für die Untersuchung von Beugungsphänomenen stehen verschiedene Platten aus Aluminium zur Verfügung, mit denen Einzelspalte beliebiger Breite sowie Doppel- und Mehrfachspalte mit 25mm breiten Stegen in die Wand eingebaut werden können. Der Empfänger wird am Ende der am Drehteller befestigten Schiene installiert. Die Drehachse soll in der Mitte des Spalts liegen. An die Strombox wird das Potentiometer des Drehtellers angeschlossen. Aufgezeichnet wird das Empfängersignal gegen den Widerstand. Gemessen wird die Beugung an Einzelspalten verschiedener Breite, sowie am Doppel- und Mehrfachspalt. Als Beispiel sind Meßwerte eines Dreifachspalts in Abb. 1.13 gezeigt:

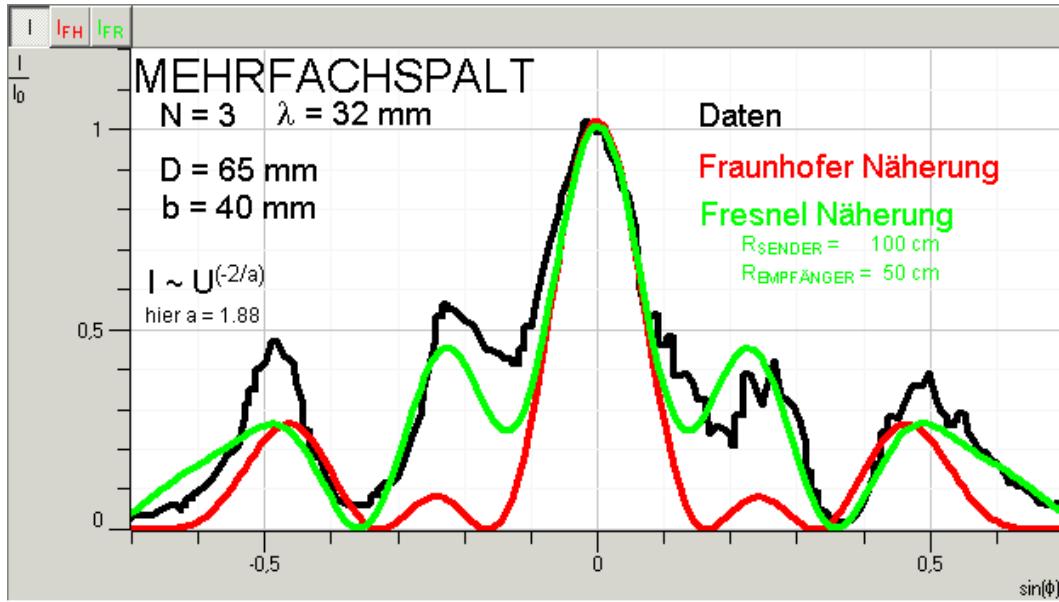
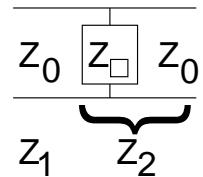


Abbildung 1.13: Messung eines Dreifachspalts. Deutlich zu erkennen ist, daß die Fraunhofer-Näherung (rot) die Messung schlechter beschreibt, als die Fresnel-Rechnung (grün)

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

- Die Winkelmessung mit dem Drehteller geschieht wie beim Wegaufnehmer über ein Drehpotentiometer. Dieses muß analog zum Wegaufnehmer kalibriert werden. Man kann den Teller per Hand auf verschiedene Winkel einstellen und den entsprechenden Wert des Widerstandes im CASSY-Fenster ablesen. Der gesamte Meßbereich sollte kalibriert werden. Die Eichung geschieht mittels linearer Regression (Fehler?). Bei allen folgenden Messungen muss darauf geachtet werden, daß der Drehteller 'schlupffrei' (insbesondere am Maximalausschlag) fährt.
- Anhand der in Teil **b)** bestimmten Wellenlänge wählt man sinnvolle Spaltbreiten, um evtl. Maxima 1., 2. oder noch höherer Ordnung aufzeichnen zu können.
- Die Auswertung erfolgt durch Vergleich mit der Erwartung nach Gleichung 1.11. Dazu muß das Empfängersignal in die Intensität der Welle umgerechnet werden (Teil **a)**). Eventuell muss die Nullage korrigiert werden, falls die Mikrowelle nicht exakt senkrecht auf die Wand fällt. Dazu werden die links und rechts gemessenen Extrema in $\sin \alpha$ gemittelt. Man berechne die Position der Extrema anhand der in Teil **b)** ermittelten Wellenlänge und vergleiche mit der Messung.
- Die Beugungsbilder weisen häufig unvorhergesehene Unregelmäßigkeiten auf, die durch Reflexionen an sonstigen umstehenden Wänden, Aufbauten, etc. erzeugt werden. Solche Einflüsse möglichst minimieren (evtl. den Aufbau ein wenig verschieben). Um sich zu vergewissern, daß es sich um aufgezeichnete Mikrowellensignale handelt (und keine Artefakte des Meßgerätes), empfiehlt es sich, die Messung auf dem Hin- und Rückweg zu vergleichen. Eine 'Nullmessung' mit geschlossenem Spalt zeigt eventuelle Störungen durch Beugung an sonstigen festen und (beweglichen ...) Gegenständen (und Individuen ...) im Raum an und muß gegebenenfalls von der Messung abgezogen werden. Zur Vermeidung von stehenden Wellen ist die Abschirmwand auf der Empfängerseite mit teildurchlässiger graphitierter Pappe verkleidet. Diese wirkt mit der vollständig reflektierenden Aluminiumfolie als sogenannter $\lambda/4$ Absorber (vgl. Abb. 1.8 – reflexfreie Wand). Ein Reflexionskoeffizient R für vollständige Auslöschung von direkt reflektierter mit der im Zwischenraum mehrfach reflektierten Welle wird dadurch erreicht, daß der Flächenwiderstand der Graphitschicht Z_{\square} (angegeben in Ω/\square) durch Auftragen in geeigneter Dicke auf den Wellenwiderstand des Vakuums $Z_0 = E/H = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = \pi \cdot 120\Omega$ eingestellt wird.

Dann ist $R = (Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2) = 1/3$ – wie nebenstehend skizziert, da vor der Graphitfläche $Z_1 = Z_0$ ist und die Reflexion an der Graphitfläche mitsamt dem dahinterliegendem Halbraum stattfindet – also an der 'Parallelschaltung' von Z_{\square} und wiederum Z_0 , d.h. $1/Z_2 = 1/Z_{\square} + 1/Z_0$.



d) Polarisation

Zur Demonstration von Polarisationseffekten wird ein Gitter aus elektrisch leitenden Stäben senkrecht zur Verbindungsleitung zwischen Sender und Empfänger aufgestellt. Um sich von der

Wirkungsweise eines solchen Polarisationsfilters zu überzeugen, wird die Abhängigkeit der Signalstärke vom Gitterwinkel sowohl in Vorwärtsrichtung, als auch seitlich (bei geschwenktem Empfänger-Arm) beobachtet und qualitativ beschrieben. Dabei wird der Aufbau (durch Verschieben von Sender/Gitter/Empfänger/Schiene) so eingestellt, daß in Vorwärtsrichtung bei Gitterstäben parallel zum Sende-Dipol kein Signal mehr gemessen wird. Dann wird die Intensität in Vorwärtsrichtung hinter dem Gitter in Abhängigkeit vom Drehwinkel des Gitters wie in Abb. 1.14 aufgezeichnet.

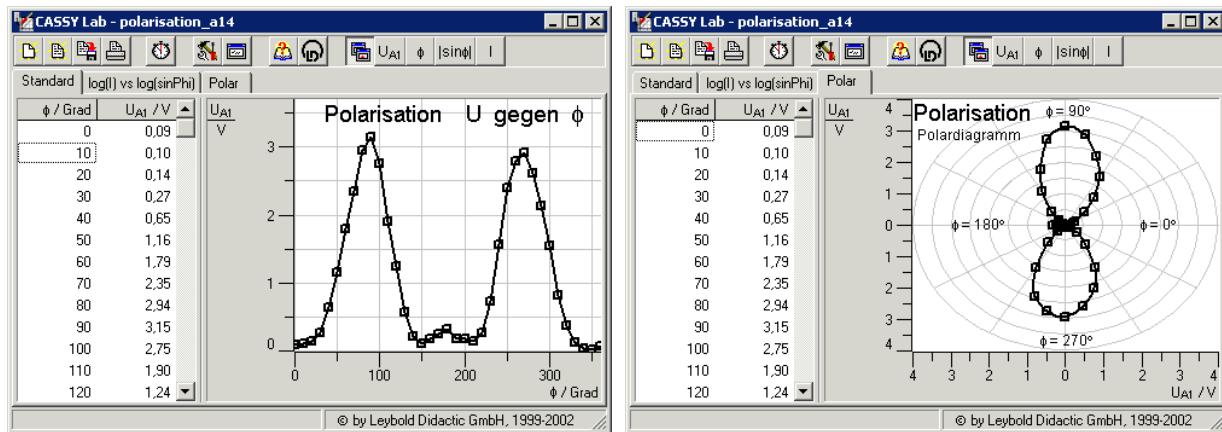


Abbildung 1.14: Gemessenes Signal gegen Drehwinkel des Polarisationsgitters. Links in kartesischer Darstellung und rechts im Polardiagramm

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

- Der Winkel des Polarisationsfilters kann z.Zt. nicht direkt mit dem Sensor-CASSY ausgelesen werden. Somit muß ein wenig 'getrickst' werden, um die Werte zügig mit CASSY aufzuzeichnen. Für Messungen von 0 bis 360 Grad in 10 Grad Schritten hat sich folgende Einstellung bewährt:

```
CASSY      / Kanal A / Spannung Ua1      +- Umax V,  gemittelt 1000ms
Meßparameter / manuell
Formel      / neue Größe   Phi: 10*(n-1)
Darstellung / X-Achse   Phi
              Y-Achse   Ua1
```

- Bevor man die Darstellung in doppelt-logarithmischer Form ausführt, muss gezeigt werden, wo die Polarisationsebene liegt. Dies kann in kartesischer Auftragung durch Ermittelung der Maxima, oder im Polardiagramm über die (visuelle) Bestimmung einer Symmetriearchse geschehen. Liegt die Symmetriearchse nicht genau auf der 0°- bzw. 90°-Linie, müssen die Werte für die Winkel entsprechend korrigiert werden.

- Das Gesetz von Malus (Gl. 1.15) wird in einer doppelt-logarithmischen Darstellung überprüft. Welcher Exponent wird erwartet? Da die Polarisation nicht vollständig ist und evtl. im Raum stehende Wellen am Ort des Empfängers ein Untergrund-Signal liefern, muß zunächst ein in der kartesischen Darstellung erkennbarer Signaloffset U_0 abgezogen werden. Außerdem muß das gemessene Signal mit dem Kalibrationsexponenten a aus der Abstandsmessung in die Intensität umgerechnet werden.

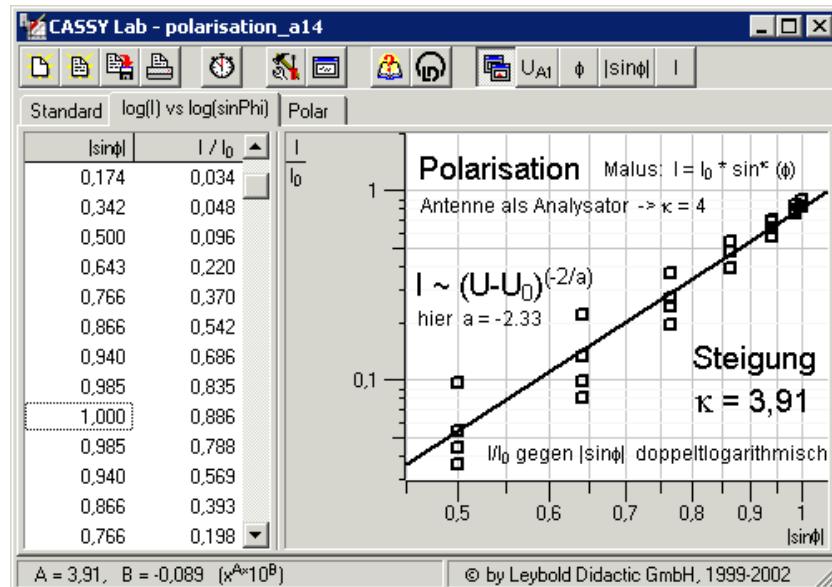
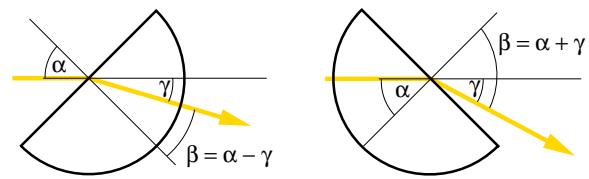


Abbildung 1.15: Polarisationsmessung in doppelt-logarithmischer Darstellung

e) Brechung in PE

Zur Überprüfung des Brechungsgesetzes wird ein PE-Halbzylinder anstelle der Holzwand auf ein waagerechtes U-Profil konzentrisch über den Drehteller gestellt. Der Empfänger wird so auf dem Schwenk-Arm befestigt, daß die Öffnung der Horn-Antenne auf einem Radius von 30cm liegt. Der Sender wird auf ca. 1m Abstand gestellt. Aufgezeichnet wird die Signalstärke in Abhängigkeit des Empfängerwinkels γ für verschiedene (jeweils positive und negative!) Einfallswinkel α .

Wie nebenstehend skizziert wird sowohl der Übergang von Luft nach PE, als auch von PE nach Luft gemessen, d.h. mit der flachen und auch der runden Seite des Halbzylinders zum Sender. Bis zu welchen Einfallswinkeln sind diese Messungen sinnvoll (Totalreflexion)?



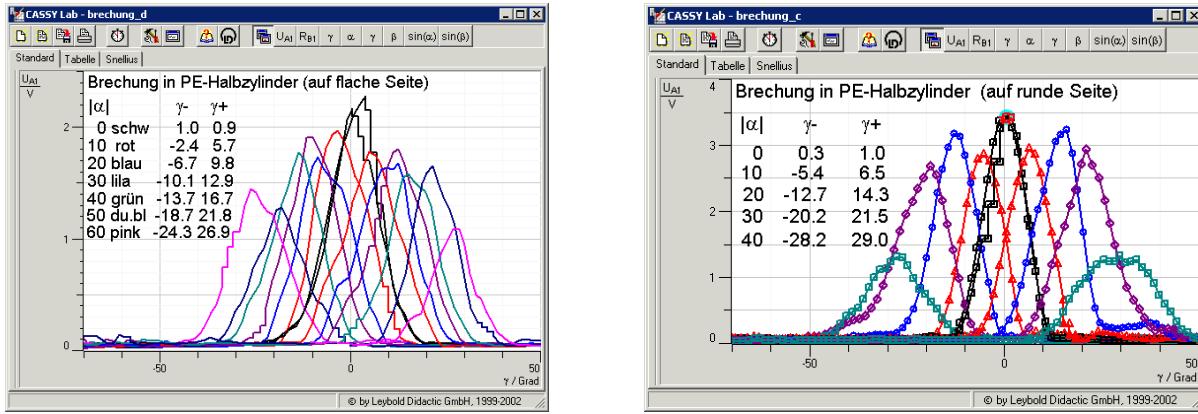


Abbildung 1.16: Aufgezeichnete Signalstärken hinter dem PE-Halbzyylinder. Links Übergang Luft-PE, rechts Übergang PE-Luft

Zur Bestimmung des Brechungsindex wird aus den aufgezeichneten Signalverläufen der Ausfallwinkel β ermittelt und dann wie in Abb. 1.17 $\sin \alpha$ gegen $\sin \beta$ aufgetragen. Nach Gl. 1.14 liegen die Werte auf einer Ursprungsgeraden mit dem Brechungsindex als Steigungsfaktor:

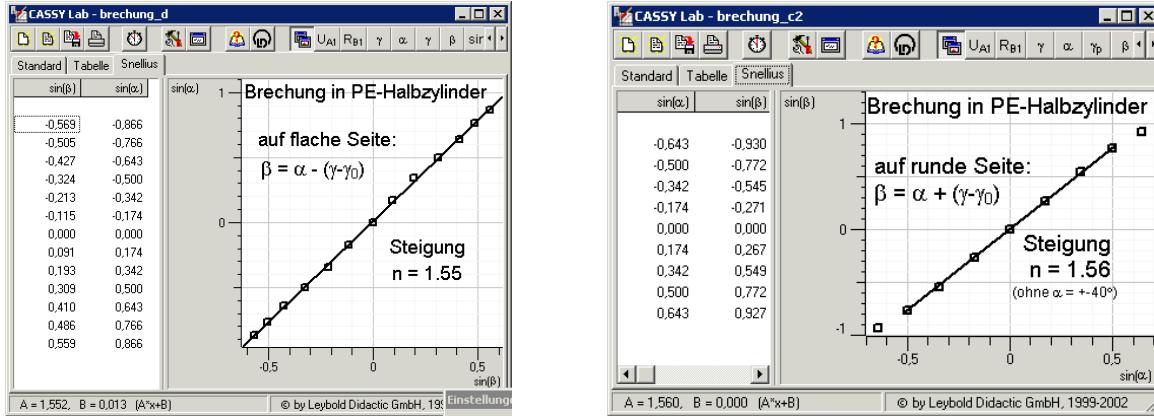
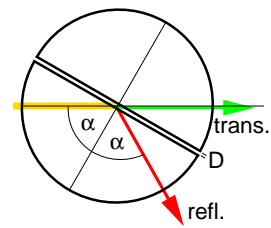


Abbildung 1.17: Bestimmung des Brechungsindex von PE. Links der Übergang Luft-PE. Rechts der Übergang PE-Luft

Hinweise zur Durchführung und Auswertung:

- Sollte sich während der Messungen der Winkel-Nullpunkt γ_0 verschieben, so wird er notiert und von der jeweiligen Messung abgezogen.
- Eine schief einfallende Welle (Justage des Senders) führt zu verschobenen Peaklagen, die durch Mittelung der jeweils zu $+\alpha$ und $-\alpha$ korrespondierenden Ausfallwinkel korrigiert werden kann.
- $\sin \beta$ wird aus den korrigierten Winkeln berechnet
- Wie genau ist die Messung? Dazu die Fehler von Einfalls- bzw. Ausfallwinkel abschätzen (Skalenablesegenauigkeit, Peakbestimmung, Winkelkalibration, Fehlerfortpflanzung).

Optischer Tunneleffekt Der Aufbau zur Messung des Übergangs PE-Luft kann durch einen zweiten Halbzylinder, wie nebenstehend skizziert, ergänzt werden, um einen interessanten Effekt zu demonstrieren: Wegen der Wellennatur der elektromagnetischen Strahlung ist auch für Einfallswinkel oberhalb der Totalreflexion ein transmittierter Strahl zu beobachten, wenn die Lückenbreite D kleiner ist als die Wellenlänge λ .



Dieser Effekt wird auch *frustrierte totale interne Reflexion* – FTIR – genannt und findet in Strahlteilern mit variabler Intensitätsaufteilung Anwendung.

Analog zum quantenmechanischen Tunneleffekt ergibt sich für die transmittierte Intensität $I_T \sim e^{-2\pi D/\lambda}$. Eine Aufteilung im Verhältnis 1:1 ergibt sich somit für $D = \lambda \frac{\ln 2}{2\pi} \approx \lambda/10$.

Bei einem Einfallswinkel von $\alpha = 60$ Grad kann sowohl der reflektierte als auch der transmittierte Strahl für verschiedene Lückenbreiten D gemessen werden. Nebenstehend ist eine Messung gezeigt (Abstandsbleche verwenden).

Wird nun die Signalhöhe in Intensität umgerechnet, und der transmittierte Anteil logarithmisch über D aufgetragen, liegen die Werte auf einer Geraden mit Steigung $-2\pi/\lambda$. Eine solche Auswertung zeigt Abb. 1.18.

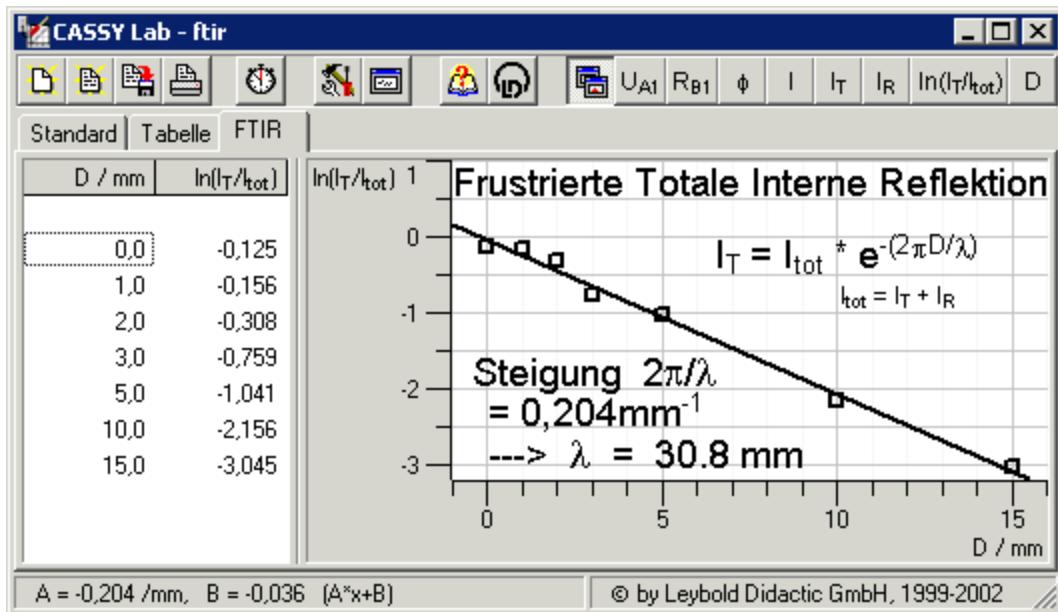
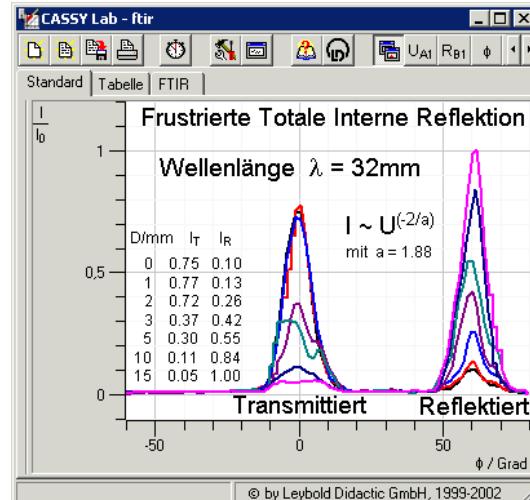


Abbildung 1.18: Frustrierte totale interne Reflexion

Kapitel 2

Optik I - Linsen, Beugung, Schärfentiefe, Spektrometer

2.1 Geometrical Optics

Purposes

In this experiment focal lengths of lenses and lens systems are measured.

Keywords

Light ray, optical path, Fermat's principle, lens, focal point, optical image, lens equation, lens system, refractive index, light sources, light detection

Literature

Educational Books

OPTIK. 2., durchges. Aufl.
Hecht, E. Oldenbourg, 1999. 717 S.
ISBN 3-486-25186-4

OPTICS
Englische Ausgabe - 694 S . Addison Wesley Publishing Company 1997
ISBN 02-018-38877

OPTIK, LICHT und LASER.
Meschede, D. Teubner, 1999. 456 S.
ISBN 3-519-03248-1

LEHRBUCH DER EXPERIMENTALPHYSIK. Bd. 3: Optik. 8. Aufl.
Bergmann, L.; Schaefer, C. und Gobrecht, H. (Hrsg.). de Gruyter,
1987. 1117 S. (Lehrbuch der Experimentalphysik. 3)
ISBN 3-11-010882-8

Handbooks

Handbook of Optics
Fundamentals, techniques, and design. Handbook of optics, 1. 2. ed. ; 1995:
ISBN 0-07-047740-X

Devices, measurements, and properties. Handbook of optics, 2. 2. ed. ; 1995:
ISBN 0-07-047974-7

Classical optics, vision optics, x-ray optics. Handbook of optics, 3. 2. ed. ; 2001:
ISBN 0-07-135408-5

Fiber optics and nonlinear optics. Handbook of optics, 4. 2. ed. ;2001:
ISBN 0-07-136456-0

www

<http://www.SuKhamburg.de>

Schäfter und Kirchhoff ist ein Lieferant für Profi Optik im Industrie und Raumfahrteinsatz (u.a. für AMS). Unsere Kamera ist vom Typ SK2048 DJRI. Details zur Funktionsweise können von S&K heruntergeladen werden

2.1.1 Theory

Optics, the study of light, is conveniently divided into three fields, each of which requires a markedly different method of theoretical treatment. These are (a) *geometrical optics*, which is treated by the method of light rays, (b) *physical optics*, which involves primarily the theory of waves, and (c) *quantum optics*, which for an exact treatment requires the methods of quantum theory.

The current experiment deals entirely with geometrical optics. The next experiment, devoted to the study of diffraction phenomena, require knowledge of physical (wave) optics. The experiment on photoelectric effect (Advanced Physikalischs Praktikum) belongs to the field of quantum optics.

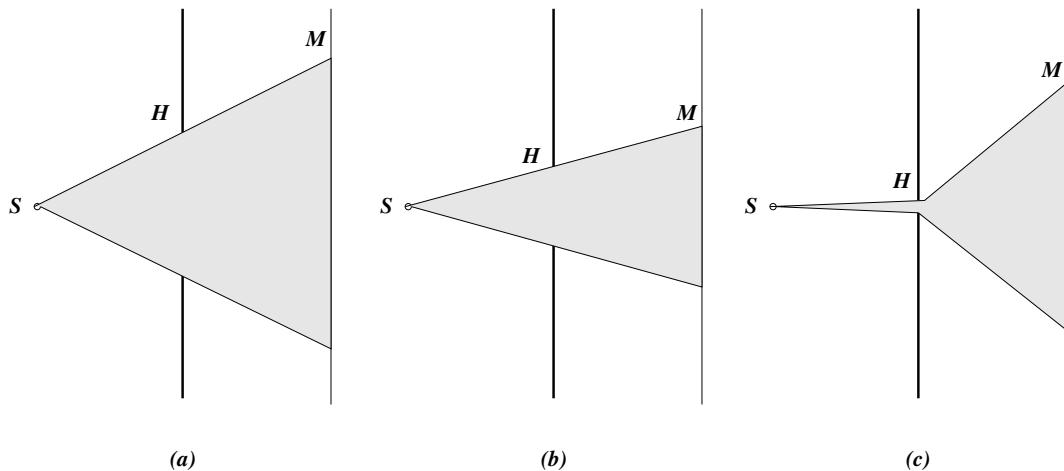


Abbildung 2.1: Attempt to isolate a single ray of light

Concept of a Ray of Light

The distinction between geometrical and physical optics appears at once when we attempt by means of diaphragms to isolate a single ray of light. In Fig.2.1 let S represent a source of light of smallest possible size, a so-called *point source*. If opaque screen H provided with a large hole is inter-imposed between S and a white observing screen M , Fig.2.1(a), only the portion of M lying between the straight lines drawn from S will be illuminated. This observation forms the basis for saying that light is propagated in straight lines called *rays*. If the hole in H is made smaller, as in (b) of the figure, the illuminated region shrinks correspondingly, so that one might hope to isolate a single ray by making it vanishingly small. Experiment shows, however, that at a certain width of H (a few tenths of a millimeter) the bright spot begins to widen again. The result of making the hole exceedingly small is to cause the illumination to spread over a considerable region of the screen Fig.2.1(c).

The failure of this attempt to isolate a ray is due to the process called *diffraction*. Diffraction is a consequence of the wave character of light and it will be the subject of the next experiment. It becomes important when small-scale phenomena are involved. In the current experiment we deal with fairly wide beams of light and effects of diffraction can be neglected. The concept of light rays is then a very useful one because the rays show the direction of flow of energy in the light beam.

Optical Path

To formulate general principles of geometrical optics, a quantity called the *optical path* should be defined. When the light travels a distance d in a medium of refractive index n the optical path is the product nd . The physical meaning of $n = c/v$, ratio of light velocity c in vacuum and v in medium, shows that the optical path represents the distance in vacuum that the light would traverse in the same time that it goes the distance d in medium. When there are several segments $d_1, d_2\dots$ of the light path in substances having different indices $n_1, n_2\dots$, the optical path s is found as follows:

$$s = n_1 d_1 + n_2 d_2 + \dots \quad (2.1)$$

Fermat's Principle

Using the concept of optical path, the Fermat's principle states

The path taken by a light ray in going from one point to another through any set of media is such that its optical path has extremal (minimal or maximal) value.

It is shown mathematically that both laws of reflection and refraction follow Fermat's principle.

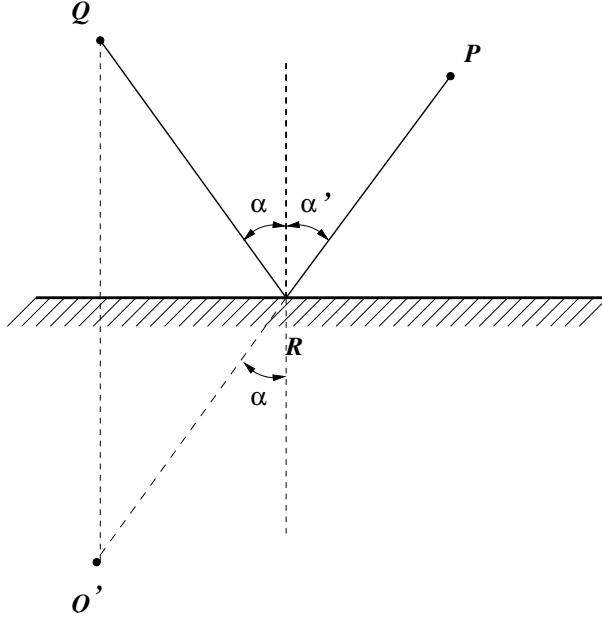


Abbildung 2.2: Reflection at a plane surface

Law of Reflection

Consider a case of a ray of light that must first pass through a point Q , then, after reflection from a plane surface, pass through a second point P (see Fig.2.2). To find the real path, we first drop a perpendicular to the surface and extend it an equal distance on the other side to Q' . The straight line $Q'P$ is the shortest path connecting the points Q' and P . Therefore the real light path is QRP and, as can be seen from the symmetry of the diagram, obey the *law of reflection*:

The angle of reflection equals the angle of incidence, $\alpha = \alpha'$

Law of Refraction (Snell's Law)

Fig.2.3 represents the refraction of a ray at a plane surface. The length of the optical path, s , between a point Q_1 in the upper medium of index n_1 , and another point Q_2 in the lower medium of index n_2 , is

$$s = n_1 d_1 + n_2 d_2 \quad (2.2)$$

where d_1 and d_2 represent the distances Q_1R and RQ_2 , respectively.

Let h_1 and h_2 represent perpendicular distances to the surface and p the total length of the x axis intercepted by these perpendiculars. From Pythagorean theorem concerning right triangles

$$d_1^2 = h_1^2 + (p - x)^2; d_2^2 = h_2^2 + x^2 \quad (2.3)$$

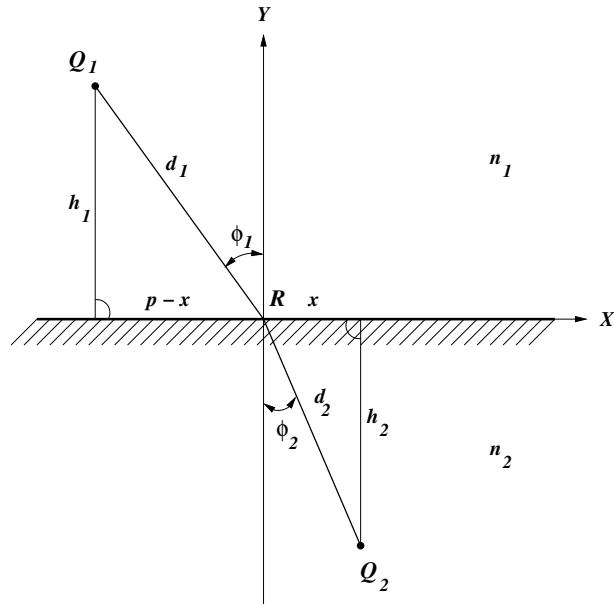


Abbildung 2.3: Geometry of a refracted ray

Therefore, we obtain

$$s = n_1(h_1^2 + (p - x)^2)^{\frac{1}{2}} + n_2(h_2^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

According to Fermat's principle s must be a minimum or maximum for the actual path. By differentiating s with respect to x and setting the result equal to zero, we obtain

$$\frac{ds}{dx} = \frac{n_1(-p + x)}{(h_1^2 + (p - x)^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{n_2x}{(h_2^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad (2.5)$$

This gives

$$n_1 \frac{p - x}{(h_1^2 + (p - x)^2)^{\frac{1}{2}}} = n_2 \frac{x}{(h_2^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.6)$$

or, more simply,

$$n_1 \frac{p - x}{d_1} = n_2 \frac{x}{d_2} \quad (2.7)$$

By reference to Fig.2.3 it is seen that the multipliers of n_1 and n_2 are just the sines of the corresponding angles:

$$n_1 \sin(\phi_1) = n_2 \sin(\phi_2) \quad (2.8)$$

Lenses

Diagrams showing the refraction of light by a lens are given in Fig.2.4.

Focal Points and Focal Length

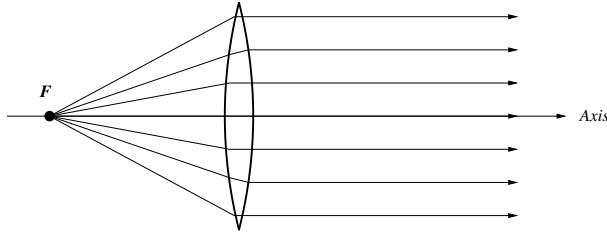


Abbildung 2.4: Ray diagram illustrating the focal point of a thin lens

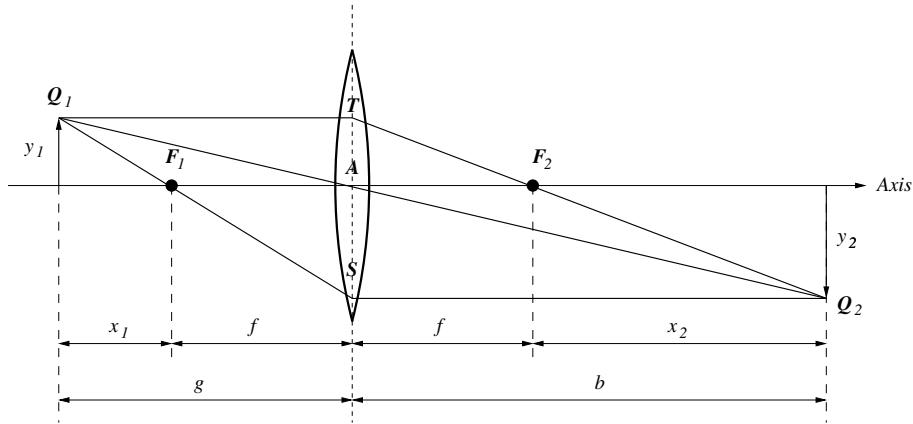


Abbildung 2.5: Parallel ray method of image formation

The *axis of a lens* is a straight line through the geometrical center of the lens and perpendicular to the two faces at the points of intersection.

The *focal point* F is an axial point having the property that any ray coming from it travels parallel to the axis after refraction. The distance between the center of a lens and either of its focal points is called its *focal length*.

Image Formation. Lens Formula

The parallel-ray method of image formation is illustrated in Fig.2.5.

From similar triangles Q_2TS and F_2TA the proportionality between corresponding sides gives

$$\frac{y_1 + y_2}{b} = \frac{y_1}{f} \quad (2.9)$$

From similar triangles Q_1TS and F_1AS ,

$$\frac{y_1 + y_2}{g} = \frac{y_2}{f} \quad (2.10)$$

The sum of these two equations is

$$\frac{y_1 + y_2}{b} + \frac{y_1 + y_2}{g} = \frac{y_1 + y_2}{f} \quad (2.11)$$

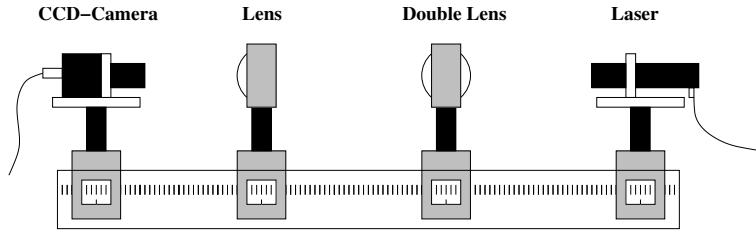


Abbildung 2.6: Optical Bench

The common multiplicator $y_1 + y_2$ may be canceled out, yielding the *lens formula*

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f} \quad (2.12)$$

Lenses Combination

The method of image formation illustrated in Fig.2.5 for a single lens is readily extended to optical systems involving two or more lenses.

For the system of two lenses with focal lengths f_1 and f_2 separated by a distance d the resulting focal length of the system f is given by the formula:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (2.13)$$

The focal length f is equal to the distance between the focal point of two lens system and its *principal plane*. The principal plane of a system of two identical lenses is in the middle between two lenses.

2.1.2 Experimental Setup

For a better understanding of the single components, beam geometry, CCD camera etc. study the document *laserdiffraction_d.pdf* of the company Schäfter + Kirchhoff (see 2.2.4.1 or http://acms04.physik.rwth-aachen.de/praktapp/teil2/anleitung2/laserdiffraction_d.pdf).

The scheme of the optical bench which have to be used for this experiment is shown in Fig.2.6. It consists of

- Optical bench
- Light source
- Light detector
- Optical elements: lenses, diffraction targets, etc.

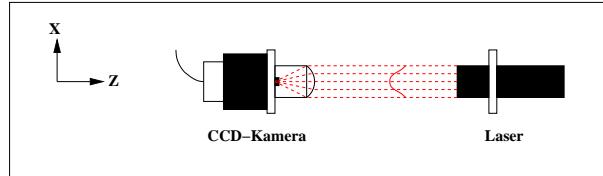


Abbildung 2.7: Top view of the optical bench

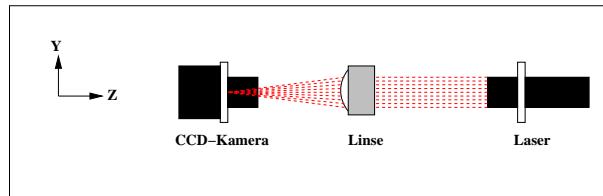


Abbildung 2.8: Side view of the optical bench

Light Source

Infrared He Ne laser with collimation optics creates a laser beam which is parallel to the axis of the optical bench and has the following parameters:

- wavelength $\lambda = 655 \text{ nm}$
- power $P \leq 5 \text{ mW}$
- Gaussian beam profile in x, uniform in y.

Light Detector

As a light detector a CCD camera with a one-dimensional array of pixels is used. The camera has a vertical cylindrical lens which focuses the laser beam on the sensitive area (Fig.2.7) Parameters of the pixel array:

- number of pixels = 2048
- size of one pixel $\delta_{pxl} = 14 \mu\text{m}$
- orientation: vertical (along y-axis)

Optical Elements

For studies of the geometrical optics horizontal cylindrical lenses have to be mounted between the laser and the CCD camera, see Fig.2.8

Cylindrical lenses have

- dimensions: 60 mm x 50 mm
- two lens supports: one for single lens and one for lens doublet

2.1.3 Carrying out the Experiment

The experiment starts from installation and adjustment of the laser and the camera on the optical bench.

Attention! This is important!

- The cable of the CCD camera has to be connected to or disconnected from the USB interface board only when the power of the board is SWITCHED OFF!
- The laser power supply has to be grounded BEFORE the power is switched on.
- The USB of the interface board has to be inserted in the dedicated notebook slot BEFORE the computer is started.

When the camera is installed at the left end of the ruler ($z = 100$ mm), the laser with its support has to be placed immediately in front of the camera objective.

After the check of connections the power is switched on, the key of the laser power supply is turned on, the computer is started, the program SKLine is initiated, and the signal from the camera is adjusted. Use a white sheet of paper and hold it into the beam so that you can see the extension of the beam. You should observe an elliptical spot of about 3 cm in vertical and 1.5 cm in horizontal direction.

In case of an required intensity adjustment ask the assistant for a little screwdriver. On the rear side of the camera there is a hole for it. By gently turning this screw one can adjust the beam intensity. It is recommended to turn down the intensity to a level at which the laser beam is just faintly visible. At any rate, it should be adjusted later to provide the narrowest possible focus signal on the display without overdriving the sensor chip (no clipping).

Consider that the CCD-array is a one-dimensional array of 2048 charge-coupled cells in vertical direction. Without a lens or any obstacle in between camera and sensor the sensor surface should be covered uniformly by the laser beam.

Then the heights of the camera and laser have to be equalized such that the laser and the camera look at each other eye-to-eye.

Make the axis of the CCD camera as parallel to the bench axis as possible.

Start to move the laser apart from the camera trying to keep the signal the same. Readjust the laser direction (but not the height) if necessary. Mount the laser firmly at the right end of the bench ($z = 900$ mm).

Repeat the adjustment procedure again if necessary.

Finally, the laser beam has to give approximately uniform signal along the camera pixel array.

Using the SKLine program you can control the uniform covering of the CCD-array. Due to the gaussian intensity distribution, the levels coming from the 2048 single cells form a flat konvex curve. See also page 3 of 2.2.4.1, 'shading correction' (figure 9, a). Note: To use shading correction in the SKLine programm goto Edit → Shading Control (Alt-S)

- ruler 'Odd Pixel', 'Even Pixel' full on (1)
- press 'New Reference'

Make SKLine 'Calibration'. The optical bench is ready for the experiments.

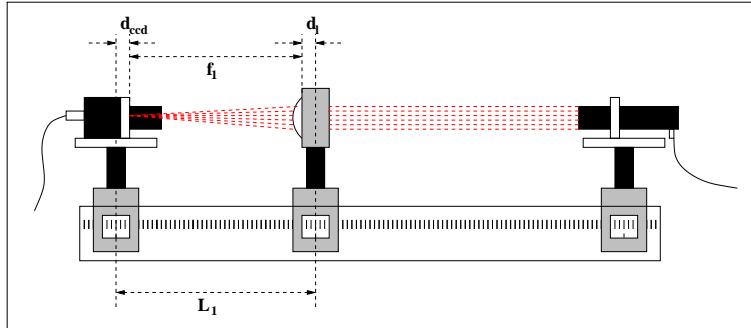


Abbildung 2.9: 1st experiment

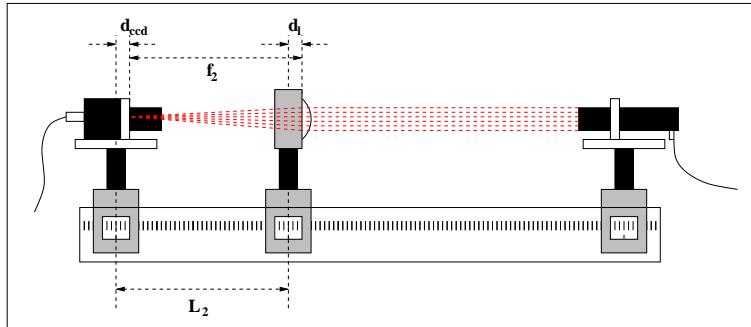


Abbildung 2.10: 2nd experiment

The experiment is started from the installation of the single lens on the optical bench, see Fig.2.9.

The height of the lens support has to be adjusted so that the beam spot is approximately at the center of the pixel array. The lens plane has to be perpendicular to the beam direction. The value of L_1 , distance of the best focusing, has to be determined. First, the approximate position has to be found by observation of the narrowest signal shape on the notebook display (for example, at $z = 300$ mm).

Then, several (≥ 5) measurements of the spot width have to be made with a step of 1 mm both below and above the approximate value (in our example: at $z = 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305$ mm). The parabolic fit of the measured widths has to be done, and the exact L_1 value obtained.

Repeat this procedure several (≥ 5) times. Define the mean value of L_1 and its measurement error.

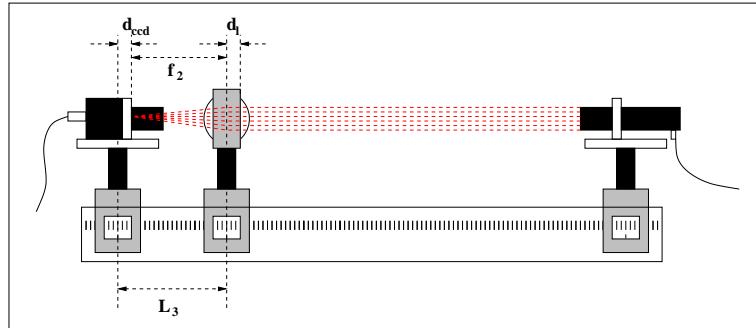
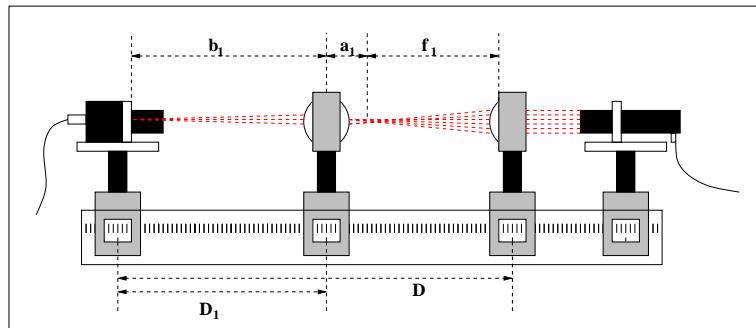


Abbildung 2.11: 3rd experiment

Abbildung 2.12: 4-th experiment, D_1

Three factors give contributions to L_1 value:

- f_1 - focal length of the single lens,
- d_{ccd} - unknown z-offset of the pixel array to the camera support mark,
- d_l - z-offset of the lens main plane to the lens support mark,

namely,

$$L_1 = f_1 + d_{ccd} + d_l \quad (2.14)$$

To find these three unknowns at least two more independent measurements are needed.

For the second measurement the single lens is rotated approximately by 180° around vertical axis, see Fig.2.10. Similarly, the value of L_2 , distance of the best focusing, has to be found. Apply the same procedure as for L_1 . In this case

$$L_2 = f_1 + d_{ccd} - d_l \quad (2.15)$$

In the third experiment the doublet lens is used, see Fig.2.11. The distance of best focusing, L_3 , is defined by f_2 , the focal length of the lens doublet, and by d_{ccd} :

$$L_3 = f_2 + d_{ccd} \quad (2.16)$$

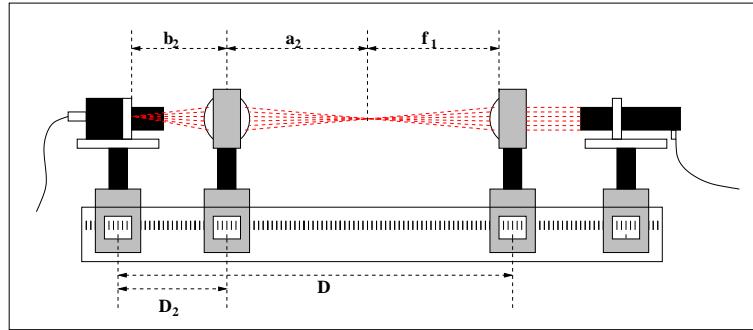


Abbildung 2.13: 4th experiment, D_2

The value of f_2 can be calculated using the formula for the focal length of two lens system (2.13):

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_1} - \frac{2d_l}{f_1 f_1} \quad (2.17)$$

Use three measured values of L_1, L_2, L_3 to reconstruct unknown values of f_1, d_{ccd}, d_l . Calculate their errors using the errors of measured values.

The fourth experiment is shown in Figs.2.12 and 2.13.

The single lens is placed at a distance D from the camera ($700 \text{ mm} < z < 800 \text{ mm}$). There are two positions of the double lens which give the best focused images on the pixel array: D_1, D_2 . Measure these distances. Predict their values using measured values of f_1, d_{ccd}, d_l, D . Compare the predicted and measured values.

2.2 Diffraction

Purposes

In this experiment effects of Fresnel and Fraunhofer diffractions are studied.

Keywords

Wave amplitude and intensity, superposition of waves, Huygens' principle, Fraunhofer diffraction, Fresnel diffraction, Fresnel zones

2.2.1 Theory

Wave Amplitude and Intensity

Light waves are oscillations of the electro-magnetic field. They are characterized by the field *amplitude* a and oscillation *frequency* ω . The simplest type of a plane wave is:

$$y(x, t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x - \alpha) \quad (2.18)$$

where ω is the *frequency*, k is the *wave number* and α is the *phase*. For a fixed point in space its time dependence is:

$$y = a \cdot \sin(\omega t - \alpha) \quad (2.19)$$

Waves transport energy, and the amount of it that flows per second across unit area perpendicular to the direction of travel is called the *intensity* of the wave.

If the wave flows continuously with the velocity v , there is a definite energy density, or total energy per unit volume. All the energy contained in a column of the medium of unit cross section and of length v will pass through the unit of area in 1 sec. Thus the intensity is given by the product of v and the energy density. The energy density of a wave ϵ is proportional to the square of the amplitude a and to the square of the frequency ω

$$\epsilon \sim \omega^2 a^2 \quad (2.20)$$

The intensity, v times this quantity, will then also proportional to ω^2 and a^2 .

Superposition of Waves

Principle of superposition states that in the region of crossing of two waves the resultant wave *amplitude* is equal to the sum of the amplitudes of each waves separately.

Considering the effect of superimposing two sine waves of the same frequency and amplitude, but different phases:

$$y_1 = a \cdot \sin(\omega t - \alpha_1); y_2 = a \cdot \sin(\omega t - \alpha_2) \quad (2.21)$$

According to the principle of superposition, the resultant wave is merely the sum of y_1 and y_2 :

$$y = a \cdot \sin(\omega t - \alpha_1) + a \cdot \sin(\omega t - \alpha_2) = A \sin(\omega t - \theta) \quad (2.22)$$

where

$$A^2 = 2a^2(1 + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)) \quad (2.23)$$

and

$$\tan \theta = \frac{\sin(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)}{\cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_2)} \quad (2.24)$$

The resultant amplitude A depends upon the amplitude a of the component motions and upon their difference of phase $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$. The intensity I will be proportional to the square of the resultant amplitude

$$I \sim A^2 = 2a^2(1 + \cos(\delta)) = 4a^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad (2.25)$$

If the phase difference is such that $\delta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$, then this gives $4a^2$, or four times the intensity of either beam. If $\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$, the intensity is zero. For the intermediate values, the intensity varies between these limits according to the square of the cosine. These modifications of intensity obtained by combining waves are referred to as *interference effects*.

Diffraction

When waves pass through an aperture, or pass the edge of an obstacle, they always spread to some extent into the region which is not directly exposed to the coming waves. This phenomenon is called *diffraction*.

Huygens' Principle

In order to explain this bending of light, Huygens proposed the rule that *each point on a wave front may be regarded as a new source of waves*.

Diffraction phenomena are conveniently divided into two classes, (1) *Fresnel diffraction* when either the source or screen, or both, are at finite distances from the aperture, and (2) *Fraunhofer diffraction* when the source of light and the screen on which the pattern is observed are effectively at infinite distances from the aperture causing the diffraction.

Fresnel Diffraction at Straight Edge

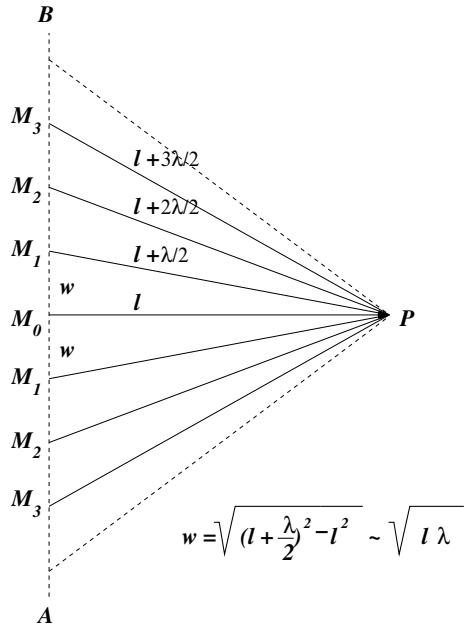


Abbildung 2.14: Fresnel's zones

Fresnel diffraction being a general case of diffraction is quite difficult for theoretical study. The diffraction by a single screen with a straight edge is the simplest application of the Fresnel theory.

Fresnel's Zones

In Fig.2.14 let AB represent a plane wave front of monochromatic light traveling toward the right. Every point of this plane may be thought of as the origin of secondary waves, and we wish to find the resultant effect of these at a point P . To do this, we divide the wave front into strips, the edges of which are successfully one-half wavelength farther from the point P (so-called *Fresnel's zones*). Thus the points M_1, M_2, M_3, \dots are at distances $l + (\lambda/2), l + (2\lambda/2), l + (3\lambda/2), \dots$ from P . By Huygens' principle we now regard every point on the wave front as sending out secondary waves in the same phase. These will reach P with different phases, since each travels a different distance. Each zone is on average $\lambda/2$ farther from P , therefore the successive zones will produce resultant amplitudes at P which differs by π in their phases, which means they will have alternating signs:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - \dots \quad (2.26)$$

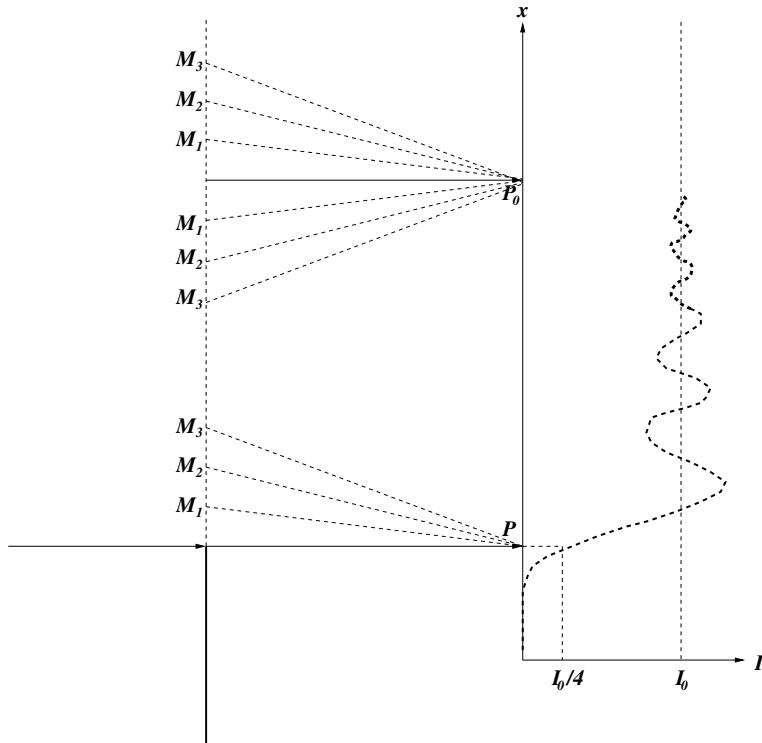


Abbildung 2.15: Fresnel diffraction pattern

Intensity on the Edge of the Shadow

Intensity of the light at a point P_0 in the fully illuminated part of the screen (far away from the edge of the shadow, see Fig.2.15) is given by the formula

$$I_0 = A_0^2 \quad (2.27)$$

where A_0 is a sum of contributions from all the Fresnel's zones both upward and downward from the point P_0 .

The amplitude A at the edge of the shadow, P , is a sum of contributions from the zones only up-wards from the point P , therefore it is equal to one half of the amplitude A_0 , and the intensity of light I at the edge of the shadow, being a square of the corresponding amplitude A , is one fourth of the intensity in the fully illuminated region:

$$I = A^2 = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 = \frac{I_0}{4} \quad (2.28)$$

Scaling with Distance

The width w of one Fresnel's zone (see Fig.2.14) is equal to

$$w = \sqrt{(l + \lambda/2)^2 - l^2} \simeq \sqrt{\lambda l} \quad (2.29)$$

A point Q which is at a distance d from the edge of the shadow has d/w Fresnel's zones downward. Interference between contributions from these downward zones and all the upward zones defines the light intensity at the Q . If we consider two different screen separations l_1 and l_2 from the edge, the points Q_1 and Q_2 will have the same number of downward zones, if their distances to the edge of the shadow are proportional to $\sqrt{l_1}$ and $\sqrt{l_2}$ respectively. Therefore in the Fresnel case the diffractive pattern scales with a distance as \sqrt{l} .

Fraunhofer Diffraction by a Single Opening

The diffraction of light by a single opening demonstratess the differense between the Fresnel and Fraunhofer cases.

Fig.2.16 represent a section of a slit of width b , illuminated by parallel light of wavelength λ from the left, and the distance from the slit to the screen is equal to l . If the width of one Fresnel's zone $w = \sqrt{\lambda l}$ is much smaller than the slit width b , then the Fresnel's theory of diffraction has to be used for the explanation of the diffraction pattern.

But if the distance l is so large that the width of one Fresnel's zone is equal or greater than the slit width

$$w = \sqrt{\lambda l} \geq b \quad (2.30)$$

the corresponding diffractive pattern is not explained by the interference of contributions of different Fresnel's zones (2.26) anymore, but by the interference of the Huygens secondary waves within one zone, which can be thought of as sent out from every point on the plane of the slit.

This is the case of *Fraunhofer diffraction*, and the distance at which the slit width is equal to one zone width

$$l = \frac{b^2}{\lambda} \quad (2.31)$$

is called the *Fraunhofer distance*.

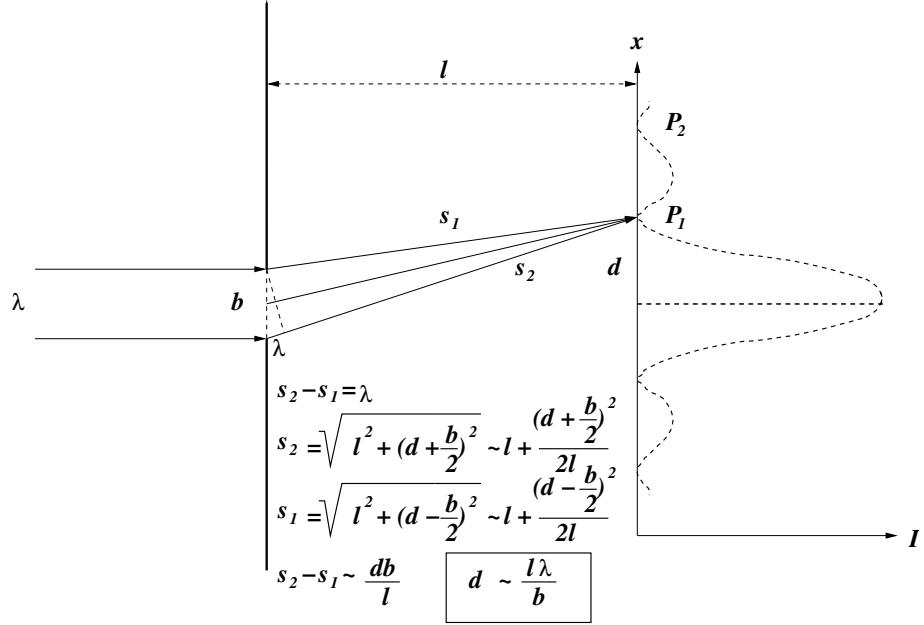


Abbildung 2.16: Position of the first minimum of the Fraunhofer diffraction pattern

Consider the light from the slit of Fig.2.16 coming to the point P_1 on the screen, this point being just one wavelength farther from the lower edge of the slit than from the upper. The secondary wave from the point in the slit adjacent to the lower edge will travel approximately $\lambda/2$ farther than that from the point at the center, and so these two will produce oscillations with a phase difference of π and will give a resultant amplitude of zero at P_1 . Similarly the wave from the next point above the lower edge will cancel that from the next point above the center, and we may continue this pairing off to include all points in the wave front, so the resultant effect at P_1 is zero.

Simple calculations (see Fig.2.16) show that the distance d between the main maximum and the first minimum is proportional to the separation between the slit and the screen

$$d = \frac{l\lambda}{b} \quad (2.32)$$

Therefore in the Fraunhofer case the diffractive pattern scales with a distance proportional to l in contrast to the Fresnel case where it scales as \sqrt{l} .

2.2.2 Experimental Setup

The setup used for the diffraction studies is the same as for the geometrical optics experiments (Section 1.2.2), but instead of optical elements (lenses, lens doublets) some mechanical parts and measurement tools are used:

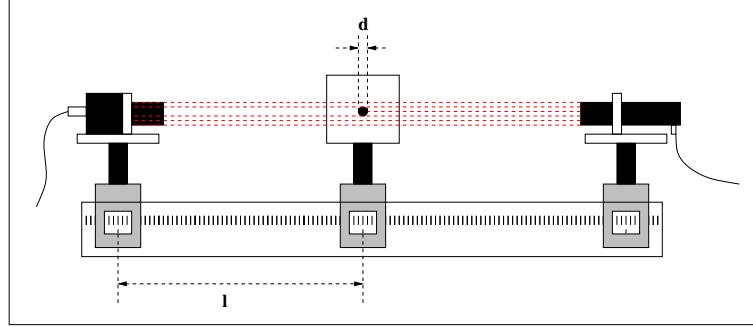


Abbildung 2.17: Experiment on Fresnel diffraction

- cylindrical rods
- cylinders support plate
- micrometer
- set of thin plates of calibrated thicknesses

2.2.3 Conducting the Experiment

For the optical bench installation and adjustment see Sect.1.1.3

Fresnel Diffraction

Install a plate with horizontally supported cylinder on the optical bench, see Fig.2.17. Adjust the height of the plate so that the shadow from the cylinder is approximately in the center of the pixel array.

Mount the plate at several z-positions (not less than 10). For each position store sufficient number of consecutive scans of the CCD pixel array. Average these scans.

Find the signal intensity in the fully illuminated part of the scan, I_f , and in the completely shadowed part, I_s .

Calculate $I_0 = I_f - I_s$.

Find the positions of the shadow edges y_{left}^{edge} and y_{right}^{edge} , using (2.28).

Find the positions of the first maxima y_{left}^{max} and y_{right}^{max} .

Plot the measured values of the cylinder diameter

$$d = y_{right}^{edge} - y_{left}^{edge} \quad (2.33)$$

as functions of l , the distance between the cylinder and the CCD camera. Estimate the true value of d by extrapolation of the function $d(l)$ to $l = 0$. Compare the result with the d value measured by a micrometer.

Plot the distances from the shadow edges to the first maxima

$$\delta_{right} = y_{right}^{max} - y_{right}^{edge} \quad (2.34)$$

$$\delta_{left} = y_{left}^{max} - y_{left}^{edge} \quad (2.35)$$

Interpret them.

Fraunhofer Diffraction

Install a plate with two horizontally supported cylinders on the optical bench, see Fig.2.18. Adjust the slit width b between the cylinders so that the Fraunhofer diffraction conditions are fulfilled (i.e. the diffractive pattern seen on the CCD has a typical Fraunhofer shape, and the light intensity at the positions of minima is zero) for the whole range of z variation. Mount the plate at several z-positions. For each position store sufficient number of consecutive scans of the CCD pixel array. Average these scans. Find the positions of the first minima y_{left}^{min} and y_{right}^{min} . Plot their separation

$$s = y_{right}^{min} - y_{left}^{min} \quad (2.36)$$

as a function of l . Interpret this function.

Using the known value of the laser wavelength find the the slit width b . Compare it with the b value measured by a set of thin strips of known widths.

Transition from Fresnel to Fraunhofer Diffraction

Install a plate with two horizontally supported cylinders as shown in Fig.2.18. Adjust the slit width b between the cylinders so that the Fraunhofer diffraction conditions (see above) are fulfilled only for a limited range of z variation. Moving the plate from the position close to the CCD, where the diffraction is of the Fresnel's type, farther away, find the z-position of the plate, where the Fraunhofer conditions start to be fulfilled. At this position calculate the distance l from the cylinders slit to the CCD. Compare with (2.32).

Error Analysis

Evaluation of sources and values of systematic and stochastic errors for the measured in all the experiments (Geometrical Optics and Diffraction) parameters have to be presented. The leading factor which limits the accuracy of the experiment should be determined.

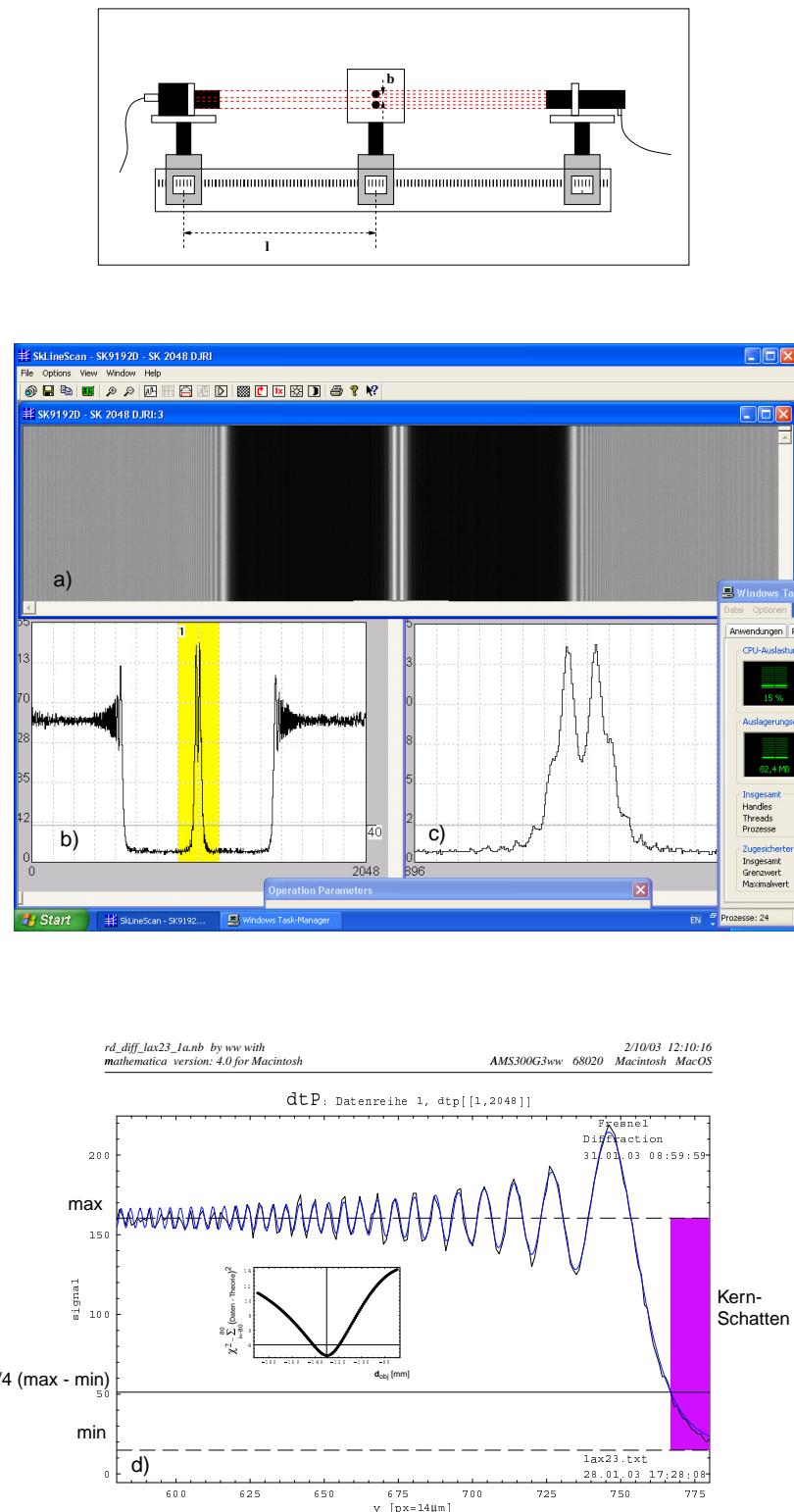


Abbildung 2.18: Experiment on Fraunhofer diffraction

2.2.4 Appendix

2.2.4.1 Description by Schäfter + Kirchhoff

2004

Wo Licht ist, ist auch Schatten

Laser-Diffraktions-Meßsystem für Durchmesser, Geometrie und Kantenlage

Ein Evergreen der Lasermeßtechnik ist die Auswertung einer oder mehrerer vom Meßobjekt erzeugten Schattenkanten. Bei diesem Meßverfahren wird ein kollimierter Laserstrahl auf einen CCD-Zeilensensor projiziert. Ein in den Strahlengang geführter Meßkörper schattet den Laserstrahl partiell ab. Direkt und ohne Zwischenabildung entstehen auf dem Zeilensensor eine oder mehrere, von Fresnelschen Beugungsstrukturen überlagerte, Schattenkanten.

Grafik (a) von Bild 1 zeigt die auf dem Zeilensensor generierte Beugungsstruktur des Meßobjektes. Das Beugungssignal der CCD-Zeilenkamera und ein vergrößerter Ausschnitt der Beugungsstruktur einer Kante sind im Monitorbild von Bild 2 dargestellt.

In den Fresnelschen Beugungsstrukturen manifestiert sich die Wellennatur des Lichtes. Die ebene Wellenfront aus dem Kollimator wird am Meßobjekt abgebogen, es gelangt Licht in den geometrischen Schattenbereich. Im Hellbereich außerhalb des geometrischen Schattens entstehen durch Interferenz des abgelenkten Anteils mit der ungestörten Welle Interferenzstreifen.

Ohne Meßobjekt fällt der annähernd gleichförmig ausgeleuchtete Zentralbereich des elliptischen kollinierten Strahls auf den CCD-Zeilensensor. Für eine gute Übereinstimmung mit der Theorie werden am Ort des Meßobjekts möglichst ebene Wellenfronten benötigt. Eine linienförmige Fokussierung des kollinierten Strahls auf den Zeilensensor ist nicht erforderlich, sie wirkt sich störend auf das Beugungsbild aus. Zur Unterdrückung störender Hintergrundbeleuchtung ist ein schmales, an die Laserwellenlänge angepaßtes, optisches Bandpassfilter sinnvoll.

Zur Ermittlung der Kantenpositionen werden je nach Geschwindigkeits- und Genauigkeitsanforderungen zwei alternative Verfahren angewendet:

Die **Schwellenwert-Verarbeitung** beschränkt sich auf die Auswertung der Flanke der Beugungsfigur, deren Position bei einer Intensitätsschwelle unterhalb des oszillierenden Bereichs bestimmt wird. Es entsteht ein binäres Signal (vgl. Grafik (b) von Bild 1). Das Zeilenkamerasystem von **Schäfter+Kirchhoff** realisiert die Schwellenwert-Verarbeitung on-board auf der Interfacekarte. Als Ergebnis einer Kameraaufnahme liefert das System die numerischen Pixel-

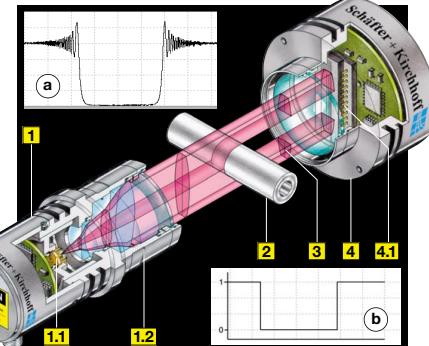


Bild 1: Schematische Mebanordnung und Strahlverlauf bei der Laser-Diffraktionsmessung 1. Laserdiodenkollimator, 1.1 Laserdiode, 1.2 Optik zur Kollimation der divergenten Laserdiodenstrahlung, 2. Meßobjekt, 3. Partiell abgeschattete Laserstrahlung, 4. CCD-Zeilenkamera, 4.1 CCD-Zeilensensor. Der kollimierte Strahl ist elliptisch (Strahlhöhe 32 mm).

positionen der Schattenkanten im Zeilensignal. Damit werden Meßfrequenzen von mehr als 30 kHz bei Ortsauflösungen unter 7 µm erreicht.

Die **Laser-Diffraktion** berücksichtigt zusätzlich den oszillierenden Bereich der Fresnelschen Beugungsstruktur. Durch Auswertung der Positionen und der Intensitäten der Minima und Maxima wird die Ortsauflösung bis unter 1 µm verbessert. Aufgrund des größeren Rechenbedarfs sind die erreichbaren Meßfrequenzen bei der Laser-Diffraktion mit bis zu 3 kHz geringer als bei der Schwellenwert-Verarbeitung.

Die mathematische Beschreibung der an Kanten auftretenden Beugungsstrukturen geht auf Augustine Fresnel (1788 bis 1827) zurück. Fresnels theoretische und experimentelle Arbeiten verhalfen dem damals verpönten Wellenmodell des Lichtes zum Durchbruch.

Mathematisch werden die Beugungsstrukturen mit Hilfe der Fresnel-Sinus- und der Fresnel-Cosinus-Funktion beschrieben. Vor der Verfügbarkeit aufwandiger numerischer Verfahren wurden deren Funktionswerte mit einer grafischen Konstruktion, der sog. Cornu-Spirale, bestimmt bzw. lagen tabellarisch vor.

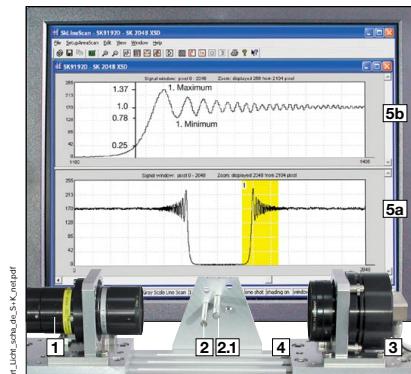


Bild 2: Meßplatz Laserdiffraktion
Meßplatz zur Untersuchung von Fresnelschen und anderen Beugungsstrukturen eines Meßkörpers. Der dargestellte Aufbau wird u.a. im Praktikum des Fachbereichs Physik der RWTH Aachen eingesetzt.
1. Laserdiodenkollimator, 2. Meßkörper, 2.1. Zweiter Meßkörper, ist im Signal nicht abgebildet. Er wird zur Simulation der Spaltmessung eingesetzt (siehe Bild 3), 3. CCD-Zeilenkamera, 4. Optische Bank, 5. Monitor mit Darstellung der Fresnelschen Beugungsstruktur:
5a: CCD-Zeilensignal mit Beugungsbild eines Meßkörpers von 6 mm Durchmesser. 5b: Beugungsbild einer Kante, vergrößert dargestellt.

Kantenposition und Entfernung aus der Fresnel-Beugungsstruktur

Die Beugungsstrukturen enthalten bei bekannter Wellenlänge λ sowohl Informationen über die Lage der Schattenkante als auch über die Entfernung z zwischen dem Meßobjekt und dem CCD-Zeilsensor. Die Abstände der Intensitätsmaxima und -minima vom geometrischen Ort der Schattenkante nehmen mit dem Faktor $\sqrt{z\lambda/2}$ zu. Tabelle 1 enthält für ein Meßobjekt mit glatten und

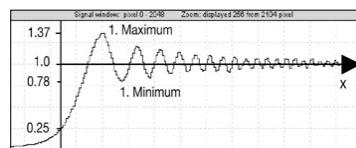


Bild 5: Darstellung des Intensitätsverlaufs senkrecht zur beugenden Kante.

aufgeführt ist ein Beispiel für $z = 80 \text{ mm}$ und Wellenlänge 630 nm . Die Intensität an der Schattenkante liegt beim 0.25-fachen Wert des ungestörten Hell-Signalpegels. Die relative Intensität des ersten Maximums beträgt 1,37.

Tabelle 1: Intensitäten der Maxima und Minima und deren Abstände von der Schattengrenze bei der Beugung an einer scharf begrenzten glatten Kante. Mit dem Normierungsfaktor $1/\sqrt{z\lambda/2}$ können allgemein gültige Werte für die Positionen der Extrema angegeben werden. Die rechte Spalte zeigt ein konkretes Beispiel für die Wellenlänge 630 nm und einen Abstand $z = 80 \text{ mm}$ zwischen der beugenden Kante des Meßobjektes und der CCD-Zeile.

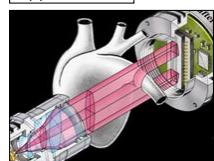
Tabelle 1

	normierte Intensität	norm. Abstand $x/\sqrt{z\lambda/2}$	$x (\mu\text{m})$
Schattengrenze	0.25	0.00	0
1. Maximum	1.370	1.22	193
1. Minimum	0.778	1.87	297
2. Maximum	1.199	2.34	372
2. Minimum	0.843	2.74	435
3. Maximum	1.151	3.08	489
3. Minimum	0.872	3.39	538
4. Maximum	1.126	3.67	583
4. Minimum	0.889	3.94	625
5. Maximum	1.110	4.18	664
5. Minimum	0.901	4.42	701

Kalibrierung mit bekanntem Objekt

Eine Kalibrierung ist bei beiden Meßverfahren, der Schwellenwert-Verarbeitung und der Laser-Diffraktion, notwendig. Die theoretische Beschreibung des Intensitätsverlaufs geht von einer ideal ebenen einfallenden Welle und einer scharfen und glatten Kante aus. In der Realität vorkommende Störeinflüsse wie Oberflächenrauheit, Verschmutzung/Ölfilm, Luftscherben infolge Wärmekonvektion sowie Fremdlicht wirken sich besonders bei der Auswertung der Beugungsstrukturen, aber auch bei der Schwellenwert-Verarbeitung negativ auf die Meßgenauigkeit aus. Für die Kalibrierung wird ein Objekt bekannter Größe und möglichst gleicher Kantenform wie beim Meßobjekt in verschiedenen Sensorbereichen gemessen. Die Ergebnisse werden bei späteren Messungen als Referenz berücksichtigt.

Applikationen



Durchmesser und Kontraktion
Dynamische Durchmesserbestimmung von unter Wechsellast stehenden Hydraulikleitungen. Messung von Schaltzeiten und Latzenzen. Meßfrequenz bis 36 kHz Auflösung < 7 µm

Einsatzbereiche

Das beschriebene Meßverfahren eignet sich aufgrund der erreichten Meßfrequenzen im Kiloherzbereich für die Untersuchung dynamischer Vorgänge, wie z.B. der Überwachung von Hydraulikleitungen, der Mikropositionierung von SMDs oder der Rundlaufüberwachung von Turbinenrädern (s.u. „Applikationen“). Ein weiterer Einsatzbereich ist die Untersuchung physikalischer Beugungsphänomene im physikalischen Hochschulpraktikum. Das Bild 3 zeigt das gemessene Beugungsbild zweier Rundstäbe.

Durch den geringen Abstand der Stäbe von 1 mm wird eine Spaltmessung simuliert. Die Signalüberhöhung im engen Raum zwischen den Stäben entsteht durch Interferenz der Beugung an den benachbarten Kanten. Bild 4a zeigt die 2D-Darstellung eines schwingernden Stabes. Die x-Dimension entspricht der Zeilensensorlänge. Um die y-Dimension zu erhalten, müssen die einzelnen Zeilensignale im Bildspeicher nacheinander abgelegt werden. Die Zeilenanzahl bestimmt die vertikale Ausdehnung des Bildes, die als Zeitachse zu verstehen ist. Sowohl Grundals auch Oberschwingungen sind zu erkennen.

Bild 3: Beugung an zwei im Abstand 1 mm angeordneten Rundstäben. (Meßaufbau hierzu siehe Bild 2, Meßkörper 2, 2.1). Zwischen den Stäben überlagern sich die Fresnelschen Beugungsstrukturen beider Kanten. Die Interferenzüberlagerungen führen zur Erhöhung der Signalamplitude.
a 2D-Darstellung einer Folge von Zeilenscans.
b gesamtes Beugungsbild
c Ausschnittvergrößerung des gelb unterlegten Signalausschnitts.

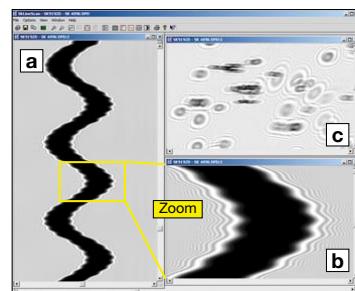
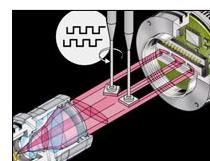


Bild 4: Erfassung dynamischer Vorgänge.
a 2D-Darstellung von 1000 aufeinanderfolgenden Zeilen mit den Beugungsstrukturen eines schwingernden Stabes mit Durchmesser 0,8 mm. (Zeilenfrequenz 9,47 kHz).
b Vergrößerter Ausschnitt von **a**
c Beugungsbilder von durch den Strahl fallenden Partikeln (Zeilenfrequenz 9,47 kHz). Ziel: Zählen und Klassifizieren der Partikel.



Mikropositionierung
SMDs erfordern eine lagerichtige Positionierung auf dem Printträger. Rotationspinzetten greifen die Bauteile. Die Solllage der SMDs wird durch Korrelation der Drehbewegung mit dem Schattenkantensignal des CCD-Zeilsensors ermittelt.

Laserdioden-Kollimator

Für das Laser-Diffraktions-Meßsystem gemäß Bild 1 wird der Kollimator 90CM-M90-635-2-H01-02 eingesetzt. Der Kollimator projiziert einen parallelen, 32 mm hohen Laserstrahl auf den Zeilen-sensor. Die Wellenlänge beträgt 635 nm. Die Strahldivergenz (Abweichung von der Parallelität) beträgt maximal 0,014 mrad. Eine integrierte Elektronik übernimmt die Laserleistungsregelung. Die Ausgangsleistung wird mit einem Potentiometer im Bereich 1-100% der Maximalleistung eingestellt.

Strahlformung

Bedingt durch den mikroskopisch kleinen Querschnitt der aktiven Zone der Laserdiode (typ. $0,1 \times 3 \mu\text{m}$) wird die emittierte Laserstrahlung gebogen und es entsteht die für Laserdioden typische divergente Strahlkeule mit elliptischem Querschnitt und gaußförmiger Intensitätsverteilung (vgl. Bild 7a).

Kollimationsoptiken transformieren die divergente Laserdiodenstrahlung zu einem parallelen Strahlenbündel, dessen Parameter durch die Apertur des Objektivs, dessen Brennweite f und die Divergenzen θ_{\perp} und θ_{\parallel} der Laserdiodenstrahlung bestimmt werden (vgl. Bild 7b). Wenn die Laserdiodenstrahlung nicht durch das Objektiv beschnitten wird, resultiert ein elliptischer, gaußförmiger Strahl mit den Durchmessern $\varnothing_{\perp} = 2 \cdot f \cdot \sin(0,85 \cdot \theta_{\perp})$ und $\varnothing_{\parallel} = 2 \cdot f \cdot \sin(0,85 \cdot \theta_{\parallel})$. Der Faktor 0,85 vermittelt hierbei zwischen den auf dem 50%-Niveau angegebenen Divergenzen und den Strahldurchmessern auf dem 13,5%-Niveau ($1/e^2$). Die verwendete Laserdiode hat die Divergenzen $8^\circ \times 31^\circ$. Bei einer Kollimator-Brennweite von 90 mm betragen die gaußschen Strahldurchmesser 21×80 mm. Die freie Apertur des Objektivs begrenzt den Strahl auf maximal 32 mm. Es resultiert das in Bild 6 gezeigte Strahlprofil X1. Da auch durch die Aperturbeschränkung Fresnel-Beugung auftritt, wird für Diffraktionsmessungen nur der ungestörte Zentralbereich des Strahls genutzt (die Sensorlänge ist 28,7 mm).

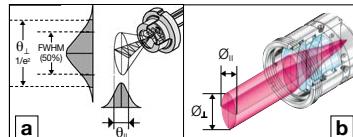


Bild 7 [a]: Laserdioden emittieren ein divergentes elliptisches Strahlenbündel mit gaußförmiger Intensitätsverteilung. Die Strahldivergenzen θ werden von den Herstellern als volle Winkel auf dem 50%-Niveau (Full Width Half Mean) spezifiziert.

Bild 7 [b]: Das Kollimationsoptiksystem erzeugt einen parallelen elliptischen Strahl. Die Strahldurchmesser \varnothing werden auf dem 13,5%-Niveau ($1/e^2$) angegeben.

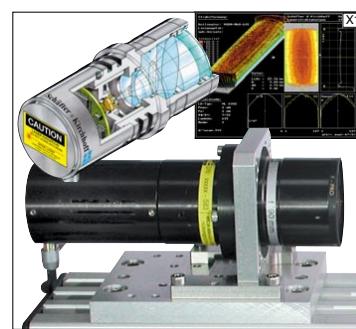


Bild 6: Der Laserdioden-Kollimator flatbeam®, 90CM-M90-635-2-H01-02 projiziert einen teleskopischen (parallelen) Laserstrahl (Strahlprofil X1) auf die Zeilenkamera (Strahlhöhe 32 mm) auf förmiger Intensitätsverteilung (vgl. Bild 7a).

CCD-Zeilenkamera

CCD-Zeilenkameras sind Halbleiterkameras mit nur einer lichtempfindlichen Zeile, die je nach Typ bis zu 10 680 einzeln adressierbare Bildelemente (Pixel) von 4 - 14 μm Breite enthält. Das auf den Sensor einfallende Licht wird in analoge Spannungswerte gewandelt, die durch Schieberegister abtransportiert und durch einen in die Kamera integrierten A/D-Wandler digitalisiert werden. Aufgrund der hohen optischen Auflösung, der hohen Geschwindigkeit und der freien Synchronisierbarkeit jeder einzelnen Zeile werden Zeilenkameras für vielfältige optosensorische Meßaufgaben eingesetzt. Bei Auswertung der Beugungsstruktur sollte der Dynamikbereich der Zeilenkamera zumindest 500:1 betragen.

Für Schwellenwertverarbeitung ist ein

Dynamikbereich von 100:1 ausreichend.

Schäfter + Kirchhoff CCD-Zeilenkameras mit hoher

Zeilenfrequenz werden über eine LVDS Schnittstelle an eine im PC installierte Interfacekarte angeschlossen. Für mobile Anwendungen stehen zusätzlich Kameras mit USB2.0-Schnittstelle zur Verfügung.

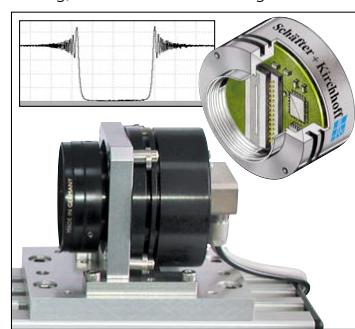


Bild 8: CCD-Zeilenkamera SK2048 UJR mit 14 μm Pixeln und 28,7 mm Sensorlänge. Ein optisches Kantenfilter vor dem Sensor unterdrückt Fremdlicht. Eine abbildende Optik wird bei der beschriebenen Anwendung nicht benötigt.

Shading-Korrektur

Ideale Beugungsstrukturen setzen eine homogene Intensitätsverteilung der Laserstrahlung auf dem CCD-Zeilensensor voraus. Bedingt durch Interferenzen an optischen Grenzflächen und Abfallen der Randintensität der kollinierten Laserstrahlung ist die Intensitätsverteilung ungleichmäßig (Bild 9a). Die Shading-Korrektur erzeugt eine homogene Intensitätsverteilung. Hierfür wird mit der Zeilenkamera zunächst ohne Meßobjekt die Intensitätsverteilung über mehrere Zeilenscans gemittelt aufgenommen. Jedem Pixel wird in einem Speicherbereich ein eigener, aus der gemessenen Intensität bestimmter Verstärkungsfaktor zugewiesen. Bei aktivierter Shading-Korrektur werden alle Pixel eines Zeilenscans mit dem zugehörigen Verstärkungsfaktor korrigiert. Bei freiem Lichteinfall auf den Sensor ohne Meßobjekt ergibt sich eine homogene Intensitätsverteilung im Zeilensignal (Bild 9b).

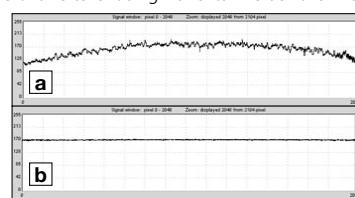
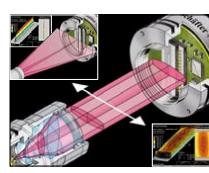
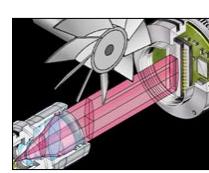


Bild 9: Shading-Korrektur zur Kompensation der ungleichmäßigen Ausleuchtung des CCD-Sensors. **a** ohne, **b** mit Shading-Korrektur.



Laserstrahlanalyse

Die Laserstrahlung wird ohne Zwischenabbildung und Absorptionsfilter auf den CCD-Sensor projiziert. Eine 2D-Darstellung des Strahlprofils wie in Bild 6, X1, entsteht wenn der Laserkollimator quer zur Zeile synchron bewegt wird.



Rundlauf

Das tangentiale Eintauchen der Motorwelle oder des Turbinenläufers ermöglicht eine große Durchmesservarianz der Prüfkörper. Der Abstand zwischen Laserdiodenkollimator und CCD-Zeilensensor kann mehrere Meter betragen.

CCD-Zeilenkamerasysteme

Das Laser-Diffraktions-Meßsystem gibt es mit zwei unterschiedlichen CCD-Zeilenkamerasystemen. Das System I ist die Variante mit USB 2.0-Zeilenkamera. Das System II ist die traditionelle Variante mit digitaler CCD-Zeilenkamera und PCI-Bus-Interfacekarte mit LVDS-Schnittstelle.

Mit dem Universal Serial Bus (USB) in der Version 2.0 lassen sich Datenübertragungsraten von bis zu 480 Mbit/s realisieren. Durch die zunehmende Verbreitung von USB 2.0-Anschlüssen an modernen PCs insbesondere an Notebooks und die „Hot plug“-Fähigkeit ist das CCD-Zeilenkamerasystem mit USB 2.0-Schnittstelle für den mobilen Einsatz des Meßsystems und den Einsatz an wechselnden Meßrechnern prädestiniert.

Mit der Installations-CD von **Schäfter + Kirchhoff** erfolgt die Treiber- und Softwareinstallation automatisch. Das Softwarepaket SK91USB-WIN enthält das ausführbare Betriebsprogramm SkLineScan für die sofortige Inbetriebnahme des Systems sowie DLLs und Klassenbibliotheken für die Entwicklung eigener Meßsoftware. Das Betriebsprogramm SkLineScan hat eine übersichtliche Bedienoberfläche und lässt sich intuitiv bedienen. Die oszilloskopische Signaldarstellung zeigt unmittelbar Veränderungen des optischen Systems und der Kameraparameter.

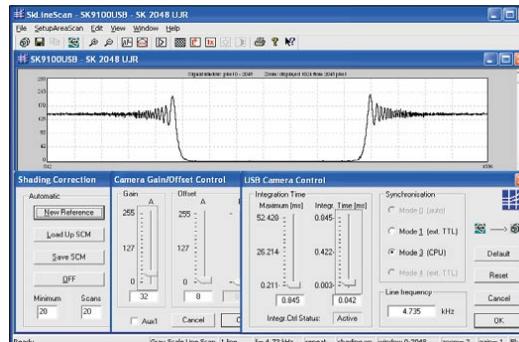


Bild 10:

Bedienoberfläche des SkLineScan-Programms mit Dialogen für Shading-Korrektur, Gain/Offset-Programmierung und Kamerasteuerung

Nachdem die Software einmal installiert wurde, erkennt das Betriebssystem die CCD-Zeilenkamera bei jedem Neuan schluss automatisch. Das Meßsystem ist sofort betriebsbereit, ohne daß der Rechner neu gestartet werden muß.

Das System II setzt die Installation einer PCI-Bus-Interfacekarte SK9192D (Grabber) im Rechner voraus. Die Interfacekarte ist gegenüber dem USB 2.0-System ein zusätzlicher Kostenfaktor. Dafür erreichen die digitalen CCD-Zeilenkameras mit LVDS-Schnittstelle noch höhere Zeilenfrequenzen als die USB 2.0-Kameras.

Die Shading-Korrektur erfolgt bei der Interfacekarte SK9192D onboard. Dadurch ist die CPU-Belastung während der Signalverarbeitung geringer als bei USB 2.0-Kameras. Im Schwellenwertbetrieb sind Meßfrequenzen über 30 kHz realisierbar.

Mit der Merger-Box SK9195 können bis zu 5 CCD-Zeilenkameras mit einer Interfacekarte pixelsynchron parallel arbeiten (z.B. Rundheitsmessungen von Stranggut).

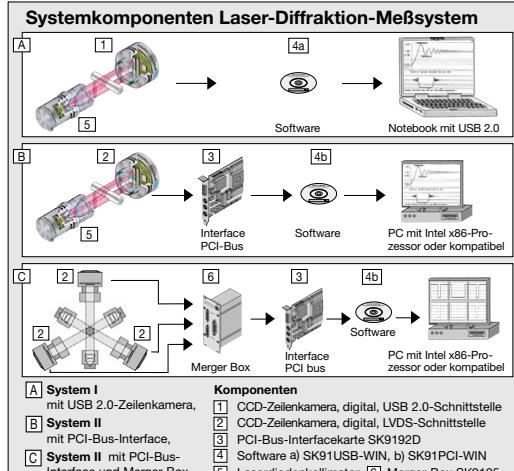


Bild 11: Systemkomponenten Laser-Diffraktion-Meßsystem

Tabelle 2		System I	System II
Datentransfer:	USB 2.0	PCI-Bus	
Zeilenfrequenz max.:	27,1 kHz	70 kHz	
Hot Plug:	ja	-	
Extern Sync.:	ja	ja	
Shading-Korrektur:	Software	On-Board	
Kabellänge:	1,8 m	bis zu 20 m	
Mehrkamerabetrieb:	-	bis zu 5 Kameras	
Zusatzz-Hardware:	-	PCI-Interface SK9192D, Merger-Box SK9195	
Software:	SK91USB-WIN	SK91PCI-WIN	

Tabelle 2: CCD-Zeilenkamerasysteme mit USB 2.0 und PCI-Bus.

Für beide Systemvarianten bietet **Schäfter+Kirchhoff** mehrere CCD-Zeilenkameratypen mit unterschiedlichen Sensorlängen und Pixelgrößen an. Nachfolgend eine Auswahl.

Kameratyp	Schnittstelle	Pixelzahl	Pixelgröße	Messbereich	Zeilenfrequ.
SK512DPD	LVDS	512	10 x 10 µm	5,12 mm	70 kHz
SK2048JRI	LVDS	2048	14 x 14 µm	28,67 mm	4,7 kHz
SK4096DPD	LVDS	4096	10 x 10 µm	40,96 mm	9 kHz
SK2048UJR	USB 2.0	2048	14 x 14 µm	28,67 mm	4,7 kHz
SK2048USD	USB 2.0	2048	10 x 10 µm	20,48 mm	7,1 kHz

Zusammenfassung:

Das Laser-Diffraktions-Meßsystem von **Schäfter+Kirchhoff** ist für die Messung von Durchmessern, Geometrie und Kantenlagen mit hoher Genauigkeit und Geschwindigkeit prädestiniert. Aufgrund der Modularität und der Komponentenvielfalt ist das System in vielen Bereichen in Forschung und Industrie einsetzbar.

Achtung: Insbesondere bei der Auswertung der Beugungsstrukturen sind Störereinflüsse wie starkes Fremdlicht, durch Wärmekonvektion verursachte Luftschlieren, Verschmutzung (Ölfilm) und Oberflächenrauhheit zu vermeiden.

Information:

CCD-Zeilenkameras, Firmenschrift von **Schäfter+Kirchhoff**

Präsentation: AUTOMATICA,

1. Internationale Fachmesse Robotik + Automation,
15. - 18. Juni 2004, München

2.2.4.2 Fresnel Diffraction at a Straight Edge

(Knowledge of the Appendix content is not required for the examination)

An intensity of light I as a function of a distance from the shadow edge x (see Fig.2.14) can be expressed using *Fresnel integrals* $S(w)$ and $C(w)$:

$$S(w) = \int_0^w \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \quad (2.37)$$

$$C(w) = \int_0^w \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt. \quad (2.38)$$

Fresnel's integrals belong to a class of so-called *special functions* (together with *Bessel's functions*, *hypergeometrical functions* and many, many more). Special functions are those functions which are not equal to any combination of *elementary functions*, i.e polynomial, trigonometrical, exponential, or logarithmic ones. To calculate values of a special function some approximation method is needed.

Let us introduce a variable u :

$$u = \sqrt{\frac{2}{\lambda l}} x \quad (2.39)$$

Then the expression for the light intensity is as follows:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} + S(u) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + C(u) \right)^2 \right]. \quad (2.40)$$

It is easy to check that at the shadow edge, where $x = 0$, also $u = 0$ (2.39), and because $S(0) = 0$ and $C(0) = 0$ (see (2.37) and (2.38))

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{4}. \quad (2.41)$$

The scaling of the Fresnel diffraction pattern with a distance as \sqrt{l} immediately follows from (2.39).

2.3 Die visuelle Schärfentiefe, eine Anwendung der geometrischen Optik in der Fotografie



2.3.1 Einleitung

Zielsetzung

Mit Hilfe einer Spiegelreflexkamera soll die Abhängigkeit der visuellen Schärfentiefe, wir sprechen im Folgenden nur noch von der Schärfentiefe, als Funktion der Gegenstandsweite g , der Brennweite f und der Blendenzahl k des Linsensystems untersucht werden. Die charakteristischen Größen und die Funktionsweise einer modernen Kamera sollen erläutert werden.

Konventionen

b : Bildweite

B : Bildgröße

d, D : Durchmesser Blendenöffnung

f : Brennweite Linse (Objektiv)

g : Gegenstandsweite

G : Gegenstandsgröße

k : Blendenzahl

Z : maximal akzeptabler Zerstreuungskreis

2.3.2 Grundlagen

2.3.2.1 Prinzip einer Kamera

Das Kernstück des Versuches bildet eine Spiegelreflexkamera. Eine Kamera besteht aus Gehäuse, einem Linsensystem (Objektiv) und einem Sensor (Film). Lichtstrahlen, ausgehend von einem Gegenstand, treten durch die Linse in das lichtdichte Gehäuse und werden

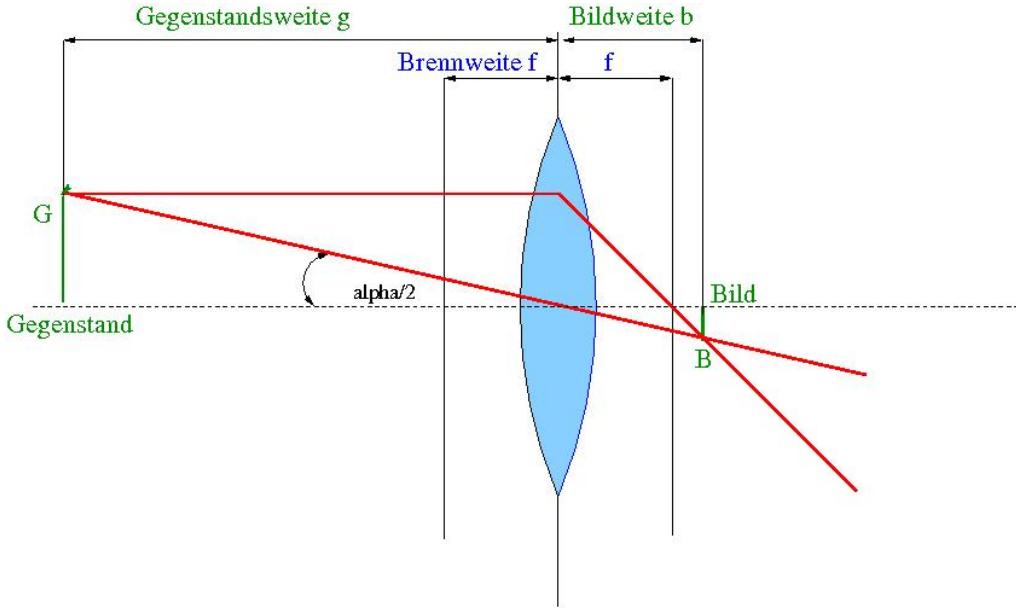


Abbildung 2.19: Abbildung durch eine dünne Linse. Wir behandeln im Folgenden die Objektive, deren Linsen symmetrisch angeordnet sind, rechnerisch immer wie eine dünne Linse, was in guter Näherung richtig ist.

auf dem Sensor abgebildet. Das Prinzip dieser Abbildung, dargestellt mit einer dünnen Linse als Objektiv, ist in der Abbildung 2.19 gezeigt.

Bevorzugt werden Kameras in einem Bereich eingesetzt, wo die Gegenstandsweite g sehr viel größer ist als die Brennweite f des Objektivs (Ausnahmen sind z.B. Makroaufnahmen, die im Versuch nicht betrachtet werden). Das bedeutet, dass das Bild ungefähr in der Brennebene des Linsensystems abgebildet wird. Die genaue Fokussierung geschieht dann mit Hilfe einer Objektivverschiebung! Die wichtigsten physikalischen Variablen sind in der Abbildung 2.19 definiert. Es gilt die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad (2.42)$$

für $g \gg f$ ergibt sich $b \approx f$. Die Vergrößerung V (Abbildungsmaßstab) ist gegeben durch

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}. \quad (2.43)$$

Bei einer Kamera ist die maximale Bildgröße B durch die Dimensionen des Sensors (Film) vorgegeben. Die Sensorgröße der von uns benutzten Canon EOS 1100 mit Sensor C-MOS Chip beträgt: $(22,3 \times 14,7) \text{ mm}^2$. Um eine Gegenstandsgröße G (Blickfeld) bei einer Entfernung g von der Linsenmittelebene auf die Sensorgröße B abzubilden, muss die Brennweite f gemäß der Gleichung 2.44 gewählt werden.

$$f = \frac{B}{G + B} g \quad (2.44)$$

Das folgt durch Substitution von Gleichung 2.43 in die Gleichung 2.42. Die Gleichung 2.44 umgeschrieben ergibt

$$G = \left(\frac{g}{f} - 1 \right) B. \quad (2.45)$$

Mit dieser Gleichung berechnet sich die maximale Gegenstandsgröße, die vollständig auf dem Sensor abgebildet werden kann.

Häufig wird auch der Sehwinkel (Blickwinkel) α angegeben. Aus Abbildung 2.19 folgt (in der Abbildung ist der Winkel α mit alpha bezeichnet)

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{B}{b}. \quad (2.46)$$

Beispiel:

$$2B = 2b \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Mit $f = 35$ mm, $\Rightarrow b \approx 35$ mm, $\alpha = 54^\circ$, folgt $2B = 35,7$ mm. Das entspricht ziemlich genau dem Kleinbildformat, z.B. Leica M9.

2.3.2.2 Die Blendenzahl k

Neben der Brennweite f des Kameraobjektivs ist die Blendenzahl k , kurz Blende genannt, von großer Bedeutung. Sie bezeichnet in der Fotografie das Verhältnis der Brennweite f zum Durchmesser D der Eintrittspupille des Objektivs.

$$k \equiv \frac{f}{D}. \quad (2.47)$$

Die Eintrittspupille entspricht dem durch die Vorderlinse betrachteten virtuellen Bild der Blende des Objektivs. D ist also der Durchmesser des in das Objektiv achsenparallel einfallenden Strahlenbündels eines unendlich weit entfernten Gegenstandes.

Die Blendenzahl k bestimmt den Photonenstrom, der den Sensor erreicht. Große Blendenöffnungen D (kleine k) erlauben kürzere Belichtungszeiten.

Die Energie, die den Sensor erreicht, wird durch die Blende begrenzt. Dabei wird die Intensität I definiert als das Verhältnis der Fläche des durch die Blende durchgelassenen Strahlenbündels und der Fläche des Bildes

$$I \propto \frac{D^2}{B^2}.$$

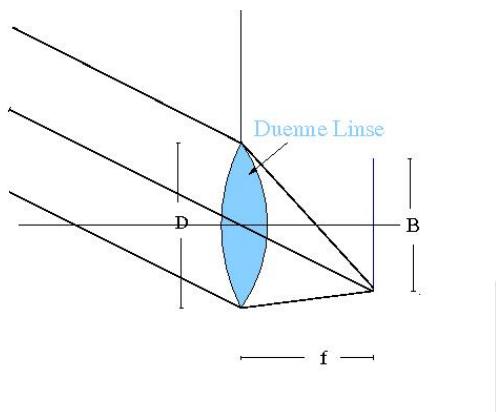


Abbildung 2.20: Abbildung eines Strahlenbündels mit dem Durchmesser D auf ein Bild mit dem Durchmesser B . Die von links einfallenden parallelen Strahlen kommen von einem Punkt des weit entfernt liegenden Gegenstandes und werden in der Bildebene in einem Punkt abgebildet.

Mit Hilfe der Abbildung 2.20 sieht man, dass $B \propto f$ ist (Herleitung im Anhang 2.3.5.2) und mit Gleichung 2.47 folgt unmittelbar die für die Fotografie wichtige Beziehung

$$I \propto \frac{1}{k^2}.$$

Falls also k um den Faktor $\sqrt{2}$ variiert, verändert sich die Intensität I um einen Faktor 2. Das ist in Abbildung 2.21 dargestellt. Bei der Blende $k = 2$ ist die Intensität um den Faktor 4 gefallen, bei $k = 2,8$ um den Faktor 8.

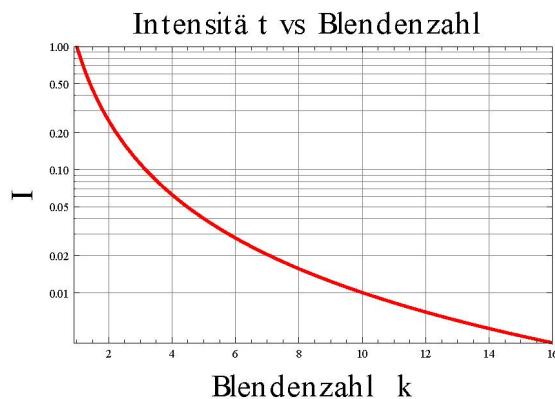


Abbildung 2.21: Proportionalität zwischen Intensität und Blendenzahl.

Das erklärt die Angaben für die Blendenzahlen ($1/1, 4/2, 8/4, 5, 6/8, \dots, 16/\dots$) auf vielen Kameraobjektiven. Der Zusammenhang ist in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

k	k^2	Intensität
$1 = (\sqrt{2})^0$	1	1
$1.4 \simeq (\sqrt{2})^1$	2	$\frac{1}{2}$
$2 = (\sqrt{2})^2$	4	$\frac{1}{4}$
$2.8 \simeq (\sqrt{2})^3$	8	$\frac{1}{8}$
$4 = (\sqrt{2})^4$	16	$\frac{1}{16}$
$5.6 \simeq (\sqrt{2})^5$	32	$\frac{1}{32}$
$\dots = \dots$	\dots	\dots
$16 = (\sqrt{2})^8$	256	$\frac{1}{256}$

Tabelle 2.1: Intensität und Blendenzahl: Die roten Zahlen werden auf vielen Blendenringen aufgedruckt.

Gebräuchlich in der Fotografie ist auch der Begriff des Lichtwertes LW , dessen Definition der Vollständigkeit halber angegeben wird

$$LW = \ln \left(\frac{k^2}{dt_{BZ}} \right).$$

Dabei ist dt_{BZ} die Belichtungszeit.

Es soll immer gleich viel Licht auf den Sensor fallen. Dann muss man k und dt_{BZ} entsprechend anpassen. Häufig wird noch in den Nenner des Logarithmus der Faktor ISO/100 eingeführt, was die unterschiedlichen Empfindlichkeiten des Sensors beachtet, die an der Kamera einstellbar sind. Ein Wert von ISO = 100 oder 160 ist die beste und gebräuchlichste Wahl, da dann das Sensorrauschen minimiert ist. In der herkömmlichen Fotografie wird mit der Wahl des ISO-Wertes die Lichtempfindlichkeit des verwendeten Films berücksichtigt. Höher empfindliche Filme (Sensoren) erlauben - bei konstanter Helligkeit - kürzere Blenden (Verschlusszeiten). Höhere ISO-Werte haben ein zunehmendes 'Bildrauschen' zur Folge.

Viele Kameras benutzen Blendenöffnungen, durch die man die Intensität um Faktoren von 2 ändern kann (siehe Tabelle 2.1). Größere Blendenzahlen k entsprechen kleineren Beleuchtungsstärken (Einheit ist Watt/m²). Für einen vorgegebenen Lichtwert kann man also verschiedenen Kombinationen von Blenden und Belichtungszeiten wählen (bei konstanter gegebener Beleuchtung!). Das ist wichtig in der sog. 'available light fotografie'. Man möchte z.B. in relativ dunklen Kirchen ohne Blitzlicht und Stativ fotografieren. Dann braucht man ein Objektiv mit kleinem k ($k \leq 2$), um kurze Belichtungszeiten zu erhalten, die ein 'Verwackeln' des Bildes verhindern.

Allerdings sind für die Wahl von k und dt_{BZ} noch andere Kriterien von Bedeutung. Sollen bewegte Bilder festgehalten werden, so muss die Belichtungszeit kurz genug gewählt werden, um eine Unschärfe zu verhindern (manchmal gewünscht!).

Weiterhin verändert die Wahl von k eine weitere wichtige Eigenschaft des Bildes, seine **Schärfentiefe**. Diese Größe soll nun definiert werden.

2.3.2.3 Die Schärfentiefe (ST)

Beim Fokussieren der Linse einer Kamera auf einen Gegenstand mit der Gegenstandsweite g , wird das Licht von jedem Punkt des Objektes entsprechend idealerweise in einem Punkt auf dem Sensor abgebildet, der sich in der Brennebene des Objektivs befinden sollte. Dabei werden Effekte der Aberration und Diffraktion zunächst vernachlässigt, da sie im Normalfall klein sind. Punkte eines Gegenstandes, die nicht im Fokusabstand stehen, werden vor oder hinter dem Sensor in einem Punkt scharf abgebildet. Ein Punkt von diesem Gegenstand zeigt sich also als Kreis mit einem bestimmten Radius auf dem Sensor. Das verdeutlicht Abbildung 2.22.

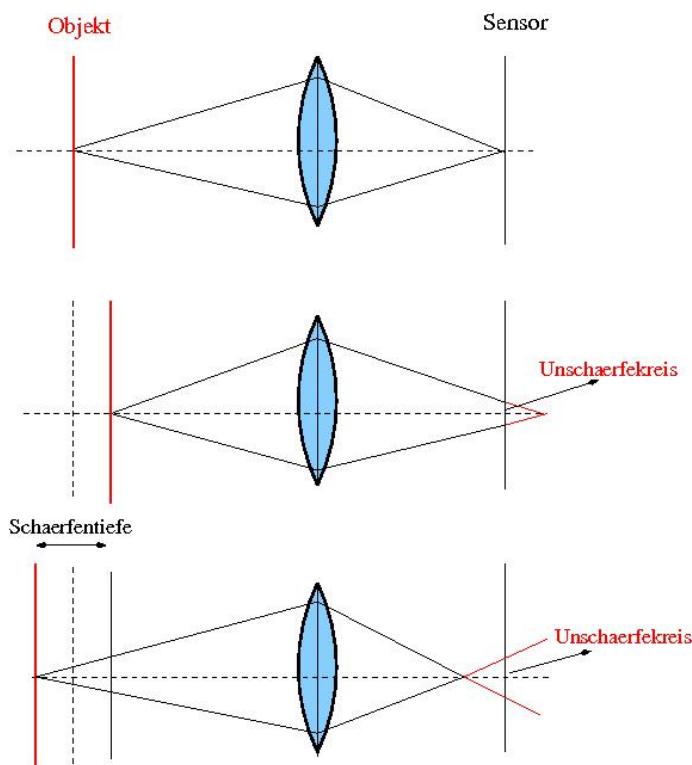


Abbildung 2.22: Verdeutlichung zur Schärfentiefe: In der obersten Abbildung wird ein Punkt des Objektes in die Brennebene auf dem Sensor scharf abgebildet. In den beiden anderen Bildern ist der abzubildende Gegenstand näher an der Linse bzw. weiter von ihr entfernt. Infolgedessen ist das Bild einmal hinter dem Sensor und das andere Mal zwischen Linse und Sensor. Falls der Unschärfekreis kleiner gleich dem maximal akzeptierbaren Zerstreuungskreis Z ist, erscheint das Bild dem Beobachter scharf.

Der größte Kreis, der dem Auge noch als Punkt erscheint, wird als **maximal akzeptierbarer Zerstreuungskreis** ('acceptable circle of confusion') Z bezeichnet. Es gibt einen Bereich im Objektraum, in dem der Gegenstand verschoben werden kann, so dass der Durchmesser des Unschärfekreises kleiner als Z bleibt. Für diesen Bereich erscheint das Bild scharf. Das ist gleichzeitig der Bereich der Schärfentiefe. Die Größe des Schärfentiefenbereichs hängt maß-

gleich von der Größe der Blendenzahl k ab, wie die Abbildung 2.23 qualitativ verdeutlicht. Gleichzeitig ist die Schärfentiefe eine Funktion von g und f , wie später gezeigt wird.

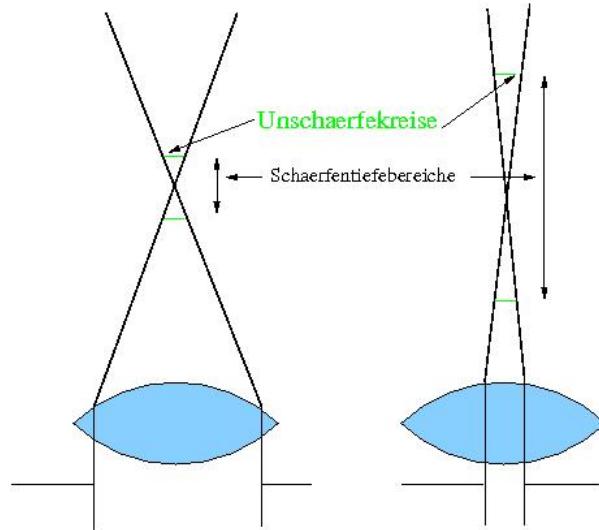


Abbildung 2.23: Qualitative Verdeutlichung der Schärfentiefe. Die grünen Unschärfekreise sollen gleich groß sein. Größere Blendenöffnungen führen zu kleineren Schärfentiefenbereichen!



Abbildung 2.24: Ein ausgewählter Schärfentiefenbereich.

Kleinere ST-Bereiche werden in der Fotografie gerne benutzt, um spezielle Objekte auf einer Fotografie herauszuheben. Das verdeutlicht das Foto eines Meterbandes in Abbildung 2.24 und auch das Titelbild. Wir werden u.a. solche Maßstäbe benutzen, um den ST-Bereich zu vermessen.

Deutlich sind sowohl im Vorder- als auch im Hintergrund des Bildes die unscharfen Bereiche

zu erkennen. Ein solches Foto kann nur gemacht werden, falls der Fotograf eine Vorhersage der ST machen kann. Er muss also die beiden Ebenen berechnen können, zwischen denen das Bild als scharf angesehen werden kann. In Landschaftsaufnahmen ist es wünschenswert einen möglichst großen ST-Bereich zu erhalten, um nahe - und sehr weit entfernte Gegenstände möglichst gleichmäßig scharf abzubilden.

2.3.2.4 Das Modell zur visuellen Schärfentiefenberechnung

Im Folgenden soll ein Modell basierend auf der geometrischen Optik diskutiert werden, mit dem der ST-Bereich vorhergesagt werden kann. Diese Vorhersagen sollen später mit durchgeführten Messungen verglichen werden. Wir gehen davon aus, dass der maximal zu akzeptierende Zerstreuungskreis Z bekannt ist und vernachlässigen Linsenfehler, Beugungseffekte etc. Die Größe Z wird später noch genauer erläutert werden, was notwendig ist, um Messungen sinnvoll durchzuführen.

Ein scharfes Bild erhalten wir, wenn der Gegenstand sich im Bereich g_f bis g_n befindet. Die verwendeten Variablen sind in der Abbildung 2.25 definiert, f sei die Brennweite des Linsensystems.

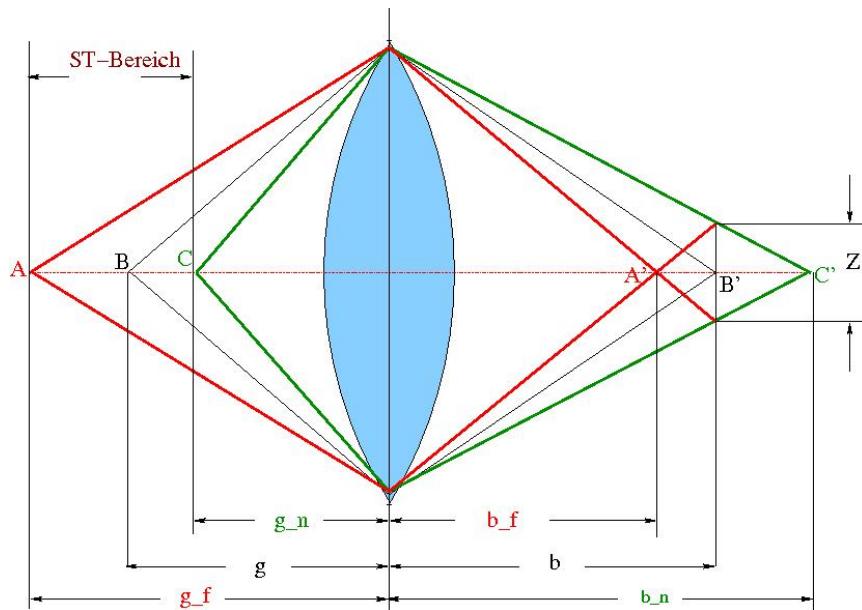


Abbildung 2.25: Scharfe Abbildung eines Punktes im Abstand g in die Bildebene b durch ein Linsensystem, hier dargestellt durch eine bikonvexe Linse. Gegenstände, die zwischen der fernen Gegenstandsweite g_f und der nahen Gegenstandsweite g_n liegen, werden noch als scharf wahrgenommen, da die Radien der Kreise in der Bildebene (Sensorebene) kleiner sind als Z .

Es ist zu beachten, dass in der Regel der ST-Bereich asymmetrisch bezüglich der Gegen-

standsweite g ist. Wir finden (Herleitung in Anhang 2.3.5.1) die zwei Gleichungen

$$g_n = \frac{f^2 g}{f^2 + Z k (g - f)} \quad (2.48)$$

und

$$g_f = \frac{f^2 g}{f^2 - Z k (g - f)}. \quad (2.49)$$

Weiterhin definieren wir die Größe

$$d_h = \frac{f^2}{k Z} \quad (2.50)$$

als **hyperfokalen Abstand**. Für die meisten praktischen Anwendungen gilt $d_h \gg f$.

Die Gleichungen 2.48 und 2.49 mit Hilfe der Gleichung 2.50 umgeschrieben, ergeben die Gleichungen

$$g_n = \frac{d_h g}{d_h + (g - f)} \approx \frac{d_h g}{d_h + g} \quad (2.51)$$

und

$$g_f = \frac{d_h g}{d_h - (g - f)} \approx \frac{d_h g}{d_h - g}, \quad (2.52)$$

da im allgemeinen $g \gg f$ gilt. Nun lassen wir in den Gleichungen 2.51 und 2.52 die Gegenstandsweite g gegen d_h gehen: $g \rightarrow d_h$ und finden $g_n = \frac{d_h}{2}$ und $g_f \rightarrow \infty$. Damit ergibt sich ein für viele Fotografen wichtiger Satz:

Die Schärfentiefe erstreckt sich vom halben hyperfokalen Abstand bis ins Unendliche, falls das Objektiv auf die hyperfokale Entfernung $g = d_h$ fokussiert wird.

Diese Regel wird von vielen Fotografen verwendet, um einen ST-Bereich im Foto zu definieren. Die hyperfokalen Abstände existieren in Tabellenform für verschiedene Brennweiten f , Blendenzahlen k und maximal akzeptable Zerstreuungskreise Z .

Die gesamte Ausdehnung des ST-Bereiches erhalten wir durch Bildung von $g_f - g_n$ mit Hilfe der Gleichungen 2.51 und 2.52

$$g_f - g_n = \frac{2 g d_h (g - f)}{d_h^2 - (g - f)^2}. \quad (2.53)$$

Diese Gleichung soll experimentell untersucht werden. Dazu wird die Rücksubstitution für d_h durchgeführt

$$\Delta g_{ST} \equiv g_f - g_n = \frac{2 g f^2 (g - f)}{k Z \left(\left(\frac{f^2}{k Z} \right)^2 - (g - f)^2 \right)} \quad (2.54)$$

also

$$\Delta g_{ST} = \frac{2 g f^2 (g - f)}{\frac{f^4}{k Z} - k Z (g - f)^2}. \quad (2.55)$$

Es taucht in Gleichung 2.55 nur das Produkt $k Z$ auf. Da typische Werte für Z bei Kleinbildkameras um die 0,03 mm liegen, ist das Produkt eine kleine Größe. Eine Reihenentwicklung der Gleichung 2.55 liefert sofort für den dominanten Term

$$\Delta g_{ST} = \frac{2 k Z g (g - f)}{f^2} \propto k. \quad (2.56)$$

Der ST-Bereich wächst linear mit der Blendenzahl k . Allerdings muss der Gültigkeitsbereich dieser Näherung bei Benutzung auf jeden Fall überprüft werden, da sich mit Gleichung 2.55 in der Regel ein nichtlinearer Zusammenhang von den Variablen g , f und k ergibt. Genau genommen ist auch Z eine Variable, was im kommenden Kapitel genauer erläutert werden soll.

2.3.2.5 Der maximal akzeptierbare Unschärfekreis Z

Der Wert für Z geht in die Gleichungen 2.48 bis 2.55 ein. Um Messungen mit dem Modell vergleichen zu können, muss Z bekannt sein. Kamera-Hersteller geben für ihre Kameras in der Regel einen festen Wert für Z an. Was damit gemeint ist, soll in diesem Kapitel erläutert werden.

Das Auflösungsvermögen des menschlichen Auges beträgt etwa 1 Bogenminute ($1' = 1/60^\circ$). Damit ist gemeint, dass das Auge zwei Punkte unterscheiden kann, die $1'$ getrennt sind. Da Bilder eines Fotoapparates zur Ansicht von Menschen gemacht werden, ist es nicht zweckmäßig kleinere Auflösungsvermögen zu betrachten. Sicherlich ist der Wert von $1'$ letztlich als Richtwert anzusehen, der mehr oder weniger variieren kann, je nachdem wer eine Fotografie betrachtet. Die Tabelle 2.2 gibt den Abstand x zweier Punkte, die das menschliche Auge auflösen kann als Funktion des Abstandes d für einige ausgewählte Abstände (angenommen wird der Wert $1'$). Die Werte für x verdoppeln sich in etwa, falls man als

Abstand d/m	x/mm
0,25	$0,07 \text{ mm} \approx 0,1 \text{ mm}$
1	$\approx 0,3 \text{ mm}$
2	$\approx 0,6 \text{ mm}$
3	$\approx 0,9 \text{ mm}$
4	$\approx 1,2 \text{ mm}$
5	$\approx 1,5 \text{ mm}$
10	$\approx 2,9 \text{ mm}$
20	$\approx 5,8 \text{ mm}$

Tabelle 2.2: Betrachtungsabstand und Auflösung.

Auflösungsvermögen $2'$ annimmt, ein Wert der realistischer erscheint.

Allerdings ist klar, dass ein Unschärfekegel, der gerade vom menschlichen Auge noch als Punkt wahrgenommen werden wird, natürlich vom Betrachter selbst abhängt (das Auflösungsvermögen der menschlichen Augen ist unterschiedlich) und vom betrachteten Bildformat bzw. der Vergrößerung abhängen muss.

Das soll an einem Beispiel verdeutlicht werden. Ein Bild mit dem Format $(150 \times 180) \text{ mm}^2$ wird im Abstand von 250 mm betrachtet. Das macht einen Betrachter nahezu automatisch beim Anschauen einer typischen Fotografie, da unterhalb von 25 cm das Bild nicht als scharf vom menschlichen Auge erkannt werden kann. Für diese geometrischen Maße erscheint die Bilddiagonale unter einem Winkel von $\approx 50^\circ$, was $3000'$ entspricht. Bei einer Unschärfe, die das realistische Auflösungsvermögen von $2'$ also $1/1500'$ der Bilddiagonalen übersteigt, werden wir eine Unschärfe soeben noch wahrnehmen. Das ist besonders gut an kontrastreichen Kanten festzustellen, Punkte verlaufen zu unscharfen Kreisen, insgesamt erscheint die Kante verwaschen.

Die maximale Bildgröße wird durch die Sensorgröße bestimmt. Der zulässige Zerstreuungskreisdurchmesser Z wird mit $1/1500$ der Sensordiagonalen angegeben.

Beispiele:

Canon EOS 1100D, Sensordiagonale beträgt 27 mm, Z folgt zu $Z \approx \frac{27}{1500} \text{ mm} \approx 0,018 \text{ mm}$. Leica M9 (Kleinbildformat), Sensordiagonale beträgt 43,2 mm, Z folgt zu $Z \approx \frac{43,2}{1500} \text{ mm} \approx 0,029 \text{ mm}$.

Das sind die entsprechenden Zahlen, die die Kamera-Hersteller angeben.

Es ist klar, dass der Betrachtungsabstand zum Bild und das Bildformat von wesentlicher Bedeutung sind, da sonst der Faktor $1/1500$ nicht mehr gilt. Soll das Bild nicht aus dem üblichen Betrachtungsabstand betrachtet werden, der in etwa der Bilddiagonalen entspricht, so verändert sich damit auch der zulässige Zerstreuungskreis Z ! Bei größeren Abständen sind größere Z zugelassen; gehen wir näher an das Bild heran als die Länge der Bilddiagonalen, so werden kleinere Z auf dem Sensor notwendig, um weiterhin einen scharfen Bildeindruck zu erhalten. Zu beachten bleibt weiterhin, dass Detailvergrößerungen einer Aufnahme ebenfalls zu einer Veränderung von Z führen. Man berechnet Z so, dass der Detailausschnitt $1/1500$ der Diagonalen des Sensor- oder Filmmaterials ist, das für die Aufnahme des Bildausschnittes benutzt wird. Wenn sich Z verändert, variiert natürlich auch der entsprechende ST-Bereich, was qualitativ gut an der Abbildung 2.23 sichtbar wird.

Wir halten fest: Der ST-Bereich ist vom Endprodukt abhängig, also von der Fotogröße und dem Betrachtungsabstand.

Angaben der Kamera-Hersteller bezüglich Z setzen immer Formate und Abstände voraus, die wir oben diskutiert haben.

In diesem Versuch entscheiden wir uns, aus Gründen der einfacheren Versuchsdurchführung, Bilder am Notebook zu betrachten mit den ungefähren Bilddimensionen von $185 \times 158 \text{ mm}^2$. Der Betrachtungsabstand beträgt typisch 200 – 400 mm und das Bild wird um den Faktor 4 vergrößert. Im Idealfall kann man so Strukturen auflösen, die $0,1 - 0,2 \text{ mm}$ groß sind, realistischer erscheinen $0,5 \text{ mm}$. Wichtig ist, dass solche Strukturen am Rechner sichtbar

gemacht werden können.

Beispiel:

Wir benutzen ein Maßband mit einer Millimeterskala mit der Gegenstandsweite von 1 m. Die Brennweite des Objektivs sei $f = 85$ mm. Damit finden wir die Vergrößerung $m = \frac{b}{g} \approx \frac{f}{g} = \frac{0,085}{1} = 0,085$. Zwei Skalenstriche im Abstand von 1 mm auf dem Maßstab sind 0,085 mm groß auf dem Sensor. Der Sensor der von uns verwendeten Kamera hat die Dimensionen $(22,3 \times 14,7)$ mm². Das Bild am Rechner erscheint mit den Dimensionen 185×158 mm². Folglich entspricht 1 mm auf dem Maßband ungefähr $0,085 \frac{185}{22,5} = 0,7$ mm. Das ist für die meisten Menschen nicht auflösbar auf dem Normalbild am Rechner, d.h. die mm-Skala ist auf dem Bild nicht strukturiert sichtbar. Eine Vergrößerung (Zoom) des Bildes um einen Faktor 4 gibt dann Größenordnungen von einigen mm auf dem vergrößerten Bild. Hier können sehr gut die Übergänge von scharf zu unscharf auf der mm-Skala erkannt werden und der ST-Bereich kann direkt abgelesen werden.

Bemerkung: Es soll genau dieser Schärfentiefenbereich bestimmt werden, der sich auf die diskutierte visuelle Schärfentiefe bezieht und der die Grundlage der Skala ist, die Hersteller von Kameraobjektiven als sog. Schärfentiefenskala auf ihre Kameraobjektive zur groben Orientierung aufdrucken.

Neben der visuellen Schärfentiefe existieren andere Möglichkeiten um Z zu definieren, die aber relativ wenig mit der Fotografie zu tun haben und deshalb hier nicht weiter diskutiert werden sollen. Einige Bemerkungen zu alternativen Vorgehensweisen finden sich in Anhang 2.3.5.3.

2.3.3 Versuch

2.3.3.1 Materialien

- Spiegelreflexkameras Canon EOS 1100 D, 3 Objektive mit Brennweiten von 35 mm, 50 mm und 85 mm, diverses Zubehör
- Optische Bank mit 4 m Schienen und 3 Haltern
- Entfernungsmesser: Laser, Maßstab
- Stativ, Wasserwaage
- Gegenstand aus LEDs zur Vermessung von Objektivbrennweiten
- Aluminiumschienen
- mm-Skalen: Für verschiedene Gegenstandsweiten werden verschiedene große Skalen benutzt
- Lampe oder Overheadprojektor zur eventuellen Ausleuchtung
- Software, EOS Utility mit Live-View Aufnahmemöglichkeit
- Notebook mit Netzteil

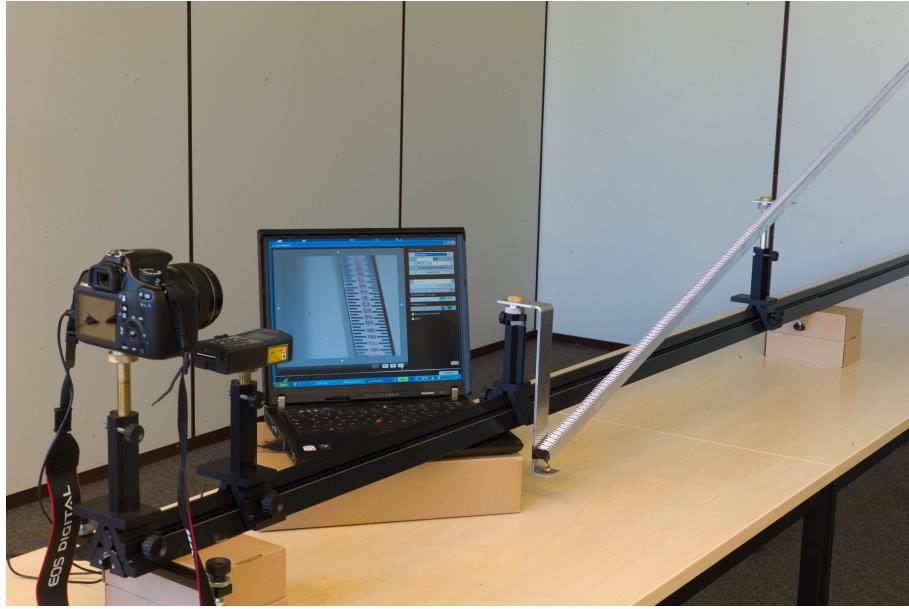


Abbildung 2.26: Fotografie von Versuchsaufbau 1. Links im Bild steht die Kamera und rechts daneben ein Lasermessgerät, das zur Entfernungsberechnung benutzt werden kann. Auf dem Notebook Schirm ist die Skala abgebildet, die die Kamera aufnimmt. Die Schiene mit der Skala wird angewinkelt montiert, was zur besseren Ablesbarkeit der Skala beiträgt.

Weitere Aufnahmen sind in Anhang 2.3.5.4 zu finden.

2.3.3.2 Vorversuch: Bestimmung der Brennweite und Haupebenen von Kameraobjektiven

Zur Bestimmung der Brennweite von Kameraobjektiven (dicke Linsen) soll das Verfahren von Abbe benutzt werden. Die Verfahren zur Messung der Brennweite von dünnen Linsen wird bei Objektiven, die ein System aus mehreren Linsen sind, unbrauchbar. Mit der Methode von Abbe können aber die Brennweite und die Hauptebenen des Linsensystems bestimmt werden. Gleichung 2.44 lässt sich umformen

$$g = f \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \quad (2.57)$$

mit $\beta = B/G$.

Bei dicken Linsen ist die Gegenstandswinkel g nicht direkt messbar. Stattdessen kann die Entfernung x zwischen Gegenstand und einem beliebigen am Linsensystem angebrachten Punkt P (z.B. Hinterkante der Halterung des Objektives) gemessen werden (siehe Abbildung 2.27): $x = g + c$. Soll nur die Brennweite bestimmt werden, wird zweckmäßigerweise der Punkt P so gewählt, dass die Entfernung direkt an der Skala der Schiene abgelesen werden kann.

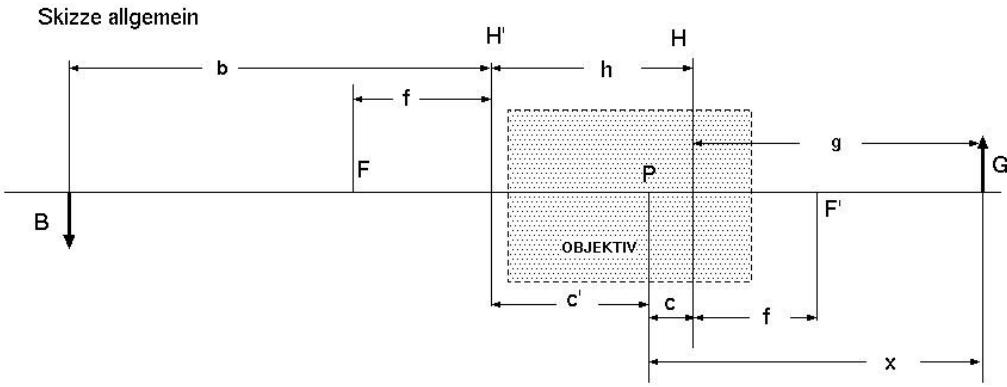


Abbildung 2.27: Abbildung des Gegenstandes G durch ein Linsensystem.

Damit folgt aus Gleichung 2.57

$$x = f \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) + c \quad (2.58)$$

Werden nun verschiedene x für unterschiedliche β gemessen, so sind f und c mit Hilfe einer Geradenanpassung bestimmbar.

Dreht man nun das Linsensystem um 180° , so vertauschen die Hauptebenen H und H' (Abbildung 2.28).

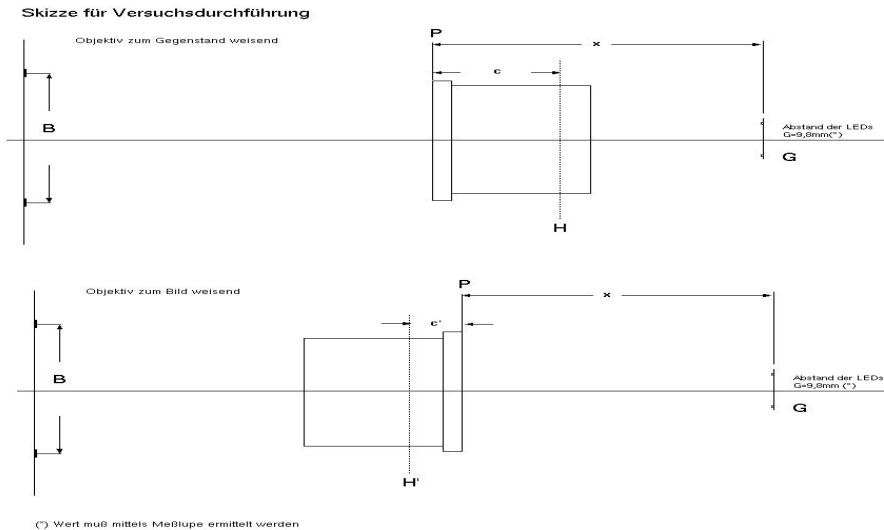


Abbildung 2.28: Skizze zur Versuchsdurchführung: Objektiv weist zum Gegenstand, gedrehtes Objektiv weist zum Bild.

Wird wieder zur Ablesung der Punkt P benutzt. so ist der Abstand x zwischen Gegenstand

und P gegeben durch $x = g - c'$. Damit folgt aus Gleichung 2.57

$$x = f \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) - c' \quad (2.59)$$

Wieder können durch Messung von Wertepaaren x und β und mit Hilfe einer Geradenanpassung an diese Wertepaare die Brennweite f und c' bestimmt werden. Damit sind die Brennweite und die Lage der Hauptebenen wie auch der Haupebenenabstand $c + c'$ bekannt.

2.3.3.3 Aufbau und Durchführung des Vorversuches

Der Gegenstand besteht aus zwei in einem festen Abstand in der Gegenstandsebene angebrachten LEDs (rote oder grüne LEDs). Der Abstand dieser LEDs ist die Gegenstandsgröße G . Sie ist mit einer Messlupe zu bestimmen und geht fest in die Versuchsreihe ein, ebenso wie die Höhe der Trägerplatine der LEDs (ca. 0,8mm). Zwischen Gegenstand und Bild befindet sich das Objektiv. Das Bild wird auf einem Projektionsschirm aufgefangen, auf dem mit Hilfe von Millimeterpapier die Bildgröße B zu bestimmen ist (Abbildung 2.29).

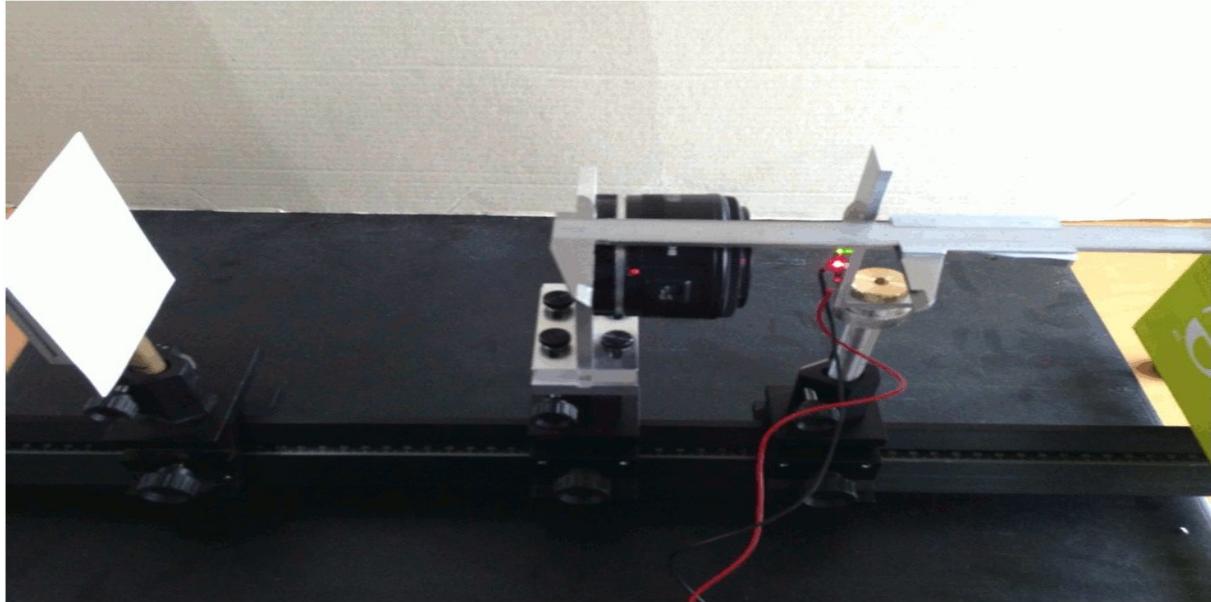


Abbildung 2.29: Versuchsaufbau zur Bestimmung der Brennweite eines Objektives

Es werden zwei Versuchsreihen durchgeführt:

- Objektiv zeigt zum Gegenstand.
- Objektiv zeigt zum Bild.

Das Objektiv muss in der Halterung einrasten, d.h. es darf sich nicht mehr drehen lassen. Die Blendenzahl des Objektives sollte möglichst klein sein. Die Gegenstandsweite wird auf ca. 5-6 verschiedene Werte eingestellt und dabei die Bildgröße vermessen. G/B entspricht dann $1/\beta$ in Gleichung 2.57. Nach Veränderung von x wird der Schirm wieder so justiert, dass ein scharfes Bild der Dioden entsteht. Dann wird aus dem Abstand der Dioden die Bildgröße B auf der mm-Skala abgelesen. Als Referenzpunkt für die Gegenstandsweite x ($g = x - c$) wird zweckmäßigerweise die dem Objektiv abgewandte Seite der Montageplatte gewählt oder ein Punkt am Halter (siehe Skizze, Punkt P). Dann wird das Objektiv um 180° gedreht und die Messreihe für verschiedene Gegenstandsweiten noch einmal durchgeführt. Die Steigung der Geraden ergibt die gesuchte Brennweite f . Überlegen Sie sich sinnvolle Messunsicherheiten, die Sie bei der Anpassung benutzen wollen. Die Entfernung c und c' vom Referenzpunkt P ergeben dann die Lagen der bild- bzw. gegenstandsseitigen Hauptebenen. Vergleichen Sie die so bestimmten Brennweiten der Objektive mit den entsprechenden Herstellerangaben.

2.3.3.4 Versuch 1: Versuchsziel und Auswertung

Es soll die Schärfentiefe gemäß der Gleichung 2.56 bzw. 2.60 untersucht werden. Insbesondere soll in den Bereichen, in denen die Beziehung

$$\Delta g_{ST} = \frac{2 k Z g (g - f)}{f^2} \propto k \quad (2.60)$$

gilt, mit Hilfe einer linearen Regression der maximale akzeptierbare Zerstreuungskreis Z bestimmt werden. Die Näherung ist ausreichend für die Gegenstandsweiten $g = 1 \text{ m}, 2 \text{ m}$. Allerdings darf die Blendenzahl nicht zu groß gewählt werden.

Überlegen Sie sich vor dem Versuch den Gültigkeitsbereich der linearen Approximation und messen Sie Δg_{ST} als Funktion von verschiedenen Blenden k für $g = 1 \text{ m}$ und 2 m und den existierenden Objektiven mit unterschiedlichen Brennweiten.

Stellen Sie die Messungen grafisch dar. Ideal wären drei Darstellungen für Brennweiten von 85 mm, 50 mm und 35 mm, jeweils Δg_{ST} über k . In jeder Darstellung sollten zwei Messreihen eingetragen werden, die zu Gegenstandsweiten 1 m und 2 m gehören.

Führen Sie die linearen Anpassungen durch. Ermitteln Sie dazu vorher die Messunsicherheit für Δg_{ST} , die Sie für die Anpassungen benötigen.

Daraus ergeben sich verschiedene maximal akzeptierbare Zerstreuungskreise Z . Vergleichen und diskutieren Sie diese. Vergleichen Sie Ihre gemessenen Werte mit der Herstellerangabe von Z für die Kamera (Diskussion).

2.3.3.5 Durchführung von Versuch 1

Die Einstellung der Kamera sollte gemäß des Kapitels Kameraeinstellungen vorgenommen werden.

Die optische Bank wird in Waage gesetzt. Schiene und Skala werden angewinkelt montiert. Die Kamera wird mit Hilfe eines Reiters auf der Schiene fest angebracht. Die Entfernung vom Sensor der Kamera bis zum Bereich, der auf der Skala scharf eingestellt werden soll, wird gemessen und notiert, z.B. 100 cm.

Kamera und Notebook werden verbunden mit dem USB-Kabel. Das Programm EOS Utility wird gestartet.

Die Fokussierung auf die Skala wird **manuell** und **einmalig** am Objektiv durchgeführt. Die Live-Vorschau, die Schärfentiefenvorschau und der Zoom werden dazu aktiviert!. Nur so ergibt sich eine Live-Vorschau, in der die ST korrekt berücksichtigt wird.

Man beginnt am besten mit der kleinsten Blendenzahl und der größten Brennweite und notiert den Bereich auf der Skala, der 'scharf' erscheint. Das erfordert einige Übung und sollte mehrfach für eine Einstellung von zwei Personen durchgeführt werden (mitteln!?). Danach wird die Blendenzahl sukzessive erhöht, z.B. $k = 2/2, 8/4/5, 6/8/11/13/16$, falls noch die lineare Näherung ihre approximative Gültigkeit hat. Jeweils wird der sichtbare scharfe Bereich in der Live-Vorschau bestimmt und notiert. Der Winkel der Skala relativ zur Sehrichtung sollte ebenfalls aufgezeichnet werden, um eine Längenkorrektur durchführen zu können.

Dieser Versuch sollte mindestens mit einer anderen Brennweite $f = 50$ mm wiederholt werden. Zu beachten bleibt die richtige Wahl des abzubildenden Maßstabes für verschiedene Gegenstandsweiten.

2.3.3.6 Versuch 2: Versuchsziel und Auswertung

In diesem experimentellen Teil soll die Schärfentiefe als Funktion der drei Brennweiten untersucht werden. Dabei wird die Blendenzahl k festgehalten.

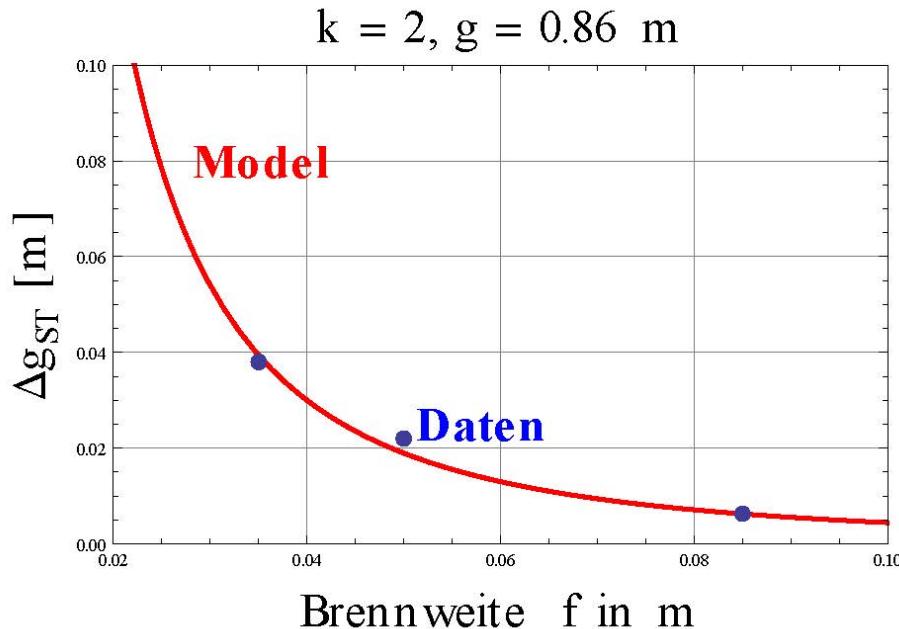


Abbildung 2.30: ST-Bereich als Funktion der Brennweite f für eine Gegenstandsweite von $g = 0.865 \text{ m}$. Bei der Anfertigung der Grafik wurde ein Z von $0,017 \text{ mm}$ angenommen.

Der Schärfentiefenbereich ist durch die Gleichung 2.55 gegeben. Dieses Modell ist in der Abbildung 2.30 als rote Kurve grafisch dargestellt. Der nichtlineare Zusammenhang ist deutlich zu erkennen.

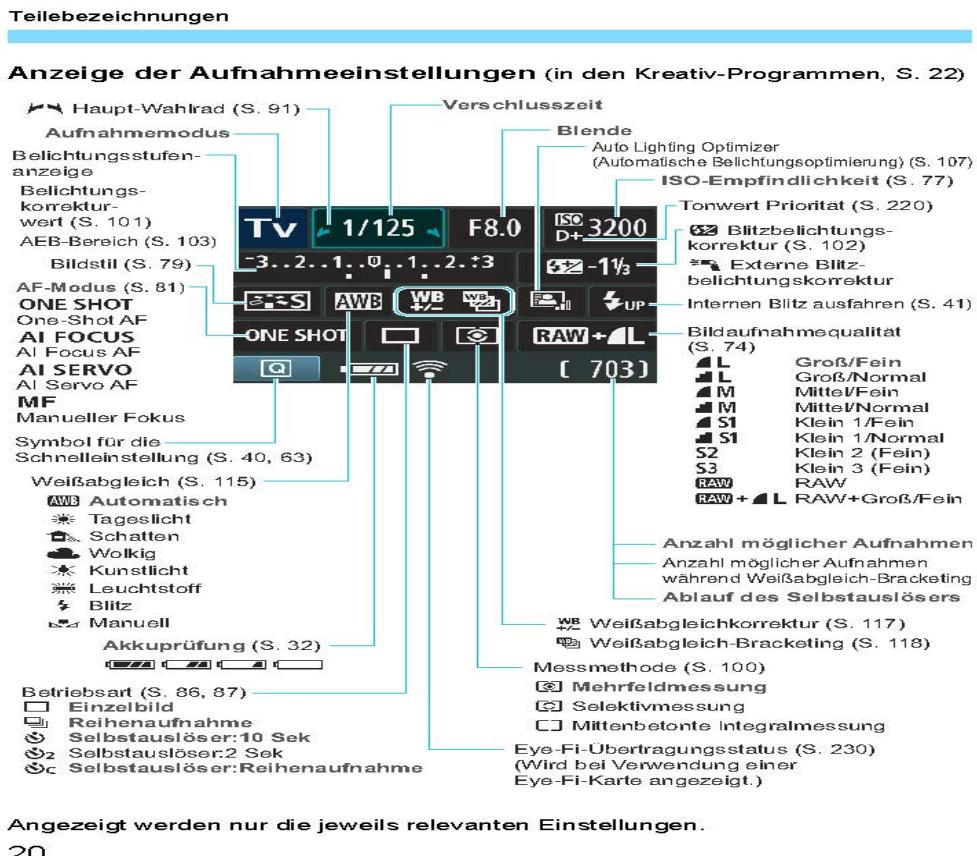
2.3.3.7 Durchführung von Versuch 2

Die Durchführung des Versuches 2 ist analog zum Versuch 1. Man wählt ein Objektiv mit festem f aus und eine feste Gegenstandsweite g und misst für $k = 2$ bis $k = 10$ den Schärfentiefenbereich. Danach wiederholt man diese Messungen für die beiden anderen Objektive, so dass man für jedes k drei Messpunkte erhält. Diese Messungen sollen dann analog zu Abbildung 2.30 für verschiedene k bei festem g mit dem Modell quantitativ verglichen werden. Dazu werden die Messunsicherheiten sinnvoll abgeschätzt.

Falls zeitlich möglich können diese Messungen für ein anderes g wiederholt werden. Die Ergebnisse sollten diskutiert werden.

2.3.4 Kameraeinstellungen und Objektive

Kameras sind im allgemeinen komplizierte und empfindliche Geräte mit vielerlei Einstellmöglichkeiten. Im Versuch wird eine Canon 1100D verwendet, zu der beim Versuch eine kurze Bedienungsanleitung existiert.



20

Abbildung 2.31: Die Anzeige der Aufnahmeeinstellungen am Kamera LCD Monitor (aus der Bedienungsanleitung Canon 1100D.)

Stellen Sie zunächst sicher, dass der Akku in der Kamera ist und das ein Objektiv eingesetzt ist. Lassen Sie sich unbedingt das Installieren und Entfernen eines Objektivs von einem Betreuer des Versuches erläutern. Minimieren Sie beim Wechseln eines Objektivs den Staubbeintritt in das Kameragehäuse, da sonst der Sensor beeinträchtigt wird.

Die Einstellung an den Objektiven soll auf <MF> stehen, da manuell fokussiert werden soll. Wir betreiben die Kamera im <Av> Aufnahmemodus, d.h. wir verwenden die Verschlusszeitenautomatik der Kamera, können aber die Blendenzahl manuell verändern. Es ist auch möglich beim Versuch den Aufnahmemodus <M> zu verwenden; dann muss aber auch die richtige Belichtungszeit ermittelt werden, was aber im Versuch unpraktisch ist. Zur Einstellung wird das Modus-Wahlrad auf der Oberseite der Kamera benutzt.

Schaltet man die Kamera nun ein, so sollten im LCD Monitor der Kamera die aktuellen Einstellmöglichkeiten sichtbar sein, andernfalls $\langle\text{DISP}\rangle$ betätigen. Das ist in Abbildung 2.31 dargestellt.

Der Aufnahmemodus sollte $\langle\text{Av}\rangle$ anzeigen, die Verschlusszeit wird automatisch bestimmt, die Blende kann manuell an der Rändelschraube der Kamera verändert oder mit dem zur Verfügung stehenden Programm am Notebook gesteuert werden. Die ISO Empfindlichkeit sollte 100 anzeigen. Die Kamera sollte bereit sein, Einzelbilder aufzunehmen, d.h. 'ONE Shot' sollte am Monitor sichtbar sein. Für den Weißabgleich ist es meist günstig, den Automatikbereich einzustellen, d.h. 'AWB'. Das Blitzlicht kann je nach Bedarf verwendet werden. Wichtig ist noch die Bildaufnahmefähigkeit auf 'Groß/Fein' zu fixieren, um beste Bildqualität zu erhalten. Alle Einstellungen lassen sich über den Schalter $\langle\text{MENU}\rangle$ der Kamera leicht variieren. Über dieses Menü lässt sich auch die sog. Livebild-Aufnahme aktivieren, was unbedingt überprüft werden sollte.

Darüber hinaus bietet die Kamera noch sehr viele Zusatzeinstellungen, die der erfahrene Fotograf meist nutzen möchte, die aber für den durchzuführenden Versuch nicht bedeutsam sind.

Die Betreuer des Versuches sollten eine kurze Einführung zur Benutzung der Kamera geben vor Beginn des eigentlichen Versuchs.

Im Versuch werden Objektive mit einer festen Brennweite benutzt. Die ausgewählten Objektive haben weitgehend symmetrische Linsenanordnungen, so dass die gezeigte Berechnung für die ST gültig ist. Bei Verwendung von asymmetrischen Linsensystemen müssen die ST-Bereiche anders berechnet werden, worauf aber hier verzichtet wird, da solche Linsen im Versuch keine Verwendung finden.

Objektive mit festen Brennweiten sind in der Regel Objektiven mit variablen Brennweiten vorzuziehen, da nur mit Festbrennweiten kleinste Blendenzahlen verfügbar sind und Linsenfehler besser korrigiert werden können.

2.3.5 Anhang

2.3.5.1 Herleitung der Gleichungen für den Schärfentiefenbereich

Es soll eine Herleitung für die Gleichungen 2.48 und 2.49 gegeben werden, da man eine Herleitung selten in physikalischen Büchern über Optik findet. Eine Ausnahme ist in [2] zu finden.

Wir starten mit der Abbildung 2.25. In der Abbildung werden die drei Punkte A , B und C durch die Linse in die Punkte A' , B' und C' abgebildet. Es soll auf den Punkt B fokussiert worden sein, Punkt B wird also scharf in die Sensorebene in den Punkt B' abgebildet (schwarzer Strahlengang). Der Punkt A ist weiter von der Linse weg als der Punkt B und wird daher gemäß der Abbildungsgleichung 2.42 in den Punkt A' abgebildet, der zwischen Linse und Sensor liegt (roter Strahlengang). Auf dem Sensor ist ein Unschärfekreis mit dem Radius Z_A sichtbar. Analog wird der Punkt C hinter dem Sensor in Punkt C' abgebildet (grüner Strahlengang); auf dem Sensor ergibt sich im Allgemeinen der Unschärfekreis Z_C . Falls man nun den Abstand von A und dem Mittelpunkt der Linse und den Abstand von C und dem Mittelpunkt der Linse so wählen kann, dass die Zerstreuungskreise $Z_A = Z_C = Z$

(maximal akzeptabler Zerstreuungskreis) werden, so stellt der Punkt A den Fernpunkt mit dem Abstand zum Mittelpunkt der Linse g_f und der Punkt C den Nahpunkt mit dem Abstand zum Linsenmittelpunkt g_n der Schärfentiefe dar! Diese Abstände g_f und g_n sollen nun berechnet werden.

Der Durchmesser der Linse sei D . Dann liefert der elementare Strahlensatz

$$\frac{D}{b_f} = \frac{Z}{b - b_f} \quad (2.61)$$

und

$$\frac{D}{b_n} = \frac{Z}{b_n - b}. \quad (2.62)$$

Nun benutzen wir die Gleichung 2.42, um alle Bildweiten durch ihre entsprechenden Gegenstandsweiten zu substituieren. Dazu werden die Gleichungen 2.61 und 2.62 zunächst umgeformt

$$\frac{1}{b_n} = \frac{D - Z}{b D}, \quad (2.63)$$

$$\frac{1}{b_f} = \frac{D + Z}{b D}. \quad (2.64)$$

Wir starten mit der Berechnung des Nahpunktes g_n , d.h. wir ersetzen in der Gleichung 2.63 $1/b$ durch $1/f - 1/g$ und $1/b_n$ durch $1/f - 1/g_n$, also erhalten wir

$$\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{g_n} \right) = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right) \frac{D - Z}{D}. \quad (2.65)$$

Aufgelöst nach $1/g_n$ folgt nach einigen Umformungen

$$\frac{1}{g_n} = \frac{Z}{f D} \left(1 - \frac{f}{g} \right) + \frac{1}{g} \quad (2.66)$$

und daraus

$$g_n = \frac{f^2 g}{Z k (g - f) + f^2}, \quad (2.67)$$

wobei beachtet werden muss, wie die Blendenzahl k hereinkommt: $Z/(f D) = Z k / f^2$. Dabei wurde die Definition der Blendenzahl k benutzt (Gleichung 2.47). Damit ist der Nahpunkt des Schärfentiefenbereichs, die Gleichung 2.48, hergeleitet.

Die Herleitung g_f des Fernpunktes der Schärfentiefe (Gleichung 2.49) verläuft analog (Herleitung im Protokoll durchführen).

2.3.5.2 Zu zeigen $B \propto f$

Zu zeigen ist, dass $B \propto f$ ist, d.h. die Bildgröße ist proportional der Brennweite der Linse. Aus Abbildung 2.20 und mit $D = G$, $\frac{b}{g} = \frac{B}{G}$ folgt

$$\frac{b}{g} = \frac{B}{D} = \frac{1}{g} \frac{gf}{g-f} = \frac{f}{g-f}. \quad (2.68)$$

Dabei wurde $b = \frac{gf}{g-f}$ benutzt. Lösen wir die Gleichung 2.68 nach B auf, so finden wir

$$B = \frac{Df}{g-f} \approx \frac{Df}{g} \propto f. \quad (2.69)$$

2.3.5.3 Die Objekt-Feld Methode

Bei den bisherigen Diskussionen zur ST ist die Schärfe (Unschärfe) des fotografierten Bildes diskutiert worden. Es gibt aber auch Methoden, die die **Erkennbarkeit** eines Gegenstandes für wichtiger ansehen als die Schärfe eines Bildes. Ein Beispiel dafür ist die Luftüberwachung, bei der die Erkennbarkeit eines Objektes höchste Priorität haben sollte.

Auch in Landschaftsfotografien kann diese Vorgehensweise Vorteile haben, da die Möglichkeit existiert ohne Berechnungen (Tabellen) des hyperfokalen Abstandes sehr schnell den richtigen Fokus zu finden. Das soll hier kurz angesprochen werden ohne in Details zu gehen. Wer sich damit genauer beschäftigen möchte, sollte die entsprechenden Referenzen benutzen [1].

Bei dieser Methode wird der akzeptierbare Zerstreuungskreis S über die Erkennbarkeit definiert. S ist in etwa die Größe des kleinsten Gegenstandes, das im Bild noch unterschieden werden kann. Kleinere Objekte 'laufen' zusammen, größere Objekte sind dagegen deutlicher sichtbar. Ein Objekt ist erkennbar, falls seine 'Haupteigenschaften' reproduziert werden. Es werden dann Beziehungen für den Objektraum allein hergeleitet, ohne Bezug auf das Bild zu nehmen. Das läuft letztlich darauf hinaus, bei der Definition der Schärfentiefe über die Unschärfe des Bildes verschiedene Z für verschieden entfernte Gegenstände zu benutzen.

Interessant ist die z.B. in [1] hergeleitete Beziehung

$$S = \frac{g-x}{g} \frac{f}{k}. \quad (2.70)$$

Die in der Gleichung benutzten Variablen sind in Abbildung 2.32 ablesbar.

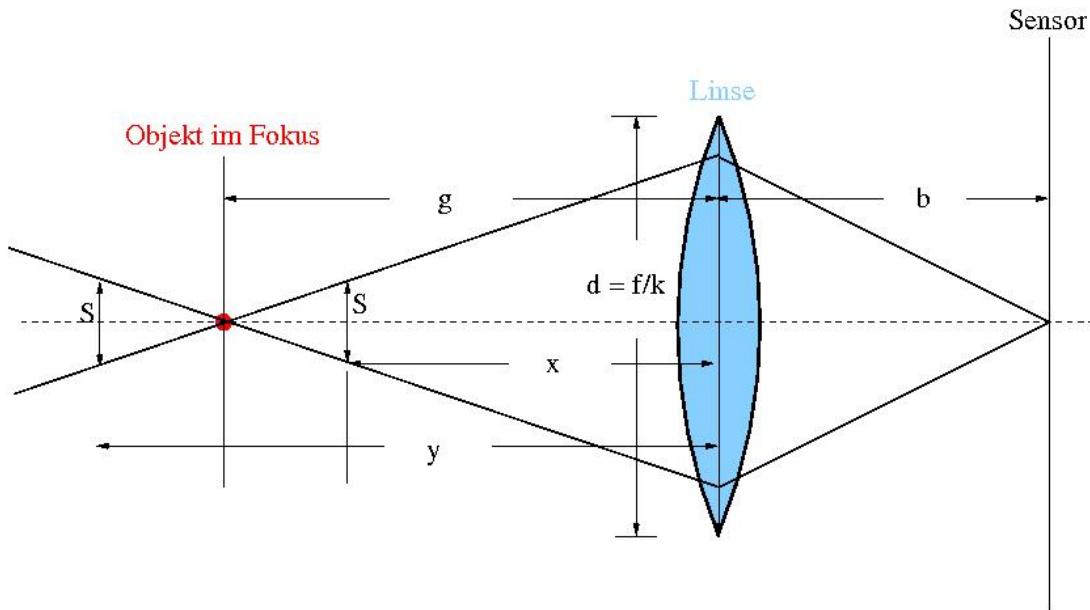


Abbildung 2.32: Abbildung zur Erklärung der in der Gleichung 2.70 benutzen Variablen.

Die Gleichung 2.70 ist interessant. Für $x = \frac{g}{2}$ folgt $S = \frac{f}{2k}$ und falls wir auf unendlich fokussieren ($g \rightarrow \infty$) folgt $S = \frac{f}{k}$. Mit der letzten Gleichung finden wir in Landschaftsaufnahmen sehr rasch die richtige Blendenzahl k . Wir geben uns sinnvolle Werte für S vor, z.B. 6 mm. S kann natürlich nie größer als d , die Größe der Blendenöffnung, werden. Da $S \leq 6$ mm sein soll, muss $k = \frac{f}{S} \geq 8$ gewählt werden für ein 50 mm Objektiv. Wünscht man ohne Stativ zu fotografieren, würde man Blendenzahlen größer als 8 wählen, falls die Belichtungszeit das zulässt. Mit Stativ und 'stehenden' Bildern (Landschaften) kann immer eine möglichst große Blendenzahl gewählt werden.

Wer selbst fotografiert, kann das leicht testen. Man macht Aufnahmen einer Landschaft mit dem Fokus auf den hyperfokalen Abstand und vergleicht das mit Bildern mit dem Fokus auf unendlich und richtig gewählter Blende.

2.3.5.4 Aufnahmen von Versuch 1



Abbildung 2.33: Fotografie von Versuchsaufbau 1 aus einer näheren Entfernung (Links die Kamera, rechts daneben der Laserentfernungsmesser, dann Notebook mit Skala aufgenommen von der Kamera, rechts Skala auf Aluminiumschiene).

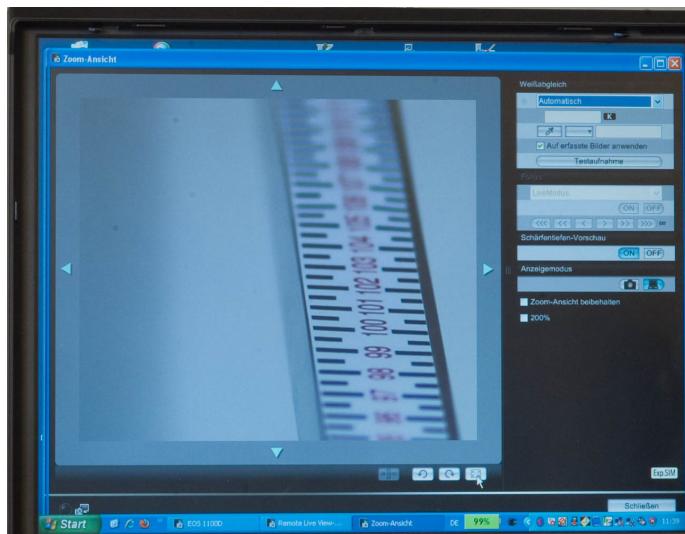


Abbildung 2.34: Vergrößerung des Notebook Bildschirms mit der Skala wie sie die Kamera aufnimmt. Gut sind auf der Skala die Übergänge scharf und unscharf zu erkennen.

2.3.5.5 Versuch 3

Dieser Versuchsteil ist optional und sollte nur nach Rücksprache mit der Praktikumsleitung durchgeführt werden.

2.3.5.6 Versuchsziel und Auswertung

Der Schärfentiefenbereich ist durch die Gleichung 2.55 bzw. 2.71 gegeben

$$\Delta g_{ST} = \frac{2g f^2 (g - f)}{\frac{f^4}{kZ} - k Z (g - f)^2}. \quad (2.71)$$

Das ist eine relativ komplizierte Funktion, von den unabhängigen Variablen g, f, k und in gewisser Weise auch von Z . In den Abbildungen 2.35 und 2.36 ist der Schärfentiefenbereich Δg_{ST} als Funktion der Gegenstandsweite g abgebildet, jeweils für die Brennweite von 35 mm und 85 mm des Objektivs. Die unterschiedlich gefärbten Kurven sind für die Blendenzahlen $k = 2, 4$ und $5,6$.

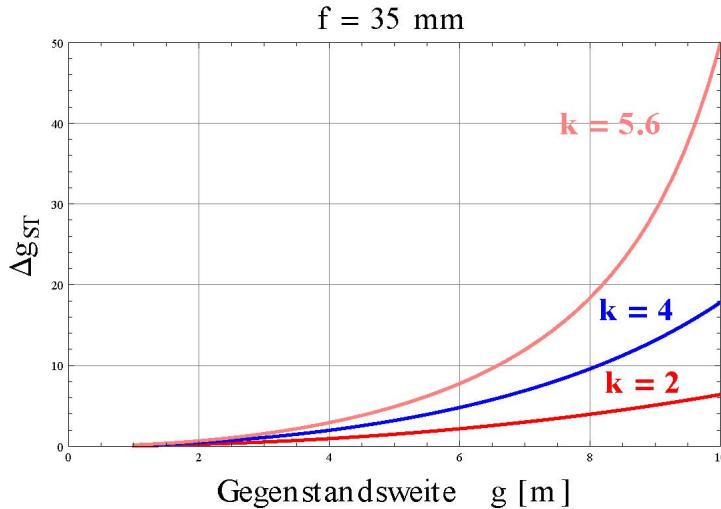


Abbildung 2.35: ST-Bereich als Funktion der Gegenstandsweite g für ein Objektiv mit der Brennweite $f = 35$ mm. Die Einheit von Δg_{ST} ist m. Bei der Anfertigung der Grafik wurde ein Z von 0,018 mm angenommen (Hersteller Angabe der Canon EOS 1100D).

Für das 35 mm Objektiv sind bei Gegenstandsweiten unterhalb von 10 m alle Δg_{ST} endlich für die drei gezeigten Blendenzahlen $k = 2, 4, 5, 6$. Für das 85 mm Objektiv ist für eine Blendenzahl $k = 5, 6$ der Schärfentiefenbereich Δg_{ST} unendlich groß, d.h. hier ist das Bild scharf vom halben hyperfokalen Abstand bis unendlich. Man erkennt z.B. auch, dass bei $g = 10$ mit $k = 5,6$ gilt: $\Delta g_{ST}(35\text{ mm}) > \Delta g_{ST}(85\text{ mm})$.

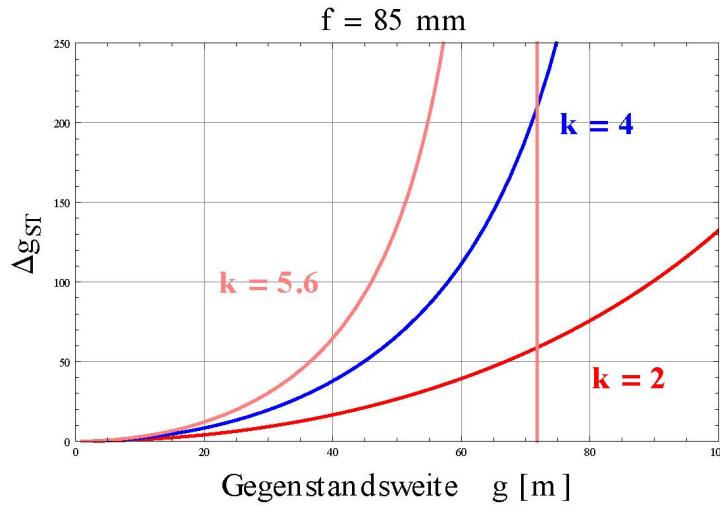


Abbildung 2.36: ST-Bereich als Funktion der Gegenstandsweite g für ein Objektiv mit der Brennweite $f = 85 \text{ mm}$. Die Einheit von Δ_{GST} ist m. Bei der Anfertigung der Grafik wurde ein Z von $0,018 \text{ mm}$ angenommen (Hersteller Angabe der Canon EOS 1100D).

Alle Kurven zeigen einen deutlich nichtlinearen Zusammenhang. Der Schärfentiefenbereich nimmt mit wachsendem k rasch zu und strebt 'schnell' gegen unendlich, was gut ist für Landschaftsaufnahmen mit großer Tiefe.

Qualitativ lässt sich feststellen, dass Objektive mit großen Brennweiten kleinere Schärfentiefenbereiche zeigen, bei gleicher Blendenzahl und gleicher Gegenstandsweite. Daher werden solche Objektive gerne für 'Portraitaufnahmen' genommen, um das Objekt herauszustellen, z.B. vom Hintergrund stark abzugrenzen.

Objektive mit Brennweiten von $f = 50 \text{ mm}$ werden in der Fotografie gerne benutzt, da sie in etwa dem Blickfeld der menschlichen Augen entsprechen. Objektive mit 35 mm eröffnen den Weitwinkelbereich.

Zu beachten bleibt auch, dass für große Blendenzahlen k bereits Beugungerscheinungen auftreten können. Eine einfache Berechnung liefert für $f = 50$, $k = 8$ einen Blendendurchmesser von $D \approx 6,3 \text{ mm}$. Mit der Wellenlänge des Lichtes $\lambda = 600 \text{ nm}$ und einem Abstand zwischen Blende und Sensor von 6 cm finden wir das 1. Minimum des Beugungsmusters bei $\approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$. Vergrößert man nun einen Bildausschnitt dieser Größe, so sollte man auch Unschärfe durch Beugung feststellen.

2.3.5.7 Durchführung von Versuch 3

Es soll der ST-Bereich für größere Gegenstandsweiten g untersucht werden. Als 'Versuchsräum' wählen wir den Flur vor dem Praktikumsraum. Die Länge des Flurs beträgt ca. 30 m. Zusätzlich zu den Geräten von Versuch 1 steht Ihnen ein Rollwagen, auf dem die Kamera befestigt werden kann, zur Verfügung. Auf dem Wagen sollte sich auch das Notebook und

eventuell der Entfernungsmesser befinden. An dem Ende des Flurs ist ein Plakat mit den zu beobachtenden Symbolen zur Bestimmung der ST angebracht.

Für verschiedene Brennweiten f (50 mm, 85 mm) soll die Abhängigkeit Δg_{ST} von g untersucht werden für verschiedene Blendenzahlen k (mindestens 3).

Überlegen Sie sich vor dem Versuch entsprechende Gegenstandsweiten g und Blendenzahlen k , um den Versuch in dem 30 m langen Flur sinnvoll durchzuführen.

Stellen Sie bei der Auswertung die Messpunkte mit Messunsicherheiten (wie bestimmt?) grafisch dar. Angetragen werden soll Δg_{ST} über g für jeweils eine Brennweite. In jedem Graph sollten dann verschiedene Messreihen (mindesten 3) eingetragen werden, jeweils für eine Blendenzahl k als Kurvenparameter.

Diskutieren und bewerten Sie die Ergebnisse.

Literaturverzeichnis

- 1 Merklinger, H.M. 1992: 'The INs and OUTs of FOCUS' unter <http://www.trenholm.org/hmmerk/> als PDF File.
- 2 Pedrotti, F.L. 1996: Optik - Eine Einführung.

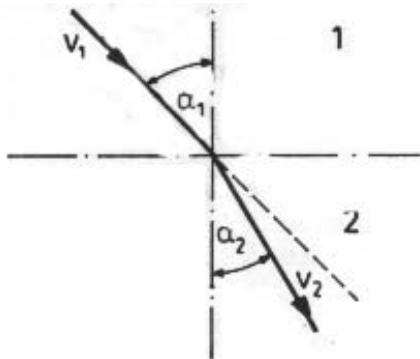


Abbildung 2.37: Lichtbrechung zwischen zwei transparenten Materialien mit $v_1 > v_2$

2.4 Spektrometer

2.4.1 Prismenspektrometer

Aufgabe: • Messung des Winkels der brechenden Kante eines Glasprismas • Messung der Dispersionskurve eines Prismas durch Bestimmen der Winkel der Minimalablenkung für verschiedene Spektrallinien • Eichung eines Prismenspektrometers mit Licht bekannter Wellenlängen • Ausmessen des Spektrums einer unbekannten Lichtquelle

Vorkenntnisse: • Brechungsgesetz von Snellius • Huygenssches und Fermatsches Prinzip • normale und anomale Dispersion • Durchgang von Licht durch ein Prisma • Minimum der Ablenkung • Auflösungsvermögen und Dispersionsgebiet • Strahlengang im Prismenspektrometer • Gasentladung in Metalldampflampen • Emission und Absorption von Licht in Gasen und festen Körpern

2.4.1.1 Grundlagen

a) Brechungsgesetz

Fällt ein Lichtbündel (Normale der Wellenfront) auf die Grenzfläche zweier transparenter Materialien, so tritt neben teilweiser *Reflexion* eine *Brechung* auf, d.h. das Licht wird aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt, s. Abb. 2.37. Der Zusammenhang von Einfallsinkel α_1 und Brechungswinkel α_2 , gemessen in Bezug auf das Einfallslot bzw. die Flächennormale, werden durch das *Snelliussche Brechungsgesetz* (1621) beschrieben

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad \text{Brechungsgesetz .} \quad (2.72)$$

Die Materialkonstante n heißt Brechungsindex oder Brechzahl und ist gegeben durch $n = c/v$, das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten c im Vakuum und v im Material. Von zwei Materialien gilt dasjenige als *optisch dichter*, in dem der Brechungsindex n größer ist. Umgekehrt wird das Material mit dem kleineren Brechungsindex als *optisch dünner* bezeichnet. In Abb. 2.37 ist der Fall $n_1 < n_2$ ($v_1 > v_2$) dargestellt: beim Übergang 1 → 2 in ein optisch dichteres Medium wird der Lichtstrahl zum Einfallslot hin gebrochen.

Eine einfache geometrische Herleitung des Brechungsgesetzes ergibt sich aus dem *Huygens-schen Prinzip*: Jeder Punkt einer Wellenfront ist Zentrum einer Kugelwelle und sämtliche Kugelwellen überlagern sich zu einer neuen Wellenfront. An einer Grenzfläche mit $v_1 \neq v_2$ führt dies zu einer Richtungsänderung des Lichtbündels gemäß Gl. (2.72).

b) Dispersion

Die chemische Bindung vermittelnden äussersten Elektronen, die sowohl die thermischen als auch elastischen Eigenschaften von Festkörpern bewirken, bestimmen ebenfalls die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in diesen Materialien. Die dynamische Wechselwirkung zwischen einer Lichtwelle und dem Elektronensystem in einem im Sichtbaren transparenten Material lässt sich in vielen Fällen durch ein einfaches Dipol-Modell gut beschreiben. Die Phasenverschiebung zwischen der eingestrahlten und der von den Materialatomen wieder abgestrahlten Welle ist die Ursache für das Phänomen Brechung. Darüberhinaus muss Brechung immer wellenlängenabhängig sein ($n = n(\lambda)$), da die Ankopplung der Dipole an die einfallende Welle umso grösser ist je mehr sich die Frequenz dieser Welle einer der Eigenfrequenzen des Dipols annähert.

Das wellenlängenabhängige Verhalten des Brechungsindex n wird durch die *Dispersionskurve* $n = n(\lambda)$ beschrieben. Dieses Phänomen ist für optische Instrumente wie Linsen und Prismen sehr wichtig. Abb. 2.38 zeigt eine schematische Darstellung einer Dispersionskurve über einen ausgedehnten Wellenlängenbereich. Für die meisten transparenten Medien mit geringer Lichtabsorption, wie Gase, Flüssigkeiten oder Gläser, wächst der Brechungsindex im sichtbaren Spektralbereich mit abnehmender Wellenlänge. Dieses Verhalten bezeichnet man als *normale Dispersion* mit der Eigenschaft $dn/d\lambda < 0$, d.h. blaues Licht wird stärker abgelenkt als rotes Licht, wie man am Regenbogen sieht. In Bereichen mit starker Absorption nimmt n mit wachsender Wellenlänge zu. Diese *anomale Dispersion* mit $dn/d\lambda > 0$ ist mit dem Auge als Strahlungsmessgerät nicht zu beobachten; sie tritt eher im Ultravioletten auf und kann zu Werten $n < 1$ führen (was nicht bedeutet, daß man dann Signalausbreitung mit Überlichtgeschwindigkeit erhält; eine gemeinsame Beschreibung von Lichtabsorption und Transmission führt zu einer komplexen Erweiterung des Brechungsindex $n(\lambda)$ zu $n(\lambda) + ik(\lambda)$, benutzen Sie die empfohlenen Lehrbücher für weitere Information!). Über das gesamte elektromagnetische Spektrum weist das Dispersionsverhalten eines Stoffes stets Bereiche normaler und anomaler Dispersion auf.

Ein qualitatives Verständnis der Dispersion erhält man aus der atomistischen Deutung (Dipol Modell) der dielektrischen Polarisation. Man geht davon aus, daß die Elektronen in einem Material quasielastisch gebunden sind und durch das hochfrequente elektrische Feld $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ einer Lichtwelle aus ihrer Ruhelage ausgelenkt werden. Dies führt zum Aufbau einer zeitlich veränderlichen Polarisation $\vec{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \vec{E}$, wobei die Dielektrizitätskonstante ϵ und der Brechungsindex verknüpft sind über die Maxwell-Relation $n = \sqrt{\epsilon}$. Zwischen dem Polarisationsvektor und der angreifenden Kraft baut sich eine Phasenbeziehung auf, ähnlich wie bei einem klassischen Oszillatator. Sei ω_0 die Eigenfrequenz der Elektronen im Material, so folgt im quasielastischen Bereich $\omega \ll \omega_0$ die Auslenkung der Ladung dem Feld, die Polarisation steht in Feldrichtung. Damit erhält man den normalen Fall $\epsilon > 1$ oder $n > 1$. Im quasifreien Bereich $\omega \gg \omega_0$ hingegen können die Ladungen dem anregenden Feld nicht mehr folgen, die Dipolmomente stehen in jedem Augenblick entgegengesetzt zur Feldrichtung. Dies

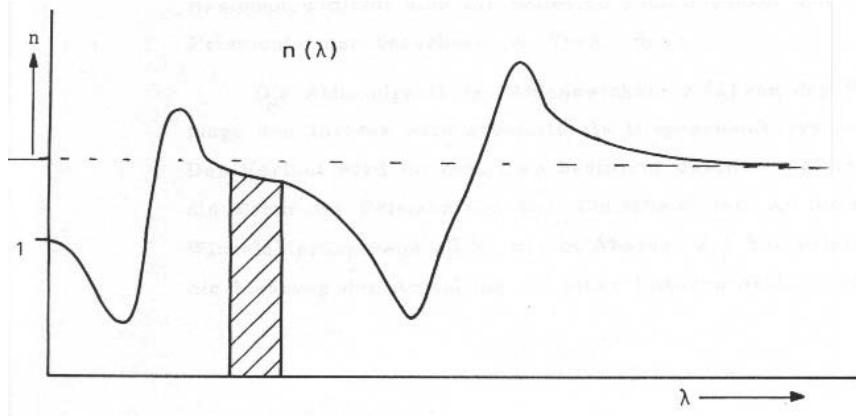


Abbildung 2.38: Schematische Darstellung einer Dispersionskurve $n = n(\lambda)$. Der schraffierte Bereich deutet das sichtbare Spektrum an.

führt zu $\epsilon < 1$ und damit $n < 1$. Der Übergang zwischen $n > 1$ und $n < 1$ erfolgt ziemlich rasch in der Nähe der Eigenfrequenz und dieser Bereich großer Absorption kennzeichnet auch die anomale Dispersion. Im allgemeinen hat jedes Material mehrere Eigenfrequenzen ω_{0_i} , deren höchste häufig im Röntgenbereich liegen.

$$n^2 - 1 = \frac{a_1}{1 - \frac{b_1}{\lambda^2}} + \frac{a_2}{1 - \frac{b_2}{\lambda^2}} + a \quad (2.73)$$

Die vorstehende „Sellmaier“-Formel berücksichtigt 2 Eigenfrequenzen bei $\omega_{0_1} = \frac{2\pi c}{\lambda_1} = \frac{2\pi c}{\sqrt{b_1}}$ und $\omega_{0_2} = \frac{2\pi c}{\sqrt{b_2}}$. Mit dieser Formel kann eine Dispersionskurve wie in Abb. 2.38 parametrisiert werden. Die Bereiche normaler und anomaler (in der Nähe der Resonanzen) Dispersion sind durch schwache bzw. starke Absorption gekennzeichnet.

Brechungsindexwerte müssen demnach für bestimmte Wellenlängen angegeben werden, s. Tabelle für einige Materialien. Bei Messungen zur Optik im Praktikum kann Vakuum durch Luft mit $n_L = 1,000$ und vernachlässigbarer Dispersion angenähert werden.

	$\lambda = 656,3 \text{ nm}$	$\lambda = 589,3 \text{ nm}$	$\lambda = 486,1 \text{ nm}$
Wasser	$n = 1,3311$	$n = 1,3330$	$n = 1,3371$
Benzol	$n = 1,4966$	$n = 1,5014$	$n = 1,5132$
Quarzglas	$n = 1,4563$	$n = 1,4584$	$n = 1,4631$
Kronglas	$n = 1,5076$	$n = 1,5100$	$n = 1,5157$
Flintglas	$n = 1,6070$	$n = 1,6102$	$n = 1,6178$

c) Minimalablenkung in einem Prisma

Unter einem optischen Prisma ist ein durchsichtiger Körper zu verstehen, bei dem zwei ebene Begrenzungsfächen einen Winkel miteinander einschließen. Dieser Winkel heißt der brechende Winkel und die Schnittgerade, in der die beiden Ebenen zusammentreffen, heißt die brechende Kante. In Abb. 2.39 ist der Strahlengang durch ein Prisma mit dem brechenden Winkel ε gezeichnet. Ein monochromatisches, paralleles Lichtbündel treffe unter dem

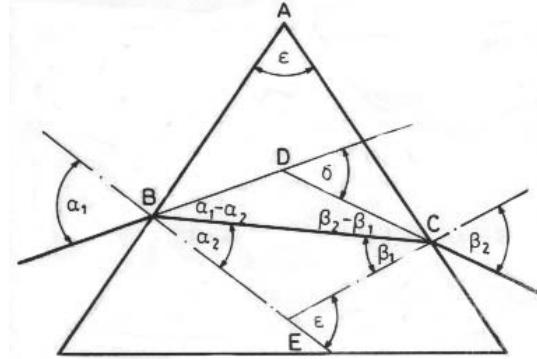


Abbildung 2.39: Strahlengang durch ein Prisma.

Winkel α_1 gegen das Einfallsslot auf das Prisma. Das Lichtbündel wird unter einem Winkel α_2 gebrochen, trifft die andere Begrenzungsfläche unter dem Winkel β_1 und tritt unter dem Winkel β_2 aus dem Prisma aus (zur Verdeutlichung wird empfohlen, die im Literaturanhang zitierten Java Applets auszuführen). An der Eintritts- und Austrittsfläche erfolgt eine Brechung zum Lot hin bzw. vom Lot weg, gemäß

$$\sin \alpha_1 = n \sin \alpha_2 \quad \text{und} \quad \sin \beta_2 = n \sin \beta_1 . \quad (2.74)$$

Aus der Skizze lässt sich die gesamte Ablenkung um den Winkel δ ablesen

$$\varepsilon = \alpha_2 + \beta_1 \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \delta &= \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2 - \beta_1 \\ &= \alpha_1 + \beta_2 - \varepsilon . \end{aligned} \quad (2.76)$$

Unter Verwendung von Gl. (2.74) kann nun β_2 durch α_1 ausgedrückt werden. Man erhält den Ablenkungswinkel als Funktion von Einfallsinkel, brechendem Winkel und Brechungsindex

$$\delta = \delta(\alpha_1, \varepsilon, n) = \alpha_1 - \varepsilon + \arcsin \left[\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} \sin \varepsilon - \sin \alpha_1 \cos \varepsilon \right] . \quad (2.77)$$

Für ein bestimmtes Prisma (ε und n vorgegeben) nimmt der Ablenkungswinkel dann ein Minimum ein, $\delta = \delta_{min}$, wenn das Prisma symmetrisch vom Licht durchstrahlt wird. Das Licht tritt senkrecht durch die Ebene, die den Winkel ε halbiert. Die zur Minimalablenkung gehörigen Winkel erfüllen die Relationen

$$\alpha_1 = \beta_2 = \frac{\delta_{min} + \varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \beta_1 = \frac{\varepsilon}{2} . \quad (2.78)$$

Diese Werte werden in das Brechungsgesetz eingesetzt

$$n = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} = \frac{\sin((\delta_{min} + \varepsilon)/2)}{\sin(\varepsilon/2)} \quad \text{Minimalablenkung} \quad (2.79)$$

Gl. (2.79) dient als Grundlage zur Bestimmung des Brechungsindex. Der Winkel der Minimalablenkung δ_{min} wird gemessen. Der brechende Winkel des Prismas ε muss selbstverständlich ebenfalls gemessen werden.

e) Spektrale Zerlegung des Lichts

Zur Zerlegung des Lichts dienen Spektralapparate. Man unterscheidet Gitterspektrographen und Prismenspektrographen. Beim Gitter werden die Eigenschaften der Beugung ausgenutzt; man erreicht im allgemeinen eine höhere Auflösung als bei Prismen, d.h. eine bessere Trennung von benachbarten Spektrallinien. Die Wirkungsweise von Prismen beruht auf der Dispersion des Lichts aufgrund der Physik der Bindungselektronen in transparenten Materialien; man arbeitet normalerweise mit geringerer Auflösung bei allerdings hoher Lichtstärke.

Als Folge der Dispersion wird weißes Licht durch ein Prisma in seine spektralen Anteile zerlegt. Die Abhängigkeit des Ablenkwinkels $\delta(\lambda)$ von der Wellenlänge des Lichts wird Winkel-dispersionskurve bezeichnet. Der exakte Verlauf hängt ab von Material, Geometrie des Prismas und Eintrittswinkel. Mit der Beziehung zwischen Ablenkinkel und Brechungsindex $\delta(n)$ erhält man aus der Ableitung nach λ die sogenannte Winkeldispersion $d\delta/d\lambda = d\delta/dn \cdot dn/d\lambda$. Der zweite Faktor hängt ausschließlich von den Eigenschaften des Prismenmaterials ab, während der erste Faktor als eine Art Apparatekonstante anzusehen ist.

Eine wichtige Kenngröße des Prismas ist sein Auflösungsvermögen. Es wird definiert als $A = \lambda/\Delta\lambda$ und gibt an, bei welcher Wellenlängendifferenz $\Delta\lambda$ zwei Spektrallinien der Wellenlängen λ und $\lambda + \Delta\lambda$ noch getrennt werden können. Die Auflösung wird durch die Beugungerscheinungen der benutzten meist vom Prisma begrenzten parallelen Lichtbündel eingeschränkt, bei maximaler Ausleuchtung (überprüfen!) also durch die von der Geometrie des Prismas und des Spaltrohres vorgegebene Bündelbegrenzung bei der Beobachtung des Spektrums. Ein wie auch immer begrenztes Bündel kann, wie im vorhergehenden Versuch gezeigt, nur mit Beugungerscheinungen im Randbereich erzeugt werden.

Bei symmetrischem Strahldurchgang (und voller Ausleuchtung) legt das Lichtbündel an der Prismenbasis S den optischen Weg nS zurück. Die Lichtwege der beiden Spektrallinien unterscheiden sich dann um $S(dn/d\lambda)\Delta\lambda$ und dieser Unterschied muß mindestens so groß wie die Wellenlänge λ sein, damit die Linien trennbar sind (eine detailliertere Diskussion der Trennung nach dem Rayleigh-Kriterium findet sich beim Gitterversuch 2.2.2). Das Auflösungsvermögen des Prismas

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = S \frac{dn}{d\lambda} \quad (2.80)$$

ist das Produkt aus der Basisbreite S des genutzten Teils des Prismas und der Dispersion $dn/d\lambda$ des Glases. Man beachte, daß Gl. (2.80) unabhängig ist von weiteren geometrischen Größen wie brechendem Winkel oder Einfallswinkel, sofern das Prisma voll ausgeleuchtet ist.

2.4.1.2 Versuchsanordnung

Im Praktikum wird ein Spektrometer-Goniometer verwendet. Der Strahlengang durch einen Prismenspektralapparat und der Aufbau eines Prismenspektrometers sind in 2.40 dargestellt. Wir beschränken uns auf die *Frauenhofersche* Beobachtungsweise, bei der man mit parallelen ebenen Wellenfronten arbeitet. Ebene Wellenfronten werden mit einer Kollimatorlinse im „Kollimatorrohr“ erzeugt. Im Brennpunkt dieser Linse steht der Kollimatorspalt als in der Intensität regelbare Lichtquelle. Der Kollimatorspalt selbst wird durch eine Kondensorlinse mit

einer Gasentladungslampe beleuchtet. Die Beobachtung paralleler Lichtbündel hinter dem Prisma erfolgt dann durch den umgekehrten Prozeß, d.h. durch Abbildung in die Brennebene einer Sammellinse. Das Fernrohrobjektiv erzeugt ein reelles Zwischenbild des Spalts, welches durch das als Lupe wirkenden Okular betrachtet wird, wobei zugleich ein Fadenkreuz scharf erscheint. An dem Fernrohr-Arm ist ein Nonius angebracht, mit dessen Hilfe eine Drehung des Fernrohrs relativ zum Teilkreis auf 1/10 Grad abgelesen werden kann. Durch Markieren der Winkelstellung der Azimutalwinkelstellschraube des Fernrohrs kann die Winkelablesung weiter verfeinert werden. Bei richtiger Einstellung des Spektrometers sieht man durch das Fernrohr die farbigen Bilder des Spalts zusammen mit dem Fadenkreuz.

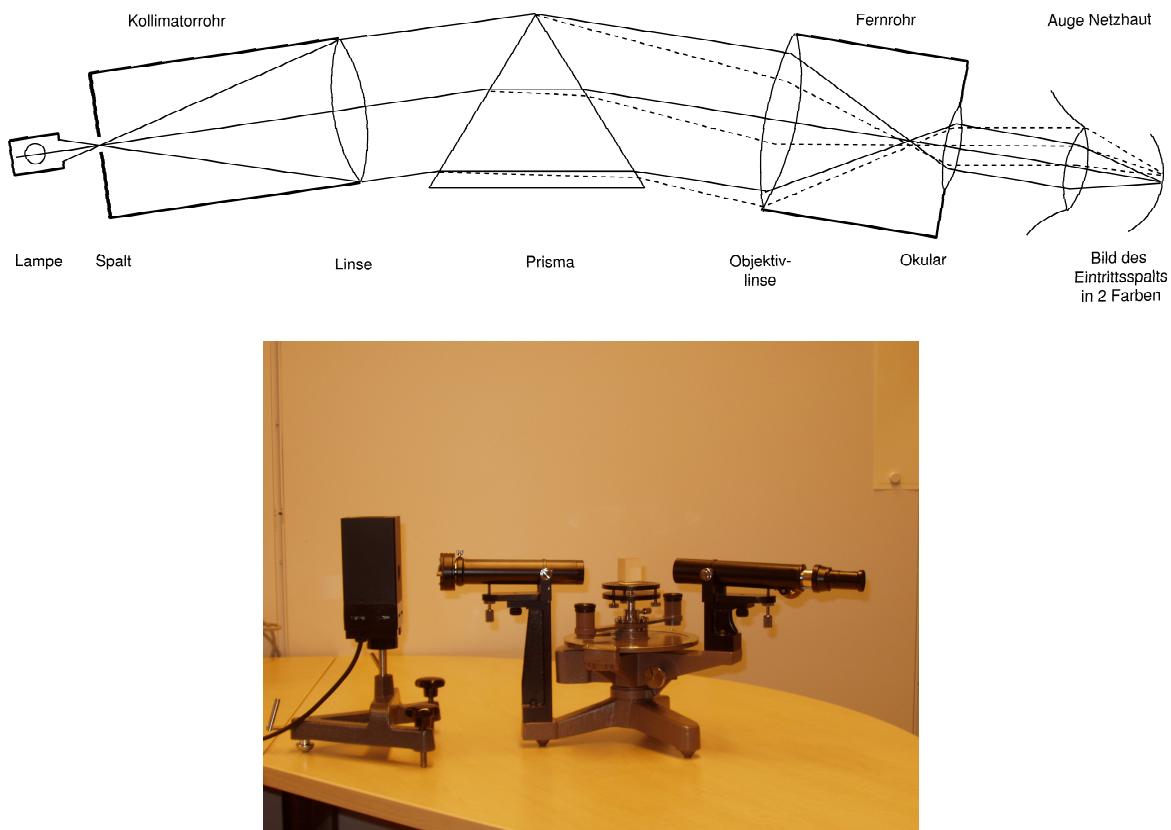


Abbildung 2.40: Strahlengang durch ein Prismenspektrometer. Aufnahme eines Prismenspektralapparates.

a) Justierung des Spektrometers

- Einstellen des Fernrohrs

Das Fernrohr wird auf einen möglichst weit entfernten Gegenstand gerichtet und das Okular wird verschoben, bis dieser Gegenstand scharf erscheint.

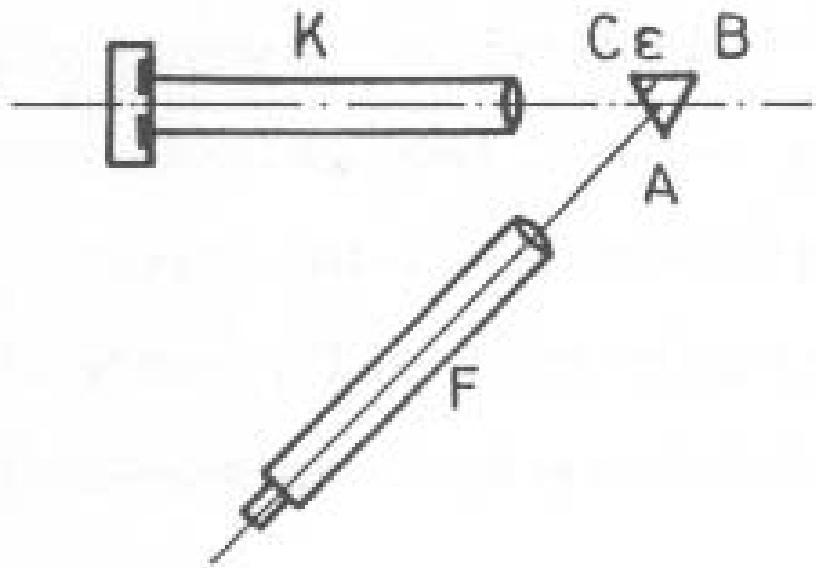


Abbildung 2.41: Ausrichtung des Prismas

- Einstellen des Spaltrohrs

Das Fernrohr wird so auf das Spaltrohr gerichtet, daß der Spalt im Schnittpunkt des Fadenkreuzes liegt. Dann wird der Spalt verschoben, bis er scharf erscheint.

- Ausrichten des Prismas

Das Prisma wird so auf den Prismentisch gesetzt, daß die Drehachse der Teilkreisplatte die Winkelhalbierende des brechenden Winkels schneidet. Das Lichtbündel des Kollimatorrohrs K soll die brechende Fläche des Prismas voll treffen. Bei beleuchtetem Spalt (Na-Lampe) wird das Fernrohr so geschwenkt, daß das an der Prismenfläche AC (2.41) reflektierte Licht in das Fernrohr fällt.

Ausserdem sollte man sich bemühen, daß die Drehachse in der Mittelebene des Prismas liegt, d.h. das Spaltbild sollte sich nicht in der Höhe verändern, wenn das Fernrohr geschwenkt wird. Mit Hilfe der Rändelmuttern des Prismentisches wird dieser so justiert, daß die Mitte des Spaltbildes mit dem Schnittpunkt des Fadenkreuzes x übereinstimmt. Bei festgestelltem Fernrohr wird die Teilkreisplatte so gedreht, daß die Reflexion des Lichtbündels an der Fläche BC erfolgt. Auch hier erfolgt die Einstellung der Spaltbildmitte auf dem Schnittpunkt des Fadenkreuzes. Diese Einstellungen werden abwechselnd wiederholt, bis keine Korrektur mehr erforderlich ist.

- Einstellung des Fernrohrs

Die Arretierungsschrauben von Teilkreistisch und Fernrohr werden gelöst und der Spalt wird mit der Na-Lampe beleuchtet. Dann wird das Prisma so gedreht, daß das vom Spaltrohr kommende Strahlenbündel unter einem spitzen Winkel auf die Prismenfläche auftrifft (Strahl 1 in 2.42). Der Fernrohrarm wird geschwenkt, bis das Spaltbild in der

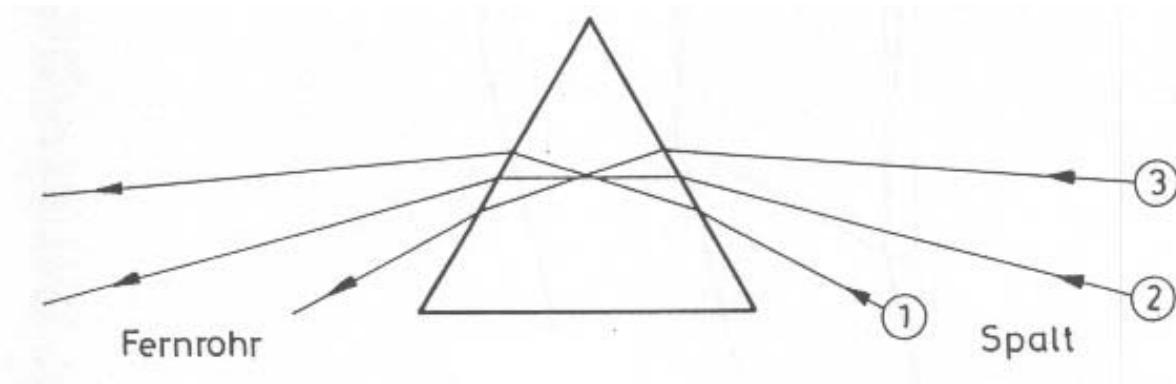


Abbildung 2.42: Wahl des optimalen Strahlengangs durch ein Prisma.

Mitte des Gesichtsfeldes steht und dann festgestellt. Durch Verschieben des Okulars wird das Spaltbild scharf eingestellt. Bei gleicher Stellung des Fernrohrs kann ein zweites Bild des Spalts sichtbar gemacht werden, indem das Prisma gedreht wird (Strahl 3 in 2.42). Lediglich bei symmetrischem Strahlenverlauf (Minimalablenkung, Strahl 2 in 2.42) kann nur bei einer Prismenstellung ein Spaltbild beobachtet werden. In Stellung 3 wird die Schärfe des Spaltbildes durch Verschieben des Spalts gegenüber der Kollimatorlinse nachgestellt. In dieser Stellung erscheint das Bild stark verbreitert gegenüber der Stellung 1. Die Einstellungen werden abwechselnd in der angegebenen Reihenfolge wiederholt, bis keine Korrektur mehr erforderlich ist.

b) Lichtquellen

Als Lichtquellen werden Spektrallampen verwendet, die aus einem mit Edelgas gefüllten Glas- oder Quarzkolben mit eingeschmolzenen Elektroden bestehen. Beim Betrieb mit Wechselstrom wird eine Glimmentladung gezündet, die nach Erwärmung der Elektroden in eine intensiv strahlende Bogenentladung übergeht. Technische Details zu Gasentladungslampen findet man in den Literaturangaben zum Gitterversuch.

Bei den Natrium-, Cadmium- und Quecksilberlampen verdampft das Metall und übernimmt an Stelle des Edelgases die Lichtheission, da die Anregungsenergien der Metalle kleiner als die des Edelgases sind. Nach dem Einschalten der Lampe dauert es daher eine gewisse Zeit, bis die volle Lichtstärke erreicht ist.

ACHTUNG: Die Spektrallampen werden nur über eine als Vorschaltwiderstand wirkende Drossel an das Netz angeschlossen. Wird die Spektrallampe direkt an eine 220V-Netzsteckdose angeschlossen, führt dies zur Zerstörung der Lampe! Es ist daher darauf zu achten, daß der Stecker der Spektrallampen in die vorgesehenen Buchsen der Drossel gesteckt wird. In den Abbildungen 2.43 werden typische Linienspektren von Ne, He und Hg gezeigt. Zu beachten ist, dass es sich bei diesen Darstellungen um überlagerte Aufnahmen handelt, um alle Linien optimal zu zeigen.

Element	λ [nm]	Farbe	Intensität
Quecksilber (Hg I neutral)	579,07	gelb	22 (mittel)
	576,96	gelb	50 (mittel)
	546,07	grün	244 (stark)
	497,04	blau-grün	1 (schwach)
	491,61	blau-grün	18 (mittel)
	435,83	blau	1000 (stark)
	434,75	blau	89 (mittel)
	433,92	blau	56 (mittel)
	407,78	violett	33 (mittel)
	404,65	violett	400 (stark)
	365,02	violett	620 (stark)
	253,65	ultraviolett	3330 (gefährlich stark)
Helium (He)	706,52	rot	200 (stark)
	667,82	rot	200 (stark)
	587,56	gelb	500 (sehr stark)
	504,77	grün	10 (schwach)
	501,57	grün	100 (mittel)
	492,16	blau-grün	20 (mittel)
	471,31	blau	4 (schwach)
	447,15	blau-violett	200 (stark)
	438,79	violett	10 (schwach)
Cadmium (Cd)	643,85	rot	1000 (stark)
	515,47	blau-grün	3 (schwach)
	508,58	blau-grün	500 (stark)
	479,99	blau	150 (stark)
	467,82	blau	100 (stark)
	466,24	blau	4 (schwach)
Zink (Zn)	636,23	rot	30 (mittel)
	481,05	blau	400 (stark)
	472,22	blau	250 (stark)
	468,01	blau	100 (stark)

Tabelle 2.3: Spektrallinien einiger Elemente, relative Intensitäten nicht von Element zu Element vergleichbar

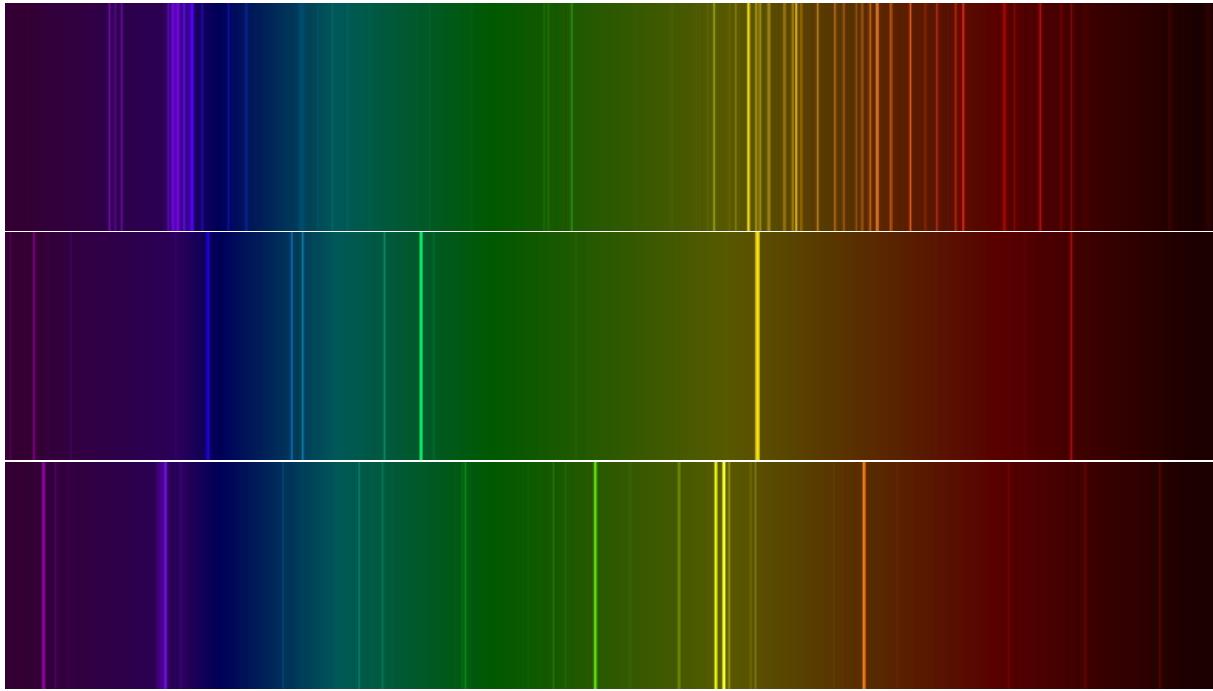


Abbildung 2.43: Spektrallinien von Neon, Helium, Quecksilber

2.4.1.3 Versuchsdurchführung

a) Bestimmung des brechenden Winkels

Benutzen Sie die Na Lampe! Das Prisma wird so auf den Prismentisch gesetzt, daß die brechende Kante auf den Kollimator gerichtet ist, s. Abb. 2.44. In dieser Stellung wird Teil I des Lichts an der linken Fläche des Prismas reflektiert, Teil II an der rechten Fläche. Die reflektierten Strahlen I und II werden im Fernrohr beobachtet und der Winkel φ zwischen beiden Strahlen wird gemessen. Aus der Geometrie der Anordnung, sowie dem Hilfsdreieck GAB der Abb. 2.44 folgt

$$\beta + \beta' = \varepsilon, \quad (2.81)$$

$$\varphi = \varepsilon + \beta + \beta' = 2\varepsilon. \quad (2.82)$$

Liegt der Nullpunkt der Skala zwischen den beiden Ablesungen φ_I und φ_{II} , so ergibt sich

$$\varphi = \varphi_{II} - \varphi_I + 360^\circ \quad (2.83)$$

und damit der brechende Winkel $\varepsilon = \varphi/2$.

Alle Messungen werden mehrfach durchgeführt. Messen Sie alle 3 Winkel des Prismas! Führen Sie eine Ausgleichsrechnung mit der Nebenbedingung der Dreieckwinkelsumme aus. Wie sieht die Messwinkelverteilung vor und nach der Ausgleichsrechnung aus? Jeder Winkel φ_I , φ_{II} kann mit Hilfe des Nonius auf 1 Bogenminute genau abgelesen werden! Man mache sich mit der Funktionsweise des Nonius vertraut. Die Feineinstellschraube am Fernrohr erlaubt es,

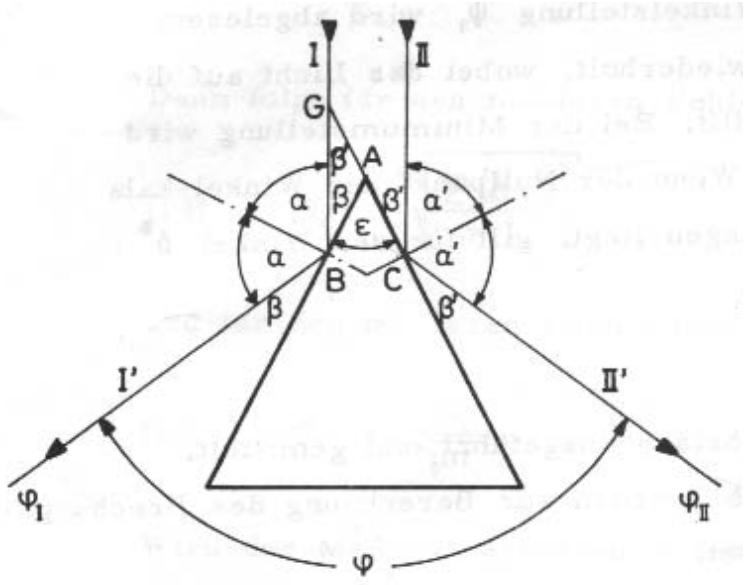


Abbildung 2.44: Bestimmung des brechenden Winkels eines Prismas

die Winkeleinstellung weiter zu verbessern.

Aus den Einzelwerten ist der Mittelwert $\bar{\epsilon}$ des Brechungswinkels zu bilden.

b) Bestimmung des Winkels der Minimalablenkung

Zur Messung der minimalen Ablenkung läßt man nach Abb. 2.42 das Licht schräg auf eine Prismenfläche auffallen. Das Bild des Spalts wird im Fernrohr betrachtet. Bei gleichsinniger Drehung von Prismentisch und Fernrohr beobachtet man, daß das Bild des Spalts bei einer bestimmten Stellung seine Richtung umkehrt. Der Umkehrpunkt entspricht dem minimalen Wert der Ablenkung. Die Winkelstellung ψ_1 wird abgelesen. Der gleiche Versuch wird wiederholt, wobei das Licht auf die andere Prismenfläche auftrifft, und bei Minimumstellung wird der Winkel ψ_2 abgelesen. Wenn der Nullpunkt der Winkelskala zwischen den beiden Ablesungen liegt, gilt für den Winkel δ_{min}

$$2 \delta_{min} = \psi_2 - \psi_1 + 360^\circ. \quad (2.84)$$

Alle Ablesungen ψ_i werden mit einer Genauigkeit von deutlich besser als $0,1^\circ$ mehrfach ausgeführt (Rändelschraube!) und gemittelt. Die Mittelwerte des brechenden Winkels $\bar{\epsilon}$ und der Minimalablenkung $\bar{\delta}_{min}$ werden zur Berechnung des Brechungsindex in Gl. (2.79) eingesetzt.

Diese Messung der Prismengeometrie soll nur mit der gelben Na Doppel-Linie durchgeführt werden. Die Dispersionskurve wird mit der Hg und der Cd Lampe ausgeführt. Die Apparatur ist hinreichend gut eingestellt, falls mit dem Prisma aus Flintglas die gelbe Hg-Doppellinie getrennt beobachtbar ist.

Fehlerrechnung

- Statistische und unsystematische Fehler

Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der beobachteten Meßwinkel lässt sich durch wiederholte Messung ermitteln. Bestimmen Sie exemplarisch für 2 Meßwinkel (links, rechts) die ersten 4 Momente dieser Verteilung. Vergleichen Sie mit den Erwartungen für eine Gaußverteilung. Verifizieren Sie das erwartete Verhalten des Mittelwertes mit der Anzahl der Messungen (≈ 25 , mehr als 1 Beobachter). Für alle anderen Winkelmessungen reichen jeweils 4 Einzelbeobachtungen.

Der Mittelwert des Brechungsindex \bar{n} wird nach Gl. (2.79) berechnet, wobei die Mittelwerte $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\delta}_{min}$ benutzt werden. Da beide Messungen unabhängig voneinander sind, ergibt sich nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz für die Varianz oder das Fehlerquadrat des Brechungsindex

$$s_n^2 = \left(\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \right)^2 s_\varepsilon^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial \delta_{min}} \right)^2 s_{\delta_{min}}^2 . \quad (2.85)$$

$\partial n / \partial \varepsilon$ und $\partial n / \partial \delta_{min}$ sind die partiellen Ableitungen der Funktion $n(\varepsilon, \delta_{min})$, die sich aus Gl. (2.79) berechnen lassen

$$\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} = \frac{n}{2} \left(\cot \frac{\delta_{min} + \varepsilon}{2} - \cot \frac{\varepsilon}{2} \right) , \quad \frac{\partial n}{\partial \delta_{min}} = \frac{1}{2} \frac{\cos((\delta_{min} + \varepsilon)/2)}{\sin(\varepsilon/2)} .$$

Man schätzt die Größe der Fehler ab und überlege, ob beide Fehlerquellen gleichermaßen berücksichtigt werden müssen.

- Systematische Fehler

Objektive Fehler, die zu einer systematischen Verfälschung der Messung führen, können zum Beispiel auftreten durch mangelhafte Justierung des Goniometers, fehlerhafte Teilung der Winkelskala, Unebenheiten der Prismenflächen.

Man schätzt die Größenordnung dieser Effekte ab und beurteile ihren Einfluß auf die Bestimmung des Brechungsindex. Ist es gerechtfertigt, systematische Fehlerquellen im Vergleich zu den statistischen Fehlern zu vernachlässigen?

- Ausgleichsrechnung

Ein 2(3) Polfit nach der Sellmeier Formel ist technisch nicht besonders aufwendig, erfordert aber ein nichtlineares Anpassungsverfahren (nach Levenberg - Marquart z.B.) Aber die Sellmeier Multipol Formel lässt sich im hier abgedeckten Wellenlängenbereich vereinfachen (Cauchy 1825).

$$n(\lambda) = a \left(1 + \frac{b_1}{\lambda^2} + \frac{b_2}{\lambda^4} \right) \quad (2.86)$$

Ein Parabelfit für $n(y = 1/\lambda^2)$ kann nach Angaben der Glashersteller (s. Literatur) die Dispersionskurven auf dem 10^{-4} Genauigkeitsniveau interpolieren. Identifizieren Sie den Glastyp der Ihnen vorliegenden Prismen!

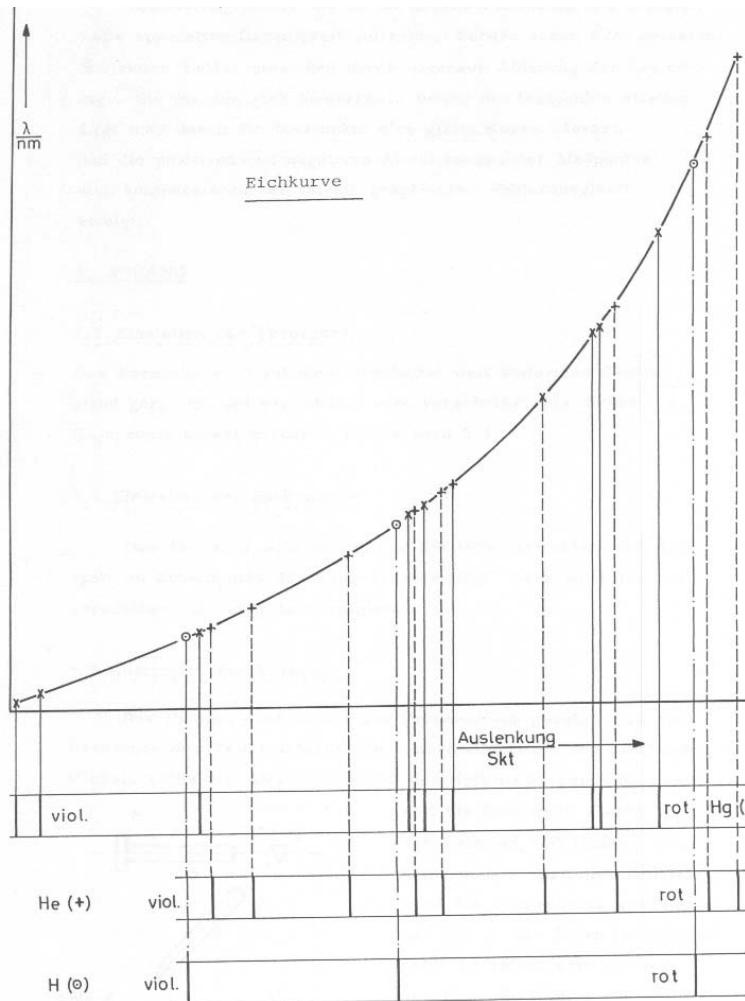


Abbildung 2.45: Eichkurve bzw. Dispersionskurve eines Prismas.

c) Bestimmung der Wellenlängen von Spektrallinien

Zunächst wird eine Spektrallampe, z. B. die Hg-Lampe, angeschlossen. Der Spalt wird vorsichtig geöffnet und die Lampe so vor dem Spalt angebracht, daß dieser voll ausgeleuchtet ist. Im Fernrohr müssen jetzt die Spaltbilder zusammen mit der Skala erscheinen. Der Spalt wird jetzt verkleinert, bis die einzelnen Linien nur noch als farbige Striche zu sehen sind, und die Winkelposition mit Nonius und Stellschraube abgelesen werden kann. Mit Hilfe des Fernrohrokulars werden die Linien auf optimale Schärfe eingestellt. Für die Eichung des Spektrometers werden die Linien von Quecksilber und Cadmium benutzt, deren Wellenlängen in der Tabelle aufgeführt sind. Zur leichteren Identifizierung ist neben der Farbe auch eine grobe Intensitätsklassifizierung angegeben (Vorsicht, Ihr Auge ist nicht linear in der Intensitätswahrnehmung). Als Eichkurve des Spektrometers wird eine Dispersionskurve nach 2.45 angelegt. Man beachte, daß die Winkel mit Hilfe des Nonius und Rändelschraube

auf besser als 1/10 Grad genau abgelesen werden können. Mit Hilfe der Eichkurve werden nun die Wellenlängen von Spektrallinien anderer Elemente bestimmt, z. B. die der gelben Natrium-Doppellinie sowie einiger Linien von Neon oder Zn.



Abbildung 2.46: Schlitzblende mit Adapter auf Kollimatorrohr.

Man überprüfe das Auflösungsvermögen eines Prismas gemäß Gl. (2.80) am Beispiel der gelben Hg-Doppellinie mit einem Abstand von 2.1 nm (HgCd-Lampe). Die Dispersion $dn/d\lambda$ erhält man aus der Eichkurve oder den angegebenen Daten der Prismen. Wie groß kann $\frac{dn}{d\lambda}$ technischer Gläser maximal werden? Man überlege sich, mit welchem der Prismen die erforderliche Auflösung erreicht werden kann und versuche dann, die beiden Linien getrennt zu beobachten. Durch Einschränkung des Strahlengangs am Prisma (Papierblenden) lässt sich die effektive Basisbreite des Prismas verringern und damit die Trennung der beiden Linien aufheben.

Beachten Sie bitte, dass das Auflösungsvermögen des Prismas durch die folgende Gleichung gegeben ist, falls das Prisma nicht voll ausgeleuchtet ist

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} 2a \frac{\sin\frac{\epsilon}{2}}{\cos\frac{\delta_{min}+\epsilon}{2}} \quad (2.87)$$

Dabei bezeichnet a die Lichtbündelbreite von dem das Prisma durchleuchtet wird. Ist das Prisma voll ausgeleuchtet ergibt sich hieraus die Gl. 2.80.

Um die Ausleuchtung des Prismas zu variieren, wird eine verschiebbare Schlitzblende verwendet, die durch eine aufsteckbare Hülse geschoben werden kann. Die Spaltbreite beginnt mit 0,5 mm und geht dann hoch in 0,5 mm-Schritten bis 6 mm. Der Adapter wird auf das vordere Ende des Kollimatorrohrs gesteckt (Abbildung 2.46).

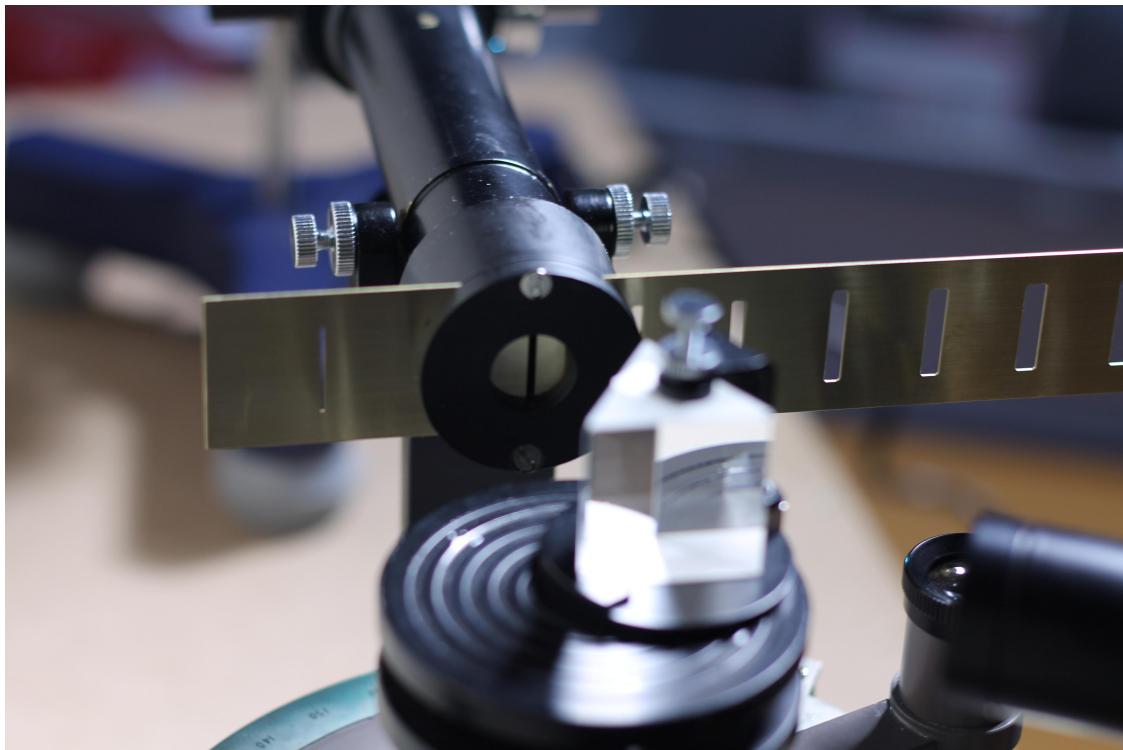


Abbildung 2.47: Adapter für Schlitzblendenschieber.

Anfangen wird mit einer großen Spaltbreite, wobei man die gelbe Doppellinie etwa auf die Okularmitte einstellt, aber nicht so, daß das Fadenkreuz die Linie teilt. Dabei wird, unter nachfolgender Variierung der Spaltbreite zu kleineren Werten hin, beobachtet, bei welcher Spaltbreite die Doppellinie nicht mehr auflösbar erscheint. Eine detaillierte Anordnung ist in Abbildung 2.47 gezeigt.

Fehlerrechnung

Subjektive Fehler entstehen durch ungenaue Ablesung der Linienlage, die mit Hilfe des Nominus und Rändelschraube auf besser als 1/10 Grad genau möglich ist. Sie können untersucht (Fehlerverteilung und ihre Momente) und reduziert werden durch mehrfache Wiederholung der Messungen.

Objektive Fehler, die z.B. durch falsche Justierung und mangelhafte apparative Genauigkeit zu systematischen Verfälschungen führen, sollten durch Vergleich mit den in den Eichlaboratorien gemessenen Werten abgeschätzt werden.

2.4.1.4 Literatur

Lehrbücher

siehe Geometrische Optik und Beugung und auch Gitter

Lehrmaterial Lichtausbreitung in transparenten Materialien

The FEYNMAN LECTURES on physics v.1, Feynman, R. P. et al.
Addison-Wesley, Reading, MA, 1963

OPTIQUE, Bruhat, G., 6me édition
Masson, Paris 1997, ISBN 2-2258-2652-8

OPTIK (Eine Einführung), Pedrotti, Frank L.
Prentice Hall, 1996, ISBN 3-8272-9510-6

OPTICAL PHYSICS, 3. ed., Lipson, Stephen G. Lipson, Henry Solomon, Tannhauser, David Stefan: Cambridge Univ. Press, 1998, ISBN 0-521-43047-X

Refraction by an Equilateral Prism, Olympus Co., Japan
<http://www.mic-d.com/java/prism/>

Dispersion de la lumière par un prisme
<http://www.up.univ-mrs.fr/~laugierj/CabriJava/0pjava60.html>

Prisme, réflexions multiples
<http://www.up.univ-mrs.fr/~laugierj/CabriJava/0pjava11.html>

Spektren, Spektraldaten und Spektrometer

SPECTROGRAPH MOUNTINGS, Dearden, St. UK

<http://www.astrosurf.com/dearden/Web%20Pages/Basement%20Page/Mountings/Mountings%20Page%201.htm>

siehe auch Gitterversuch

Glaseigenschaften

Sellmeier Gleichung, Falkner, B.

http://en.wikipedia.org/wiki/Sellmeier_equation

Katalog Optisches Glas, Schott, Mainz

http://www.schott.com/optics_devices/german/products/precision_optical_glass.html

SUMITA OPTICAL GLASS DATA BOOK

<http://www.sumita-opt.co.jp>

OPTICS GUIDE, Material Properties, Melles-Griot, Rochester, N.Y.

http://www.mellesgriot.com/products/optics/mp_1.htm

Ausgleichsrechnung

DATENANALYSE, Brandt, S. : (Mit statistischen Methoden und Computerprogrammen).

4., völlig neu bearb. u. erw. Aufl. ; 1999. Spektrum Verlag Heidelberg [u.a.]; ISBN 3-8274-0158-5

STATISTISCHE und NUMERISCHE METHODEN der DATENANALYSE, Blobel, V. und Lohrmann, E. ,
1998. B.G. Teubner Verlag Wiesbaden; ISBN 3-519-03243-0;

2.4.2 Gitterspektrometer

Aufgabe: Messung der Gitterkonstanten eines Strichgitters mit mehreren bekannten Spektrallinien und Bestimmung der Linienspektren höherer Ordnung für eine Wellenlänge

Vorkenntnisse: Huygenssches Prinzip, Beugung am Einzelspalt und am Gitter, Auflösungsvermögen eines Gitterspektrometers, Strahlengang im Gitterspektrometer, Linienspektren von Gasen

2.4.2.1 Grundlagen

a) Beugung am Gitter

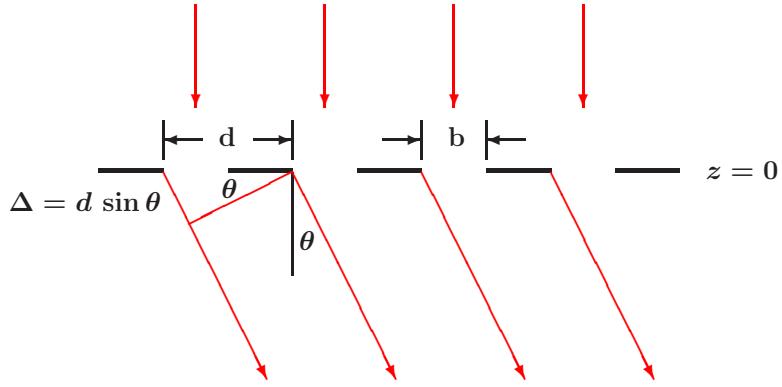


Abbildung 2.48: Beugungsgitter mit N parallelen Spalten, das senkrecht von einer ebenen Lichtwelle beleuchtet wird.

Die Vektornatur der elektromagnetischen Wellen ermöglicht die Beobachtung einer Vielzahl von Interferenz und Beugungsphänomenen. Da elektromagnetische Wellen über einen weiten Wellenlängenbereich einfach erzeugt und nachgewiesen werden können, haben die hier diskutierten Phänomene Eingang in zahlreiche technische Anwendungen gefunden (Richtfunk, Radar, GPS, optische Fibern, optische Datenspeicher, etc.). Die Beugung und Interferenz an einem Spalt oder Gitter führt zu einer räumlichen Trennung der Spektralkomponenten des einfallenden Wellenfeldes unter verschiedenen Winkeln. Die Geometrie der beobachteten Beugungsfigur ist durch die Geometrie der Sender und Absorber sowie die Wellenlänge und die Form der Wellenfront der einfallenden Strahlung eindeutig bestimmt. Es ist evident, daß auf diese Weise sehr genaue Messungen der Wellenlänge möglich werden (s.), wenn das von einem Gitter erzeugte Wellenfeld an vielen Stellen mit hoher Genauigkeit gemessen werden kann. Wegen der einfachen geometrischen Beziehungen bieten sich interne Konsistenztest der Messungen an, die es ermöglichen die systematischen Fehler klein zu halten. Vor allem aus diesem Grund ist der Gitterspektrograph dem Prismenspektrometer - speziell bei der Anwendung an schwachen Quellen (Astronomie) - weit überlegen. Bei sehr schmalen Spektralbereich kommen auf reinen Interferenzerscheinungen beruhende Vielstrahl-Interferometer für den Nachweis sehr kleiner Signale (Gravitationswellen z. B.) zu Einsatz. Obwohl sich heute mit aktiven mikrooptischen Bauelementen aus individuellen Quellen zu-

sammengesetzte Antennensysteme - analog zur Hochfrequenztechnik oder zur Wellenmaschine im Vorlesungsdemonstrationsversuch - aufbauen lassen, wird in diesem Versuch das Verfahren der Amplitudenteilung benutzt, um mit einem Beugungsgitter einige Hundert gleichphasige Sender zu realisieren.

Ein klassisches Beugungsgitter besteht aus einer Platte, in die mit einem Diamanten viele eng benachbarte parallele Furchen geritzt wurden. Metallische Oberflächen arbeiten als Reflexionsgitter, bei denen die ungeritzten Stellen die auftreffenden Wellen reflektieren. Wir betrachten in Abb. 2.48 ein Beugungsgitter aus Glas, bei dem das Licht an den ungeritzten Stellen hindurchtritt. Charakteristische Merkmale eines Gitters sind die *Spaltbreite* b eines einzelnen Spalts, die *Gitterkonstante* d als der Abstand zweier Spalte und die Gesamtzahl der Spalte bzw. Striche N . Wir beschränken uns auf die *Frauenhofersche* Beobachtungsweise, bei der man mit parallelen ebenen Wellenfronten arbeitet. Die Normalen auf diese Wellenfronten werden häufig als Lichtbündel bezeichnet. Ebene Wellenfronten werden mit einer Kollimatorlinse im „Kollimatorrohr“ erzeugt. Im Brennpunkt dieser Linse steht der Kollimatorspalt als in der Intensität regelbare Lichtquelle. Der Kollimatorspalt wird durch eine Kondensorlinse mit einer Gasentladungslampe beleuchtet. Die Beobachtung paralleler Lichtbündel erfolgt dann durch den umgekehrten Prozeß, d.h. durch Abbildung in die Brennebene einer Sammellinse. Fällt eine ebene Welle senkrecht auf das Gitter, so beobachtet man für Richtungen nahe zur Einfallsrichtung die ursprüngliche Intensität. Unter grösseren Winkeln jedoch beobachtet man die sich aus der Überlagerung der Quellen in den Spalten ergebende Intensitätsverteilung mit ihrer charakteristischen durch den Gangunterschied zwischen gleichphasig schwingenden Antennen bestimmten Struktur. Die elementare quantitative Beschreibung dieser „Beugungsstruktur“ fußt auf dem *Huygensschen Prinzip*. Jeder Punkt in der Ebene der Spalte, $z = 0$, ist Ausgangspunkt von elementaren Kugelwellen, die alle in gleicher Phase schwingen. Die Überlagerung sämtlicher Kugelwellen führt zu Interferenzen¹ und zur Bildung neuer Wellenfronten. Wählt man den Beobachtungswinkel θ so, daß der Gangunterschied Δ zwischen zwei in Beobachtungsrichtung aufeinanderfolgenden Wellenfronten gerade ein Vielfaches der Wellenlänge ist, $\Delta = n \lambda$, so besteht konstruktive Interferenz und man beobachtet Intensitätsmaxima. Man spricht von „Beugungen“ 1. Ordnung ($n = 1$), 2. Ordnung ($n = 2$), etc.

Die geometrische Beziehung zwischen Beugungswinkel und den Parametern des Gitters ergibt sich aus Abb. 2.48. Betrachtet man zwei Strahlenbündel aus benachbarten Spalten, die in der Gitterebene den Abstand d voneinander haben und unter dem Winkel θ gebeugt werden, so erhält man als Gangunterschied bzw. Wegdifferenz

$$\Delta = d \sin \theta . \quad (2.88)$$

Die Bedingung für gleichphasige Überlagerung, zu der alle Spalte gleichermaßen beitragen und das zu einem Intensitätsmaximum der Ordnung $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ führt, ergibt sich als

$$d \sin \theta = n \lambda . \quad (2.89)$$

¹ Zwei elektromagnetische Wellen können miteinander interferieren, wenn sie die gleiche Frequenz bzw. Wellenlänge haben und eine zeitlich konstante Phasenbeziehung zwischen ihnen besteht. Ein Gitter ist nichts anderes als eine regelmässige Anordnung von Antennen die phasenstarr angesteuert werden.

Damit Beugung unter im Labor beobachtbaren Winkeln auftritt, müssen die Wellenlänge des Lichts und die Gitterkonstante d von gleicher Größenordnung, und zwar $\lambda < d$, sein. Da $\sin \theta < 1$, ist die maximal mögliche Ordnung gegeben durch $n_{max} = d/\lambda$, das Verhältnis von Gitterkonstante zu Wellenlänge. Ferner folgt aus Gl. (2.89), daß für langwelliges Licht die Intensitätsmaxima unter größeren Winkeln auftreten als für kurzwelliges Licht. Zudem ist die Beugungsfigur symmetrisch zur Einfallsrichtung so wie auch das Gitter selbst. Bei vorgegebener Wellenlänge ist der Beugungswinkel und damit auch die Trennung naher Spektrallinien um so größer, je enger der Spaltabstand ist. Bei der Brechung durch ein Prisma hingegen wird die spektrale Zerlegung durch die unterschiedlichen optischen Wege im Prismenkörper bewirkt. Dabei besorgt die Atomphysik des Prismenmaterials letztendlich die Dispersion.

b) Intensitätsverteilung des gebeugten Lichts

Die Intensität des Wellenfeldes hinter dem Gitter $I(\theta)$ wird durch zwei sich überlagernde Phänomene bestimmt: Die Interferenz zwischen den Lichbündeln der N Gitterspalte, die als kohärent emittierende Sender aufgefaßt werden können, und die Beugung an den einzelnen Spaltkanten mit dem spalttypischen Intensitätsprofil (s.a. Versuch 1.4). Für die Intensitätsverteilung eines Beugungsgitters erhält man

$$\frac{I(\theta)}{I_0} = H_N(\eta) \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 = \left(\frac{\sin N \eta}{\sin \eta} \right)^2 \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 \quad (2.90)$$

mit den Abkürzungen

$$\eta = \pi(d/\lambda) \sin \theta = (d/b) \xi, \quad \xi = \pi(b/\lambda) \sin \theta. \quad (2.91)$$

Die *Interferenzfunktion* $H_N(\eta)$ bestimmt im wesentlichen die Helligkeitsverteilung. Die Hauptmaxima, deren Lage durch Gl. (2.89) gegeben ist, werden mit wachsender Spaltanzahl N immer schmäler und steiler. Die Intensität ist durch den zweiten Faktor in Gl. (2.90) gegeben. Er beschreibt die Beugungerscheinung am Einzelspalt und bewirkt eine ‘Modulation’ der Hauptmaxima (mit Nullstellen bei $\sin \theta = n\lambda/b$). Zwischen den Hauptmaxima liegen $N - 2$ kleine Nebenmaxima, deren Intensität jedoch mit I_0/N^2 abnimmt. Für genügend große N sind diese Nebenmaxima daher vernachlässigbar.

c) Spektrales Auflösungsvermögen

Zur Trennung zweier Spektrallinien der Wellenlängen λ und $\lambda + \Delta\lambda$ nutzt man die Winkeldispersion des Gitters aus. Aus Gl. (2.89) erhält man nach Differentiation

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{n}{d \cos \theta}. \quad (2.92)$$

Nach dem *Rayleigh-Kriterium* können zwei Linien gerade noch getrennt werden, wenn das Beugungsmaximum der ersten Linie mit dem ersten Beugungsminimum der zweiten Linie zusammenfällt.² Gemäß Gl. (2.90) entspricht dies für die Interferenzstreifen erster Ordnung der Bedingung $\Delta\eta = \pi/N$. Einsetzen in Gl. (2.91) ergibt

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{\pi d \cos \theta} \Delta\eta = \frac{\lambda}{d N \cos \theta} \quad (2.93)$$

² Bei gleicher Intensität der beiden Spektrallinien ist die beobachtete Einsattelung $1 - 8/\pi^2 \approx 19\%$.

und aus dem Vergleich mit Gl. (2.92) erhält man das Auflösungsvermögen

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = n N . \quad (2.94)$$

Das spektrale Auflösungsvermögen eines Gitterspektrometers ist gleich dem Produkt aus der Interferenzordnung n und der Anzahl N der beleuchteten Gitterspalte. Es ist unabhängig von der Gitterkonstanten.

2.4.2.2 Versuchsanordnung

Für die Messungen wird ein Gitterspektrometer verwendet (Schema in Abb. 2.49). Durch die Lichtquelle L wird ein verstellbarer Spalt Sp am Kollimatorrohr beleuchtet. Dabei wird eine Kondensorlinse zwischengeschaltet, um den Lichtstrom der Lampe besser auszunutzen. Die Kollimatorlinse K erzeugt aus dem vom Spalt kommenden Licht ein paralleles Bündel, das senkrecht auf das Gitter G fallen soll, das in der Mitte des Spektrometerisches aufgestellt wird. Das gebeugte Wellenfeld wird durch ein um die Spektrometerachse schwenkbares Fernrohr F beobachtet. Die Objektivlinse Ob erzeugt ein Zwischenbild an einer Stelle, in der ein Fadenkreuz eingebaut ist. Fadenkreuz und Spaltbild werden durch das Okular Ok betrachtet. Die Stellung des Fernrohres wird an einer Winkelteilung, die am Umfang des Spektrometers angebracht ist, mit Hilfe des Nonius auf 0,1 Grad genau abgelesen. Durch Markieren der Winkelstellung der Stellschraube kann die Winkelablesung weiter verfeinert werden

Als Lichtquellen werden Gasentladungs(Metalldampf)lampen verwendet. Im Glaskolben brennt zwischen zwei Elektroden ein Lichtbogen in einer dünnen Dampfatmosphäre. Emissionslinien von zwei typischen Lampen sind in der Tabelle 2.4 für die Elemente Na und Hg angegeben. Natriumdampflampen werden in grossem Umfang zur Strassenbeleuchtung eingesetzt. Sie sind praktisch monochromatisch und haben daher einen hohen Wirkungsgrad. Die Quecksilberdampflampe emittiert mehrere Linien, die über das ganze Spektrum verteilt sind. Im täglichen Einsatz sind die Wände von Hg Lampen fast immer mit einem sekundären Phosphor umgeben, um ein sonnenähnliches Spektrum zu erhalten. Zur Entstehung von Spektrallinien und ihren Eigenschaften wird auf die Anfänger Vorlesung und die im Anhang angeführte Literatur verwiesen. Eine Übersicht der häufigsten Spektren ist auf den im Literaturanhang zitierten Web-Seiten zu finden. Die Wirkungsweise von Gasentladungslampen sollte anhand der im Literaturanhang aufgeführten Quellen studiert werden.

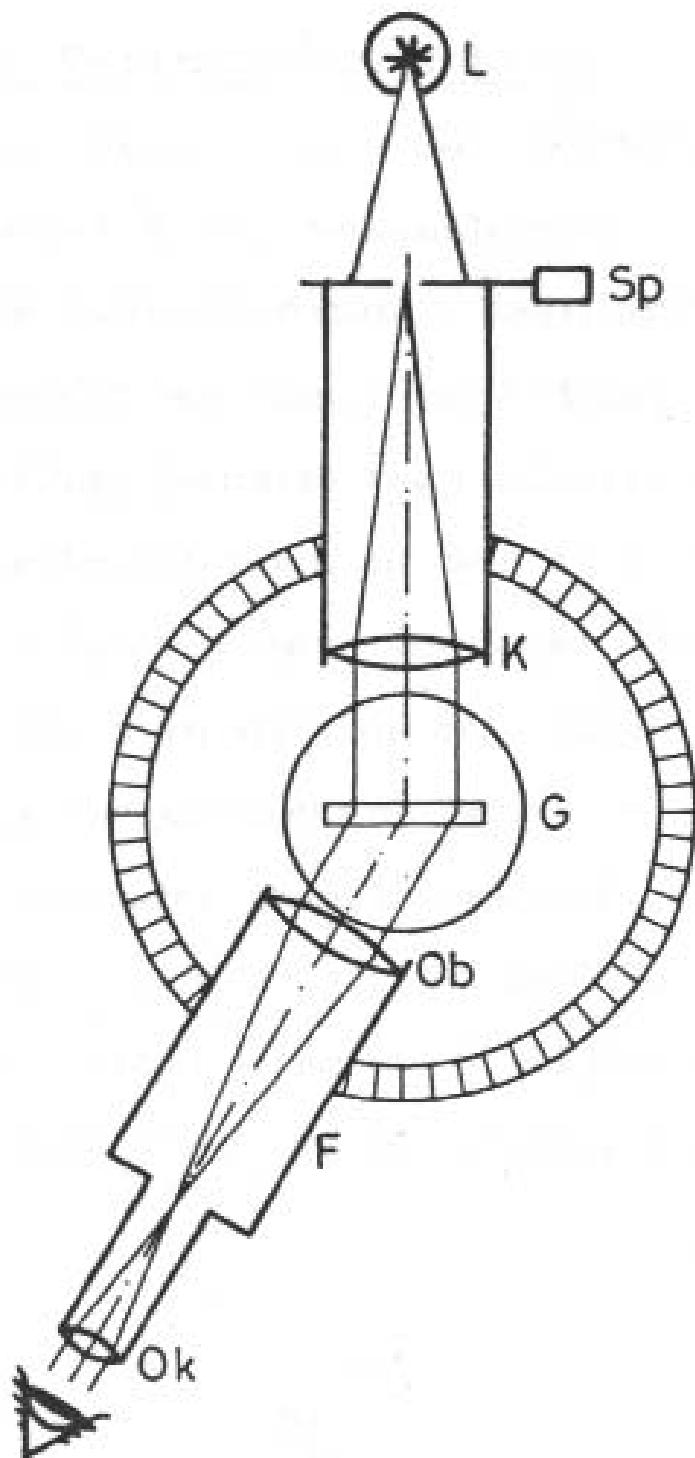


Abbildung 2.49: Schematischer Aufbau eines Gitterspektrometers

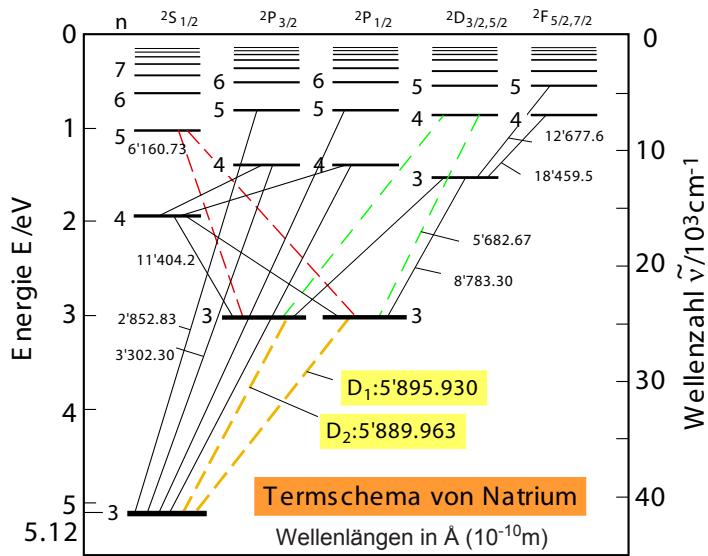


Abbildung 2.50: Energie Niveaus und Übergänge im neutralen Natrium

2.4.2.3 Versuchsdurchführung

Die Beziehung Gl. (2.89) kann dazu benutzt werden, durch Messung des Ablenkwinkels θ entweder die Wellenlänge λ bei bekannter Gitterkonstanten d , oder d bei bekanntem λ zu bestimmen. Hier soll zunächst die Gitterkonstante bestimmt werden. Sie haben 2 Gitter zur Verfügung, die sich in der Gitterkonstanten um eine Größenordnung unterscheiden. Gitter mit grober Teilung d.h. großer Gitterkonstanten erlauben die Beobachtung mehrerer Ordnungen. Hierzu verwendet man zweckmäßigerweise einfarbiges Licht wie das von Natrium. Bei Gittern mit kleiner Gitterkonstanten bzw. feiner Furchenteilung benutzt man mehrere Linien eines Spektrums in niedrigen (hier ± 3) Ordnungen. Es ist durchaus möglich, daß sich die Linien verschiedener Ordnung überschneiden. Bei visueller Beobachtung kann man das an der Farbe leicht erkennen. Die Zuordnung der Wellenlängen zu den farbigen Spektrallinien erfolgt mit Hilfe der Tabelle 2.4.

Die Einrichtung des Spektrometers geschieht auf folgende Weise (Na, Hg hat sehr starke UV Komponenten): Der Spalt wird ca. 0.5mm weit aufgemacht. Die Lampe wird so ausgerichtet, daß sie durch den Kondensor den Spalt voll und gleichmäßig ausleuchtet. Das Fadenkreuz ist fest im Okular eingesetzt und erscheint immer scharf. Das auf Unendlich eingetellte Fernrohr wird jetzt ohne Gitter auf den Kollimator gerichtet. Durch Verschieben des Okulars kann der Spalt scharf eingestellt werden. Die Breite des Spalts wird soweit verringert, daß der Schnittpunkt des Fadenkreuzes noch gut erkennbar ist. Montieren Sie das in einem Glasdiarrahmen gefasste Gitter in der Halterung. Achten Sie darauf, daß die Gitterebene die Drehachse des Fernrohrs enthält. Mit den Rändelschrauben des Gittertisches (unter der Teilkreisplatte) kann man gegebenenfalls die Neigung verändern, so daß die vom Gitter erzeugten Spaltbilder links wie rechts des einfallenden Strahles auf gleicher Höhe beobachtet werden können, wenn

Element	λ [nm]	Farbe	Intensität
Natrium (Na I neutral)	616,08	gelbrot	3 (mittel)
	615,42	gelbrot	2 (mittel)
	589,59	gelb	500 (mittel) D_1
	589,00	gelb	1000 (stark) D_2
	568,82	gelbgrün	7 (mittel)
	568,27	gelbgrün	4 (mittel)
Quecksilber (Hg I neutral)	579,07	gelb	22 (mittel)
	576,96	gelb	50 (mittel)
	546,07	grün	244 (stark)
	497,04	blau-grün	1 (schwach)
	491,61	blau-grün	18 (mittel)
	435,83	blau	1000 (stark)
	434,75	blau	89 (mittel)
	433,92	blau	56 (mittel)
	407,78	violett	33 (mittel)
	404,65	violett	400 (stark)
	365,02	violett	620 (stark)
	253,65	ultraviolett	3330 (gefährlich stark)

Tabelle 2.4: Spektrallinien von Natrium (s.a. Termschema) und Quecksilber

man das Fernrohr schwenkt. Bestimmen Sie mit einem Stück Millimeter Papier die Grösse des ausgeleuchteten Bereiches des Gitter (das Profil des einfallenden Strahlenbündels). Richten Sie die Teilkreisplatte (Tisch mit der Winkelteilung) so aus, daß Sie leicht die Rechts-Links Symmetrie der Ablenkung für die beobachteten Spektrallinien verifizieren können. Kleine Unterschiede lassen sich leicht korrigieren, wenn man die Ausgleichsgerade für die ohnedies aufgenommene $\sin\theta$ vs $n \cdot \lambda$ Daten benutzt. Die Einstellschraube am Fernrohr erlaubt die 1/10 Grad Einteilung des Nonius weiter zu verbessern.

Die Messungen werden mehrfach wiederholt, rechts und links vom Maximum nullter Ordnung. Man protokolliere die Ordnungszahl n , die Wellenlänge λ und den Beugungswinkel θ . Die Gitterkonstante d wird aus dem Inversen der Steigung der ausgeglichenen Messwerte in einem $\sin\theta$ vs $n \cdot \lambda$ Graphen bestimmt. Eine Wiederholung der Messungen ist bei sorgfältiger Einstellung des Aufbaus nur dann sinnvoll, wenn Sie Winkelauflösungen von kleiner als 1/10 Grad (mit Hilfe der Einstellschraube) erreichen. Die optische Trennung im Fernrohr ist bei vernünftigen Breiten des Eintrittsspalt mehr als eine Grössenordnung besser. Mithin wird man am Nonius immer dieselbe Einstellung ablesen. Es ist angebracht die Erkundung der Winkel Messwertstreuung auf 3(5) Winkelwerte zu beschränken und nur dort die Messungen 10 - 20 mal zu wiederholen (Beobachter wechseln!).

a) Aufgaben

1. Messung der Gitterkonstanten von zwei Gittern. Benutzen Sie für das Gitter mit der grossen/kleinen Gitterkonstante die Na/Hg Lampe.. Man nutze so viele Ordnungen aus, wie zuverlässig beobachtbar (für das grobe/feine Gitter ca. 20/mindestens2). Man trage für alle beobachtbaren Spektrallinien den Sinus des Ablenkwinkels $\sin \theta$ gegen den Gangunterschied $n \cdot \lambda$, graphisch auf für positive wie negative Ablenkinkel auf. Aus dem Inversen der Steigung der Ausgleichsgeraden durch die Messpunkte bestimme man die Gitterkonstante d . Der Achsenabschnitt auf der Ordinate des Ausgleichsgeraden ergibt die Abweichung vom senkrechten Einfall auf das Gitter (und sollte wie d unabhängig von der verwendeten Lampe sein) Für 2 Spektrallinien untersuche man die höheren Ordnungen und überprüfe die Gültigkeit der Formel (2.89)..
2. Messen Sie für das mit Na geeichte grobe Gitter die Hg Wellenlängen bei einer sinnvollen Ordnung
3. Messen Sie für das mit Hg geeichte feine Gitter die Na D Linienaufspaltung in 2. Ordnung
4. Unter geeigneter Wahl des Gitters überprüfe man das Auflösungsvermögen aus Gl. (2.94). Man überlege, welche Auflösung erforderlich ist, um die beiden Na D-Linien zu trennen. Durch Abdeckung mit einer Blende vor dem Gitter kann die beleuchtete Fläche des Gitters stark verkleinert werden und somit die Auflösung verschlechtert werden. Der Einsatz eines unkalibrierten biologischen Lichtdetektors mit logarithmischer Kennlinie erlaubt nur qualitative Beobachtungen. Man versuche, die beiden Na-Linien getrennt wahrzunehmen und vergleiche das Ergebnis mit der Winkeldispersion aus Gl. (2.92). Man verringere die Anzahl der beleuchteten Gitterspalte so lange, bis die Na-Linien nicht mehr getrennt werden können (mehrere Beobachter!). Man wiederhole diese Beobachtung mit geeigneten Hg-Linien.

Fehlerrechnung Dieser Versuch stützt sich im wesentlichen auf die präzise Mechanik des Gitters und des Goniometers. Intensitäts bedingte Fehler (Unterscheidbarkeit eng benachbarter Spektrallinien) werden wegen der Verwendung von biologischen Lichtdetektoren hier nicht diskutiert. Ein einfacher Geometriefehler, wie er auftritt, wenn das Gitter nicht senkrecht zum einfallenden Lichtstrahl aufgestellt worden ist, lässt sich durch Messungen des Ablenkwinkels mit bekannten Wellenlängen (Gangunterschieden) korrigieren. Gitterfehler (periodische Modulation der Gitterkonstanten, ungleichmäßige Transmission, etc) können nur mit quantitativen Intensitätsmessungen aufgefunden werden. Es empfiehlt sich in jedem Fall das Gitter von beiden Seiten und auch kopfstehend auszumessen. Dies kann Gangunterschiede verursacht durch die Dia-Rahmen-Fassung des Gitters aufzeigen

Unter der Annahme, daß die Richtung der nullten Ordnung mit beliebig kleinem Fehler festgelegt werden können, ermittelt man aus jeder einzelnen Spektrallinie die Gitterkonstante aus Gl. (2.89) zu

$$d = \frac{n \lambda}{\sin \theta} .$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung der Gitterkonstante ist dann ausschließlich durch die der Winkelmessungen θ bestimmt, da die Wellenlängendaten aus den Eichämtern (NIST, PTB) mehr als 3 Größenordnungen genauer sind, mithin als praktisch fehlerfrei angenommen werden können. Mit Mehrfachmessungen des Winkels wird infolgedessen diese Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung ermittelt und deren Parameter (Mittelwert, Standardabweichung, höhere Momente) bestimmt.

Alternativ bietet es sich an eine Ausgleichsgerade an die Messwerte in der $\sin\theta - n \cdot \lambda$ Ebene anzupassen. Da dabei der gesamte Datensatz an Beobachtungswerten für ein Gitter verwendet werden kann, ist es leichter grob herausfallende Messwerte auszusortieren. Die Gitterkonstante ist dann der Kehrwert der Steigung dieser Ausgleichsgeraden über die akzeptierten Messpunkte. Als Gewichte werden die Kehrwerte der an eingen Winkeln beobachteten Varianzen der Winkelmessungen verwendet. Darüberhinaus kann man sich davon überzeugen, das ein Wechsel der Lampe z.B. keinen Einfluss auf die Nulllage (Achsenabschnitt) hat.

2.4.2.4 Literatur

Lehrbücher

siehe Geometrische Optik und Beugung

Lehrmaterial

HANDBUCH der PHYSIK, herausgegeben von Flügge, S., Band XXIV,
Grundlagen der Optik, Françon, M. , Interférences, diffraction et polarisation,
Springer Verlag, Berlin 1956

Physics 15c, Wave Phenomena, Morii, Masahiro

<http://huhepl.harvard.edu/~masahiro/phys15c/2002/lectures/>

The Optics of Spectroscopy

http://www.jobynivon.co.uk/jy/oos/oos_ch1.htm

Light Diffraction Through a Periodic Grating, Olympus Co., Japan

<http://www.olympusmicro.com/primer/java/imageformation/gratingdiffraction/index.html>

Airy Patterns and the Rayleigh Criterion, Olympus Co., Japan

<http://www.olympusmicro.com/primer/java/imageformation/rayleighdisks/index.html>

Single and Multiple Slit Diffraction

<http://hyperphysics.phys-astr.gsu.edu/hbase/phyopt/sinint.html#c1>

Grating properties and defects, Spectra-Physics GmbH, Darmstadt

<http://www.gratinglab.com/library/handbook/toc.asp>

Spektren und Spektraldaten

ATOMIC SPECTRA and ATOMIC STRUCTURE, Herzberg, G. ,
Dover Publications, ISBN 0-486-60115

EINFÜHRUNG in die ATOMPHYSIK, Finkelnburg, W. ,
Springer Verlag, Berlin 1967, ISBN 3-540-037

Handbook of Basic Atomic Spectroscopic Data, Samsonetti, J.E. and Martin,
W.C. ,

National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD 20899

<http://physics.nist.gov.PhysRefData/Handbook/intro.htm>

http://physics.nist.gov/cgi-bin/AtData/main_asd

Colour Spectra of Elements undergoing electrical discharge excitation

<http://astro.u-strasbg.fr/~koppen/discharge/>

Lampen

Gasentladungslampen, Falkner, B.

<http://www.uni-muenster.de/Physik/TD/Techlex/Techlex/EnergieUWS/Gasentllam/Gasentlampa.htm>

Gasentladungslampen (Neon-, Leuchtstoff-, Metalldampflampen)

<http://www.elektronikinfo.de/strom/gasentladungslampen.htm#Seitenanfang>

Physics of Light and Color, Sources of Visible Light, Olympus Co., Japan

<http://www.mic-d.com/curriculum/lightandcolor/lightsources.html>

Kapitel 3

Optik II - Interferometrie

Versuchsziele/Versuchsaufgaben:

- Kalibrierung einer Mikrometerschraube
- Wellenlängenbestimmung von Laserlicht
- Brechungsindex von Luft als Funktion des Druckes
- Brechungsindex von CO₂ bei Umgebungsdruck

Physikalische Voraussetzungen / Grundlagen:

Elektromagnetische Wellen, Huygensches Prinzip, Interferenz, Superposition, zeitliche- und räumliche Kohärenzbedingungen, Interferenz gleicher Neigung, Interferenz an planparallelen Platten.

Sicherheit:

Beachten Sie unbedingt die Sicherheitsvorschriften beim Arbeiten mit den Lasern. Die Hinweise können Sie im Anhang dieser Versuchsanleitung finden.

Hinweis:

Diese Anleitung basiert auf der Bachelorarbeit von Frau Regine Ockelmann mit dem Thema: *Untersuchung und Inbetriebnahme eines Michelson-Interferometers für das physikalische Grundpraktikum der RWTH Aachen* aus dem Jahr 2009.

Teile des Textes und zahlreiche Fotos sind dieser Arbeit entnommen.

Literatur:

- 1 R. Behrends, C. Schulz and M. Brai, *Handbook: Laser Physics III*, PHYWE Systeme GmbH und Co. KG, D-37070 Göttingen
- 2 R. Behrends, C. Schulz and M. Brai, *Handbook: Laser Physics III*, PHYWE Systeme GmbH und Co. KG, D-37070 Göttingen, Graphiken abgeändert
- 3 J. D'Ans, E. Lax, C. Synowietz and K. Schäfer, *Taschenbuch für Chemiker und Physiker*, Springer Verlag Berlin, 1949.
- 4 W. Demtröder, *Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle und Festkörper*, Springer Verlag, 2005.
- 5 W. Demtröder, *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme*, Springer Verlag, 2006.
- 6 W. Demtröder, *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*, Springer Verlag, 2006.
- 7 EN DIN. 60825-1 (VDE 0837 Teil 1) *Sicherheit von Lasereinrichtungen*, VDE-Verlag, Berlin, 1994.
- 8 C. Gerthsen, *Gerthsen Physik*, Springer Verlag, 2003.
- 9 H. Haferkorn, *Optik: physikalisch-technische Grundlagen und Anwendungen*, Weinheim, Wiley-VCH, 2003.
- 10 E. Hecht, *3. Auflage: Optik*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2001.
- 11 J.P. Pérez, *Optik*, Spektrum Akademischer Verlag, 1996.
- 12 J.W. Rohlf, *Modern Physics from A to Z*, Wiley, New York, 1994.
- 13 P.A. Tipler and R.A. Llewellyn, *Moderne Physik*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2003.

3.1 Grundlagen

Das Prinzip eines Interferometers besteht darin, einen Wellenzug mit sich selbst interferieren zu lassen. Dies kann durch Amplituden- oder Wellenfrontenaufspaltung geschehen. Das Michelson-Interferometer gehört zu den Interferometern mit Amplitudenaufspaltung. [9, 11] Interferenzmuster können nur entstehen, wenn die zeitliche sowie räumliche Kohärenzbedingung erfüllt ist, das bedeutet, die elektromagnetischen Wellen der jeweiligen Lichtquellen weisen eine zeitlich und räumlich feste Phasenbeziehung zueinander auf.

Durch die hohe Frequenz von sichtbaren Licht ist dies für diverse Lichtquellen kaum realisierbar, sodass man, um dieses Problem zu umgehen, im Interferometer die Strahlen einer einzigen Lichtquelle räumlich trennt. Man teilt dazu einen Lichtstrahl mit einem Strahlteiler in zwei oder auch mehrere Teilstrahlen mit reduzierten Amplituden auf. Das Prinzip wird Amplitudenaufspaltung genannt.

Die Teilstrahlen werden auf getrennte Bahnen geleitet und können daher verschiedene optische Wege durchlaufen, bevor sie mithilfe von Spiegeln oder Linsen wieder zusammengeführt werden. An diesem Punkt überlagern sich die Strahlen nach dem Superpositionsprinzip. Die daraus resultierenden Interferenzmuster enthalten Informationen über Phasen und Intensitäten der Teilstrahlen, vgl. [10]

Das Charakteristische am Michelson-Interferometer ist ein teildurchlässiger Spiegel (*ST*), der sowohl als Strahlteiler fungiert, aber auch als das strahlvereinigende Element, siehe Abb. 3.1 a). Indem der einfallende Strahl im 45^0 Winkel auf den teildurchlässigen Spiegel trifft, wird er mittels Transmission und Reflexion in zwei Teilstrahlen S_1, S_2 aufgespalten und nach der Reflexion an den Spiegeln M_3, M_4 durch selbigen Effekt wieder zusammengeführt. [11]

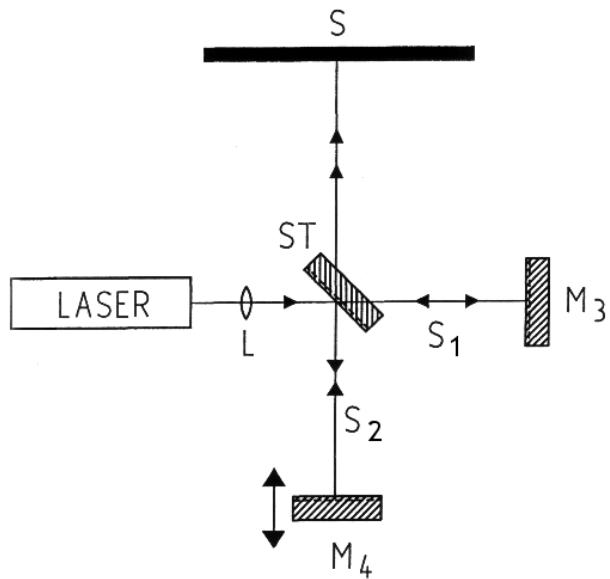


Abbildung 3.1: Schematische Skizze der grundlegenden Funktionsweise eines Michelson-Interferometers [1]

Interferenzerscheinungen treten nur auf, wenn die Wegdifferenz der Teilstrahlen kleiner ist

als die Kohärenzwellenlänge der Lichtquelle, ansonsten gehören die Teilwellen quasi unterschiedlichen Wellengruppen an und verlieren ihre eindeutige Phasenbeziehung zueinander. Daher wird versucht, möglichst große Kohärenzwellenlängen zu realisieren indem man beispielsweise Laser als Lichtquelle verwendet. Meistens werden zusätzlich monochromatische Lichtquellen benutzt, da diese zeitlich vollständig kohärent sind. Licht mit einem breiteren Frequenzspektrum ist partiell bis gar nicht kohärent, sodass Interferenz möglich, tendenziell aber schwieriger zu erzeugen ist. [10, 6]

Der aus der Lichtquelle stammende Strahl wird (in einem Winkel von 45° zum Einfallslot) auf den Strahlteiler (*ST*) gelenkt. Der Strahlteiler besteht aus einer dünnen planparallelen Glasscheibe, auf deren Vorderseite ein feiner Metallfilm aufgedampft ist. Im Idealfall wird durch den Film die Intensität des einfallenden Strahls zur Hälfte durchgelassen und zur Hälfte reflektiert. Durch den 45° Winkel zwischen Lot und einfallendem Strahl verlaufen die Ausbreitungsrichtungen der resultierenden Strahlbündel S_1 und S_2 senkrecht zueinander. Die Teilstrahlen S_1 und S_2 werden an den Spiegeln M_3 und M_4 reflektiert, sodass sie wieder in einem 45° Winkel zum Lot auf den Strahlteiler auftreffen, jedoch von dessen Rückseite. Die Teilstrahlen werden dort erneut zur Hälfte reflektiert und transmittiert. Der reflektierte Anteil von S_1 überlagert sich mit dem transmittierten Anteil von S_2 und beide gelangen zur Beobachtungsebene auf den Schirm S .

Die beiden anderen Anteile der Strahlen S_1 und S_2 überlagern sich ebenso, verlaufen jedoch zurück in Richtung der Lichtquelle und sind deswegen nicht verwendbar. [1]

Unterscheiden sich nun die optischen Wege d_1 auf der Strecke s_1 und d_2 auf der Strecke s_2 , so verschieben sich die Phasen der Teilstrahlen gegeneinander. Der optische Weg d_i ist das Produkt aus der durchlaufenen Strecke s_i und dem zugehörigen Brechungsindex n_i , $d_i = s_i \cdot n_i$.

3.1.1 Herleitung der Interferenzbedingung für Maxima

Im Folgenden sollen die sich in der Beobachtungsebene zeigenden Intensitäten in Abhängigkeit der zurückgelegten optischen Wege bestimmt werden. Die Herleitung wird für den Fall einer monochromatischen Lichtquelle durchgeführt.

Als Vereinfachung nähert man die Teilstrahlen als ebene Welle $A_i(t) = a_i \cdot \sin(\omega_i t - \phi_i(x))$ an, mit gleichen Kreisfrequenzen $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, da beide aus der selben monochromatischen Lichtquelle stammen. Die Ortsabhängigkeit der Welle steckt in $\phi_i(x)$. Wir betrachten Interferenzen an einem festen Ort x (Schirm). Wenn man die Teilstrahlen nach dem Superpositionsprinzip überlagert, ergibt sich als resultierende Welle:

$$A(t) = a_1 \cdot \sin(\omega_1 t - \phi_1) + a_2 \cdot \sin(\omega_2 t - \phi_2)$$

Diese Gleichung kann man wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} A(t) &= \operatorname{Im} [a_1 \cdot e^{i(\omega t - \phi_1)} + a_2 \cdot e^{i(\omega t - \phi_2)}] = \operatorname{Im} \left[e^{i\omega t} \cdot \underbrace{(a_1 \cdot e^{-i\phi_1} + a_2 \cdot e^{-i\phi_2})}_{z=|z| \cdot e^{i\varphi}} \right] \\ &= \operatorname{Im} [|z| \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}] = |z| \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

mit der resultierenden Amplitude: $|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cdot \cos(\delta)}$, $\delta = \phi_1 - \phi_2$ und der Phasenverschiebung:

$$\tan(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = -\frac{a_1 \cdot \sin(\phi_1) + a_2 \cdot \sin(\phi_2)}{a_1 \cdot \cos(\phi_1) + a_2 \cdot \cos(\phi_2)}$$

Im Idealfall spaltet der Strahlteiler die Teilstrahlen zu gleichen Anteilen auf, sodass beide dieselbe Amplitude $a_1 = a_2 = a$ besitzen. Dadurch lässt sich das Ergebnis noch weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} |z| &= a \cdot \sqrt{2 + 2 \cdot \cos(\delta)} = 2 \cdot a \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos(\delta)}{2}} = 2 \cdot a \cdot \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \\ \tan(\varphi) &= -\frac{\sin(\phi_1) + \sin(\phi_2)}{\cos(\phi_1) + \cos(\phi_2)} = -\tan\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \\ \text{, da } \sin(\phi_1) + \sin(\phi_2) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \\ \cos(\phi_1) + \cos(\phi_2) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die resultierende, überlagerte Welle mit

$$\underbrace{A(t) = 2 \cdot a \cdot \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)}_{\text{Amplitude } A_0} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \quad (3.1)$$

Die Größe, die man mit einem optischen Detektor (zB. dem Auge) messen kann, ist die zeitlich gemittelte Intensität $\langle I \rangle$. Für elektromagnetische, ebene Wellen gilt: $\langle I \rangle = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \epsilon_0 \cdot A_0^2$. Dies bedeutet, dass sich die zeitliche Abhängigkeit herausmittelt, sodass die mittlere Intensität proportional zum Quadrat der Amplitude der elektromagnetischen Welle ist: $\langle I \rangle \propto A_0^2$. [6]

Mit Formel 3.1 ergibt sich:

$$\langle I \rangle \propto A_0^2 = 4 \cdot a^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

Die transmittierte Intensität I ist folglich nur abhängig von der Phasendifferenz zwischen den beiden Teilstrahlen $\delta = \phi_1 - \phi_2$. Es ergeben sich Intensitätsmaxima für:

$$\delta = 2\pi \cdot m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

und Intensitätsminima für:

$$\delta = \pi \cdot (2m + 1), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Da der einfallende Strahl je nach Phasendifferenz durchgelassen oder blockiert wird, wird durch das Interferometer ein wellenlängenabhängiger Spiegel realisiert. [6]

In der Praxis lässt sich mit den verwendeten Lichtquellen üblicherweise kein streng paralleles Lichtbündel realisieren sondern es ist leicht divergent. Je nach Qualität der Lichtquelle haben dessen Teilstrahlen einen maximalen Öffnungswinkel Θ_{max} gegen die Ausbreitungsrichtung. Es entstehen dadurch zusätzliche Wegunterschiede abhängig vom Winkel Θ und diese Winkelabhängigkeit resultiert in der Ausbildung von Interferenzringen.

Dies wird an folgender Skizze 3.2 deutlich:

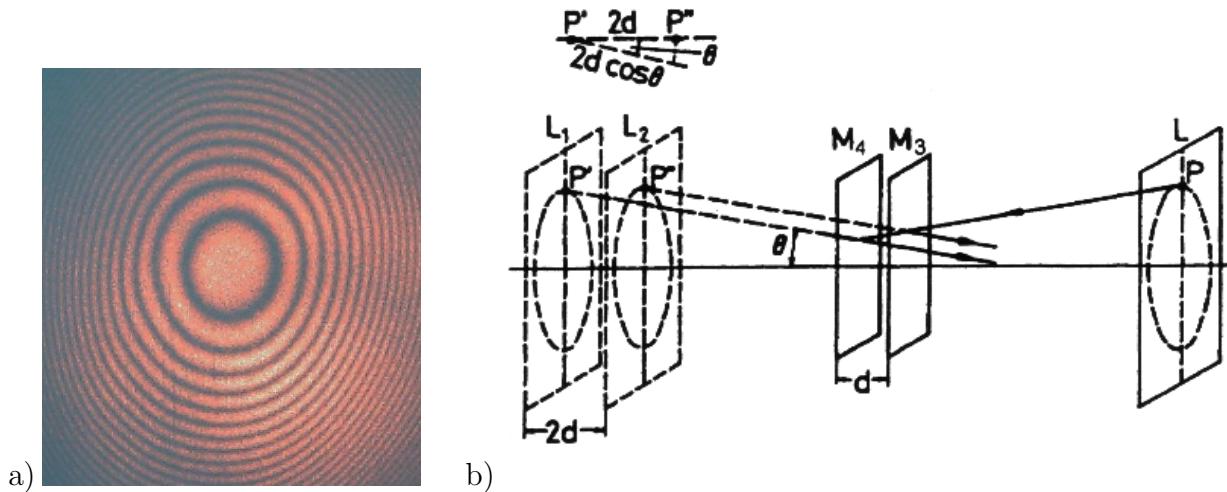


Abbildung 3.2: Entstehung der Interferenzringe beim Michelson-Interferometer. a) Foto der Interferenzringe auf dem Schirm, b) Skizze zur Entstehung von Interferenzringen [1]

Auf der rechten Seite befindet sich die Lichtquelle L . In einer gewissen Entfernung sind die beiden Spiegel M_3 und M_4 . Zur Vereinfachung werden die Strecken zwischen Spiegel und Quelle als eine gerade Verbindungslinie dargestellt und die beiden Spiegel auf dieselbe imaginäre Strecke gesetzt. Entscheidend sind nur die Abstände zwischen Quelle und M_3 sowie Quelle und M_4 und dass die beiden Teilstrahlen in Realität räumlich getrennt, also unterscheidbar sind.

Auf dieser Strecke weisen die Spiegel eine optische Wegdifferenz d zueinander auf. Man sollte sich die Definition für d vor Augen führen. Da die Spiegel einen unterschiedlichen optischen Abstand zur Quelle aufweisen, werden deren virtuelle Bilder L_1 und L_2 auch in unterschiedlichen optischen Abständen zu den jeweiligen Spiegeln M_4 und M_3 abgebildet. Daraus ergibt sich, dass die beiden virtuellen Bilder L_1 und L_2 eine optische Wegdifferenz von $2d$ zueinander besitzen. Ein beliebiger Punkt P aus der Lichtquelle wird unter einem gewissen Winkel Θ auf P' und P'' abgebildet. Dies ist möglich da eine divergente Lichtquelle verwendet wird, die in einem Kegel mit Öffnungswinkel Θ_{max} abstrahlt.

Nähert man die zwei Teilstrahlen als parallel zueinander an, so kann man die Phasendifferenz der zwei virtuellen Punkte P' und P'' zueinander bestimmen:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2 \cdot d \cdot \cos(\Theta)$$

Wird diese Relation mit der Bedingung für Intensitätsmaxima Gl. 3.2 gleichgesetzt, erhält

man die Bedingung für Maxima abhängig vom Öffnungswinkel Θ .

$$2 \cdot d \cdot \cos(\Theta) = m \cdot \lambda \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Unter einem bestimmten Winkel ist die Intensität folglich konstant und es bilden sich konzentrische Ringe minimaler und maximaler Intensität, um den Mittelpunkt $\Theta = 0$, das sogenannte Zentrum, siehe Abb. 3.2 a)

Bei festem d und λ hängt die Interferenzbedingung nur vom Winkel Θ ab. Vergrößert sich der maximale Öffnungswinkel Θ_{max} , so gibt es mehr Winkel Θ , die die Bedingung 3.4 erfüllen und damit mehr sichtbare Ordnungen der Interferenzringe.

Durch diesen Effekt lassen sich nicht nur mehrere Intensitätsmaxima gleichzeitig auf dem Bildschirm darstellen, sondern man kann durch Vergrößerung von Θ_{max} eine breiter ausgeleuchtete Fläche auf dem Schirm mit einer höheren Anzahl an sichtbaren Ringordnungen erzielen. Ein Interferenzring mit einem Durchmesser von z.B. 2 cm ist mit dem Auge besser zu erkennen als ein einzelner Punkt und ist aufgrund seiner Ausdehnung bei leichter Fehljustage trotzdem noch erkennbar. Somit ist ein stärkerer Aufweitungswinkel des Lichtstrahls für unsere Versuchszwecke sogar erwünscht und es bietet sich die Verwendung aufweitender Linsen an.

Die Ringe werden auch Haidingersche Ringe genannt. Allgemein betrachtet, handelt es sich dabei um Interferenzfiguren, die man erhält, falls man eine ausgedehnte Lichtquelle verwendet. Sie lassen sich auch gut verstehen als Interferenzfiguren an einer Platte konstanter Dicke, da man sich geometrisch überlegen kann, dass die Interferenzen im Michelson-Interferometer äquivalent sind zu den Interferenzfiguren an einer Platte konstanter Dicke. [11]

3.2 Aufbau des Michelson-Interferometers

Der variable Versuchsaufbau des Michelson-Interferometers wird von der Firma Phywe geliefert. An diesem Aufbau lässt sich das Experimentieren mit optischen Geräten gut erlernen. Der Aufbau besteht aus einer magnetischen Basisplatte, auf der man alle benötigten Bauteile mit magnetischen Standfüßen beliebig anordnen kann, siehe Abb. 3.3.

Benötigte Bauteile zum Grundaufbau:

- 1 magnetische Basisplatte
- 1 He-Ne Laser und 1 Vanadat Festkörper Laser mit Netzteilen
- 4 Spiegel mit Magnetfuß
- 1 Strahlteiler mit Magnetfuß
- 1 Linse, Brennweite +20 mm mit Magnetfuß
- 1 weißer Schirm mit Magnetfuß, 1 matter Schirm
- optional: 1 Positionierungsschiene mit Mikrometerschraube

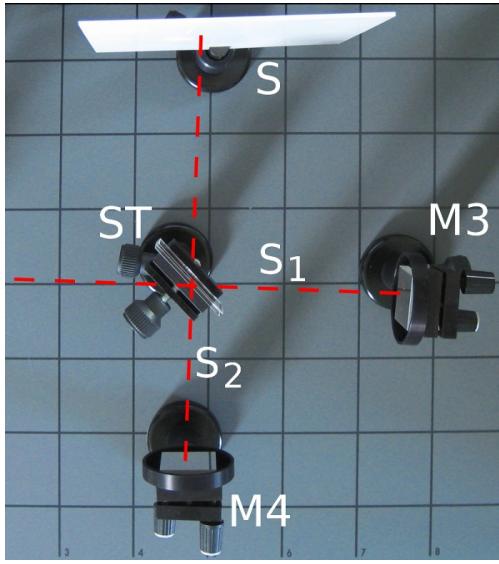


Abbildung 3.3: Kernstück des Michelson-Interferometers mit Spiegel M_3 & M_4 sowie Strahlteiler ST und Schirm S .

Als Grundlage wird die magnetische Basisplatte verwendet, mit einer Abmessung von $59 \times 43 \text{ cm}^2$. Auf dieser kann man an der oberen Kante einen Laser mit der vorgesehenen Halterung befestigen, siehe Abb. 3.4. Die anderen Komponenten besitzen jeweils einen magnetischen Standfuß, sodass man sie flexibel auf der Basisplatte anordnen kann, sie sich aber nicht leicht verrücken lassen.

Der Laserstrahl wird von den Spiegeln M_1 und M_2 umgelenkt und durch die Linse L aufgeweit. Der umgelenkte Strahl trifft auf den Strahlteiler ST und wird, wie in den Grundlagen beschrieben, von den Spiegeln M_3 und M_4 reflektiert und trifft wieder zusammengeführt auf den Schirm S .

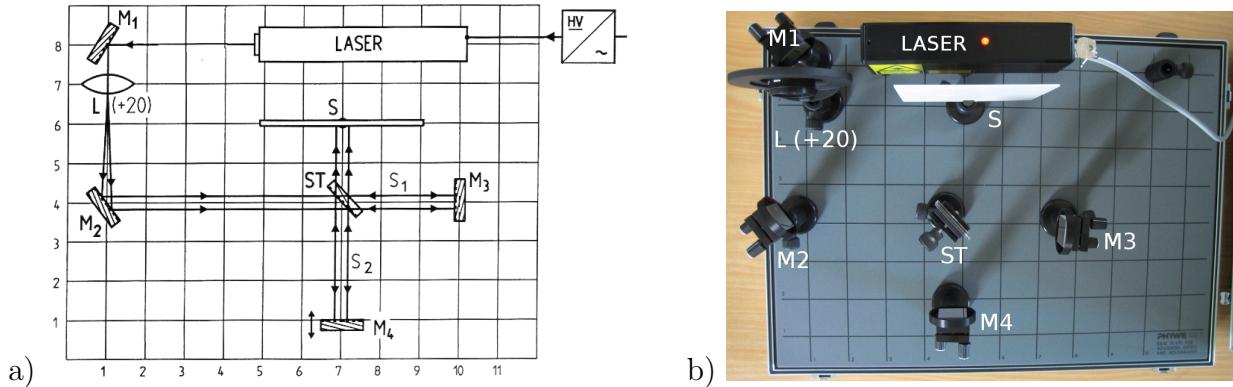


Abbildung 3.4: Experimenteller Aufbau des Michelson-Interferometers zur Erzeugung von Interferenzringen. a) Skizze der Versuchsanordnung [2], Abstand $(\overline{ST}, M_3) \approx (\overline{ST}, M_4)$ einstellen! b) Foto der Versuchsanordnung.

3.2.1 Laser als Lichtquelle

Als Lichtquellen werden ein HeNe- und ein Nd:YV04 Laser der Firma Phywe verwendet. Sie senden fast monochromatisches Licht der Wellenlänge $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ (rotes Licht) und $\lambda = 532 \text{ nm}$ (grünes Licht) mit einer Leistung von $< 1 \text{ mW}$ aus (Datenblatt im Anhang 3.8.1).

An der Unterseite ist ein Schraubgewinde zur Befestigung einer Stativstange. Diese kann man in die auf der Basisplatte integrierte Halterung klemmen. An der Strahlaustrittsöffnung befinden sich zwei kleine Schrauben zur Einstellung der Strahlaustrittsrichtung. Die Spannungsversorgung erfolgt über das eingebaute Netzteil.

Die Laser gehören zur Gefahrenklasse 2. Bei kurzzeitiger Bestrahlungsdauer (bis 0,25 s) ist der Strahl ungefährlich für das Auge. Die Wellenlänge liegt jedoch im sichtbaren Bereich, sodass der Lidschluß-Reflex des menschlichen Auges anspricht. Während der Benutzung müssen keine speziellen Laserschutzbrillen getragen werden, jedoch ist darauf zu achten, den Aufbau nicht auf Augenhöhe sitzender oder stehender Position auszurichten [7]. Wir empfehlen aber trotzdem das Tragen von Laserschutzbrillen.

Sobald man jedoch strahlbündelnde, optische Instrumente benutzt, kann die Intensität zunehmen und der entstehende Strahl einer höheren Gefahrenklasse angehören. Für das Michelson-Interferometer sollten jedoch nur strahlauflweitende Instrumente benutzt werden.

Die Laser besitzen ein festes, dichtes Gehäuse, das seitliches Austreten von Laserstrahlung verhindert. Zusätzlich ist ein Schloss eingebaut, sodass man die Laser nur mit den entsprechenden Schlüsseln einschalten kann. Im Betriebsmodus leuchtet zum Hinweis auf der Oberseite eine LED, vgl. Anhang 3.8.1. Die Kohärenzlänge L_c des HeNe Lasers ergibt sich aus $L_c = c \tau_c$ mit der Lichtgeschwindigkeit c und $\tau_c = (\text{Long.Modenabstand})^{-1}$ zu $L_c = 27 \text{ cm}$.

3.2.2 Spiegel und Strahlteiler

Der Spiegel besitzt eine Fläche von $30 \times 30 \text{ mm}^2$ und ist beweglich an einer Halteplatte befestigt. Auf der Rückseite der Platte befinden sich zwei Feinjustierschrauben, von denen die eine zur Drehung des Spiegels um die horizontale Achse dient und die andere zur Drehung um die vertikale Achse, siehe Abb.3.5 a).

An der Halteplatte ist eine Stativstange zur Befestigung am Magnetfuß angebracht. Über eine Klemmschraube am Magnetfuß lässt sich die Stange feststellen und in der Höhe variieren, allerdings nur in einem Spielraum von 1,5 cm. Der Strahlteiler besteht aus einer dünnen planparallelen Glasscheibe, die an einer Seite mit einer feinen Metallschicht bedampft ist. Trifft ein Lichtstrahl in einem 45° Winkel auf diese Glasplatte, wird im Idealfall durch die Verspiegelung die Hälfte der Intensität reflektiert. Um festzustellen welche Seite verspiegelt ist, muss man die Glasscheibe ins Licht halten und leicht drehen, dabei ist an den Rändern zu erkennen, ob die vordere oder die hintere Seite glänzt. Die Glasscheibe wird in der dafür vorgesehenen Halterung auf Magnetfuß mit einer kleinen Schraube festgeklemmt, siehe Abb.3.5 b). Man kann die Glasscheibe entweder waagerecht oder senkrecht in die Halterung stecken, beide Varianten sind für den Versuch geeignet.

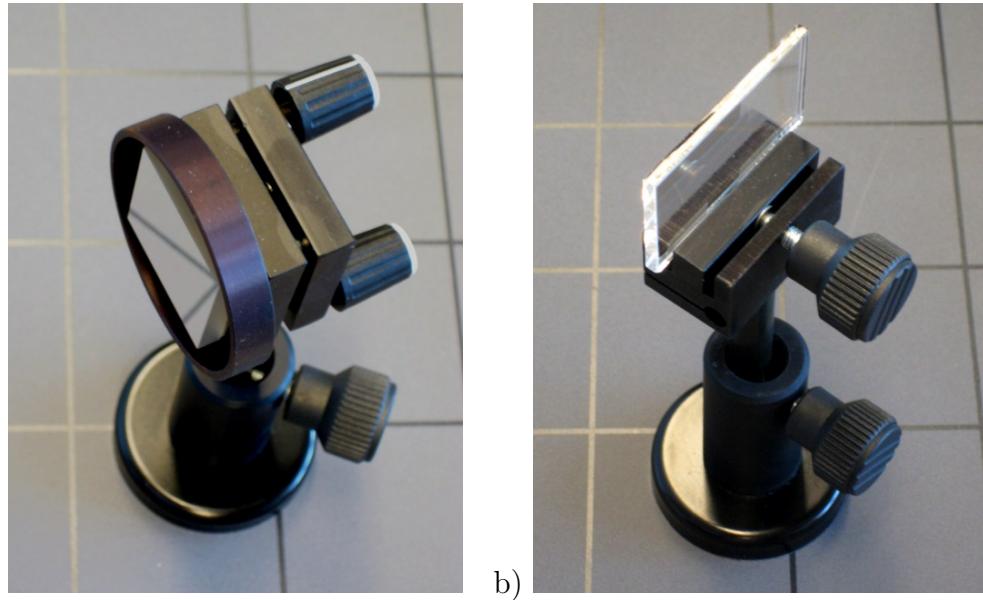


Abbildung 3.5: a) Spiegel und b) Strahlteiler als Bestandteile des variablen Aufbaus des Michelson-Interferometers

3.3 Durchführung

3.3.1 Vorjustierung

Mit der Klemmschraube kann man die Höhe des Lasers einstellen, wobei man nur in einem Bereich von ca. 1 cm variieren kann. Um dennoch eine große Flexibilität im Aufbau zu ermöglichen, werden von der Firma Phywe Stativstangen unterschiedlicher Länge mitgeliefert. Der Laserstrahl sollte auf einer Höhe von 13 cm über der Basisplatte austreten, da der Strahl ansonsten für die weiteren Komponenten zu hoch oder zu tief verlaufen kann.

Als nächstes positioniert man die Spiegel M_1 und M_2 wie in Abb. 3.4 dargestellt. Sie dienen zur Umlenkung des Strahls. Zu Beginn sollten die Spiegel noch nicht gekippt, sondern parallel zur Halteplatte ausgerichtet sein, damit für spätere Feineinstellungen genügend Bewegungsfreiheit in alle Richtungen vorhanden ist. Der Laserstrahl muss so justiert werden, dass er mittig auf den Spiegel M_1 fokussiert, wobei dieser so gedreht ist, dass der Strahl auf M_2 weitergelenkt wird und diesen ebenfalls mittig trifft.

Es bietet sich an, mit einem halbdurchlässigen, matten Schirm zu überprüfen, wie der Strahl auf den Spiegel auftrifft, indem man diesen direkt vor die Spiegelfläche hält. Durch die matte Oberfläche wird der Laserstrahl diffus gestreut und somit sichtbar. Wegen des halbdurchlässigen Materials kann man die Abmessungen der Spiegelfläche durch den Schirm hindurch sehen.

Als nächstes wird der Spiegel M_3 gemäß Abb. 3.4 positioniert. Der Laserstrahl soll ebenfalls mittig auf die Spiegelfläche treffen.

Für eine ideale Einstellung des Michelson-Interferometers muss der auf Spiegel M_3 reflektierte Strahl parallel zum einfallenden Strahl verlaufen, da sonst eine Versetzung mit zusätzlichen Phasenverschiebungen entsteht, die das Interferenzbild beeinflussen. Die Strahlen sind par-

allel ausgerichtet, wenn der reflektierte Strahl am selben Punkt wie der einfallende Strahl auf Spiegel M_2 auftrifft.

Ist der Spiegel M_3 fertig eingestellt, kann man den Strahlteiler ST , den Spiegel M_4 und den Schirm S an die vorgegebenen Stellen platzieren. Hierbei ist darauf zu achten, dass die verspiegelte Seite des Strahlteilers zum einfallenden Laserstrahl hin zeigt und die Scheibe in die richtige Richtung verkippt ist.

Bei einer präzisen Positionierung schließen die Teilstrahlen S_1 und S_2 einen 90° Winkel ein und verlaufen mittig durch den Strahlteiler. Man variiert nun solange die Position von ST und M_4 bis man zwei Lichtpunkte von Teilstrahl S_1 und S_2 auf dem Schirm erkennen kann. Diese beiden Punkte werden durch Drehen des Strahlteilers und der Feinjustierschrauben an den Spiegeln genau übereinander gelegt.

Sind die Spiegel leicht verkippt, sodass die einfallenden und reflektierten Strahlen nicht streng parallel zueinander verlaufen, erhält man ein Interferenzmuster heller und dunkler Punkte in einer Reihe, da die Teilstrahlen keine punktförmige sondern leicht ausgedehnte Querschnittsflächen besitzen und durch den Winkel zueinander miteinander interferieren. Erfahrungsgemäß kann man die Spiegel nie exakt zueinander ausrichten, sodass standardmäßig ein feines Interferenzmuster auf dem Schirm entsteht. Bei einer guten Justage sollte dies den weiteren Verlauf des Versuches jedoch nicht beeinflussen.

Nachdem die Vorjustierung erfolgreich abgeschlossen ist, kann man die Linse L einsetzen.

3.3.2 Erzeugung der Interferenzringe

Die Linse $L(+20)$ mit einer Brennweite von $+20$ mm dient zur Aufweitung des Laserstrahls, um Interferenzringe zu erzeugen. Dazu wird die Linse zwischen M_1 und M_2 platziert. Je nachdem ob man die Linse näher bei M_1 oder M_2 positioniert, wird der Laserstrahl früher oder später aufgeweitet. Daraus resultiert eine größere oder kleinere ausgeleuchtete Fläche auf dem Schirm mit einer dementsprechend größeren oder kleineren Anzahl an sichtbaren Ringordnungen. Wenn der Strahl jedoch zu früh oder zu stark aufgeweitet wird, überschreitet die Größe der Strahlquerschnittsfläche die Fläche des Strahlteilers oder des Spiegels. Dadurch werden Teile des Strahls weggescchnitten und es treten ungewollte Randeffekte auf.

In diesem Aufbau kann man die Linse $L(+20)$ jedoch ohne Probleme ganz an vorderster Position platzieren. Die Linse selbst kann den Strahl ablenken, wenn sie nicht genau senkrecht zum Strahl steht oder dieser nicht mittig auftrifft. Es ist kaum möglich den Strahl durch den Linseneinbau nicht von der ursprünglichen Bahn abzulenken, sodass die in der Vorjustierung getätigten Einstellungen nachgestellt werden müssen. Der Grund, warum man die Vorjustierung nicht direkt mit Linse durchführt, ist, dass der aufgeweitete Strahl aufgrund geringer Intensität schwerer zu erkennen ist. Prinzipiell gelingen die Einstellungen mit Linse besser, wenn die Spiegel bereits auf dem richtigen Platz stehen. Man kann wiederum die Strahlengänge mit dem halbdurchlässigen Schirm überprüfen, aufgrund der geringen Intensität jedoch nicht mehr deren parallele Ausrichtung zueinander erkennen.

Nach der erfolgreichen Justage sollten die von Teilstrahlen S_1 und S_2 resultierenden Kreisflächen auf dem Schirm übereinander liegen. Es bildet sich in der Regel nicht auf Anhieb ein Interferenzbild. Dieses ergibt sich nur in der Nähe von $d = 0$, in einem Bereich, in dem die resultierende Phasendifferenz δ kleiner als die Kohärenzwellenlänge ist. Dieser Bereich liegt

bei wenigen Millimetern.

Die Streckendifferenz d ergibt sich aus den unterschiedlichen Längen der Strecken S_1 und S_2 (Abb. 3.2 b)), die auch zusätzlich durch verkippte Spiegel beeinflusst werden. Das finden des Bereiches, in dem die Interferenzbedingung erfüllt ist, ist der schwierigste Teil der Justierung, da es kein Standardvorgehen gibt um die geeignete Stelle zu finden. Die Stellung von M_4 muss so variiert werden, bis sich Interferenzmuster auf dem Schirm erkennen lassen. Da die Interferenzbedingung in einem äußerst begrenzten Bereich erfüllt ist, muss die Justierung des Spiegels überaus sorgfältig, mit sehr feinen Spiegelbewegungen geschehen, da der gesuchte Bereich sehr leicht verfehlt und verpasst werden kann.

Die Magnetfüße erschweren dabei feine Bewegungen, da man zur Bewegung größere Kräfte aufwenden muss. Dieses Problem ließe sich durch ein 'sliding device' von Phywe beheben, dabei handelt es sich um eine kleine Schiene, die feine Spiegelbewegungen mittels Mikrometerschraube zulässt. Ist diese Justierhilfe nicht vorhanden, kann man sich weiterhelfen, indem man mehrere Lagen Papier unter den Standfuß des Spiegels legt und dadurch die magnetische Anziehungskraft verringert.

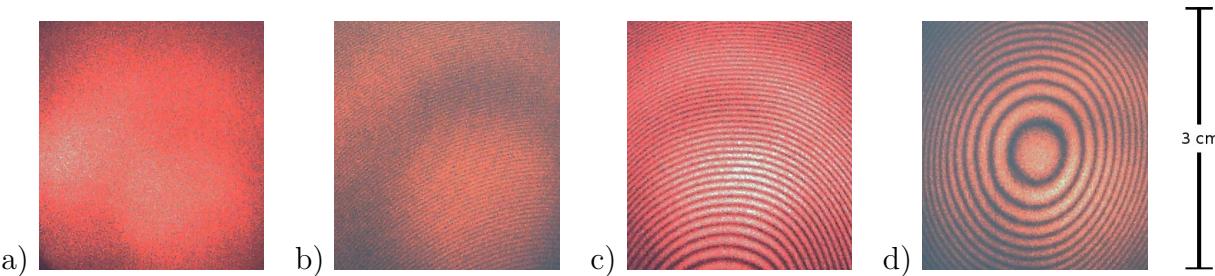


Abbildung 3.6: Verlauf der Interferenzmuster mit von links nach rechts kleiner werdendem Abstand zum Zentrum. a) Interferenzbedingung nicht erfüllt, b) sehr dünne Ringe, kaum erkennbar, c) Interferenzringe nahe am Zentrum, d) Zentrum der Interferenzringe

Während des Suchens ist es ratsam, auf ein leichtes Flimmern zu achten, die Interferenzringe selbst werden nicht auf Anhieb sichtbar, sondern erst wenn die Basisplatte nicht mehr durch Bewegungen des Spiegels erschüttert wird. Außerdem trifft man häufig nicht das Zentrum, sondern einen Randbereich, in dem die Ringe immer dünner und somit schwerer zu erkennen sind, vgl. Abb. 3.6.

Wenn man sich jedoch in diesem Interferenzbereich bewegt, ergibt sich ein für das Auge recht deutlich erkennbares Flimmern. An diesem Punkt empfiehlt es sich nur noch mit den Feinjustierschrauben der Spiegel M_3 und M_4 das Gebiet abzutasten, bis man das Zentrum findet.

Danach sollte man aufpassen, den Aufbau nicht durch Stöße oder ähnliches wieder zu versetzen!

3.4 Wellenlängenbestimmung

3.4.1 Grundlagen

Die Bedingung für Maxima (Gleichung 3.4) kann man zur Bestimmung der Wellenlänge λ nutzen:

$$2 \cdot d \cdot \cos(\Theta) = m \cdot \lambda; \quad m = 1, 2, \dots$$

Bei einer bestimmten Position des Spiegels M_4 mit Wegdifferenz d zu Spiegel M_3 , gehört zu einer festen Ordnung m ein Ring maximaler Intensität mit konstantem Winkel Θ . Betrachtet man diese feste Ordnung m und verringert dabei den Abstand d , dann verringert sich der zugehörige Winkel Θ gemäß Gleichung 3.4.

Im Zentrum der Interferenzringe ($\Theta = 0$) gilt $2 \cdot d = m \cdot \lambda$.

Auf dem Schirm resultiert dies in dem Effekt, dass die Ringe kleiner werden und bei jeder Reduzierung von d um $\frac{\lambda}{2}$, verschwindet ein Ring im Zentrum. Vergrößert man den Abstand d , so verläuft dieser Effekt gegenteilig, d.h. nach einer Erhöhung von Δd um $\frac{\lambda}{2}$ erscheint ein neuer Ring im Zentrum. Zur Veranschaulichung ist dieser Effekt in der Bilderie Abb. 3.7 dargestellt.

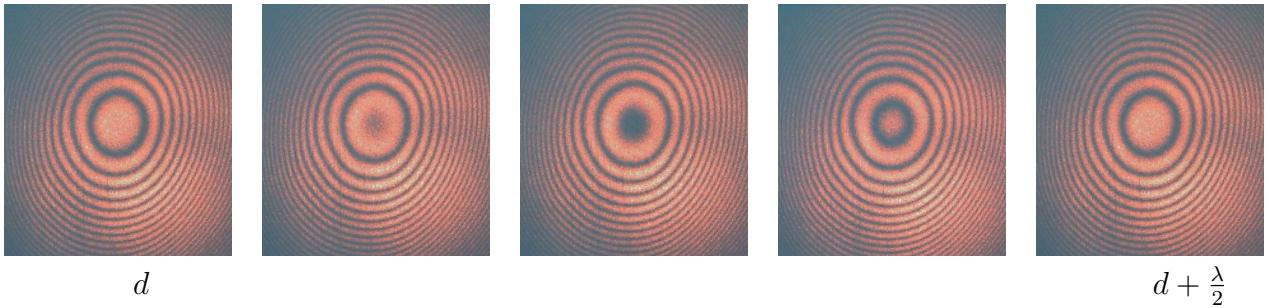


Abbildung 3.7: Interferenzmuster bei Variation der Abstands differenz d : von links nach rechts: $|d|$ wird um Δd vergrößert von rechts nach links: $|d|$ wird um Δd verkleinert

Bei einer gelungenen Einstellung kann man mit diesem Effekt auch die Position $d = 0$ bestimmen. Eine Verringerung von d nach Überschreiten des Punktes $d = 0$ bedeutet wiederum eine Vergrößerung von $|d|$. Für die Entstehung der Ringe ist nur die Verringerung beziehungsweise Vergrößerung des Betrages des Wegunterschiedes relevant. Dies resultiert darin, dass sich der Effekt der verschwindenden beziehungsweise hervortretenden Ringe am Punkt $d = 0$ umdreht.

Bei einer beliebigen Spiegelposition d_1 mit dem zugehörigen Maximum m_1 betrachtet man das Zentrum, mit festem Winkel $\Theta = 0$, dh. $\cos(\Theta) = 1$. Wenn man nun die Position des Spiegels d_1 um Δd auf d_2 mit zugehörigem Maxima m_2 ändert, so kann man die $\Delta m = m_2 - m_1$ Maxima, die im Zentrum durchfahren werden, zählen. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} I & : d_1 \cdot 2 = m_1 \cdot \lambda \\ II & : d_2 \cdot 2 = m_2 \cdot \lambda \\ II - I & : \underbrace{(d_2 - d_1) \cdot 2}_{\Delta d} = \underbrace{(m_2 - m_1) \cdot \lambda}_{\Delta m} \\ & \Rightarrow \Delta d \cdot 2 = \Delta m \cdot \lambda \end{aligned}$$

Es ergibt sich die Gleichung zur Bestimmung der Wellenlänge λ :

$$\lambda = \frac{2 \cdot \Delta d}{\Delta m} \quad (3.5)$$

Dies bedeutet, zur Wellenlängenbestimmung muss man die Anzahl der Ringe Δm zählen, die bei Bewegung des Spiegels im Zentrum verschwinden beziehungsweise hervortreten und die zugehörige Positionsänderung Δd zwischen Start- und Endpunkt messen.

3.4.2 Aufbau zur Wellenlängenbestimmung

Benötigte Bauteile:

- Grundaufbau
- 1 Feinsteinstelltrieb auf Platte
- optional: 1 nahauflösende Kamera mit Magnetfuß

Zur Wellenlängenbestimmung wird der in Kapitel 3.1 beschriebene Grundaufbau verwendet. Allerdings wird eine Vorrichtung zur präzisen Spiegelpositionierung und Abstandsmessung benötigt. Dazu wird der Spiegel M_3 aus dem Grundaufbau an einem 'Feinsteinstelltrieb auf einer Platte' befestigt, siehe Abb. 3.8.

Zusätzlich kann man optional eine nahauflösende Kamera verwenden (in der Abbildung nicht gezeigt). Mit dieser kann der Schirm abgefilmt und vergrößert auf einem Bildschirm dargestellt werden, um das Abzählen der Ringe zu erleichtern. Die Bilder sollten auch am Rechner gespeichert werden, um die Ringe später sorgfältig zählen zu können.

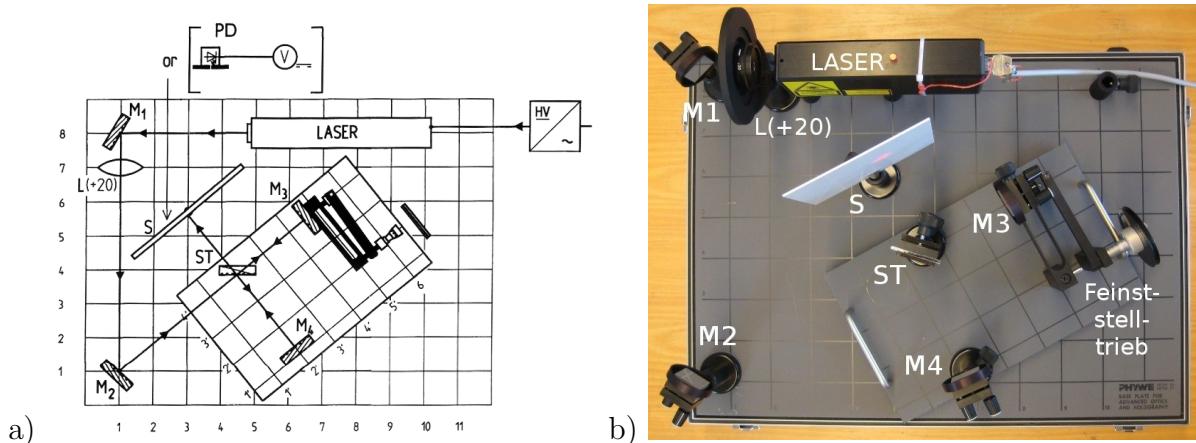


Abbildung 3.8: Aufbau zur Messung der Wellenlänge λ des Lasers mit dem Michelson-Interferometer. a) Skizze der Versuchsanordnung [2], b) Foto des Versuchsaufbaus.

3.4.2.1 Feinsteinstelltrieb mit Spiegel auf Platte

Der Feinsteinstelltrieb in Abbildung 3.9 dient zur linearen Verschiebung eines Objektes. Dazu befindet sich am Ende eines Hebelarmes eine Halterung, in der man die Stativstange des Spiegels befestigen kann. Durch Drehung der Mikrometerschraube wird ein Metallstift ausgefahren, der gegen das eine Ende der Hebelarmkonstruktion drückt. Durch geschickte Kraftumleitung wird erreicht, dass sich der Spiegel selbst nur auf einer Achse senkrecht zum Hebelarm bewegt. Dies ist wichtig, da bedingt durch die hohe Empfindlichkeit des Interferometers seitliche Bewegungen die Messung stören können. Das Rad der Mikrometerschraube



Abbildung 3.9: Feinststelltrieb zur präzisen Bewegung des Spiegels über eine Mikrometerschraube, Feinsteinstelltrieb mit Spiegel.

ist in 50 Einheiten eingeteilt. Die Übersetzung auf die Spiegelbewegung entspricht $0,5 \mu\text{m}$ pro Einheit. Nach einer kompletten Umdrehung ist der Spiegel folglich um $25 \mu\text{m}$ versetzt. Insgesamt lassen sich etwa 20 Umdrehungen, dh. ein Spiegelversatz von $500 \mu\text{m}$ ausführen.

3.4.2.2 CCD-Kamera Moticam 352

Da man zur Abfilmung der Interferenzmuster eine zur Nahaufnahme fähige Kamera benötigt, bietet sich eine Kamera für digitale Mikroskope an. Es wird die von der Firma Phywe empfohlene 'CCD-Kamera Moticam 352 für den PC' verwendet. Sie besitzt eine auf 8 mm fokussierbare Linse. Über einen USB-Anschluss kann man die Daten auslesen und aufnehmen. Mit dem großen Drehrad an der Linse kann man die Bilder fokussieren, allerdings nicht zoomen. Das Betriebsprogramm ist bereits auf dem Computer installiert. Darüber lassen sich die Bilder und Filme darstellen und in mehreren Formaten abspeichern.



Abbildung 3.10: Nahauflösende CCD-Kamera Moticam 352 auf Magnetfuß.

3.4.3 Versuchsdurchführung

Nachdem man den Aufbau analog zum Grundaufbau erfolgreich eingestellt hat, dreht man vorsichtig an der Mikrometerschraube, bis sich ein Intensitätsmaximum im Zentrum befindet und notiert sich die zugehörige Position. Danach dreht man die Schraube langsam, unter Vermeidung jeglicher zitternder und ruckartiger Bewegung, weiter und zählt dabei die Ringe die im Zentrum entstehen beziehungsweise verschwinden. Die Messgenauigkeit erhöht sich mit der Anzahl der gezählten Ringe in einem Messintervall. Jedoch nimmt bei steigender Anzahl Δm auch die Fehlerquote durch Verzählen zu.

Erfahrungsgemäß ist der Aufbau derart empfindlich, dass das Interferenzbild bei kleinen Stößen oder lauten Tönen kurzzeitig verschwimmt und sich bei größeren Störungen sogar verstellt. Da man dabei die beobachtete Position aus dem Auge verliert oder diese sich ändert, muss man erneut anfangen zu zählen. Auch nimmt die Konzentrationsfähigkeit der Augen durch angestrengtes Beobachten bei längeren Zählintervallen ab, infolge dessen verschwimmt das Bild oder man vergisst die gezählte Ordnung m .

Prinzipiell sollte man versuchen laute Töne und Stöße im Versuchsräum zu vermeiden, um die Erschütterungsmöglichkeiten zu reduzieren. Zusätzlich kann man sich bei Problemen mit zittrigen Händen eine geeignete Möglichkeit zum Abstützen der Hand suchen.

Dennoch ist es nicht empfehlenswert ein großes Intervall an Ringordnungen abzuzählen. In Laser physics III [1] wird eine Beispielrechnung mit $\Delta m = 300$ angeführt. Ein Intervall von $\Delta m = 50$ wäre erfahrungsgemäß angebrachter.

Wahlweise kann man zum Abzählen den Schirm mit der Kamera abfilmen und auf einem Computerbildschirm vergrößert darstellen. Man sollte versuchen die Kamera möglichst nah vor dem Schirm zu platzieren, ohne dabei den Strahlgang zu blockieren. Das vergrößerte Bild kann das Abzählen erleichtern und es können sich auch mehrere Personen gleichzeitig, ohne gegenseitige Sichtbehinderung, beteiligen.

Die Messunsicherheit (MU) der Wellenlänge σ_λ ergibt sich aus der MU von Δd und Δm (Gleichung 3.5). Die MU von Δm kann durch sorgfältiges Zählen der Ringe zum Verschwinden gebracht werden. Mit dem Feinsteinstelltrieb (Abb. 3.9) wird Δd gemessen. Die MU σ_λ hängt also signifikant von der Güte der Mikrometerschraube ab. Grundsätzlich könnte man die Herstellerangaben benutzen, um die MU der Mikrometerschraube zu bestimmen. In die-

sem Versuch ist es aber möglich die Mikrometerschraube zu kalibrieren. Eine Kalibrierung der verwendeten Messinstrumente ist, wenn möglich, immer durchzuführen.

Hier soll zur Kalibrierung der HeNe Laser (rot), dessen Wellenlänge $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ sehr gut bekannt ist (besser als $0,1 \text{ nm}$), benutzt werden. Danach wird die Wellenlänge des grünen Lasers bestimmt. Unter Beachtung der Gleichung 3.5 ergibt sich für $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ und einer kompletten Umdrehung der Mikrometerschraube (1 Umdrehung (= 50 Einheiten) $\Delta d = 25 \mu\text{m}$) die Anzahl der gezählten Ringe zu 79. Man wählt sich einen Bereich auf der Mikrometerschraube aus und misst die Zahl der Maxima. Die Messung wiederholt man z.B. 10 mal, um dann aus der entstehenden Verteilungsfunktion einen Korrekturfaktor k zu bestimmen.

Danach wird der HeNe Laser ersetzt durch den Nd:YVO₄ Laser. Man misst Δd , typisch wieder 10 mal, im gleichen Bereich auf der Mikrometerschraube wie bei dem roten HeNe Laser. Zählt man nun die Maxima Δm und berücksichtigt den Faktor k , so ergibt der Erwartungswert der Verteilungsfunktion für λ die gesuchte Wellenlänge des grünen Lasers.

3.4.4 Auswertung

Es sollten Messintervalle von $\Delta m = 50 - 100$ Intensitätsmaxima abgezählt werden. Die Wellenlänge λ ergibt sich aus $\frac{2 \cdot \Delta d}{\Delta m}$, wobei zur Bestimmung von Δd die verschiedenen Übersetzungen der Mikrometerschraube beachtet werden müssen.

Ohne Kalibrierung der Mikrometerschraube könnte man folgendermaßen vorgehen. Da die Firma Phywe keine systematischen Fehler zu diesen Messapparaturen angibt, kann nur ein gleichverteilter Binningfehler (Ablesefehler) beim Ablesen der Mikrometerschraube angenommen werden mit $\sigma_s = \frac{1 \text{ Einheit}}{\sqrt{12}}$. Da eine Differenzmessung durchgeführt wird, ergibt sich der Fehler $\sigma_{\Delta d}$ durch quadratisches Addieren der Fehler auf Anfangs- und Endpunkt zu:

$$\sigma_{\Delta d} = \sqrt{\sigma_{s1}^2 + \sigma_{s2}^2} = \sqrt{2} \cdot \sigma_s$$

Der Fehler auf λ ergibt sich mittels Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_\lambda = \sqrt{\left(\frac{2}{\Delta m} \cdot \sigma_{\Delta d}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta d}{\Delta m^2} \cdot \sigma_{\Delta m}\right)^2}$$

mit dem Fehler $\sigma_{\Delta m}$ auf die Anzahl der Maxima. Wenn man diesen Fehler zu Null annimmt ($\sigma_{\Delta m} = 0$), ist der Fehler auf die Wellenlänge unabhängig von Δd und ergibt den konstanten Wert:

$$\sigma_\lambda = \frac{2}{\Delta m} \cdot \sigma_{\Delta d}$$

Es bietet sich eine Mehrfachmessung, wie beschrieben, von λ zur besseren Fehlerabschätzung an.

Bedingt durch die Kalibrierung der Mikrometerschraube sollte sich, bei der Mehrfachmessung aus der entsprechenden Verteilungsfunktion, eine wesentlich kleinere Messunsicherheit ergeben, die im Versuch bestimmt werden muss. Die Annahme $\sigma_{\Delta m} = 0$ bei σ_λ scheint auf den

ersten Blick gut begründet, wenn man davon ausgeht, dass der Durchführende des Versuchs in der Lage ist, sich nicht zu verzählen. Es ist jedoch problematisch eine Aussage darüber zu treffen, an welchem exakten Punkt die Intensität maximal ist. Auch wenn es möglich ist, alle Ordnungen richtig abzuzählen, so gestaltet es sich als nahezu undurchführbar, den genauen Start- und den Endpunkt des Intervalls zu treffen. Um dieses Problem mit einzubeziehen, wird sozusagen ein Binningfehler auf die Intensitätsmaxima abgeschätzt.

Zwischen Minimum und Maximum wäre sozusagen $\Delta m = \frac{1}{2}$. Angenommen man könnte ein Maximum auf mindestens $\frac{1}{10}$ genau treffen, ergäbe dies einen Binningfehler von $\sigma_m = \frac{1}{10 \cdot \sqrt{12}} = 0,0289$. Der Fehler auf die Anzahl der durchlaufenen Maxima entspräche folglich $\sigma_{\Delta m} = \sqrt{2} \cdot \sigma_m = 0,0408$.

3.5 Druckabhängigkeit des Brechungsindex von Luft

3.5.1 Grundlagen

Der Brechungsindex von Luft wird bei Rechnungen oft als konstant $n = 1$ gesetzt. Generell sind Brechungsindizes von Gasen keine konstanten Werte, sondern unter anderem abhängig vom Druck $n(P)$. In diesem Versuchsteil soll mithilfe des Michelson-Interferometers die Druckabhängigkeit des Brechungsindex von Luft bestimmt werden.

Den Brechungsindex ändert man, indem eine hohle Glasparzelle in einem der Teilstrahlen platziert wird und deren Innendruck schrittweise reduziert wird. Der Versuch beruht im Prinzip auf die in Kapitel 3.1 hergeleitete Bedingung für Intensitätsmaxima:

$$2 \cdot d \cdot \cos(\Theta) = m \cdot \lambda; \quad m = 1, 2, \dots$$

Bedeutend ist in dieser Formel, dass $2 \cdot d$ die Differenz der von den beiden Teilstrahlen zurückgelegten optischen Wege ist. Der optische Weg $d_i = s_i \cdot n_i$ ist das Produkt der zurückgelegten Strecke s_i mit dem Brechungsindex n_i des durchlaufenden Mediums. Somit ist die Bedingung für die Bildung von Intensitätsmaxima abhängig von den jeweiligen durchlaufenen Brechungsindizes n_i , daher kann man anhand der Interferenzmuster Rückschlüsse auf den Brechungsindex ziehen.

Um die Abhängigkeit der Brechungsindizes vom Druck P zu beschreiben, kann man eine Taylorentwicklung um den Punkt $P = 0$ durchführen. Unter der Annahme, dass $\frac{\Delta n^2}{\Delta P^2}$ für Gase vernachlässigbar klein ist, kann man die Entwicklung nach der ersten Ordnung abbrechen und erhält eine Geradengleichung in P [1].

$$n(P) = n(P_0 = 0) + \frac{\Delta n}{\Delta P} \cdot P = 1 + \frac{\Delta n}{\Delta P} \cdot P \quad (3.6)$$

Der Differentialquotient $\frac{\Delta n}{\Delta P}$ ist auch definiert als [1]:

$$\frac{\Delta n}{\Delta P} = \frac{n(P + \Delta P) - n(P)}{\Delta P}$$

Zur Bestimmung der Druckabhängigkeit des Brechungsindex von Luft muss folglich nur der Differentialquotient bestimmt werden, da der Achsenabschnitt $N(P = 0)$ bereits bekannt ist. Ausgehend vom optischen Weg kann man eine Änderung ΔP über eine Änderung des optischen Weges Δw ausdrücken.

$$\begin{aligned} I & : w_1 = n(P) \cdot s \\ II & : w_2 = n(P + \Delta P) \cdot s \\ II - I & : \Delta w = n(P + \Delta P) \cdot s - n(P) \cdot s \end{aligned}$$

Erzeugt man gezielt in einem der Teilstrahlen s_1 eine örtlich begrenzte Änderung, beispielsweise durch eine Glasparzelle, so ergibt sich eine Differenz Δw zwischen den optischen Wegen der beiden Strahlen. Wenn man bedenkt, dass $\Delta w = 2 \cdot \Delta d$ ist, da der Strahl vor und nach

der Reflexion am Spiegel den geänderten Brechungsindex durchläuft, so kann man die zur Wellenlängenbestimmung hergeleitete Relation 3.5 verwenden:

$$\Delta d = \frac{\Delta m \cdot \lambda}{2}$$

$$\begin{aligned}\Delta w &= 2\Delta d \\ (n(P + \Delta P) - n(P)) \cdot s &= 2 \cdot \frac{\Delta m \cdot \lambda}{2} \\ (n(P + \Delta P) - n(P)) &= \frac{\Delta m \cdot \lambda}{s} \\ (n(P + \Delta P) - n(P)) \cdot \frac{1}{\Delta P} &= \frac{\Delta m \cdot \lambda}{s} \cdot \frac{1}{\Delta P} \\ \frac{\Delta n}{\Delta P} &= \left(\frac{\Delta m}{\Delta P} \right) \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot l}\end{aligned}$$

Mit $s = 2 \cdot l$, wobei l die Breite des Innenraumes der Zelle ist und diese vom Teilstrahl zweimal durchlaufen wird. Zur Berechnung von $\frac{\Delta n}{\Delta P}$ muss man folglich die Änderung der Intensitätsmaxima abhängig von der Druckänderung in einem der beiden Teilstrahlen bestimmen.

3.5.2 Aufbau zur Bestimmung von $n_{Luft}(P)$

Benötigte Bauteile zum Grundaufbau:

- Grundaufbau
- 1 Glasparzelle
- 1 Handpumpe
- 1 digitaler Drucksensor
- Verbindungsschlüssele($d_i = 3$ mm, 6 mm), 1 T-Stück ($d_i = 8$ mm), 2 Adapter(8/4 mm)
- optional: Klemme auf Magnetfuß zur besseren Führung der Schläuche

Für den Versuch benötigt man den Grundaufbau des Michelson-Interferometers. Zusätzlich wird eine Glasparzelle Z in den Teilstrahl S_1 dh. zwischen ST und M_3 gesetzt, siehe Abb. 3.11. An dieser sind über ein T-Stück Handpumpe und Drucksensor angeschlossen, sodass der Druck in der Zelle variiert und gemessen werden kann. Da auf das T-Stück nur die größeren Schläuche passen, auf die Glasparzelle und den Drucksensor allerdings nur die kleineren Schläuche, werden zusätzlich zwei Adapter benötigt.

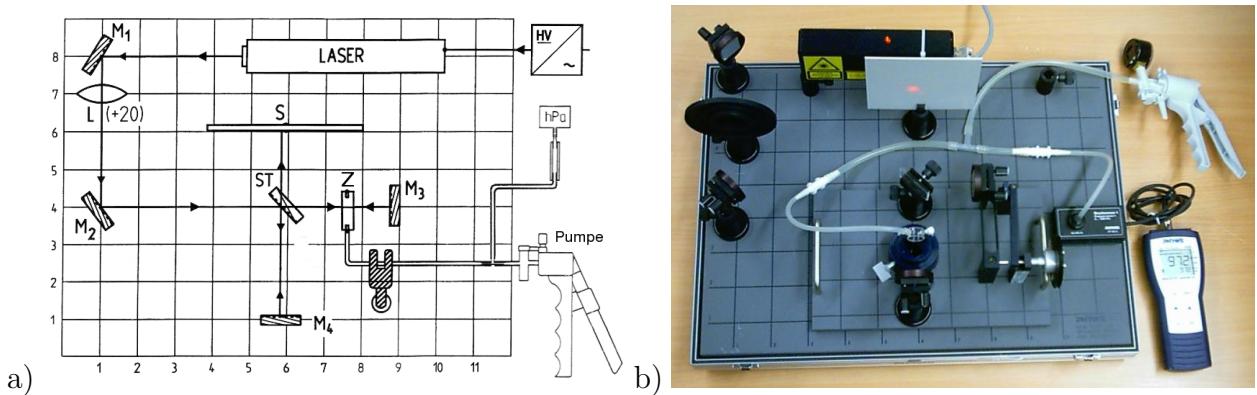


Abbildung 3.11: Experimenteller Aufbau zur Bestimmung der Druckabhängigkeit des Brechungsindex n von Luft. a) Skizze der Versuchsanordnung [2], b) Foto des Versuchsaufbaus.

3.5.2.1 Glasparzelle

Die Glasparzelle ist ein flacher, hohler Glaszyylinder mit Durchmesser $d = 2$ cm, der an den Seiten zwei Anschlussöffnungen besitzt, siehe Abb. 3.12. Auf die Öffnungen passen Schläuche mit einem Durchmesser von 3-4 mm. Wird einer der Anschlüsse nicht benötigt, so kann dieser mit einem Stopfen verschlossen werden. Beim experimentellen Aufbau wird eine zusätzliche Halterung für die Zelle benutzt (mit einer Stativstange zur Befestigung auf einem Magnettfuß). Mithilfe zweier Schrauben kann man die Glasparzelle befestigen, ohne diese zu verkratzen. Die innere Breite der Zelle, d.h. die Gesamtbreite abzüglich der Dicke der zwei Seitenwände, beträgt nach Herstellerangaben $s = 10$ mm jedoch ohne Fehlerangaben. Nachmessungen der Strecke im Innenraum können leider nicht durchgeführt werden.



Abbildung 3.12: Im Michelson-Interferometer eingebaute Glasparzelle mit einem Verbindungsschlauch (links) und einem Stopfen (rechts)

3.5.2.2 Handpumpe

Die Handpumpe kann, je nachdem an welchem Anschluss man sein System anschließt, durch Pumpen einen Unter- oder Überdruck erzeugen, siehe Abb. 3.13. Der nicht benutzte Eingang muss dabei geöffnet bleiben. Zusätzlich ist ein Hebel zur Systemöffnung eingebaut. Wenn man diesen betätigt, gleicht sich der Druck im System dem vorherrschenden Außen- druck an.

Die analoge Druckanzeige kann nur Unterdruck anzeigen. Da deren Skala in 20 mbar Schritten unterteilt ist, sind die Druckangaben für unsere Versuchszwecke zu unpräzise und man benötigt ein zusätzliches Druckmessgerät.

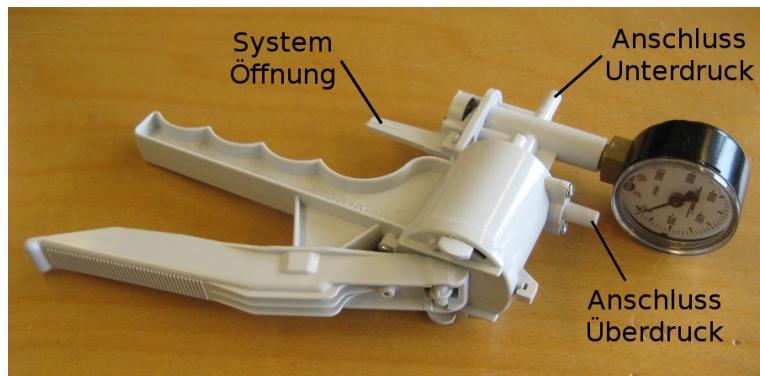


Abbildung 3.13: Handpumpe zur Erzeugung von Unter- bzw. Überdruck.

3.5.2.3 Digitales Druck-Handmessgerät

Das Druckmessgerät besteht aus einem Handmessgerät mit digitaler Anzeige sowie Bedienungsknöpfen und einen externen Drucksensor, siehe Abb. 3.14 a).

Im Handmessgerät befindet sich ein Sensor zur Messung des Außendruckes. Der Messwert wird im Display allerdings unter p_{int} angegeben, da er vom geräteinternen Sensor gemessen wird. Die extern angeschlossene Drucksensorbox kann in einem Messbereich von 0–1300 hPa den Innendruck eines Systems messen. Das System kann über einen $d = 3$ mm Schlauch mit dem Anschlussflansch des Sensors verbunden werden. Der von der Sensorbox gemessene Innendruck wird im Display unter p_{ext} angezeigt, da dieser vom externen Sensor stammt. Vor der ersten Benutzung muss man die externe Sensorbox mittels der auf der Unterseite aufgedruckten Werte kalibrieren. Das genauere Vorgehen ist in der Betriebsanleitung im Anhang 3.8.2 erläutert und bereits durchgeführt worden. Die kleinen Pfeile auf dem Display zeigen an in welcher Einheit der Druck angegeben wird, sowie welcher Wert p_{int} oder p_{ext} auf der großen und welcher auf der kleinen Anzeige angezeigt wird, siehe Abb. 3.14 b). Mit den Pfeiltasten kann man die Darstellungsweise wechseln. Die Tasten 'ON' und 'OFF' schalten die Anzeige an- und aus und mit der Taste 'HOLD' kann man die Ergebnisse der momentanen Messung einfrieren, bis man erneut 'HOLD' drückt.

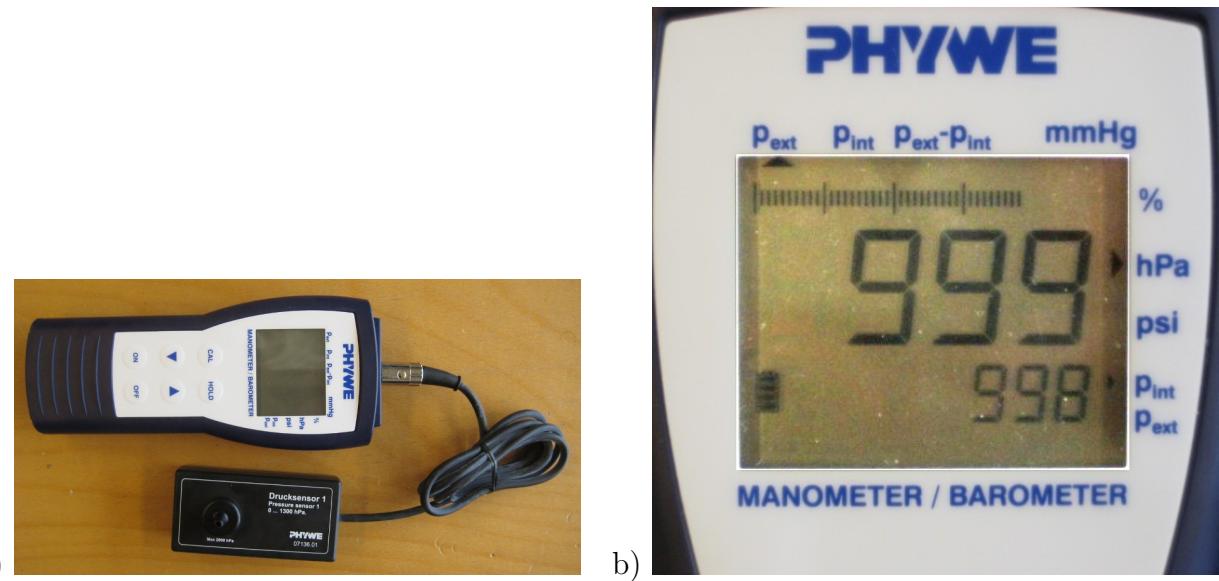


Abbildung 3.14: Komponenten des digitalen Druck-Handmessgerätes. a) Handmessgerät (oben) mit Drucksensorbox (unten), b) digitale Anzeige.

3.5.3 Durchführung

Man justiert analog zu Kapitel 3.1 den Grundaufbau, sodass das Zentrum der Interferenzringe auf dem Schirm fokussiert ist. Der eine Flansch der Parzelle wird mit dem Stopfen verschlossen, über den anderen ein schmaler Gummischlauch ($d = 3 \text{ mm}$) gestülpt. An der Drucksensorbox wird ein zweiter schmaler Schlauch angeschlossen. Um die beiden Schläuche mit dem T-Stück zu verbinden, müssen diese erst mittels ($8/4 \text{ mm}$) Adapter an den breiteren Schläuchen ($d = 6 \text{ mm}$) angeschlossen werden.

Das dritte Ende des T-Stücks wird über einen breiten Schlauch an die Öffnung zum Vakuumieren der Handpumpe angeschlossen. Nun versucht man durch Betätigen der Handpumpe den größtmöglichen Unterdruck zu erzeugen und beobachtet dabei die Anzeige des Druckmessgerätes. Einen Unterdruck von 100 hPa sollte gut erreichbar sein. Danach lässt man den Aufbau ruhen und beobachtet wie schnell der Druck wieder steigt, das heißt die Luft durch undichte Stellen in das System strömt. Durch festes Übereinanderschieben der Endstücke und kurze Schläuche kann man das Entweichen der Luft eindämmen. Silikonpaste zum Abdichten ist nicht geeignet, da die Gummischläuche dadurch eher abrutschen.

Mit den zur Verfügung stehenden Materialien ist es nicht möglich, das System komplett abzudichten, bei einer guten Einstellung entweichen ca. $\frac{1}{2} \text{ hPa}$ pro s.

Wurde das komplette Schlauchsystem überprüft, kann man die Glaszelle in die vorgesehene Halterung zwischen M_3 und ST setzen und mit den Plastikschauben fixieren. Das Interferenzbild sollte sich durch das Einsetzen der luftgefüllten Zelle nicht ändern.

Zu Beginn der Messung sollte man, durch Ziehen am kleinen Hebel der Handpumpe, das Schlauchsystem auf Normaldruck bringen und überprüfen ob der vom Drucksensor angegebene Innendruck mit dem Außendruck übereinstimmt. Diese Werte werden mit den Daten der 'Wetterstation Hörn' angeglichen und eventuelle Abweichungen für den Auswertungsteil

notiert. Als nächstes fokussiert man mit der Mikrometerschraube des Spiegels M_4 ein Maximum im Zentrum, dieses wird mit $m = 0$ bezeichnet. Mit der Handpumpe wird langsam ein Unterdruck erzeugt und beobachtet, wie sich dabei die Radien der Interferenzringe verkleinern. Hat man das nächste Maximum $m = 1$ im Zentrum erreicht, wird der zugehörige Druck notiert. Da das System undicht ist, muss man den Wert sehr schnell ablesen, da der Innendruck bei Pumpstop sofort anfängt zu steigen. Man kann allerdings die Hold-Taste des digitalen Drucksensors nutzen, um den momentanen Druck einzufrieren, bis der Wert notiert wurde. Allerdings muss man sich trotzdem mit dem Ablesen beeilen, denn durch die Druckzunahme ändern sich auch die Interferenzringe, sodass man die beobachtete Ordnung aus dem Auge verlieren kann. Insgesamt sollte eine Änderung um 6 bis 7 Maxima erreichbar sein.

3.5.4 Auswertung

Man sollte sich eine Tabelle anlegen. In dieser Tabelle wird zu jeder Anzahl durchlaufener Maxima $\Delta m_i = m_i - m_0$ der zugehörige Druck P_i und die zugehörige Druckdifferenz ΔP_i angegeben.

Begonnen wird z.B. bei $m_0 = 0$ unter Normaldruck $P_a = 985 \text{ hPa}$. Zusätzlich wird zu jedem Δm der Quotient $\frac{\Delta m}{\Delta P}$ aus den Messwerten berechnet. Zur Fehlerabschätzung können nur die Binningfehler angenommen werden. Da es sich jedoch außer bei P um Differenzmessungen handelt, sollten sich eventuelle systematische Fehler, wie beispielsweise einem falschen Offset des Drucksensors, wegheben.

Auf die Druckmessung P wird ein Binningfehler $\sigma_P = \frac{1 \text{ hPa}}{\sqrt{12}} = 0,289 \text{ hPa}$ angenommen.

Der Fehler auf die Druckdifferenz ΔP ist dementsprechend $\sigma_{\Delta P} = \sqrt{2} \cdot \sigma_P = 0,408 \text{ hPa}$.

Der Binningfehler auf die durchlaufenen Ordnungen Δm wird analog zur Auswertung der Wellenlängenbestimmung mit $\sigma_{\Delta m} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} = 0,0408$ abgeschätzt.

Man sollte über die berechneten $\frac{\Delta m}{\Delta P}$ mitteln, um daraus $\frac{\Delta n}{\Delta P} = \overline{\left(\frac{\Delta m}{\Delta P}\right)} \cdot \frac{\lambda}{2l}$ zu berechnen. Vor der Mittelung sollte die Verteilung der Werte in einem Histogramm begutachtet werden. In Anbetracht dessen, dass nur wenige Werte aufgetragen wurden, kann man i.a. keine eindeutige Aussage über die Art der Verteilung treffen. Durch die Mittelung erhält man allerdings keine Information darüber, inwieweit die Messwerte überhaupt mit der Annahme eines linearen Zusammenhangs übereinstimmen. Gemäß der Gleichung 3.6 sollte man bei einer Auftragung von Δm gegen ΔP eine Gerade mit konstanter Steigung $m = \frac{\Delta m}{\Delta P}$ erhalten. Für eine weitere Analyse bietet sich daher die Lineare Regression an.

Nach Literaturangaben beträgt die Druckabhängigkeit des Brechungsindex von Luft bei 22° :

$$n(P) = 1 + 2,655 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{hPa}} \cdot P \quad [3]$$

Vergleichen Sie die Messung mit der Erwartung. Man muss allerdings dabei beachten, dass Temperatur, Luftfeuchtigkeit und lokale Schwankungen der Zusammensetzung der Luft die Werte beeinflussen können und man somit, ohne Beachtung all dieser Faktoren keinen eindeutigen Vergleichswert verwenden kann.

3.6 Bestimmung des Brechungsindex von CO₂

3.6.1 Grundlagen

In diesem Versuchsteil soll mittels Michelson Interferometrie der Brechungsindex n_x eines Gases unter Normaldruck bestimmt werden. Man setzt dazu eine luftgefüllte Glasparzelle mit bekannten Brechungsindex n_{Luft} in einen der beiden Teilstrahlen. Wenn man allmählich die enthaltene Luft durch das Gas x ersetzt, kann die dadurch entstandene Änderung des optischen Weges anhand der Änderung der Interferenzringe bestimmt werden.

Da sich der Brechungsindex von Luft n_L vom Brechungsindex vom Gas x n_x unterscheidet, ändert sich durch den Gasaustausch die optische Pfadlänge $r_1 = n_1 \cdot s$ für den einen Teilstrahl um Δr , wobei die Strecke s konstant gehalten wird.

$$\text{optischer Weg vorher, mit Brechungsindex von Luft : } r_{Luft} = n_{Luft} \cdot s$$

$$\text{optischer Weg nachher, mit Brechungsindex von Gas } x : \quad r_x = n_x \cdot s$$

Die Änderungen werden definiert durch:

$$r_x = r_{Luft} + \Delta r, \quad n_x = n_{Luft} + \Delta n \quad \Rightarrow \Delta r = \Delta n \cdot s \quad (3.7)$$

Eine Änderung der Interferenzringe von Maximum zu Maximum $\Delta m = 1$ entspricht einer Änderung des optischen Weges Δr um $2 \cdot \Delta d = \lambda$, da der Teilstrahl zweimal, das bedeutet, vor und nach der Reflexion am Spiegel M_3 die Zelle mit geändertem Brechungsindex durchläuft. Indem man die Anzahl der durchlaufenen Maxima während des Gasaustausches zählt, kann die optische Wegänderung Δr bestimmt werden:

$$\Rightarrow \Delta r = \Delta m \cdot \lambda \quad (3.8)$$

Daraus ergibt sich mit Gleichung 3.7 die Änderung des Brechungsindex Δn :

$$\Rightarrow \Delta n = \frac{\Delta r}{s} = \frac{\Delta m \cdot \lambda}{s} = \frac{\Delta m \cdot \lambda}{2 \cdot l}$$

Die Strecke s entspricht damit der doppelten inneren Strecke l der Zelle $s = 2 \cdot l$. Ist der Brechungsindex des Ausgangsgases, in diesem Fall Luft, bei Außendruck P_a bekannt, so kann durch die bestimmte Verschiebung Δn der Brechungsindex des Austauschgases x bei Außendruck berechnet werden.

$$n_x = n_{Luft} + \Delta n$$

Im diesem Versuchsteil soll analog zum vorigen Kapitel 3.5 der Brechungsindex von CO₂ bestimmt werden. Da sich die Luft im Schnitt aus folgenden Bestandteilen zusammensetzt:

- 78% Stickstoff; Dichte: 1, 250 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- 21% Sauerstoff; Dichte: 1, 429 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- 0, 9% Argon; Dichte: 1, 784 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

- 0,04% Kohlenstoffdioxid; Dichte: $1,9767 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- 0,06% Spuren anderer Gase

ist CO₂ schwerer als der Hauptbestandteil der Luft und sinkt somit tendenziell ab. Wenn man daher CO₂ in die Glasparzelle strömen lässt und das eine Schlauchende geöffnet bleibt, jedoch höher als die Zelle selbst liegt, sollte das CO₂ nur langsam entweichen. Somit kann die Luft in der Zelle durch CO₂ ersetzt werden ohne dabei das System verschließen zu müssen und dadurch den Innendruck zu verändern.

3.6.2 Aufbau

Benötigte Bauteile:

- Grundaufbau
- 1 Glasparzelle, ggf. mit Halterung auf Magnetfuß
- 1 Gasflasche mit Ventil mit CO₂ gefüllt
- 2 Verbindungsschläuche ($d_i = 3 \text{ mm}$)
- 1 Klemme auf Magnetfuß

In den Grundaufbau wird zwischen ST und M₃ die Glasparzelle eingesetzt. Deren erste Öffnung ist mit der CO₂ Gasflasche verbunden, an die zweite Öffnung wird ein Schlauch angebracht, dessen offenes Ende mittels einer Klemme nach oben gehalten wird. Der Feinststelltrieb wird nicht verwendet. Der Versuch wird anhand der Abbildung 3.15 erklärt und durchgeführt.

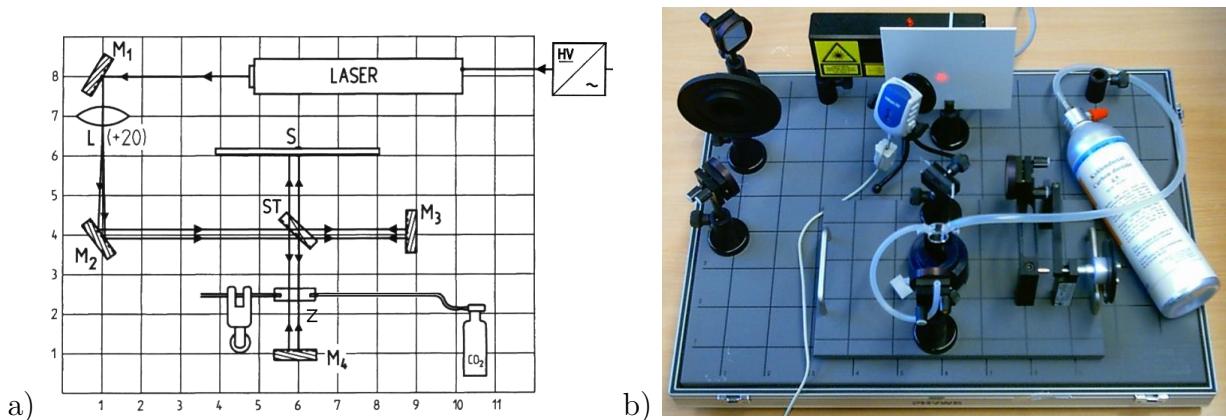


Abbildung 3.15: Aufbau zur Bestimmung des Brechungsindex von CO₂ unter Normaldruck.
a) Skizze der Versuchsanordnung [2], b) Foto der Anordnung.

3.6.3 Durchführung

Der Grundaufbau wird justiert und das Zentrum der Interferenzringe auf dem Schirm fokussiert. An die beiden Flansche der Glaszelle werden die dünnen Schläuche ($d = 3 \text{ mm}$) angeschlossen. Das eine Schlauchende wird mit dem Ventil der CO₂-Flasche verbunden, der andere Schlauch mit einer Klemme nach oben gehalten.

Beginnend bei einem Intensitätsmaximum im Zentrum der Interferenzringe lässt man das CO₂ in die Zelle strömen und zählt dabei die Anzahl der durchlaufenen Maxima Δm . Man muss jedoch das Ventil äußerst vorsichtig öffnen, da sonst das Gas zu schnell ausströmt und die Änderung der Ringe nicht mehr mitverfolgt werden kann. Die Zelle ist vollständig mit CO₂ gefüllt, wenn sich das Interferenzbild trotz hoher Ausströmgeschwindigkeit nicht mehr verändert.

Erfahrungsgemäß ist es äußerst schwierig, den Punkt der richtigen Ausströmgeschwindigkeit zu finden. Daher ist es empfehlenswert, den Schirm während der Durchführung mit der Kamera 3.4.2.2 abzuofilmen. Dadurch können die Änderungen der Interferenzringe wiederholt und verlangsamt zum Abzählen abgespielt werden.

Die Messung sollte mehrere Male wiederholt werden. Vor Beginn jeder Messung muss das System wieder komplett mit Luft gefüllt sein. Am einfachsten funktioniert dies, indem man mit der Handpumpe Luft durch das System strömen lässt.

3.6.4 Auswertung

Es sollten fünf bis zehn Messungen durchgeführt und abgefilmt werden. Da man bei der Messung zwar mit einem Intensitätsmaximum im Zentrum beginnt, jedoch sehr unwahrscheinlich auch bei einem Maximum endet, kann Δm nicht ganzzahlig angegeben werden. Am Endpunkt muss folglich abgeschätzt werden, welcher Bruchteil eines Intensitätsmaximums erreicht worden ist, z.B.

	Messung 1	Messung 2	Messung 3	Messung 4	Messung 5
Δm	3,25	4,50	4,50	4,25	4,50

Es wird dabei ein Binningfehler auf die Positionierung des Maximums zu Beginn von $\sigma_{m_{start}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} = 0,029$ angenommen, analog zu den vorherigen Versuchen. Der Status des Endpunktes ist jedoch relativ schwierig abzuschätzen, daher wird ein größerer Binningfehler angenommen $\sigma_{m_{end}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} = 0,072$.

Somit ergibt sich der Fehler auf die Bestimmung von Δm zu $\sigma_{\Delta m} = \sqrt{\sigma_{m_{start}}^2 + \sigma_{m_{end}}^2} = 0,077$.

Wenn man über die fünf Messergebnisse aus der Tabelle mittelt, ergibt sich

$$\overline{(\Delta m)} = 4,20 \quad \sigma_{\overline{\Delta m}} = 0,10 \quad \sigma_{\Delta m} = 0,48$$

Der Fehler auf den Einzelwert fällt hierbei viel größer aus als der abgeschätzte Wert. Allerdings ist eine Mittlung über 5 Werte auch nicht ausreichend aussagekräftig, ein stark abweichender Wert, beispielsweise bei Messung 1, kann das Ergebnis relativ stark beeinflussen.

Aus dem gemittelten Wert Δn berechnet man die Änderung des Brechungsindex:

$$\Delta n = \frac{\overline{\Delta m} \cdot \lambda}{2 \cdot l}$$

Der Fehler auf Δn ergibt sich durch Fehlerfortpflanzung aus dem Fehler auf den Mittelwert $\sigma_{\overline{\Delta m}}$:

$$\sigma_{\Delta n} = \frac{1}{2 \cdot l} \sigma_{\Delta r} = \frac{1}{2 \cdot l} \lambda \cdot \sigma_{\overline{\Delta m}}$$

Der Fehler auf die Zelleninnenlänge ist als nicht bekannt angenommen.

Die Messung wurde bei einem Außendruck von 992 hPa durchgeführt. Der entsprechende Brechungsindex von Luft wäre bei 22° ca. $n(P = 992 \text{ hPa}) = 1.000264$ [3] .

Der Brechungsindex von CO₂ bei Außendruck ist folglich:

$$\begin{aligned} n_{CO_2} &= n_{Luft} + \Delta n \\ &= 1.0002644 + (1,338 \pm 0,032)10^{-4} = 1,0003982 \pm 0,032 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Der Literaturwert für den Brechungsindex von CO₂ unter Normaldruck ist bei 20° : $n_{CO_2} = 1,000416$. [3]

Der gemessene Wert spricht innerhalb eines 1σ -Intervalls mit dem Literaturwert überein. Dies ist ein zufriedenstellendes Ergebnis.

3.7 Abschlussbemerkungen

Eine weitere interessante Anwendung des Michelson-Interferometers ist die Bestimmung von kleinen Wellenlängendifferenzen benachbarter Spektrallinien, z.B. der gelben Doppellinien von Hg oder Na.

Jede Wellenlänge der Dubletten hat ihr eigenes Ringsystem. Deren Überlagerung führt zu Intensitätsschwebungen. Man kann zeigen, dass die Wellenlängendifferenz $\Delta\lambda$ bestimmt werden kann durch:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2 \Delta d}, \quad (3.9)$$

wobei Δd der Abstand zwischen einem scharfen - und einem unscharfen, verwaschenen Interferenzmuster ist. Mit Hilfe der Gleichung 3.9 hat man auch ein Maß für das Auflösungsvermögen $\lambda/\Delta\lambda$ des Michelson-Interferometers.

Braucht der Experimentator ein sehr hohes Auflösungsvermögen, so wird er nicht das Michelson-Interferometer verwenden, sondern z.B. ein Vielstrahl-Interferometer a la Fabry-Perot.

3.8 Anhang

3.8.1 Anhang A: Phywe Bedienungsanleitung: DIN-Laser

Bedienungsanleitung DIN-Laser

Operation manual DIN Laser

Die vorliegende Bedienungsanleitung befaßt sich mit Helium-Neon-Lasern für den Einsatz im Unterricht an Schulen, die bei einer Wellenlänge von 632,8 nm emittieren (rot).

Der Laser ist ein Kompaktgerät mit eingebautem Netzteil, verfügt über eine Röhre in Glaslot-Technologie (nahezu unbegrenzte Lagerfähigkeit, zu erwartende Lebensdauer der Röhre > 18000 Betriebsstunden) und ist standardmäßig für eine Eingangsspannung von 230 V 50/60 Hz ausgelegt. Eine Eingangsspannung von 115 V ist als Option erhältlich. Je nach Modell verfügt der Laser über ein eingebautes Filter, das die Strahlleistung auf 0,2 mW (Grenzwert für den Einsatz eines Lasers an Schulen für Unterrichtszwecke) begrenzt. Durch Betätigung eines Drahtauslösers (gehört bei 08180.93 zum Lieferumfang) kann die Strahlleistung kurzzeitig auf ca. 1 mW angehoben werden. (Maximalwert der Laserklasse 2). Wird der Drahtauslöser freigegeben, schiebt eine Feder das Filter wieder in den Strahlengang und die Leistung geht auf 0,2 mW zurück.

Achtung

Die in den Spezifikationen angegebenen Ausgangsleistungen sind immer Mindestausgangsleistungen und gelten für fabrikneue Laser. Während des Betriebs eines Lasers steigt die Ausgangsleistung zunächst geringfügig an und stabilisiert sich dann. Es ist sichergestellt, daß die Grenzwerte der Laser-Schutzklasse 2 eingehalten sind.

Vorsichtsmaßnahmen beim Gebrauch von Lasern

Personen, die mit Lasern arbeiten, sowie alle Personen, die sich im Laserbereich aufhalten können, sind über die Gefahren, die von Laserstrahlung ausgehen können, zu informieren. Detaillierte Informationen enthalten die VBG93 der Berufsgenossenschaften, die DIN-Vorschrift VDE0837. Die VBG93 ist bei jeder Berufsgenossenschaft, die DIN-Vorschrift beim VDE-Verlag, bzw. beim Beuth-Vertrieb, Bonn und Berlin, zu beziehen. Schulungen zum Thema Laser-Sicherheit werden u. a. von der TU Braunschweig, Pockelsstraße 14, D-38106 Braunschweig angeboten.

Die Helium-Neon-Laserröhre, der Vorwiderstand der Röhre, das Netzteil und die Sicherungen befinden sich gekapselt im Gehäuse des Lasersystems. Der Benutzer hat auf diese Teile keinen Zugriff. Im Falle eines Defektes ist der Laser unbedingt zurückzusenden. Auf keinen Fall sollte der Benutzer das Gerät öffnen und selbst versuchen, den Fehler zu beheben. Die meisten Teile sind eingegossen und dadurch ohnehin nicht zugänglich.

Die Betriebs- und Zündspannung des Lasers sind u.U. lebensgefährlich und in dieser Anleitung näher spezifiziert. Unter keinen Umständen sollte das Gerät von Dritten geöffnet werden. Reparaturen dürfen nur durch autorisierte Stellen ausgeführt werden!

*Bedienungsanleitung DIN-Laser**Operation manual DIN Laser***Sicherheitshinweise**

- 1 Unter keinen Umständen direkt in den Laserstrahl sehen!
- 2 Der Betrieb des Lasers sollte nur in einem abgegrenzten Bereich erfolgen. Personen, die nicht über die Sicherheitsmaßnahmen bei Lasern belehrt wurden, sollten hier keinen Zutritt haben!
- 3 An der Grenze des Laserbereichs bzw. an den Eingangstüren sind die Laser-Warn-Symbole anzubringen.
- 4 Schirmen Sie den Weg des Laserstrahls nach Möglichkeit ab.
- 5 Bauen Sie Ihr Experiment so auf, daß der Laser nicht in Augenhöhe austreten kann.
- 6 Lassen Sie den Laserstrahl auf eine Zielfläche auftreffen, V-förmige, schwarze Zieltafeln haben sich am besten bewährt. Verhindern Sie durch eine zweckmäßige Anordnung des Experimentes Reflexionen, die unkontrolliert in den Raum gehen.

Die Laser Bestell-Nr. 08180.93. und 08181.93 fallen in die Laser-Schutzklasse 2 nach DIN VDE0837, d.h. die folgenden Sicherheitsmaßnahmen sind berücksichtigt:

- 1 **Geschlossenes Gehäuse**
Durch das verwendete robuste Aluminiumgehäuse ist der Austritt von Laserstrahlung sicher verhindert. Eine Gefährdung durch unkontrollierte Strahlung ist damit ausgeschlossen.
- 2 **Anzeige**
Der Betrieb des Lasers wird über eine Signalleuchte angezeigt, die sich oben auf dem Laser befindet. Sie leuchtet, wenn der Laser über den Schlüsselschalter eingeschaltet wurde und die Röhre gezündet hat, also Laserstrahlung emittiert wird.
- 3 **Warnhinweise**
Die vorgeschriebenen Hinweise zur Warnung vor Laserstrahlung befinden sich auf beiden Seiten des Gerätes. Außerdem ist an der Seite des Gerätes die Typenbezeichnung angebracht, aus dem die Leistung und elektrischen Daten hervorgehen.

Informationsstellen

Zusätzliche Informationen zum Thema Lasersicherheit erhalten Sie in Deutschland durch den Technischen Überwachungsverein (TÜV), die Berufsgenossenschaften, den VDE sowie durch die PTB Braunschweig.

*Bedienungsanleitung DIN-Laser**Operation manual DIN Laser***Spezifikationen****Optische Daten**

Mindestausgangsleistung (mW, TEM ₀₀ , 632,8 nm)	0,5
Strahldurchmesser (mm @ 1/e ²)	0,48
Strahldivergenz (mrad)	1,7
Mindestpolarisation	500 : 1
Longitudinaler Modenabstand (MHz)	1107

Amplitudenschwankungen

Max. Rauschen (% eff. 1kHz bis 10 MHz)	0,1
Max. Drift über 8 Stunden (%)	±2,5
Max. Modensweeping (%)	10
Max. Aufwärmzeit (Minuten)	2

Strahlrichtungsstabilität

bei kaltem Gerät (mrad)	<0,10
nach dem Aufwärmen (20 Minuten)	0,01

Laser-Schutzklasse nach VDE0837

Spannungsversorgung (VAC 50/60 Hz)	230 oder 115 -15% +10%
Leistungsaufnahme (VA)	35

(beim Einschalten

Betriebsspannung der Laserröhre (kV)	1,25
Zündspannung der Laserröhre (kV)	<10

Betriebsstrom der Laserröhre (mA)

4

Temperatur**Betrieb Lagerung**

0 bis +50°C -40 bis 100°C

Höhe bis 3000 m bis 23000 m

Relative Feuchte (ohne Kondensation) 0 bis 100% 0 bis 100%

Schock 25 g 11 msec 25 g 11 msec

100 g 1 msec 100 g 1 msec

Zu erwartende Lebensdauer der Laserröhre (kann ersetzt werden)

18000 h

Mindestlagerfähigkeit unbegrenzt
(Glaslot)

*Bedienungsanleitung DIN-Laser**Operation manual DIN Laser***Betrieb und Wartung**

Bevor Sie den Laser in Betrieb nehmen, überzeugen Sie sich, daß der Schlüsselschalter in senkrechter Position steht (damit ist der Laser ausgeschaltet). Vergewissern Sie sich, daß die Netzspannung mit der auf der Typenbezeichnung angegebenen Netzspannung übereinstimmt. Stecken Sie den Schuko-Stecker in eine Steckdose mit Schutzkontakt. Für einen sicheren Betrieb des Lasers ist es unbedingt erforderlich, daß das Gerät geerdet ist, d. h. es darf nur an Steckdosen mit Schutzkontakt betrieben werden. Nach dem Einschalten des Schlüsselschalters (horizontale Position) ist der Laser eingeschaltet und nach einer Verzögerung von max. 5 sec leuchtet die Signalleuchte und der Laserstrahl wird emittiert. Dabei ist die Leistung bei dem Laser Bestell-Nr. 08180.93 auf 0,2 mW begrenzt. Erst wenn Sie mit dem Drahtauslöser das Filter aus dem Strahlengang schieben, beträgt die Ausgangsleistung etwa <1 mW (Die Leistung 1 mW darf nicht überschritten werden). Das Filter soll nur dann aus dem Strahlengang gedrückt werden, wenn es für das Experiment unbedingt erforderlich ist.

Haben Sie den Laser entsprechend der vorstehenden Beschreibung in Betrieb genommen und der Laser funktioniert nicht, sollten Sie noch einmal sorgfältig alle Verbindungen überprüfen und ob die verwendete Steckdose Spannung führt. Unter keinen Umständen sollten Sie den Laser öffnen! Falls das Gerät weiterhin nicht arbeitet, schicken Sie es bitte unter Beachtung der Gewährleistungsbedingungen an Phywe Systeme GmbH zurück.

Gewährleistungsbedingungen

Die Gewährleistungsfrist für Laser Bestell Nr. 08180.93 und 08181.93 beträgt 12 Monate ab Lieferdatum und beschränkt sich auf nachweisbare Material- und/oder Fertigungsfehler. Geräte, die zur Reparatur eingeschickt werden, sind franko, gut verpackt (am besten in der Originalverpackung) einzusenden:

Phywe Systeme GmbH
Robert-Bosch-Breite 10
D-37079 Göttingen
Tel: 0551 604-0 Fax: 0551 6041 15 oder 6041 07

Bei allen Reparaturen wird nach Wahl des Herstellers das defekte Gerät entweder nachgebessert oder kostenfreier Ersatz geliefert. Darüberhinaus gehende Ansprüche sind ausdrücklich ausgeschlossen. Die Reparatur oder Ersatzlieferung verlängert die ursprüngliche Gewährleistungsfrist nicht.

Beachten Sie, daß für die Rücksendung eine einwandfreie Verpackung verwendet wird. Transportschäden sind durch die Gewährleistung nicht gedeckt und verhindern oftmals eine Fehlerdiagnose, so daß die Reparatur nur gegen Berechnung ausgeführt werden kann.



Grüner Laser 0,2/1,0 mW, 532 nm

08762.99

PHYWE Systeme GmbH & Co. KG
Robert-Bosch-Breite 10
D-37079 Göttingen
Telefon +49 (0) 551 604-0
Fax +49 (0) 551 604-107
E-mail info@phywe.de
Internet www.phywe.de

Betriebsanleitung

Das Gerät entspricht den zutreffenden EG-Rahmenrichtlinien.

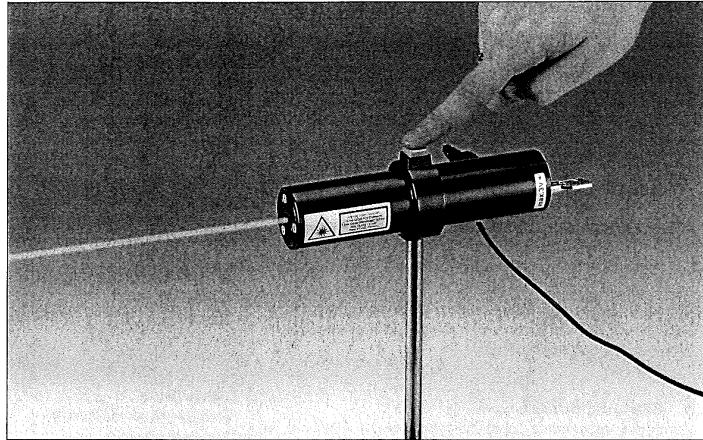


Abb. 1: Grüner Laser 0,2/1,0 mW, 532 nm 08762.99.

1 GEFahrenHINWEISE

Laserstrahlung
nicht in den Strahl blicken
Laser Klasse 2
entsprechend DIN EN 60825-1

Klasse 2

**Warnung**

- Vorsicht – wenn andere als die hier angegebenen Bedienungs- oder Justiereinrichtungen benutzt oder andere Verfahrensweisen ausgeführt werden, kann dies zu gefährlicher Strahlungsexposition führen.
- Das Gerät ist nur zum Betrieb in trockenen Räumen, die kein Explosionsrisiko aufweisen, vorgesehen.
- Das Gerät nicht in Betrieb nehmen, wenn Beschädigungen am Gerät sichtbar sind.
- Verwenden Sie das Gerät nur für den dafür vorgesehenen Zweck.

1.1 Schutzmaßnahmen und Verhaltensregeln

Alle Versuche sind mit der jeweils geringsten, notwendigen Laserleistung durchzuführen. Bei Beobachtungen der im jeweiligen Experiment erzeugten Bilder bzw. Figuren im diffusen, gestreuten oder gebrochenen Laserlicht darf die Blendungsgrenze in keinem Fall überschritten werden. Beim Aufbau von Versuchen dürfen nur Personen beteiligt bzw. zugegen sein, die über die Gefahren des Laserlichts vorher ausreichend unterrichtet worden sind. Auch der Personenkreis,

der an der Beobachtung von Laserversuchen teilnimmt, ist über die Gefahr des Laserlichts, insbesondere beim direkten Blick in den Laserstrahl zu unterrichten.

Die Versuche sind so aufzubauen, dass der Laser nicht in Augenhöhe austreten kann.

Der Laserbereich ist durch eine Abschirmung auf das notwendige Maß zu begrenzen. Er muss durch mechanische Vorrichtungen (z.B. Scherengitter, Seile) gegen unbefugtes Betreten gesichert sein.

Räume, in denen mit Lasern experimentiert wird, müssen während des Betriebs durch Laserwarnschilder gekennzeichnet sein.

Niemals direkt in den Laserstrahl blicken, auch dann nicht, wenn er z.B. durch vorgesetzte Linsen in seinem Durchmesser aufgeweitet ist. Die zu untersuchenden optischen Erscheinungen sollten stets auf einem Projektions- oder Transparentschirm beobachtet werden, bei dem durch diffuse Reflexion bzw. Streuung die Bestrahlungsstärke des beobachtenden Auges auf einen unbedenklichen Wert reduziert ist.

Alle im Strahlengang befindlichen optischen Vorrichtungen sind so zu befestigen, dass eine unbeabsichtigte Änderung ihrer Lage nicht möglich ist; vorsätzliche Änderungen sind bei reduzierter Ausgangsleistung (0,2 mW) so umsichtig durchzuführen, dass keine Personen gefährdet werden, z.B. durch Reflexion des Strahles, die auch an nicht zum Versuchsaufbau gehörenden Gegenständen erfolgen kann.

2 ZWECK UND EIGENSCHAFTEN

Bei diesem Gerät handelt es sich um einen diodengepumpten, frequenzverdoppelten Yttrium-Vanadat (Nd:YVO₄) Festkörperlaser. Der Laser dient zur Erzeugung eines monochromatischen (grünen), kohärenten, polarisierten Lichtbündels mit extrem geringer Divergenz und geringem Quer-

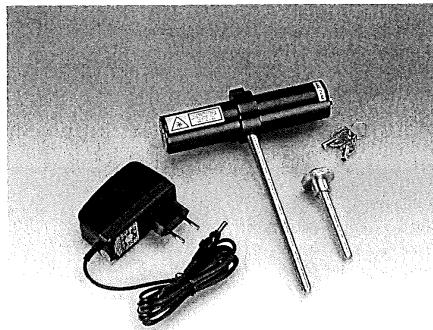


Abb. 2: Grüner Laser 0,2/1,0 mW, 532 nm mit Zubehör.

schnitt. Er eignet sich daher insbesondere als Lichtquelle für Versuche aus dem Gebiet der Wellenoptik (Beugungsscheinungen und Interferenz).

3 BESCHREIBUNG

Durch das verwendete lichtdicht geschlossene Gehäuse ist der Austritt von unkontrollierter Strahlung sicher verhindert. Der Anschluss an das Netz erfolgt über das zum Lieferumfang gehörige Steckernetzteil. Zum Aufstellen des Lasers in einem Stativfuß, dem Reiter einer optischen Bank oder dem Magnetrührfuß für die optische Platte wird in das Gehäuse einer der (zum Lieferumfang gehörenden) 10-mm Stiele eingesetzt. Der Stiel kann über die Querbohrung mit dem beiliegenden Winkelschraubendreher als Hebel fest angezogen werden. Die Stielängen sind so gewählt, dass die Mitte der Lichtaustrittsöffnung entweder 180 mm über dem unteren Stielende liegt – passend zu den auf der optischen Bank verwendeten Bauteilen – oder aber 130 mm über dem Stielende – passend zu den auf der optischen Grundplatte verwendeten Bauteilen.

4 HANDHABUNG

Bevor man den Laser in Betrieb nimmt, haltere man ihn in einem Stativfuß bzw. im Reiter einer optischen Bank. Der Laser ist so aufzustellen, dass der Laserstrahl niemandem in die Augen treffen kann (siehe Pkt. 1, Gefahrenhinweise). Der Laser darf nur über das mitgelieferte Steckernetzteil (max. Ausgangsspannung 3 VDC) mit einer Netzsteckdose verbunden und mit Hilfe des rückseitigen Schlüsselschalters in Betrieb genommen werden. Die Kontrolleuchte zeigt den Einschaltzustand an. Der Austrittswinkel des Strahls kann über 3 Innensechskantschrauben (2,5 mm) mit dem beiliegenden Winkelschraubendreher justiert werden. Dabei ist zu beachten, dass die Jusierschrauben nur um max. 5 Umdrehungen herausgeschräubt werden und keinesfalls über die äußere Begrenzung des Lasergehäuses herausragen.

Die Laserleistung ist durch eine elektronische Schaltung auf max. 0,2 mW begrenzt. Durch Drücken auf den oben am Gehäuse befindlichen grünen Taster wird die Laserleistung auf max. 1 mW erhöht. Diese Erhöhung ist nur aktiv, solange der Taster gedrückt wird. Durch Loslassen des Tasters wird die Leistung wieder auf max. 0,2 mW begrenzt.

08762.99/1207

5 BETRIEBSHINWEISE

Der Betrieb dieses Gerätes ist nur unter fachkundiger Aufsicht in einer beherrschten elektromagnetischen Umgebung von Forschungs-, Lehr- und Ausbildungsstätten (Schulen, Universitäten, Instituten und Laboratorien) erlaubt.

Dies bedeutet, dass in einer solchen Umgebung Sendefunk-einrichtungen, wie z.B. Mobiltelefone nicht in unmittelbarer Nachbarschaft verwendet werden dürfen. Die einzelnen angeschlossenen Leitungen dürfen nicht länger als 2 m sein. Durch elektrostatische Aufladungen o.ä. elektro-magnetische Phänomene (HF, Burst, indirekte Blitzentladungen usw.) kann das Gerät beeinflusst werden, so dass es nicht mehr innerhalb der spezifizierten Daten arbeitet. Folgende Maßnahmen vermindern bzw. beseitigen den störenden Einfluss:

Teppichboden meiden; für Potenzialausgleich sorgen; Experimentieren auf einer leitfähigen, geerdeten Unterlage, Verwendung von Abschirmungen, abgeschirmte Kabel, Hochfrequenzsender (Funkgeräte, Mobiltelefone) nicht in unmittelbarer Nähe betreiben.

6 TECHNISCHE DATEN

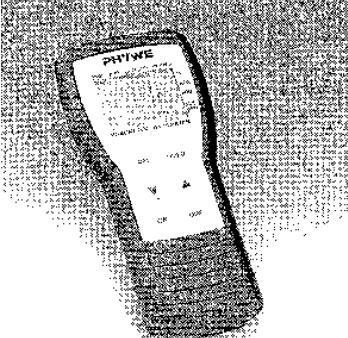
Laser	diodengepumpter, frequenzverdoppelter Yttrium-Vanadat (Nd:YVO ₄) Festkörperlaser
Bauart	
Wellenlänge	532 nm, linear polarisiert
Reduzierte Ausgangsleitung	0,2 mW
Maximale Ausgangsleitung	< 1,0 mW
Strahldivergenz	< 2 mrad
Schutzklasse nach	Laser Klasse 2
VDE 0837	
Versorgungsspannung des Lasermoduls	max. 3 VDC
Spannaufnahme	ca. 250 mA
Gehäusemaße (mm)	ca. 45 x 155 (D, L)
Masse	ca. 214 g
Steckernetzteil	
Netzspannungsversorgung	100...240 VAC
Netzfrequenz	50/60 Hz
Ausgangsspannung	max. 3 VDC
Leistungsaufnahme	ca. 4 VA mit Laser

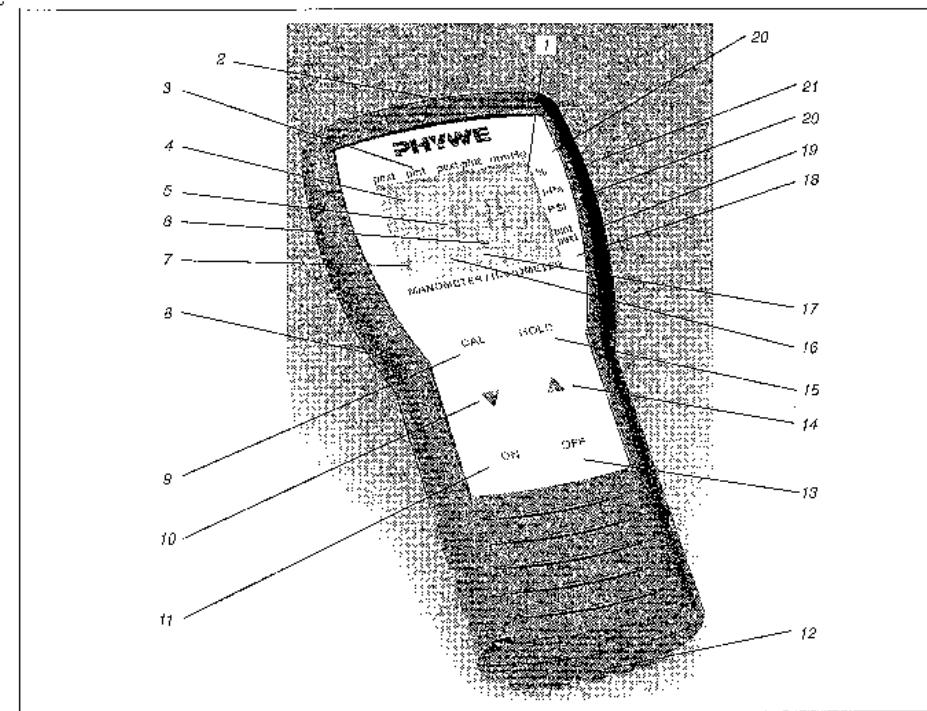
7 GARANTIEHINWEIS

Für das von uns gelieferte Gerät übernehmen wir innerhalb der EU eine Garantie von 24 Monaten, außerhalb der EU von 12 Monaten; sie umfasst nicht den natürlichen Verschleiß sowie Mängel, die durch unsachgemäße Behandlung entstehen.

Der Hersteller kann nur dann als verantwortlich für Funktion und sicherheitstechnische Eigenschaften des Gerätes betrachtet werden, wenn Instandhaltung, Instandsetzung und Änderungen daran von ihm selbst oder durch von ihm ausdrücklich hierfür ermächtigte Stellen ausgeführt werden.

3.8.2 Anhang B: Phywe Betriebsanleitung: Handmeßgerät Druck und Drucksensor

 Handmeßgerät Druck Drucksensor 1 0...1300 hPa Drucksensor 2 500...7000 hPa	07136.00 07136.01 07136.02
<p>PHYWE SYSTEME GMBH Robert-Bosch-Strasse 10 D-37079 Göttingen</p> <p>Telefon (0551) 604-0 Telefax (0551) 604-107</p> <p> Das Gerät entspricht den zutreffenden EG-Rahmenrichtlinien.</p> <p></p> <p>Betriebsanleitung</p> <p>1 ZWECK UND EIGENSCHAFTEN 2 FUNKTIONS- UND BEDIENELEMENTE 3 HANDHABUNG 3.1 Anschluß der Elektroden 3.2 Stromversorgung 3.3 Ein- und Ausschalten, Displaytest 3.4 Einstellung der Digitalanzeigen und der Sonderfunktionen 3.5 Eingabe der Kalibrierdaten des angeschlossenen Drucksensors 3.6 Umschalten zwischen hPa, psi und mmHg (Torr) 3.7 Einstellung der Analoganzeige - Einstellung des Maximalwertes - Einstellung des Minimalwertes 3.8 Darstellung der Maxima, Minima und Mittelwerte 3.9 Einsatz des Datenloggers (Meßwertspeicher) - Manuelle Speicherung des aktuellen Meßwertpaars - Einstellung der automatischen Meßwertaufnahme - Löschen des Datenloggers - Anzeige der Anzahl der freien Speicherplätze 3.10 Externe Darstellung der Meßwerte - Anschluß der Digitalen Großanzeige - Anschluß an einem PC 3.11 Kopplung von Handmeßgeräten (Fernsteuerung)</p> <p>4 TECHNISCHE DATEN 5 ZUBEHÖR - Sensoren - Stromversorgung - Aufbewahrung - Peripheriegeräte, Software</p> <p>6 GARANTIEHINWEIS 7 BETRIEBSHINWEISE</p> <p>1 ZWECK- UND EIGENSCHAFTEN Mit diesem Handmeßgerät können Absolutdruck (externer Sensor), Luftdruck (interner Sensor) und Differenzdruck sowohl im Labor als auch im Freiland gemessen und ausgewertet werden. Die wichtigsten Eigenschaften sind: - großes Flüssigkristalldisplay (40 x 50 mm) mit einer großen und einer kleinen, jeweils vierstelliger Digitalanzeige (15 bzw. 7,5 mm Ziffernhöhe), sodaß z.B. Absolutdruck und Luftdruck gleichzeitig angezeigt werden können - analoge Balkenanzeige mit sehr guter Auflösung (2 %) um Meßwertänderungen besser verfolgen zu können - Datenschnittstelle (RS 232) zur Übertragung der Meßwerte auf einen Computer bzw. auf einer Großanzeige. Spezielle Windows-Software, - hohe Datenübertragungsrate (Baudrate): 9600 Bit/s - eingebauter Datenlogger für 250 Meßwerte, sodaß im Freiland durchgeführte Messungen im Labor weiter ausgewertet werden können - ergonomisch geformtes Gehäuse mit robuster, spritzwassergeschützter Folientastatur, speziell entwickelt für Einhandbedienung - Mikroprozessorsteuerung für alle Meß-, Bedien- und Auswertefunktionen - viele Zusatzfunktionen, wie z.B. Einfrieren der Meßwerte (hold), Darstellung und Speicherung der Minimal-, Maximal- und Mittelwerte, Kalibrierungen, automatische Meßwertaufnahme usw. - Betrieb über 9-V-Blockbatterie, Akku oder externe Stromversorgung, Batteriekapazitäts-Anzeige und automatische Abschaltung bei längerer Nichtbenutzung. - Als Zubehör lieferbar ist eine spezielle vierstellige Großanzeige (Ziffernhöhe 56 mm) zur Meßwertdarstellung für ein größeres Publikum</p>	



2 FUNKTIONS- UND BEDIENELEMENTE

- 1 Flüssigkrystaldisplay
Anzeige (40x50 mm) zur Darstellung der Meß- und Bedienfunktionen
- 2 Anschluß für Drucksensor
5-polige Diodonbuchse zum Anschluß eines externen Drucksensors (07136.01 bzw. 07136.02)
- 3 Meßgröße in der großen Digitalanzeige
Anzeige der momentan angezeigten Meßgröße: p_{ext} (Absolutdruck, im externen Sensor gemessen), p_{int} (Luftdruck, Sensor im Handmeßgerät), $p_{ext} - p_{int}$ (Druckdifferenz)
- 4 Analoge Balkenanzeige
Analoga Darstellung des Meßwertes der großen Digitalanzeige zur besseren Verfolgung von Meßwertänderungen
- 5 Große Digitalanzeige
Vierstellige Digitalanzeige mit 15 mm Ziffernhöhe und Gleitkomma
- 6 Kleine Digitalanzeige
Vierstellige Digitalanzeige mit 7,5 mm Ziffernhöhe und Gleitkomma
- 7 Batterieanzeige
Anzeige des Ladezustandes der Batterie bzw. des Akkus (leer, 1/4, 1/2, 3/4, voll)

8 Datenschnittstelle RS 232

USB-Buchse zum Anschluß des RS 232-Datenkabels 07157.01 zur Übertragung der Meßdaten an die Großanzelge 07157.93 bzw. an den seriellen Port eines Computers. Ein Datenaustausch mit anderen Handmeßgeräten zur synchronen Meßwertaufnahme ist ebenfalls über die USB-Buchse möglich.

9 Taste CAL

Wechselt von der Funktionsliste (HOLD) in den Kalibriermodus bzw. ruft weitere Sonderfunktionen auf

10 Taste AB

Wechselt zu niedrigeren Ziffern bzw. zur links danebenstehenden Sonderfunktion

11 Taste ON

Schaltet das Handmeßgerät ein

12 Batteriefach-Deckel

Zum Auswechseln der 9-V-Blockbatterie (07496.10) bzw. des 9-V-Akkus (07925.02)

13 Taste OFF

Schaltet das Handmeßgerät aus bzw. führt zum Verlassen des Menüs ohne Datenspeicherung

14 Taste AUF

Wechselt zu höheren Ziffern bzw. zur rechts danebenstehenden Sonderfunktion

15 Taste HOLD

Friert den Meßwert ein und bildet den Ausgangspunkt für den Aufruf weiterer Funktionen

16 Sonderanzeigen ERROR, REMOTE und LINK

ERROR leuchtet auf bei einer falschen Eingabe bzw. bei einem Fehler im Gerät; REMOTE leuchtet auf wenn die Meßwertauflnahme von einem anderen Handmeßgerät ferngesteuert wird; LINK leuchtet auf wenn das Gerät ein anderes Handmeßgerät fernsteuert (zur synchronen Meßwertaufnahme).

17 Sanduhr

Leuchtet kurz auf wenn eine automatische Meßwertaufnahme bzw. eine manuelle Speicherung ausgelöst wird und leuchtet dauernd wenn der Datenlogger voll ist.

18 Funktionsleiste HOLD, CAL, MODE, SET, AVG, MIN und MAX

HOLD und CAL leuchten auf wenn die entsprechenden Tasten gedrückt werden; MODE stellt den Ausgangspunkt zur Einstellung der LINK- und REMOTE-Funktionen dar; SET erlaubt z.B. die Einstellung des Datenloggers; bei AVG, MIN und MAX werden der Mittelwert, das Minimum und das Maximum der Meßwertreihe angezeigt bzw. eingestellt.

19 Meßgröße in der kleinen Digitalanzeige

Anzeige der momentan angezeigten Meßgröße (p_{int} bzw. p_{ext})

20 Einheit der großen und kleinen Digitalanzeige

Anzeige der Einheit der angezeigten Meßwerte: hPa, psi, mmHg (Torr)

21 Einheit der Analoganzeige

Analoge Darstellung des Meßwertes der großen Digitalanzeige in % des eingestellten Meßbereichs

3 HANDBEHABUNG

Zur besseren Übersicht werden die Erklärungen im Text mit Hilfe von Symbolen am Textrand nochmal wiederholt. Die Kreise stellen die Tasten dar, die gedrückt werden müssen. Dazwischen sind die Texte dargestellt, die daraufhin im Display erscheinen müssen. Ist letzteres nicht der Fall, wurde die Taste nicht richtig gedrückt!

3.1 Anschluß der Sensoren

Zur Messung des Absolutdrucks p_{abs} wird ein Drucksensor (07136.01 bzw. 07136.02) an der Druckbuchse 2 des Meßgeräts angeschlossen. Drucksensoren müssen möglichst nahe am Meßort positioniert werden. Der Anschlußschlauch sollte möglichst kurz und von geringem Innendurchmesser sein (z.B. Gummischlauch 38250.00). Die Sensoren sind dorthin mit einem 1,5-m-Anschlußkabel und einem Gewinde-Anschluß für Stativstangen ausgestattet.

Der Sensor zur Messung des Luftdrucks befindet sich im Gehäuse des Handmeßgeräts (p_{int}).

3.2 Stromversorgung

Vor der ersten Inbetriebnahme muß eine 9-V-Batterie (07496.10) oder ein 9-V-NIMH-Akkumulator (07925.02) in das Batteriefach eingesetzt werden. Hierzu wird der Batteriefachdeckel 12 seitlich herausgeschoben. Die Ausführung der Druckpolkontakte gewährleistet den richtigen Anschluß der Batterie bzw. des Akkus.

Hinweis: Um Korrosionsschäden zu vermeiden, sollte eine verbrauchte Batterie nicht im Gerät vorbleiben.

Batteriesparschaltung: 60 min nach der letzten Benutzung wird das Gerät automatisch abgeschaltet. Ist das Handmeßgerät an der Großanzeige 07157.93 angeschlossen, erfolgt die Stromversorgung zwar über dieses Gerät, eine automatische Abschaltung findet jedoch ebenfalls statt. Lediglich in den Betriebsarten „automatische Meßwertaufnahme“ und „Fernsteuerung (REMOTE und LINK)“ wird nicht nach einer Stunde abgeschaltet.

3.3 Ein- und Ausschalten, Displaytest/Funktions-test

Das Gerät wird durch Drücken der ON-Taste 11 eingeschaltet. Im Display erscheint zunächst die Nummer der Gerätointernen Software (z.B. r 1.0) und anschließend die Grund-einstellung. Links unten im Display wird der Ladestand 7 der Batterie bzw. des Akkus in 5 Stufen angezeigt (leer, 1/4, 2/4, 3/4 bzw. voll).



Durch Drücken der OFF-Taste 13 in der Grundeinstellung (Funktions-leiste noch eingeschaltet) wird das Gerät wieder ausgeschaltet. In den Einstellmenüs wird durch Drücken der OFF-Taste die Grundinstellung aufgerufen. Eine Abspeicherung der Daten unterbleibt in diesem Fall.



Werden beim Einschalten die ON-Taste 11 und die AUF-Taste 14 gleichzeitig gedrückt, so wird zuerst ein Display- und Funktionsrest durchgeführt.

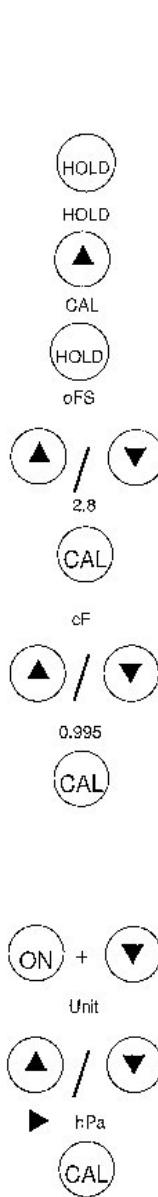
**3.4 Einstellung der Digitalanzeigen und der Sonderfunktionen**

Mit Hilfe der Tasten AUF 14 bzw. AB 10 kann die große Digitalanzeige 5 auf p_{ext} , p_{int} oder $p_{ext} - p_{int}$ eingesetzt werden. In der kleinen Digitalanzeige 6 kann nur p_{int} oder p_{ext} aufrufen werden. Fehlt der externe Drucksensor, so werden in der entsprechenden Anzeige Striche dargestellt.



Durch Drücken der Taste HOLD 15 und anschließend der Tasten AUF bzw. AB können die einzelnen Funktionen der Funktionsleiste HOLD, CAL, MODE, SET, AVG, MIN und MAX 18 aufgerufen werden (Funktionsbeschreibung siehe unten). Durch erneutes Drücken der HOLD-Taste in der AVG-Stellung bzw. der OFF-Taste kehrt das Display wieder in die Grundeinstellung zurück.





3.5 Eingabe der Kalibrierdaten des angeschlossenen Drucksensors

Jeder Drucksensor wird im Werk kalibriert. Das Ergebnis wird auf der Rückseite des Sensorgehäuses dargestellt (o_{FS} -Wert und c_f -Wert). Diese Kalibrierdaten müssen vor der ersten Messung bzw. beim Wechsel des Drucksensors eingegeben werden.

Werden die HOLD-, die AUF- und wiederum die HOLD-Taste nacheinander gedrückt, so leuchtet in der Funktionsleiste das Zeichen CAL auf und in der kleinen Digitalanzeige o_{FS} .

In der großen Digitalanzeige kann nun mit Hilfe der AUF/AB-Tasten der o_{FS} -Wert eingegeben werden. Dieser Wert wird mit der CAL-Taste bestätigt und es erscheint die Bezeichnung o_{FS} in der kleinen Digitalanzeige.

Mit den AUF/AB-Tasten kann nun der auf der Rückseite des Sensorgehäuses angegebene c_f -Wert eingegeben werden. Nach der Bestätigung mit der CAL-Taste werden die neuen Kalibrierdaten abgespeichert und das Display kehrt in die Grundinstellung zurück. Wird dagegen anstelle der CAL-Taste die HOLD-Taste gedrückt, so kehrt das Display sofort (jhno Änderung der Kalibrierdaten) in die Grundeinstellung zurück.

3.6 Umschaltung zwischen hPa, psi und mmHg (Torr)

Werden beim Einschalten des Geräts die ON- und AB-Tasten gleichzeitig längere Zeit gedrückt, so erscheint in der kleinen Digitalanzeige die Bezeichnung Unit. Mit den AUF/AB-Tasten kann nun zwischen den Druck-Einheiten hPa, psi und mmHg (=Torr) hin und her geschaltet werden (siehe Kap. 2.20). Die ausgewählte Einheit wird durch Drücken der CAL-Taste bestätigt. Diese Einstellung bleibt beim Ausschalten des Geräts bzw. bei einem Batterietausch erhalten.

3.7 Einstellung der Analoganzeige

Mit Hilfe der Maximal- und Minimalwerte ist es möglich den Darstellungsbereich der Analoganzeige zu optimieren. Dazu muß die einzustellende Meßgröße vorher mit Hilfe der AUF/AB-Taster in die große Digitalanzeige aufgerufen werden.

Einstellung des

Maximalwertes der Analoganzeige
Werden die HOLD-, die AB- und wiederum die HOLD-Taste hintereinander gedrückt, so läßt sich der gewünschte Maximalwert der Analoganzeige 4 mit Hilfe der AUF- bzw. AB-Tasten einstellen. Dieser neue Wert wird mit Hilfe der CAL-Taste bestätigt und abgespeichert (update) und das Display kehrt in die Grundinstellung (ohne Funktionstasto) zurück. Wird anstelle der CAL-Taste die HOLD-Taste gedrückt, so kehrt das Display sofort (ohne update) in die Grundinstellung zurück.

Einstellung des Minimalwertes der Analoganzeige

In nahezu identischer Art wird auch der Minimalwert der Analoganzeige eingestellt. Lediglich der Aufruf des Minimalwertes erfolgt mit HOLD und 2xAB und HOLD anders.

Achtung: Der Minimalwert kann nicht höher als der jeweilige Maximalwert eingestellt werden (ERROR leuchtet auf).

3.8 Darstellung der Maxima, Minima und Mittelwerte



Werden die HOLD- und die AB-Tasten nacheinander gedrückt, so leuchtet in der Funktionsleiste das Zeichen MAX auf und in der großen und der kleinen Digitalanzeige werden die Maxima angezeigt. Durch erneutes Drücken der AB-Taste leuchtet in der Funktionsleiste das Zeichen MIN auf und die Minima werden dargestellt. Wird anschließend ein weiteres Mal die AB-Taste gedrückt, so leuchtet das Zeichen AVG (average) auf und die Mittelwerte werden dargestellt. Durch Drücken der CAL-Taste werden die Maxima und Minima auf den letzten Meßwert zurückgesetzt und das Display kehrt in die Grundeinstellung zurück. Wird anstelle der CAL-Taste die HOLD-Taste gedrückt, so kehrt das Display sofort (jhno reset) in die Grundeinstellung zurück.

Die Maxima, Minima und Mittelwerte beziehen sich stets auf die gesamte Meßreihe, d.h. auf alle seit dem letzten Einschalten gemessenen Werte.

3.9 Einsatz des Datenloggers

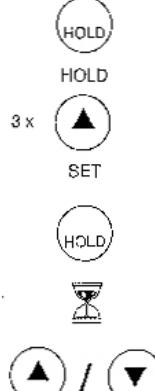
(Meßwertspeicher)

Manuelle Speicherung des aktueller Meßwerteintraages

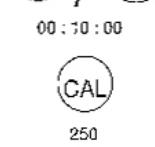
Wird die HOLD-Taste zweimal hintereinander gedrückt, so werden die Meßwerte der großen und kleinen Digitalanzeige im Datenlogger abgespeichert. Zum Zeichen der erfolgten Abspeicherung leuchtet die Sanduhr 17 kurz auf. Sind alle 250 Speicherplätze des Datenloggers belegt, so leuchtet die Sanduhr solange auf bis der Speicher gelöscht worden ist. Dieser Speicher-Reset und auch die Abfrage der noch freien Speicherplätze erfolgt in der Funktion SET (siehe unten). Achtung: In der Betriebsart REMOTE (siehe 3.11) ist eine manuelle Abspeicherung nicht möglich.

Einstellung der automatischen Meßwertaufnahme

Werden die HOLD-Taste, dreimal die AUF-Taste und wiederum die HOLD-Taste hintereinander gedrückt, so leuchten das Zeichen SET und die Sanduhr auf. Nun kann mit Hilfe der AUF/AB-Tasten das Meßintervall für die automatische Meßwertaufnahme eingestellt werden. In der großen Digitalanzeige werden die Stunden und Minuten eingegeben, in der kleinen Digitalanzeige die Sekunden (z.B. bedeutet 00:10:00 daß alle 10 min eine Messung durchgeführt wird).



Folgende Festwerte sind einstellbar: 6, 5, 4, 3, 2, 1 Std, 50, 40, 30, 20, 10, 5, 2, 1 min, 50, 40, 30, 20, 10, 5, 2, 1 s.



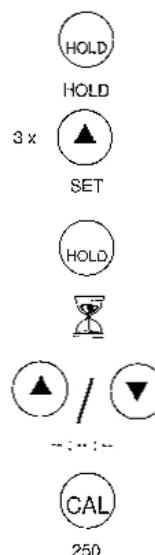
Mit der CAL-Taste wird dieser Wert bestätigt, der Datenlogger wird gelöscht (250 freie Speicherplätze werden kurz angezeigt) und die automatische Meßwertaufnahme wird gestartet. Der Datenlogger wird gefüllt (Sanduhr leuchtet bei jeder Meßwertaufnahme kurz auf) und das Display kehrt in die Grundeinstellung zurück. Ist der Datenlogger voll, so leuchtet die Sanduhr dauernd auf.

Die automatische Meßwertaufnahme wird beendet wenn der Datenlogger voll ist oder durch Ausschalten des Geräts. Freie Speicherplätze können durch manuelle Speicherung von Meßwerten (siehe oben) genutzt werden. Eine erneute Aktivierung der automatischen Meßwertaufnahme ist dagegen immer mit einem Löschen des Speicherinhalts verbunden.

Achtung: In der Betriebsart REMOTE ist die Einstellung der automatischen Meßwertaufnahme sinnlos, da das Gerät von einem anderen Handmeßgerät ferngesteuert wird (siehe 3.11).

Löschen des Datenloggers

Soll der Datenlogger nur gelöscht, jedoch keine automatische Meßwertaufnahme gestartet werden, so darf kein Meßintervall eingegeben werden (Striche in der großen und kleinen Digitalanzeige). Nach dem Drücken der CAL-Taste werden die 250 freien Speicherplätze kurz angezeigt und das Display kehrt in die Grundeinstellung zurück. Wird das Gerät von der Stromversorgung getrennt (Batteriewechsel), bleiben die Daten im Datenlogger erhalten.

**Anzeige der Anzahl der freien Speicherplätze**

Soll nur die Anzahl der freien Speicherplätze angezeigt, jedoch keine Löschung des Datenloggers durchgeführt werden, so müssen die HOLD- und 3x die AUF-Taste nacheinander gedrückt werden. Die Anzahl der freien Speicherplätze kann dann in der großen Digitalanzeige abgelesen werden. Nach ca. 1 min kehrt das Display automatisch in die Grundeinstellung zurück.

3.10 Externe Darstellung der Meßwerte**Anschluß der Digitalen Großanzeige**

Mit Hilfe des RS 232-Datenkabels 07157.01 kann das Handmeßgerät an der digitalen Großanzeige 07157.93 angeschlossen werden. Diese vierstellige Großanzeige zeigt stets den Meßwert der gerade in der großen Digitalanzeige des Handmeßgeräts angezeigt wird. Da die Höhe der Ziffern und der Einheit 56 mm beträgt, ist diese Anzeige sogar in großen Hörsälen einsetzbar.

Nicht nur sämtliche Geräte der PHYWE-Handmeßgeräte-Familie können an dieser Großanzeige angeschlossen werden, sondern auch viele Sartorius- und Salterec-Waagen. Auch Mcßgeräte, die z.Zt. noch nicht auf dem Markt sind, können durch EPROM-Ergänzung mit Hilfe einer Diskette adaptiert werden.

Anschluß an einen PC

Mit Hilfe des RS 232-Datenkabels 07157.01 kann das Handmeßgerät auch an einem Computer angeschlossen werden.

Auslesen mit dem Terminal-Programm:

Mit Hilfe des Windows-Programms „Terminal“ (in der Gruppe „Zubehör“ auf jedem Rechner installiert) können Daten vom Handmeßgerät zum Computer übertragen werden. Einstellungen:

Datübertragung: 9600 Baud, 8 Datenbits, keine Parität, Stopbit; Protokoll Xon/Xoff, serieller Anschluß COM 1 oder COM 2.

Terminal-Einstellungen: CR/LF beim Empfang und beim Senden.

Alle Einstellungen sollten als TRM-Datei abgespeichert werden, damit das Terminal-Programm beim nächsten Mal leichter gestartet werden kann.
Werden auf der Tastatur des Rechners nacheinander die Tasten g und Enter gedrückt, so wird der Inhalt des Datenloggers in Tabellenform ausgelesen. Werden nacheinander die Tasten d und Enter gedrückt, so werden lediglich die momentanen Meßwerte der großen und kleinen Digitalanzeige des LCD-Displays ausgelesen.

Auslesen mit einer Spezial-Software:

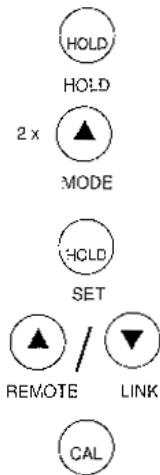
Viel bequemer als oben beschrieben, läßt sich das Auslesen des Datenloggers und der online-Betrieb mit Hilfe der WINDOWS-Software Handmeßgerät Druck 14416.61 realisieren. Darüberhinaus stehen in dieser Software eine Fülle von Auswert- und Darstellungsfunktionen zur Verfügung. Im Gegensatz zur Digitalen Großanzeige (siehe oben) kann auf dem Bildschirm des Computers auch der Meßwert der kleinen Digitalanzeige (und vieles mehr) dargestellt werden.

3.11 Kopplung von Handmeßgeräten (Fernsteuerung)

Diese Funktion wird nur benötigt, wenn die Meßwertaufnahme mehrerer Handmeßgeräte miteinander synchronisiert werden soll. Zur Synchronisation müssen die Meßgeräte mit Hilfe eines Spezialkabels (07157.03 für 2 Handmeßgeräte bzw. 07157.02 für 2 oder mehr Handmeßgeräte) miteinander verbunden werden.

Werden die HOLD-, zweimal die AUF- und wiederum die HOLD-Taste hintereinander gedrückt, so leuchtet in der Funktionsleiste das Zeichen MODE auf. Nun läßt sich die gewünschte Fernsteuerungsart mit Hilfe der AUF- bzw. AB-Tasten einstellen. REMOTE bedeutet, daß die Meßwertaufnahme von einem anderen Handmeßgerät ferngesteuert wird. LINK zeigt an, daß das Gerät die Meßwertaufnahme eines anderen Handmeßgeräts fernsteuert. Ohne Fernsteuerung leuchten weder REMOTE noch LINK (default-Einstellung). Die eingestellte Fernsteuerungsart wird mit Hilfe der CAL-Taste bestätigt. Wird dagegen die HOLD-Taste gedrückt, so kehrt das Display ohne Änderung der Fernsteuerungsart in die Grundstellung zurück.

Achtung: In der Betriebsart REMOTE ist weder eine manuelle Spezierung von Meßwertpaaren noch eine automatische Meßwertaufnahme möglich, da das Gerät von einem anderen Handmeßgerät ferngesteuert wird.



4 TECHNISCHE DATEN

Handmeßgerät

interner Sensor

Meßbereich 0...1300 hPa
Auflösung 1 hPa/0,01 psi/1 mmHg
(Torr)

Datenschnittstelle

Typ RS 232 (seriell)
Baudrate 9600 Bit/s
Einstellungen 8 n 1 (8 Datorbits, keine Parität, 1 Stopbit)
Anschluß USB-Buchse, 4polig

Datenspeicherung interner Datenspeicher für 250 Meßwertepaare

Meßwertaufnahme automatisch mit einstellbarem Meßintervall oder manuell

Stromversorgung 9-V-Blockbatterie oder 9-V-Akku oder extern über Großanzeige

Display 40 x 50 mm LCD

Analoganzeige Auflösung 2 %

Anschluß für den externen Sensor 5-polige Diodenbuchse

Gehäusemaße 21 x 9 x 4 cm

Gewicht 250 g incl. Batterie

Externe Drucksensoren:

Meßbereiche:

Drucksensor 1 0...1300 hPa
Drucksensor 2 500...7000 hPa
Auflösung 1 hPa/0,01 psi/1 mmHg
(Torr)

Kabellänge 1,5 m
Anschluß 5-poliger Diodenstecker
Schlauchstutzen d = 4 mm
Stativbefestigung für Stangen mit M6-Gewinde

5 ZUBEHÖR**Sensoren und Zubehör:**

Drucksensor 1, 0...1300 hPa	07136.01
Drucksensor 2, 500...7000 hPa	07136.02
Gummischildrauch 4x1,5 mm	39280.00
Silikonrauch 4x1,5 mm	47529.00
Reduktionsstück 8/4 mm	47517.01
Stativstange, l = 63 mm, Gewinde M6	02018.10
Stativstange, l = 145 mm, Gewinde M6	02019.10

Stromversorgung:

Batterie 9 V-Bicck, 6 F 22	07496.10
NiMH-Akku, 9 V-Block	07925.02
NiCd- und NiMH-Ladegerät	07925.93

Aufbewahrung:

Koffer für 6 Handmeßgeräte - Sonden	30835.00
Koffer für 1-2 Handmeßgeräte + Sonden	07156.00

Peripheriegeräte, Software:

Digitale Großanzeige	07157.93
Datenkabel RS 232, SUB-D/USB	07157.01
Synchronkabel RS 232, 2xSUB-D/USB	07157.02
Synchronkabel RS 232, 2xUSB	07157.03
Software Handmeßgerät Druck	14416.81

6 GARANTIEHINWEIS

Für das von uns gelieferte Gerät übernehmen wir eine Garantie von 24 Monaten; sie umfaßt nicht den natürlichen Verschleiß sowie Mängel, die durch unsachgemäßes Behandlung entstehen.

Der Hersteller kann nur dann als verantwortlich für Funktion und Sicherheitstechnische Eigenschaften des Gerätes betrachtet werden, wenn Instandhaltung, Instandsetzung und Änderungen daran von ihm selbst oder durch von ihm ausdrücklich hierfür ermächtigte Stellen ausgeführt werden.

7 BETRIEBSHINWEISE

Das vorliegende Qualitätsgerät erfüllt die technischen Anforderungen, die in den aktuellen Richtlinien der Europäischen Gemeinschaft zusammengefaßt sind. Das Gerät trägt daher das CE-Zeichen.

Beim Betrieb des Gerätes beachten Sie bitte folgendes:

- Der Betrieb dieses Gerätes ist nur in Wohn-, Geschäfts- und Gewerbebereichen (Schule, Universität, Labor usw.) erlaubt.

Kapitel 4

Elektrizitätslehre

4.1 Grundlagen, Definitionen, Wechselstromwiderstände

4.2 Vorversuche zu Kalibration der Messgeräte

4.3 Versuche zu Wechselstromschwingkreisen

 4.3.1 LCR-Serienschwingkreis

 4.3.2 LCR-Parallelschwingkreis

4.4 Eigenständige Versuche

Physikalische Grundlagen

Gleich- und Wechselspannungen; Fourieranalyse

Ohmsche, kapazitive und induktive Widerstände, Schaltung von Widerständen;

elektrische Leistungen (Momentan-, Schein- und Wirkleistung),

Effektivwerte von Strom und Spannung,

elektrische Schwingkreise, gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Hochpass, Tiefpass

4.1 Grundlagen, Definitionen

Wechsel-Ströme und -Spannungen

Unter Wechselstrom versteht man jeden Strom, der seine Stärke und Richtung periodisch ändert. Jede periodische Funktion lässt sich nach Fourier in eine Summe von Sinus- und Kosinus-Funktionen zerlegen. Allgemein gelte für Wechselströme und -spannungen:

$$I_{\sim}(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t + \phi_I) \quad \text{bzw.} \quad U_{\sim}(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t + \phi_U)$$

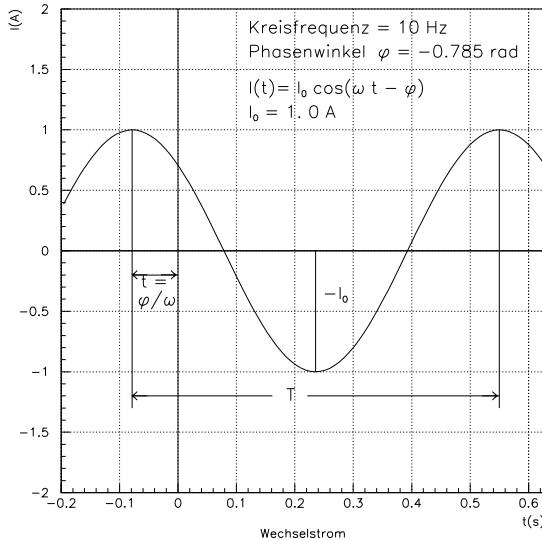
Wechselstromwiderstände können zu einer Phasenverschiebung zwischen der angelegten Wechselspannung $U_{\sim}(t)$ und dem Strom $I_{\sim}(t)$ im Leiterkreis führen. ϕ_U und ϕ_I sind die Phasen von Spannung und Strom zur Zeit $t=0$ (sog. **Nullphasen**). Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung wird (meist) definiert als:

$$\phi = \phi_U - \phi_I$$

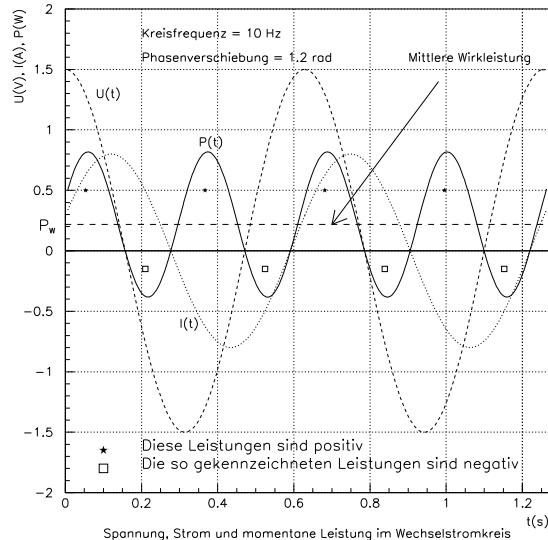
Wählt man $\phi_U = 0$, so ergibt sich $\phi_I = -\phi$, also:

$$I_{\sim}(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t - \phi) \quad \text{und} \quad U_{\sim}(t) = U_0 \cdot \cos \omega t \quad (4.1)$$

Für $\phi_U - \phi_I = \phi > 0$ eilt die Spannung dem Strom voraus, für $\phi_U - \phi_I = \phi < 0$ läuft die Spannung dem Strom hinterher.



a)



b)

Abbildung 4.1: a) Phasenverschobener Wechselstrom, b) Spannung, Strom und momentane Leistung

Abbildung 4.1 a) zeigt den Verlauf eines Stromes für den Phasenwinkel $\phi = -\phi_I = -\pi/4$ rad als Funktion der Zeit. Die dadurch bedingte Verschiebung in negative x-Richtung ist angegeben. Weiterhin sind die Periode T und die Amplitude I_0 eingezeichnet.

Effektivwerte, Leistungen

Betrachtet sei der Momentanwert der Leistung im Wechselstromkreis:

$$P(t) = U_{\sim}(t) \cdot I_{\sim}(t) = U_0 \cdot I_0 \cos \omega t \cdot \cos(\omega t - \phi) = \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot I_0 [\cos \phi + \cos(2\omega t - \phi)]$$

$P(t)$ ist die **Momentanleistung**. Sie pulsiert mit der doppelten Frequenz und der Amplitude $U_0 \cdot I_0 / 2$ um den Mittelwert, die sogenannte **Wirkleistung**:

$$P_W = \frac{U_0 \cdot I_0}{2} \cdot \cos \phi = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos \phi \quad (4.2)$$

Hierüber kann man die **Effektivwerte von Spannung und Strom** definieren:

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Diese Effektivwerte gelten in dieser Form nur für sinus- bzw. kosinusartige Spannungen und Ströme.

Neben dem Begriff der Wirkleistung benötigt man noch die Begriffe der **Blindleistung** und der **Scheinleistung**. Die Wirkleistung P_W wird im Mittel einem Verbraucher zugeführt. Sie wird in Ohmschen Widerständen in Wärmeenergie umgewandelt und geht für den Stromkreis verloren. Ein Ohmscher Widerstand speichert keine elektrische Energie! Abbildung 4.1 b) zeigt den zeitlichen Verlauf von Spannung, Strom und momentaner Leistung. Der Strom läuft in diesem Beispiel der Spannung um $1,2 \text{ rad} = 68,8^\circ$ hinterher. Die mittlere Wirkleistung, um die die Momentanleistung pulsiert, ist durch die gestrichelte Gerade angedeutet. Wichtig ist, dass für die Berechnung der gesamten Wirkleistung alle Ohmschen Widerstände, auch z. B. die von Induktivitäten, berücksichtigt werden müssen.

Positive Beiträge der Momentanleistung werden von der Spannungsquelle geliefert, negative werden an die Spannungsquelle zurückgegeben.

Aus Gleichung 4.2 erkennt man, dass die Wirkleistung für $\phi = 0$ maximal wird; dann existieren nur positive Beiträge im Verlauf der Momentanleistung. Für $\phi = \pm\pi/2$ dagegen verschwindet die Wirkleistung, der Stromkreis enthält dann auch keine Ohmschen Widerstände. Spulen und Kondensatoren sind sogenannte **Blindwiderstände (Reaktanzen)**. Für den Aufbau von magnetischen bzw. elektrischen Feldern wird die sogenannte **Blindleistung (P_B)** benötigt, die von der Spannungsquelle oder von anderen Blindwiderständen zur Verfügung gestellt wird. Beim Abbau der Felder wird die Blindleistung wieder abgegeben. Blindleistungen belasten im Mittel die Spannungsquelle nicht.

Blind- und Wirkleistung sind um $\pi/2$ phasenverschoben und lassen sich geometrisch zur **Scheinleistung** kombinieren:

$$P_B = \frac{U_0 \cdot I_0}{2} \cdot \sin \phi = U_{eff} \cdot I_{eff} \sin \phi \quad \text{und} \quad P_S = \sqrt{P_W^2 + P_B^2} = \frac{U_0 \cdot I_0}{2} = U_{eff} \cdot I_{eff}.$$

Schein- und Blindleistung haben nur in soweit eine physikalische Bedeutung, als sie für die Dimensionierung der Isolation von Spannungsträgern (bei Überspannungen) und der Stärke von Leitungen (bei Stromüberhöhungen) berücksichtigt werden müssen.

4.1.1 Wechselstromwiderstände

Ohmscher Widerstand

Nach Kirchhoff gilt für einen Stromkreis mit einer Spannungsquelle $U_{\sim}(t)$ und einem Ohmschen Widerstand R (mit dem Spannungsabfall $U_R = I \cdot R$):

$$U_{\sim}(t) = I_{\sim}(t) \cdot R$$

Zu jedem Zeitpunkt ist der Spannungsabfall am Ohmschen Widerstand gleich der angelegten Spannung! Mit den Gleichungen 4.1 gilt:

$$U_0 \cdot \cos \omega t = R \cdot I_0 \cdot \cos(\omega t - \phi)$$

Dies ist für alle Zeiten nur erfüllt, wenn $\phi = 0$ gesetzt wird, d. h. Strom und Spannung sind in Phase. Ein Ohmscher Widerstand ändert nicht die Phase und hängt nicht von der Frequenz ab.

Kapazitiver Widerstand

Im Kreis befindet sich nun ein Kondensator mit der Kapazität C . Bei Anlegen einer Wechselspannung wird der Kondensator periodisch geladen und entladen, es fließt ein Wechselstrom im Kreis. Wenn kein Ohmscher Widerstand im Kreis vorhanden ist, erfolgt die Ladung und Entladung von C momentan. Wegen $U_C(t) = Q(t)/C$ würde für den Spannungsabfall am Kondensator gelten:

$$U_{\sim}(t) = \frac{Q(t)}{C} \rightarrow \frac{dU_{\sim}(t)}{dt} = \frac{I_{\sim}(t)}{C}$$

$$I_{\sim}(t) = C \cdot \frac{dU_{\sim}(t)}{dt} = -\omega \cdot C \cdot U_0 \cdot \sin \omega t = \omega \cdot C \cdot U_0 \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Wie in Abbildung 4.2 veranschaulicht, eilt der Strom $I_{\sim}(t)$ der angelegten Spannung $U_{\sim}(t)$ um $\frac{\pi}{2}$ voraus, das heißt $\phi = -\pi/2$. Die Kapazität stellt für Wechselstrom einen sog. **kapazitiven Widerstand (Kondensanz X_C)** dar. Nach dem Ohmschen Gesetz ergibt sich der kapazitive Wechselstromwiderstand X_C zu:

$$X_C = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Der kapazitive Widerstand X_C ist frequenzabhängig.

Ein zusätzlicher in Reihe geschalteter Ohmscher Widerstand R im Kreis beeinflusst die Phasenverschiebung zwischen Strom $I_{\sim}(t)$ und Spannung $U_{\sim}(t)$. Es ergibt sich dann für die Impedanz Z und die Phasenverschiebung ϕ :

$$Z^2 = R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2, \quad \tan \phi = \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R}$$

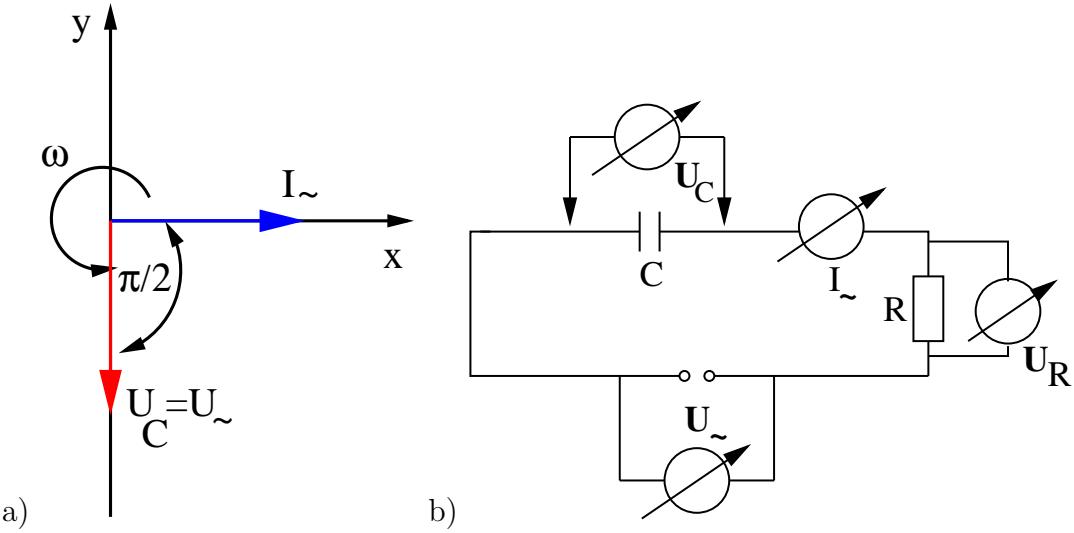


Abbildung 4.2: a) Zeigerdarstellung im rein kapazitiven Kreis, b) Schaltbild einer RC-Schaltung

Induktiver Widerstand

Wenn ein Schaltkreis nur aus einer Spannungsquelle und einer Spule besteht, dann ist die Spannung zwischen den Polen der Spannungsquelle gleich dem Spannungsabfall an der Induktivität ($U_L(t) = L \cdot \frac{dI_{\sim}}{dt}$):

$$U_0 \cdot \cos \omega t = L \cdot \frac{dI_{\sim}}{dt} \quad \rightarrow \quad dI_{\sim}(t) = \frac{U_0}{L} \cdot \cos \omega t \, dt \quad \rightarrow \quad I_{\sim}(t) = \frac{U_0}{\omega \cdot L} \cdot \sin \omega t$$

und damit:

$$I_{\sim}(t) = \frac{U_0}{\omega L} \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Wie in Abbildung 4.3 a) veranschaulicht, eilt der Strom $I(t)$ der angelegten Spannung $U(t)$ um $\frac{\pi}{2}$ nach, das heißt $\phi = \pi/2$. Obwohl der Kreis bei einer idealen Spule keinen Ohmschen Widerstand besitzt, erhält er durch die Induktivität für den Wechselstrom einen Widerstand X_L , den man **induktiven Widerstand** oder **Induktanz** nennt. Nach dem Ohmschen Gesetz ergibt sich der induktive Wechselstromwiderstand X_L zu:

$$X_L = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_0}{I_0} = \omega \cdot L$$

Der induktive Widerstand X_L ist frequenzabhängig.

Der innere Ohmsche Widerstand der Spule und zusätzliche in der Schaltung verwendete Ohmsche Widerstände R beeinflussen die Impedanz Z und die Phasenverschiebung ϕ :

$$Z^2 = (R + R_L)^2 + (\omega \cdot L)^2, \quad \tan \phi = \frac{\omega \cdot L}{R_L + R}$$

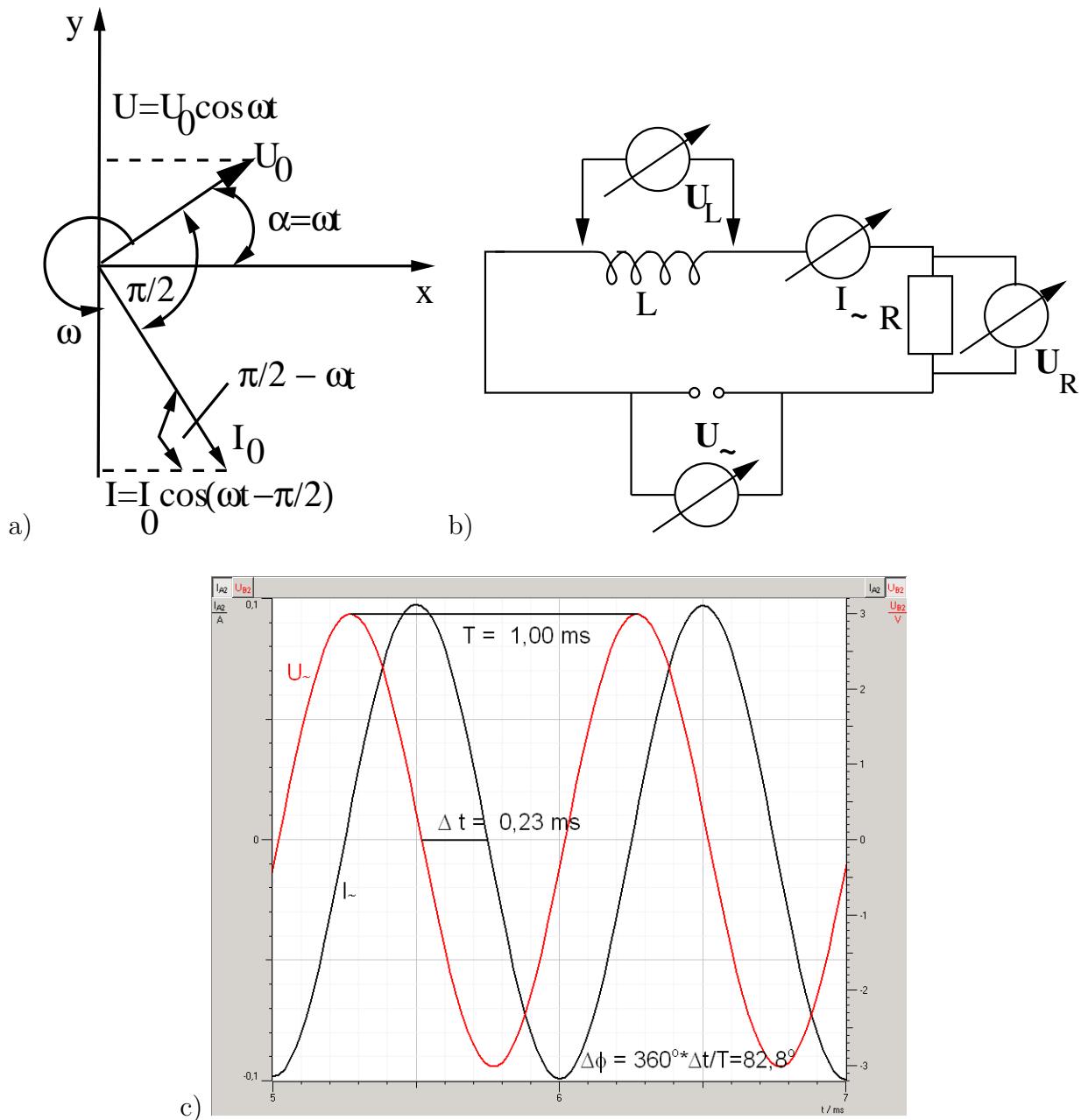


Abbildung 4.3: a) Zeigerdarstellung (ideal) b) Schaltbild mit Induktivität und Widerstand, c) Bestimmung der Phasenverschiebung zwischen U und I im induktiven Kreis.

4.2 Vorversuche

Zur Kalibration der Spannungs- und Strommessgeräte wird ein Ohmscher Widerstand gemäß Abbildung 4.4 auf der Rastersteckplatte aufgebaut und an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen. Als Spannungsquelle dient die Wechselspannungsquelle des POWER-CASSY-Interfaces, das sowohl die erzeugte Wechselspannung als auch den Gesamtstrom im Kreis misst. Die erzeugte Spannung wird mit den Spannungsmessgeräten (wahlweise Eingang A oder B) und der Strom im Kreis mit dem Strommessgerät (Eingang A) der verwendeten SENSOR-CASSY-Interface gemessen.

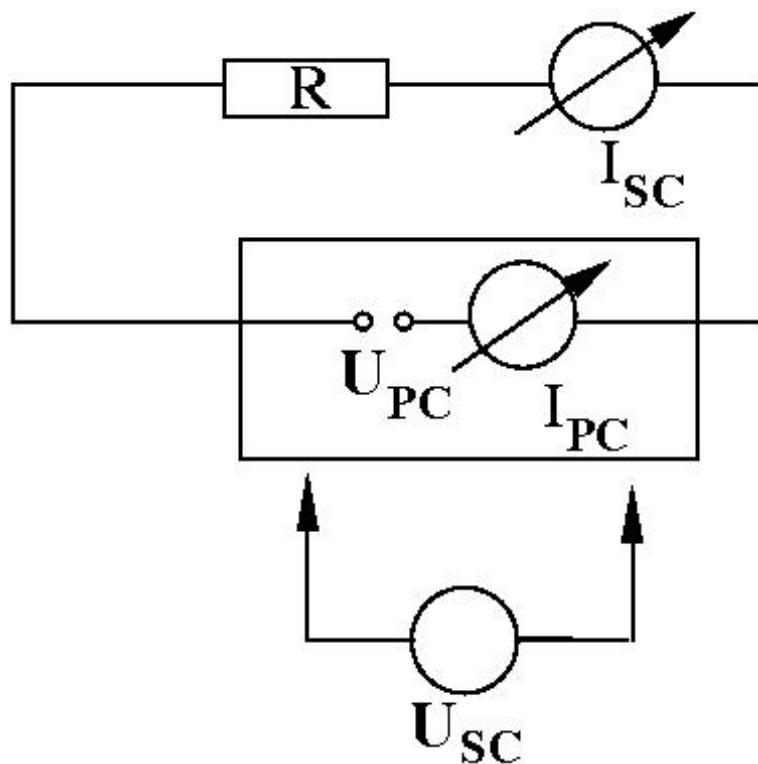


Abbildung 4.4: Schaltung zur Kalibration der Spannungs- und Strommessgeräte

4.2.1 Kalibration Spannungsmessgeräte

Bei der Messung von Spannungsabfällen mit den Spannungsmessgeräten des Sensor-Cassy-Systems gibt es statistische und systematische Messunsicherheiten.

Die statistischen Messunsicherheiten können mittels einer sogenannten Rauschmessung bestimmt werden. Dazu stellt man eine feste Spannung an der Spannungsquelle ein, misst die Spannung mit dem Spannungsmessgerät und untersucht die Verteilung der aufgezeichneten Messwerte (Mittelwert/RMS). Dann wiederholt man diese Methode für andere Spannungswerte, um zu untersuchen, ob die Messunsicherheiten über den eingestellten Messbereich konstant sind oder variieren.

Die systematischen Messunsicherheiten sind vom Hersteller pauschal für alle Cassy-Sensor

Geräte wie folgt angegeben:

$$\sigma_{U,sys} = 0,01 \cdot U_i + 0,005 \cdot U_{Bereichsendwert}$$

Um diese pauschal angegebenen systematischen Unsicherheiten zu reduzieren, kann das Messgerät kalibriert werden. Dazu wird der Funktionsgenerator POWER-CASSY als Spannungsquelle benutzt und die eingestellte Spannung mit dem Spannungsmessgeräten des SENSOR-CASSY gemessen. Beide Geräte werden auf Effektivwert-Messung eingestellt.

Achtung: Es werden nur dann Effektivwerte von den Messgeräten gemessen, wenn in den **Einstellungen: Messparameter anzeigen** die Intervallzeit auf 100 ms und die Anzahl auf 0 gesetzt werden!

In dem Dialogfenster **Einstellungen Funktionsgenerator** des POWER-CASSY wird zuerst die Stellgröße, der Stellbereich, die Art der Signalform (DC, Sinus-, Rechteck, Sägezahn, etc.) und deren Parameter (Frequenz, Amplitude der Wechselspannung V_P , Gleichspannungsoffset V_0 und Symmetrie der Signalform in Prozent), sowie die Messwerterfassung festgelegt. Die mit dem POWER-CASSY erzeugte Spannung wird nun variiert und mit dem SENSOR-CASSY direkt am POWER-CASSY gemessen. Zur Variation der Spannung kann im Menü Einstellungen bei **Parameter/Formel/FFT** die Stellspannung U_{PC} als Formel definiert werden, allerdings müssen alle verwendeten Parameter in der Formel vorher definiert worden sein: $U_{PC} = U_0 + (n-1) * 1,0$ mit U_0 = Startspannung. Dies bewirkt z.B. eine schrittweise Erhöhung der Startspannung U_0 um 1 Volt, wenn bei **Einstellungen Funktionsgenerator** bei Parameter V_P anstatt z.B. 2 V das vorher definierte Symbol U_{PC} eingegeben wird.

Zusätzlich muss bei **Einstellungen Messparameter anzeigen** eine Messbedingung vorgegeben werden, die eine Messwertaufnahme bis zu einer maximalen Spannung begrenzt und nach einer bestimmten Wartezeit den Messwert aufnimmt:

$$U_{PC} < 10 \quad \text{and} \quad \text{delta } t > 2$$

Die Messreihe wertet man nun so aus, dass die gemessene Spannung (U_{SC}) gegen die angelegte Spannung (U_{PC}) aufgetragen wird unter Berücksichtigung der Einzel-Messunsicherheiten auf der x- und y-Achse. Bestimmen Sie die Steigung und den Achsenabschnitt, um in den folgenden Versuchen die Kalibrierung jeweils anwenden zu können. Die Unsicherheiten auf Achsenabschnitt und Steigung werden in den weiteren Versuchsteilen dann als systematische Unsicherheiten behandelt.

4.2.2 Kalibration Strommessgeräte

Bei der Messung von Strömen mit den Strommessgeräten des SENSOR-CASSY-Systems gibt es statistische und systematische Messunsicherheiten.

Die statistischen Messunsicherheiten können mittels einer sogennanten Rauschmessung bestimmt werden. Dazu stellt man eine feste Spannung an der Spannungsquelle ein, misst den Strom im Kreis mit dem Strommessgerät und untersucht die Verteilung der aufgezeichneten Messwerte (Mittelwert/RMS). Dann wiederholt man diese Methode für andere eingestellte Spannungswerte und damit Stromwerte im Kreis, um zu untersuchen, ob die Messunsicherheiten über den eingestellten Messbereich konstant sind oder variieren.

Die systematischen Messunsicherheiten sind vom Hersteller pauschal für alle CASSY-SENSOR Geräte wie folgt angegeben:

$$\sigma_{I,sys} = 0,02 \cdot I_i + 0,005 \cdot I_{Bereichsendwert}$$

Um diese pauschal angegebenen systematischen Unsicherheiten zu reduzieren, kann das Messgerät kalibriert werden. Dazu wird der Funktionsgenerator POWER-CASSY weiterhin als Spannungsquelle benutzt und der erzeugte Strom mit dem Strommessgerät des SENSOR-CASSY gemessen und auf die Messung des internen Strommessgerätes im POWER-CASSY kalibriert. Dazu werden beide Geräte auf Effektivwert-Messung eingestellt.

Achtung: Es werden nur dann Effektivwerte von den Messgeräten gemessen, wenn in den **Einstellungen: Messparameter anzeigen** die Intervallzeit auf 100 ms und die Anzahl auf 0 gesetzt werden!

Die **Einstellungen Funktionsgenerator** des POWER-CASSY so wählen, wie unter Abschnitt 4.2.1 beschrieben.

Die Messreihe wertet man nun so aus, dass der mit dem SENSOR-CASSY gemessene Strom (I_{SC}) gegen den mit dem POWER-CASSY gemessenen Strom (I_{PC}) aufgetragen wird unter Berücksichtigung der Einzel-Messunsicherheiten auf der x- und y-Achse. Bestimmen Sie die Steigung und den Achsenabschnitt, um in den folgenden Versuchen die Kalibrierung jeweils anwenden zu können. Die Unsicherheiten auf Achsenabschnitt und Steigung werden in den weiteren Versuchsteilen dann als systematische Unsicherheiten behandelt.

4.3 Hauptversuche zu Wechselstromschwingkreisen

Allgemeine Anmerkungen

Bei einem Serienschwingkreis führt eine angelegte Wechselspannung zu einem meist phasenverschobenen Strom, der durch alle Komponenten des Schwingkreises fließt, also in allen Widerständen den jeweils gleichen Momentanwert besitzt. Aus diesem Strom errechnet man mit den speziellen Widerständen die zugehörigen, wiederum phasenverschobenen Spannungsabfälle. Diese Spannungsabfälle können beträchtlich größer sein als die angelegte Spannung. Beim Parallelschwingkreis liegt dagegen an allen Widerständen die gleiche Wechselspannung. Daher ergibt sich für jeden Zweig ein Strom, dessen Größe und Phase von der angelegten Spannung und dem speziellen Widerstand in diesem Zweig abhängt. Diese Ströme können beträchtlich größer sein als der zum Schwingkreis hinfließende Strom.

4.3.1 Serienschwingkreis von L, R und C

Mit der Kirchhoff'schen Maschenregel folgt, dass die angelegte Spannung gleich der Summe aller Spannungsabfälle ist:

$$U_{\sim}(t) = U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = L \cdot \frac{dI_{\sim}}{dt} + I_{\sim} \cdot R + \frac{Q}{C}$$

$$\frac{U_{\sim}(t)}{L} = \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot Q$$

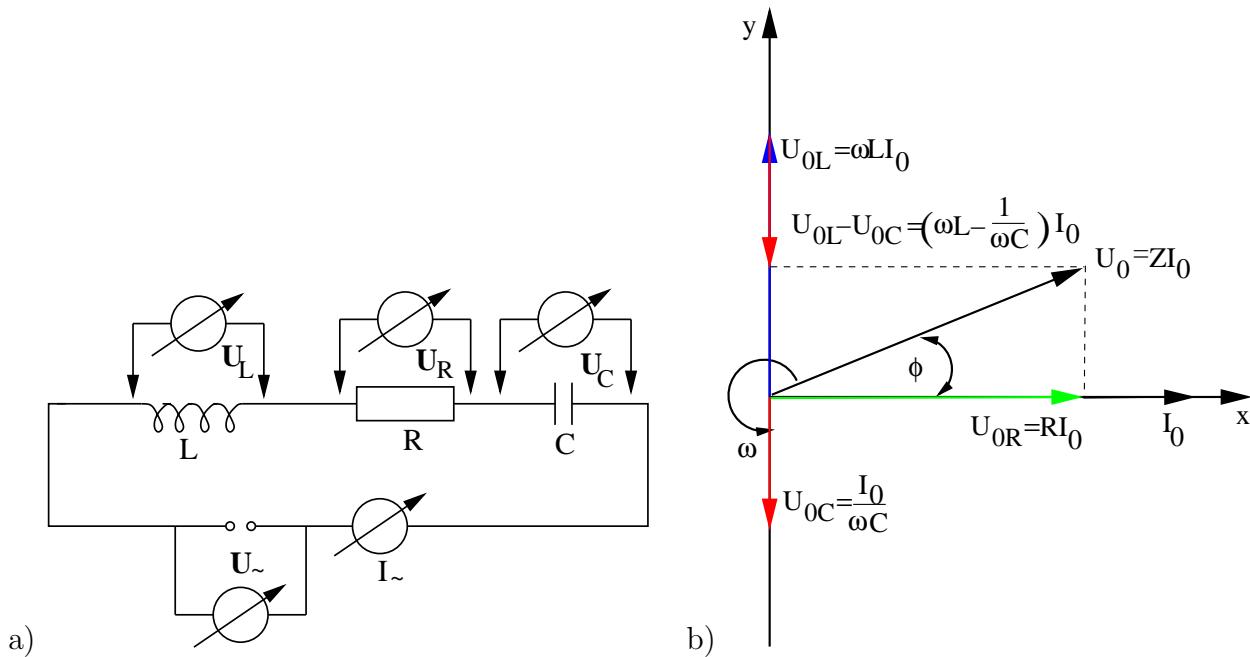


Abbildung 4.5: a) Schaltbild eines L, R und C Serienschwingkreises, b) Zeigerdarstellung

Dies ist die Differentialgleichung einer erzwungenen gedämpften Schwingung für die elektrische Ladung. Die Differentialgleichung für den Strom lautet dann:

$$\frac{d^2 I_{\sim}}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dI_{\sim}}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot I_{\sim} = \frac{1}{L} \cdot \frac{dU_{\sim}(t)}{dt} \quad (4.3)$$

Es wird nur die **partikuläre Lösung** diskutiert, die sich nach dem sogenannten Einschwingvorgang einstellt.

Lösungsansatz:

Für die angelegte Spannung und für den phasenverschobenen Strom sei

$$U_{\sim}(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t} \quad I_{\sim} = I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi)}$$

Damit ergibt sich:

$$-\omega^2 I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi)} + i\omega \frac{R}{L} I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi)} + \frac{1}{LC} I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi)} = i\omega \frac{U_0}{L} e^{i\omega t}$$

Für den rein reellen und den rein imaginären Anteil ergibt sich:

$$-\omega^2 I_0 \cdot \cos \phi + \omega \frac{R}{L} I_0 \cdot \sin \phi + \frac{1}{LC} I_0 \cdot \cos \phi = 0 \quad (4.4)$$

$$\omega^2 I_0 \cdot \sin \phi + \omega \frac{R}{L} I_0 \cdot \cos \phi - \frac{1}{LC} I_0 \cdot \sin \phi = \omega \frac{U_0}{L} \quad (4.5)$$

Aus Gleichung 4.4 findet man sofort die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung, ebenso wie aus der Addition der Spannungen im Zeigerdiagramm (Abbildung 4.5b):

$$\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (4.6)$$

Für $\omega L - \frac{1}{\omega C} > 0$ ist $0 < \phi < \pi/2$ → Phasennacheilung des Stromes (L überwiegt)

Für $\omega L - \frac{1}{\omega C} < 0$ ist $-\pi/2 < \phi < 0$ → Phasenvoreilung des Stromes (C überwiegt)

Aus den Gleichungen 4.4 und 4.5 ergibt sich für die Stromamplitude I_0 :

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U_0}{Z} \quad (4.7)$$

mit dem **Scheinwiderstand (Impedanz)**:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad (4.8)$$

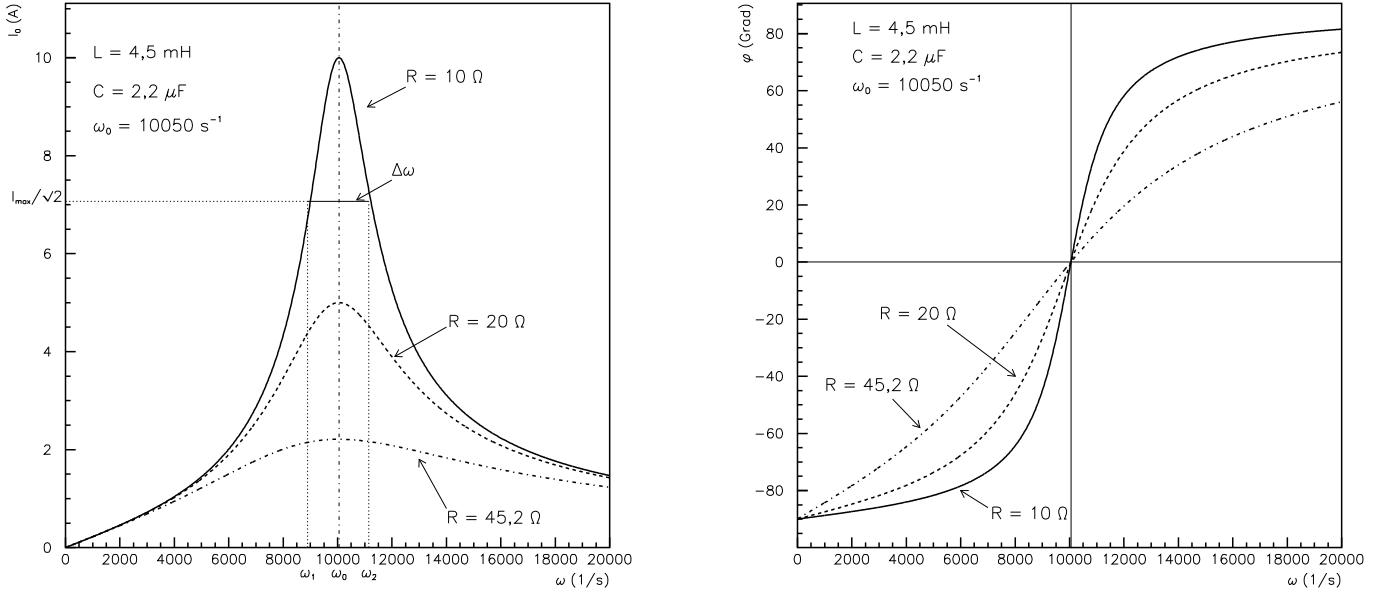


Abbildung 4.6: Resonanzkurve und Phasenverschiebung bei R , L und C -Serienkreis.

Die Impedanz wird minimal und der Strom maximal bei der Resonanzfrequenz

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{Thomsonsche Gleichung} \quad (4.9)$$

Bei dieser Frequenz ist $Z(f_0) = Z_{min} = R$ und die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung $\phi = 0$ bei verlustfreien Widerständen, d.h. der Kreis verhält sich bei der Resonanzfrequenz wie ein rein Ohmscher Widerstand und die von der Spannungsquelle in den Schwingkreis gesteckte Leistung wird ebenfalls maximal und ist eine reine Wirkleistung. Die Abbildung 4.6 zeigt Strom und Phasenverschiebung als Funktion der Kreisfrequenz für verschiedene Dämpfungen. An Gleichung 4.7 erkennt man unmittelbar, dass der Strom für $\omega \rightarrow 0$ gegen null geht, der Kondensator sperrt für eine Gleichspannung den Stromfluss. Durch Aufsuchen des Strommaximums als Funktion der Frequenz findet man, dass **das Maximum unabhängig von der Dämpfung immer an der gleichen Stelle bei f_0 liegt**.

Dämpfung und Güte bei Serienschaltung

Dämpfungen entstehen primär durch den Ohmschen Widerstand des Stromkreises. Bei fehlendem Ohmschen Widerstand spielen Verluste in der Spule (durch den Ohmschen Widerstand der Spule) und in Kondensatoren (durch die Leitfähigkeit des Dielektrikums, Umpolarisation, Wärmeentwicklung) eine Rolle. Wegen der Serienschaltung enthält R hier alle Ohmschen Widerstände des Kreises, insbesondere also auch den Ohmschen Spulenwiderstand.

Wie bei mechanischen Schwingungen findet man die Definition für die Dämpfung aus der

Differentialgleichung 4.3:

$$d = \frac{R}{2L}$$

Die Dämpfung beeinflusst unmittelbar die Breite der Resonanzkurve. Zwischen den Frequenzen der Resonanzkurve, bei denen der Strom auf $I_{max}/\sqrt{2}$ gefallen ist, gilt für die Breite:

$$\Delta\omega = 2d = \frac{R}{L}$$

Die relative Breite der Resonanzkurve nennt man häufig **Verlustfaktor des Schwingkreises**.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2d}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = R \cdot \omega_0 C = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Je geringer die Dämpfung ist, umso größer ist die **Güte des Serienschwingkreises**:

$$Q_S = \frac{\omega_0}{2d} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Spannungsresonanz (siehe auch Anhang 4.5)

In unmittelbarer Nähe der Resonanzfrequenz können die Spannungen, die an Induktivität und Kapazität abfallen, die angelegte Spannung um ein Vielfaches überschreiten. Aus obigen Relationen folgt für die Spannungsüberhöhung im Resonanzfall:

$$\frac{U_L(\omega_0)}{U_\sim(\omega_0)} = \frac{I_0 \omega_0 L}{I_0 R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.10)$$

Dies entspricht der Güte des Schwingkreises!

Spannungsüberhöhungen sind in der Wechselstromtechnik sehr gefürchtet, da beim Durchschlag von Isolatoren und Kabeln Leiterteile beschädigt werden können!

Messung der Güte:

Die Güte des Schwingkreises kann auf verschiedene Weisen bestimmt werden:

- 1.) Durch Messung von Resonanzfrequenz und Breite der Resonanzkurve.
- 2.) Bestimmung aus der Phasenverschiebung als Funktion der Frequenz: Bei der Resonanzfrequenz ist $\phi = 0$ und Δf liegt zwischen den Winkeln $\phi = \pm 45^\circ$.
- 3.) Aus der Spannungsüberhöhung an der Resonanzstelle (siehe Gleichung 4.10).
- 4.) Durch Berechnung aus den Werten für R , C und L . Falls der Ohmsche Spulenwiderstand nicht vernachlässigt werden darf, muss er zum eventuell vorhandenen separaten Ohmschen Widerstand hinzugezählt werden.

Versuchsaufbau

Eine Spule (z.B. 500 Windungen), ein Kondensator (z.B. $2,2 \mu\text{F}$) und ein Ohmscher Widerstand (z.B. 1Ω) werden gemäß Abbildung 4.5 auf der Rastersteckplatte in Serie geschaltet und an eine Wechselspannung gelegt. Als Spannungsquelle dient die Wechselspannungsquelle des POWER-CASSY-Interfaces, das sowohl die anliegende Wechselspannung als auch den Gesamtstrom im Kreis angibt. Der Spannungsabfall an der Spule wird mit dem Spannungsmessgerät (Eingang A) und der Spannungsabfall am Kondensator mit dem Spannungsmessgerät (Eingang B) des SENSOR-CASSY-Interfaces gemessen.

Zusätzlich soll eine Messung mit dem Oszilloskop durchgeführt werden, bei der der Spannungsabfall im gesamten Kreis gegen den Abfall am Ohmschen Widerstand aufgetragen wird.

Versuchsdurchführung/-auswertung

Messen Sie die Spannungsabfälle an der Spule und dem Kondensator, die anliegende Spannung und den im Kreis fließenden Strom als Effektivwerte!

Der Funktionsgenerator POWER-CASSY kann verschiedenartige Wechselspannungen mit bis zu $\pm 10 \text{ V}$ Amplituden und mit variablen Frequenzen liefern. In dem Dialogfenster **Einstellungen Funktionsgenerator** des POWER-CASSY wird zuerst die Stellgröße, der Stellbereich und der Messbereich festgelegt, die Art der Signalform (Sinus-, Rechteck, Sägezahnverlauf etc.) und deren Parameter (Frequenz, Amplitude der Wechselspannung **Vp**, Gleichspannungsoffset **V=** und Symmetrie der Signalform in Prozent), sowie die Messwerterfassung. Stellen Sie eine sinusförmige Wechselspannung mit einer Amplitude von z.B. 3 V ein. Messen Sie die Spannungsabfälle am Kondensator und an der Spule, sowie den Strom im Kreis (Abb. 4.5).

Achtung: Es werden nur dann Effektivwerte von den Messgeräten gemessen, wenn in den **Einstellungen: Messparameter anzeigen** die Intervallzeit auf 100 ms und die Anzahl auf 0 gesetzt werden!

Zur Variation der Frequenz kann im Menü Einstellungen bei **Parameter/Formel/FFT** die Frequenz f_1 als Formel definiert werden, allerdings müssen alle verwendeten Parameter in der Formel vorher definiert worden sein: $f_1 = f_0 + (n - 1) * 20$ mit f_0 = Startfrequenz.

Dies bewirkt eine schrittweise Erhöhung der Startfrequenz f_0 um 20 Hz bis zur maximal vorgegebenen Frequenz, wenn bei **Einstellungen Funktionsgenerator** bei Parameter anstatt z.B. 1000 Hz das vorher definierte Symbol f_1 eingegeben wird. Allerdings erlaubt dies nicht eine genauere Vermessung der Kurve im Bereich der Resonanz. Ausserhalb der Resonanz wären so kleine Frequenzerhöhungsschritte unnötig genau. Daher hat Leybold eine Funktion zur schrittweisen Erhöhung der Frequenz vorgeschlagen, die den oben genannten Punkten Rechnung trägt. Im Menü **Einstellungen** bei **Parameter/Formel/FFT** müssen zuerst folgende Größen als **Parameter** definiert werden: Anzahl $n_0 = 15$, Startfrequenz $f_0 = 10 \text{ Hz}$, Resonanzfrequenz f_R .

Dann muß im Menü **Einstellungen** bei **Parameter/Formel/FFT** eine neue Größe, eine

Frequenz f_2 , ausgewählt werden als **Formel**

$$f_0 + (t <> 0 \text{ and } n <> 1) * (f_R - f_0) * (1 + sgn(last\ n - n_0) * (10 \wedge (abs(last\ n - n_0)/n_0) - 1)/9)$$

Symbol : f_2 Einheit : Hz von : 0 Hz bis : 5000 Hz Dezimalstellen : 0

So wird die Frequenz f_2 automatisch in kleinen Schritten erhöht. Die Schrittweite ist variabel und richtet sich nach den Vorgaben für die Anzahl n_0 , die Startfrequenz f_0 und die ungefähre Resonanzfrequenz f_R , die sich aus den verwendeten Bauteilen berechnen lässt. Zwischen den beiden Frequenzen f_0 und f_R werden n_0 Messwerte aufgenommen. Danach wird die Frequenz f_2 noch weiter erhöht und zwar so, dass um $f_2 = f_R$ die Werte besonders dicht aufgenommen werden. Dadurch reduziert sich die erforderliche Messzeit erheblich im Vergleich zu äquidistanten Frequenzschritten. Die Vorgaben können durch Schieben der Zeiger mit der Maus oder durch Ändern des Parameterwertes nach Anklicken mit der rechten Maustaste geändert werden.

Zusätzlich muß bei **Einstellungen Messparameter anzeigen** eine Messbedingung vorgegeben werden, die eine Messwertaufnahme bis 5 kHz (oder der 5-fachen Resonanzfrequenz) begrenzt, aber frühestens nach $2/f_2 + 2$ s nach einer Frequenzerhöhung (Einschwingzeit) den Messwert aufnimmt:

$$f_2 < 5 * f_R \text{ and } f_2 < 5000 \text{ and } delta\ t > 2$$

Damit nun die Resonanzkurven aufgenommen werden können, muß bei **Einstellungen Funktionsgenerator** bei Parameter für die Frequenz dann f_2 eingegeben werden.

Führen Sie verschiedene Messreihen mit unterschiedlichen Ohmschen Widerständen R durch, und bestimmen Sie die Güte ihres Kreises. Bei jeder Messung soll die Phasenverschiebung zwischen abfallender Gesamtspannung im Kreis und der über dem Ohmschen Widerstand abfallenden Spannung mit dem Oszilloskop beobachtet werden. Zeichnen Sie gleichzeitig im CASSY-INTERFACE den Verlauf des Stromes gegen die Frequenz auf, und verifizieren Sie, dass beim Erreichen des Strommaximums die Phasenverschiebung auf dem Oszilloskop verschwindet.

Die Lage der Resonanzfrequenz, die Breite der Resonanzkurve können mit dem Auge bzw. Hilfslinien bestimmt und der Ablesefehler abgeschätzt werden.

Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit den Erwartungen aufgrund der Voruntersuchungen und fassen Sie ihre Ergebnisse in einer Tabelle oder Graphik zusammen.

4.3.2 Parallelschwingkreis von L, R und C

Bei der Parallelschaltung einer Spule, eines Kondensators und eines Ohmschen Widerstandes (Abbildung 4.7a) liegt an allen Widerständen die gleiche Spannung $U_{\sim} = U_0 \cdot e^{i\omega t}$ an.

Nach der Knotenregel teilt sich der von der angelegten Spannung ausgehende Gesamtstrom I in die Anteile I_R durch den Ohmschen Widerstand R , I_C durch die Kapazität C und I_L durch die Induktivität L auf:

$$I = I_R + I_C + I_L \quad (4.11)$$

Die Addition muß unter Beachtung der Phasenverschiebungen der einzelnen Ströme erfolgen. Wegen Gleichung 4.11 gilt:

$$\frac{U_{\sim}}{Z} = \frac{U_{\sim}}{R} + i\omega C \cdot U_{\sim} + \frac{U_{\sim}}{i\omega L} \rightarrow \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

Bei Parallelschaltung addieren sich also die inversen Widerstände zur inversen Impedanz. Statt der Widerstände benutzt man daher oft auch direkt die sogenannten **Leitwerte**, die inversen Widerstände: Der Wirkanteil heißt **Konduktanz**, der Blindanteil **Suszeptanz** und der Scheinanteil **Admittanz**.

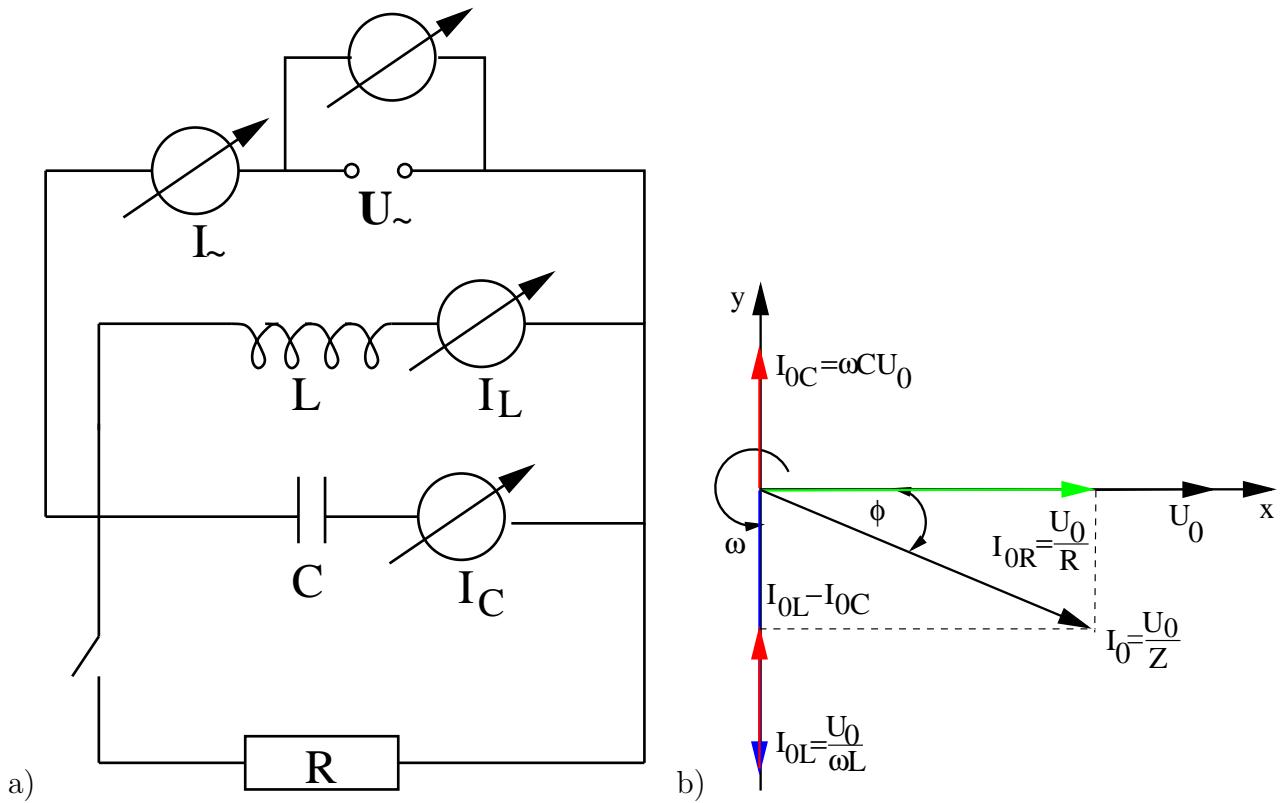


Abbildung 4.7: a) Schaltbild eines L,R und C Parallelschwingkreises, b) Zeigerdarstellung

In komplexer Schreibweise gilt:

Widerstände	Leitwerte
$X_R = R$	$Y_R = \frac{1}{R}$
$X_L = R_L + i\omega L$	$Y_L = \frac{R_L - i\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2}$
$X_C = \frac{1}{i\omega C}$	$Y_C = i\omega C$

(4.12)

In Gleichung 4.12 wurde berücksichtigt, dass Spulen auch einen Ohmschen Anteil R_L haben. Der gesamte komplexe Leitwert ist:

$$Y = Y_R + Y_L + Y_C = \frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} + i(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2}) \quad (4.13)$$

und der Betrag des Gesamtleitwertes beträgt:

$$Y = \sqrt{\left[\frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right]^2 + \left[\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right]^2}$$

Gesamtimpedanz

Die Impedanz für einen Parallelschwingkreis berechnet sich wie folgt:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{X_R} + \frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C} = \frac{X_L X_C + X_R X_C + X_R X_L}{X_R X_L X_C} \rightarrow Z = \frac{X_R X_L X_C}{X_L X_C + X_R X_C + X_R X_L}$$

Nach einiger Rechnerei findet man für die (komplexe) Impedanz:

$$Z = \frac{R \cdot (\frac{L}{C})^2 + \frac{RR_L(R+R_L)}{(\omega C)^2} - i \left[\frac{(RR_L)^2}{\omega C} + R^2 \frac{L}{C} \cdot (\omega L - \frac{1}{\omega C}) \right]}{(\frac{L}{C} + RR_L)^2 + (R \cdot \omega L - \frac{R+R_L}{\omega C})^2}$$

Resonanzfrequenz

(siehe auch Anhang 4.5)

Aus dem komplexen Leitwert der Gleichung 4.13 lässt sich die Resonanzfrequenz berechnen, indem der Imaginärteil zu null gesetzt wird:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1 - \frac{C}{L} \cdot R_L^2}{LC}}$$

Man erkennt unmittelbar, dass sich für $R_L = 0$ die schon vom Serienkreis her bekannte Resonanzfrequenz ergibt:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.14)$$

Für ω_0 wird der Leitwert minimal und damit die Impedanz maximal, im Gegensatz zum Serienschwingkreis. Der Strom kann praktisch nur noch durch den Ohmschen Widerstand fließen. Der LC-Schwingkreis bedeutet für den Strom einen unendlich großen Widerstand. Wegen $R_L \neq 0$ sperrt das LC-Glied nicht vollständig.

Der gesamte zum RLC-Schwingkreis hinfließende Strom beträgt:

$$I = Y \cdot U_{\sim} = \left(\left[\frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right] + i \left[\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right] \right) \cdot U_0 \cos \omega t$$

Damit folgt:

$$I = I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi_I)} \quad \text{mit} \quad I_0 = \sqrt{\left[\frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right]^2 + \left[\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right]^2} \cdot U_0$$

und

$$\tan \phi_I = -\frac{\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2}}{\frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2}} \quad (4.15)$$

Stromresonanz

Ähnlich wie die Spannungsresonanz bei Serienschwingkreisen kann beim Parallelschwingkreis eine Stromresonanz auftreten, die insbesondere bei hoher Frequenz gefährlich werden kann. Betrachtet sei der einfachere Fall, bei dem nur eine Spule und ein Kondensator parallel geschaltet sind. Dann gilt für den Strom durch die Spule:

$$I_L = \frac{U_0}{\sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2}} \cdot e^{i(\omega t - \phi_L)}$$

Die Ströme durch Kondensator und Spule haben im Grenzfall $R_L \rightarrow 0$ eine Phasenverschiebung von 180° zueinander. Die Summe beider Ströme ergibt den resultierenden Strom:

$$I = I_0 \cdot e^{i(\omega t - \phi_I)}$$

mit der Phasenverschiebung ϕ_I aus Gleichung 4.15. Die Impedanz berechnet sich zu:

$$Z = \frac{1}{\omega C} \cdot \sqrt{\frac{R_L^2 + (\omega L)^2}{R_L^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (4.16)$$

Für die Resonanzfrequenz von Gleichung 4.14 werden induktiver und kapazitiver Widerstand gleich groß und damit heben sich die beiden Ströme auf. Dann wird die Impedanz (Gleichung 4.16) des Schwingkreises (praktisch) unendlich groß. Der Strom in den Zuleitungen wird null, während im Schwingkreis ein beträchtlicher Strom pulsieren kann. Dies ist der Fall der Stromresonanz. In diesem Fall stellt der Schwingkreis also einen unendlich großen Widerstand dar und sperrt den Stromfluss in den Zuleitungen vollständig.

Stromresonanz erreicht man, wenn R_L gegen ωL vernachlässigt werden kann, also für hohe Frequenzen. Dann gilt mit Gleichung 4.16 und vernachlässigbarem R_L bei Resonanz ($\omega_0 L = 1/(\omega_0 C)$):

$$Z_{res} = \frac{1}{\omega_0 C} \cdot \frac{\omega_0 L}{R_L} = \frac{L}{CR_L}$$

Damit folgt für die Stromüberhöhung:

$$\frac{(I_L)_0}{I_0} = \frac{(I_C)_0}{I_0} = \frac{U_0}{\omega_0 L} \cdot \frac{Z_{res}}{U_0} = \omega_0 C \cdot Z_{res} = \frac{1}{\omega_0 C R_L} = \frac{\omega_0 L}{R_L} = \frac{1}{R_L} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.17)$$

Die Stromüberhöhung hat ungefähr die gleiche Größe wie die Spannungsüberhöhung nach Gleichung 4.10. Die Gleichung 4.17 gibt die Güte für einen LC-Parallelschwingkreis an.

Güte bei Parallelschaltung

R , L und C seien parallelgeschaltet und die Verluste in Spule und Kondensator seien im Ohmschen Widerstand berücksichtigt (bzw. vernachlässigbar!). Wie beim Serienschwingkreis ist die Güte definiert durch die Form der Resonanzkurve. Bei konstanter angelegter Spannung wird bei der Resonanzfrequenz der zum Schwingkreis hinfließende Strom minimal. Daher findet man die Breite der Resonanzkurve zwischen den Frequenzen, bei denen der Strom die Werte $\sqrt{2} \cdot I_{min}$ annimmt. Man kann die Güte auch über die Stromüberhöhung definieren. Eine genaue Rechnung liefert für die Güte des Parallelschwingkreises:

$$Q_P = \frac{R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}}{1 + R \cdot R_L \cdot \frac{C}{L}} \quad (4.18)$$

Für kleine Werte von R gilt:

$$Q_P = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{R}{\omega_0 L} = R \cdot \omega_0 C = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (4.19)$$

und für große Werte von R :

$$Q_P = \frac{1}{R_L} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.20)$$

Messung der Güte:

- 1.) Durch Messung von Resonanzfrequenz und Breite der Resonanzkurve.
- 2.) Aus der Stromüberhöhung an der Resonanzstelle nach Gleichung 4.17.
- 3.) Durch Berechnung aus den Komponenten des Schwingkreises.

Versuchsaufbau

Eine Spule (z.B. 500 Windungen), ein Kondensator (z.B. $2,2 \mu\text{F}$) und ein Ohmscher Widerstand (z.B. 1Ω) werden gemäß Abbildung 4.7 auf der Rastersteckplatte parallel geschaltet und an Wechselspannung gelegt. Als Spannungsquelle dient die Wechselspannungsquelle des POWER-CASSY-Interfaces, das sowohl die anliegende Wechselspannung als auch den Gesamtstrom im Kreis angibt. Der Strom durch die Spule oder durch den Kondensator wird mit dem Strommessgerät (Eingang A) des SENSOR-CASSY-Interfaces gemessen.

Versuchsdurchführung/-auswertung

Messen Sie den Gesamtstrom I im Kreis und die in den Einzelkreisen fließenden Ströme als Effektivwerte!.

Der Funktionsgenerator POWER-CASSY kann verschiedenartige Wechselspannungen mit bis zu $\pm 10 \text{ V}$ Amplituden und mit variablen Frequenzen liefern. In dem Dialogfenster **Einstellungen Funktionsgenerator** des POWER-CASSY wird zuerst die Stellgröße, der Stellbereich und der Messbereich festgelegt, die Art der Signalform (Sinus-, Rechteck, Sägezahnverlauf etc.) und deren Parameter (Frequenz, Amplitude der Wechselspannung **Vp**, Gleichspannungsoffset **V=** und Symmetrie der Signalform in Prozent), sowie die Messwerterfassung. Stellen Sie eine sinusförmige Wechselspannung mit einer Amplitude von z.B. 3 V ein.

Achtung: Es werden nur dann Effektivwerte von den Messgeräten gemessen, wenn in den **Einstellungen: Messparameter anzeigen** die Intervallzeit auf 100 ms und die Anzahl auf 0 gesetzt werden!

Zur Variation der Frequenz kann im Menü Einstellungen bei **Parameter/Formel/FFT** die Frequenz f_1 als Formel definiert werden, allerdings müssen alle verwendeten Parameter in der Formel vorher definiert worden sein: $f_1 = f_0 + (n - 1) * 20$ mit $f_0 =$ Startfrequenz.

Dies bewirkt eine schrittweise Erhöhung der Startfrequenz f_0 um 20 Hz bis zur maximal vorgegebenen Frequenz, wenn bei **Einstellungen Funktionsgenerator** bei Parameter anstatt z.B. 1000 Hz das vorher definierte Symbol f_1 eingegeben wird. Allerdings erlaubt dies nicht eine genauere Vermessung der Kurve im Bereich der Resonanz. Ausserhalb der Resonanz wären so kleine Frequenzerhöhungsschritte unnötig genau. Daher hat Leybold eine Funktion zur schrittweisen Erhöhung der Frequenz vorgeschlagen, die den oben genannten Punkten Rechnung trägt. Im Menü **Einstellungen** bei **Parameter/Formel/FFT** müssen zuerst folgende Größen als **Parameter** definiert werden: Anzahl $n_0 = 15$, Startfrequenz $f_0 = 10 \text{ Hz}$, Resonanzfrequenz f_R .

Dann muß im Menü **Einstellungen** bei **Parameter/Formel/FFT** eine neue Größe, eine **Frequenz** f_2 , ausgewählt werden als **Formel**

$$f_0 + (t <> 0 \text{ and } n <> 1) * (f_R - f_0) * (1 + \text{sgn}(\text{last } n - n_0) * (10 \wedge (\text{abs}(\text{last } n - n_0)/n_0) - 1)/9)$$

Symbol : f_2 Einheit : Hz von : 0 Hz bis : 5000 Hz Dezimalstellen : 0

So wird die Frequenz f_2 automatisch in kleinen Schritten erhöht. Die Schrittweite ist variabel und richtet sich nach den Vorgaben für die Anzahl n_0 , die Startfrequenz f_0 und die ungefähre Resonanzfrequenz f_R , die sich aus den verwendeten Bauteilen berechnen lässt. Zwischen den beiden Frequenzen f_0 und f_R werden n_0 Messwerte aufgenommen. Danach wird die Frequenz f_2 noch weiter erhöht und zwar so, dass um $f_2 = f_R$ die Werte besonders dicht aufgenommen werden. Dadurch reduziert sich die erforderliche Messzeit erheblich im Vergleich zu äquidistanten Frequenzschritten. Die Vorgaben können durch Schieben der Zeiger mit der Maus oder durch Ändern des Parameterwertes nach Anklicken mit der rechten Maustaste geändert werden.

Zusätzlich muß bei **Einstellungen** **Messparameter anzeigen** eine Messbedingung vorgegeben werden, die eine Messwertaufnahme bis 5 kHz (oder der 5-fachen Resonanzfrequenz) begrenzt, aber frühestens nach $2/f_2 + 2$ s nach einer Frequenzerhöhung (Einschwingzeit) den Messwert aufnimmt:

$$f_2 < 5 * f_R \text{ and } f_2 < 5000 \text{ and } \Delta t > 2$$

Damit nun die Resonanzkurven aufgenommen werden können, muß bei **Einstellungen** **Funktionsgenerator** bei Parameter für die Frequenz dann f_2 eingegeben werden.

Messungen der Impedanz Z (in CASSY als Formel definieren!), des Gesamtstromes I , der Phasenverschiebung ϕ und der Stromüberhöhung als Funktion der Frequenz sind in den Abbildungen 4.8a-c) gezeigt. Die Lage der Resonanzfrequenz, die Breite der Resonanzkurve und die Stromüberhöhungen können mit dem Auge bzw. Hilfslinien bestimmt und die Ablesefehler abgeschätzt werden.

Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit den Erwartungen aufgrund der Voruntersuchungen und fassen Sie ihre Ergebnisse in einer Tabelle oder Graphik zusammen.

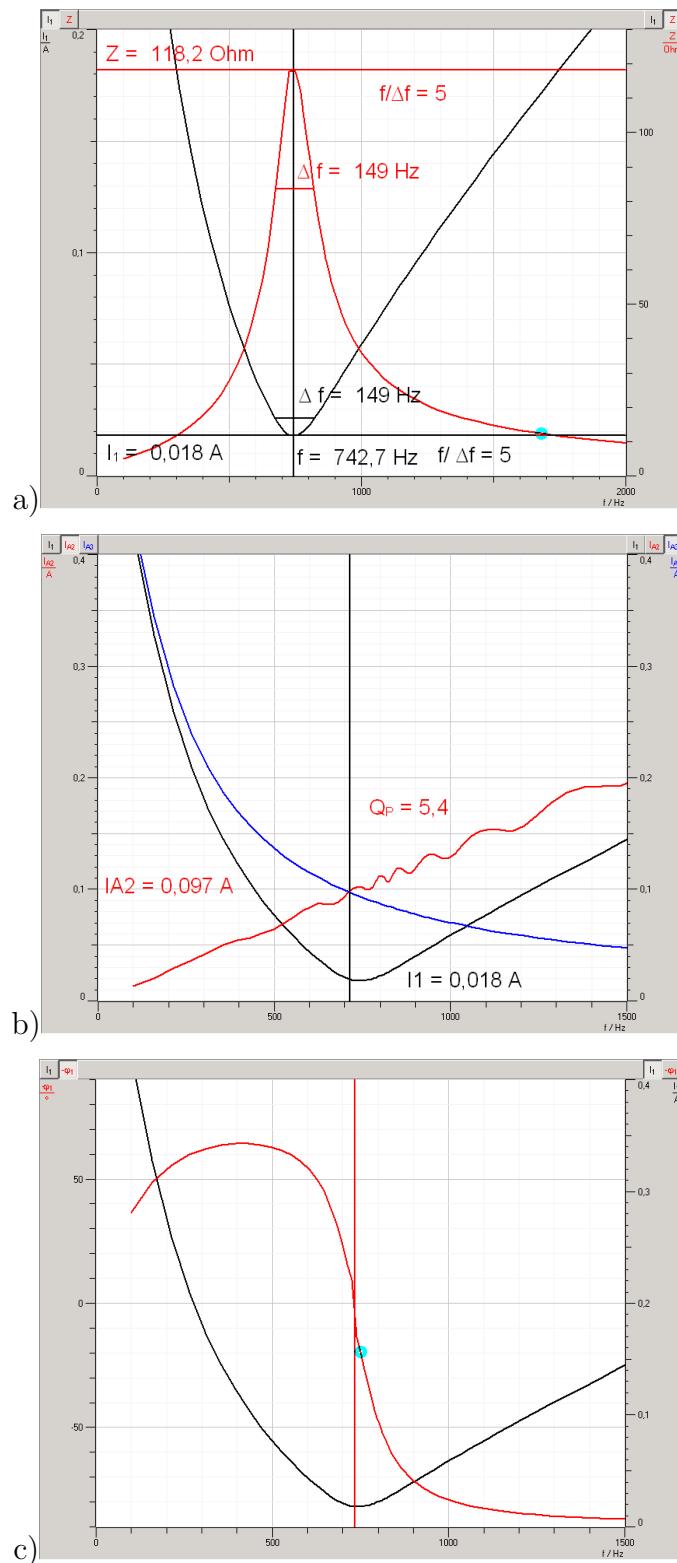


Abbildung 4.8: Messung der a) Resonanzkurven $I(f)$ und $Z(f)$, b) der Phasenverschiebung und c) der Stromüberhöhung eines Parallelschwingkreises mit einer Spule mit 500 Windungen und einem Kondensator mit $4,7 \mu\text{F}$.

4.4 Eigenständige Versuche

Nach Absprache mit den Betreuern des Versuches werden Versuche zur Thematik Hochpass- bzw. Tiefpassfilter durchgeführt.

Ziel soll sein, sich zur oben genannten Thematik einen Versuchsaufbau aus den zur Verfügung stehenden Bauteilen, eine Versuchsdurchführung und Auswertung eigenständig zu erarbeiten und die erzielten Ergebnisse mit einem theoretischen Modell zu vergleichen.

4.5 Anhang

Resonanzfrequenzen des Serienschwingkreises

Die Resonanzkreisfrequenzen für maximalen Strom, minimale Impedanz und die Kreisfrequenz bei der Phasenverschiebung $\phi = 0$ stimmen alle überein und betragen unabhängig von den Ohmschen Widerständen des Serienschwingkreises (siehe auch Gleichung 4.9)

$$\omega_{0S} = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

Viel komplizierter sind die Berechnungen der Frequenzen der maximalen Spannungen, die an Kondensator und Spule abfallen. Beide Kreisfrequenzen sind gegenüber ω_0 verschoben. Und zwar gilt immer $\omega_{0C} < \omega_0$ und $\omega_{0L} > \omega_0$.

Die Kreisfrequenz für das Maximum der Kondensatorspannung beträgt:

$$\omega_{0C} = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{(R + R_L)^2}{2 \cdot L^2}}$$

Bei der Spule ist die Angabe einer geschlossenen Formel für ω_{0L} wegen des Ohmschen Widerstandes der Spule (R_L) und des äußeren Ohmschen Widerstandes (R) sehr umständlich. Falls jedoch $R = 0$ angenommen werden kann, gilt annähernd:

$$\omega_{0L}(R \rightarrow 0) \approx \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} + \frac{R_L^2}{2 \cdot L^2}}$$

Wenn der Ohmsche Widerstand der Spule größer gemacht wird, wird der maximale Spannungsabfall an der Spule größer als der am Kondensator.

Wenn R_L dagegen sehr klein gemacht werden kann (dicker Draht oder Supraleitung), führt ein äußerer Ohmscher Widerstand R zwar zu einer Verschiebung der Resonanzkreisfrequenz zu

$$\omega_{0L}(R_L \rightarrow 0) \approx \sqrt{\frac{1}{L \cdot C - \frac{(RC)^2}{2}}},$$

die maximalen Spannungswerte U_{0L} und U_{0C} sind aber gleich groß.

Resonanzfrequenz des Parallelschwingkreises

Die angegebene Resonanzkreisfrequenz ω_{0P} (Gleichung 4.14) für das Minimum des Gesamtstroms ist unter Umständen eine grobe Näherung. Das erkennt man unmittelbar an der Funktion für den Gesamtleitwert. Um das Minimum dieser Funktion zu finden genügt es nicht, einfach den 2. Term ("Imaginärteil") Null zu setzen, sondern man muss den ganzen Ausdruck unter der Wurzel berücksichtigen; die Kreisfrequenz kommt nämlich auch im 1. Term unter der Wurzel vor.

Die Suche nach dem exakten Minimum des Leitwertes Y führt jedoch schnell auf sehr unübersichtliche Ausdrücke, die Berechnung der zugehörigen Frequenz ist nicht trivial!

Eine einfachere Methode, eine oft gute Näherung der gesuchten Frequenz zu finden besteht darin, die Ströme I_L und I_C gleich zu setzen. Dies trifft in unmittelbarer Nähe des Minimums für den Gesamtstrom zu. Wenn man im C-Zweig keinen Ohmschen Widerstand hat, führt der Ohmsche Widerstand der Spule R_L immer dazu, dass die so berechnete Frequenz etwas unterhalb der wirklichen Resonanzfrequenz liegt. Setzt man $I_L = I_C$, so gilt:

$$\frac{1}{R_L^2 + (\omega L)^2} = (\omega C)^2$$

$$\omega^2 \cdot (C \cdot R_L)^2 + \omega^4 \cdot (C \cdot L)^2 - 1 = 0.$$

Daraus folgt:

$$\omega_{1,2}^2 = -\frac{R_L^2}{2L^2} \pm \sqrt{\left(\frac{R_L^2}{2L^2}\right)^2 + \frac{1}{(LC)^2}}$$

Da die gesuchte Kreisfrequenz reell sein muss, gilt für $I_L = I_C$:

$$\omega_{0P} = \sqrt{-\frac{R_L^2}{2L^2} + \sqrt{\left(\frac{R_L^2}{2L^2}\right)^2 + \frac{1}{(LC)^2}}}$$

Abbildung. 4.5 zeigt den Gesamtstrom in einem Parallelschwingkreis mit 'künstlich' erhötem Innenwiderstand der Spule. Die Frequenzberechnung nach der 'groben' Methode liefert ungefähr 904 Hz, an der Stelle $I_L = I_C$ beträgt die Frequenz 998 Hz und das echte Minimum des Stroms liegt bei ungefähr 1055 Hz. Die Frequenzunterschiede können also beträchtlich sein!

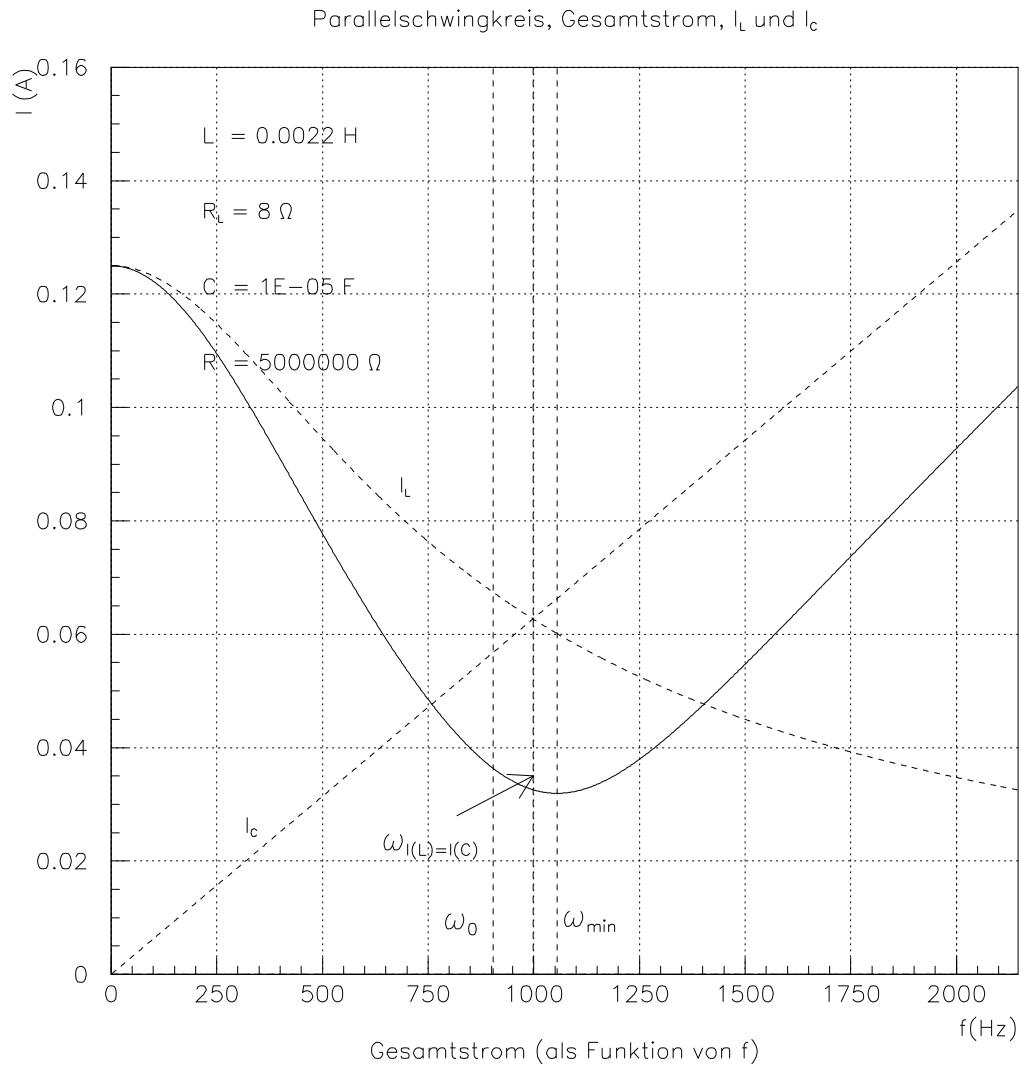


Abbildung 4.9: Gesamtstrom, verschiedene Berechnungen des Minimums

Kapitel 5

Atomphysik - Millikan-Versuch

5.1 Millikan-Versuch

Versuchsziele / Versuchsaufgaben:

- Demonstration der Ladungsquantelung
- Bestimmung der elektrischen Elementarladung e

Physikalisches Voraussetzungen / Grundlagen:

Elektrostatische Felder, Ladungen im elektrischen Feld, Kräftegleichgewicht, Auftriebskraft, Stokessche Reibungskraft

Hinweis:

Diese Anleitung basiert auf der Bachelorarbeit von Herrn Eckhard Wehrse mit dem Thema: *Das Millikanexperiment für das Physikalische Grundpraktikum der RWTH-Aachen* aus dem Jahr 2010. Teile des Textes, zahlreiche Fotos und Abbildungen sind dieser Arbeit entnommen.

Literatur

- [Mill1] Millikan, R.A.(1911): *The Isolation of an Ion, a Precision Measurement of its Charge, and the Correction of Stoke's Law* in: The Physical Review (Series 1) Vol. 32, S. 349-397, Issue 4- April 1911, doi: 10.1103/PhysRevSeriesI.32.349, eingereicht im Nov 1910
- [Mill2] Millikan, R. A. (1913): *On the Elementary Electrical Charge and the Avogadro Constant* in: The Physical Review (Series 2), Volume 2 S.109 - 143, Issue 2 August 1913 (DOI: 10.1103/PhysRev.2.109)
- [Cunn] E. Cunningham (1910): *On the velocity of steady fall of spherical particles through fluid medium.* In: Proc. Roy. Soc. A.. 83, 1910, S. 357-365.
- [Brandt] S. Brandt, H.D. Dahmen, *Elektrodynamik- Eine Einführung in Experiment und Theorie*, 4. Auflage, Springer, Heidelberg 2005
- [Demtr]W.Demtröder, *Experimentalphysik 1-Mechanik und Wärme*, 4. Auflage, Springer, Heidelberg 2006
- [Smol] M. Smoluchowski ,(1906) *Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen*, AdP 21 [326], 756-780 (1906). Abrufbar unter http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/historic-papers/1906_326_756-780.pdf
- [Kohlr] Kohlrausch, F.: *Praktische Physik- Zum Gebrauch für Unterricht, Forschung und Technik*, 24., neubearbeitete und erweiterte Auflage, B.G. Teubner, Stuttgart 1996
- [Prandtl] Oertel, H.: *Prandtl's Essentials of Fluid Mechanics*, Second Edition, Springer, New York 2004

5.1.1 Einleitung

Zielsetzung

Ziel dieses Versuches ist es die elektrische Elementarladung zu messen und die Quantelung der Ladung zu demonstrieren.

Konventionen

Vereinbarung: Jede Richtung sei aus Sicht eines dem Beobachter zugewandten Tröpfchens beschrieben. Das hat den Vorteil, dass wir im weiteren Verlauf die Bewegung des Tröpfchens genau so beschreiben können, wie wir es durch die seitenvertauschende Optik wahrnehmen. „Unten“ sei durch die Richtung und Orientierung des Vektors der Erdbeschleunigung festgelegt, das Vorzeichen des entsprechenden Vektors sei negativ. Hier ist also bei der Beobachtung ein Umdenken notwendig. Die Alternative, Tröpfchen als steigend zu beschreiben, wenn auf sie die Erdbeschleunigung wirkt, erscheint nicht sinnvoll.

In der Diskussion der Ergebnisse ist manchmal von „rechts“ und „links“ die Rede, womit der positive, bzw. der negative Teil der Abszisse gemeint ist.

Als Dezimaltrennzeichen wird das Komma verwendet:

$$s_{\text{Beispiel}} = 1,5 \cdot 10^3 \text{ m} = 1500 \text{ m}$$

Alle Zahlenangaben sind, sofern nicht anders angegeben, auf eine sinnvolle Anzahl an geltenden Ziffern gerundet. In den Berechnungen wird jedoch aus Gründen der Genauigkeit mit den nicht gerundeten Werten weitergerechnet.

Die Elementarladung wird negativ angegeben, d.h.¹

$$1 \text{ e} = -1,602176487 \cdot 10^{-19} \pm 4,0 \cdot 10^{-27} \text{ C} .$$

Diese sei zunächst nur als naheliegende Quantität eingeführt. Ist also ein Tröpfchen mit einem Elektron mehr besetzt, als dies in neutralem Zustand der Fall wäre, so besitzt es die Ladung 1e.

Von SI-Einheiten wird nur in der Verwendung von °C mit

$$a \text{ } ^\circ\text{C} = (a - 273,15) \text{ K}$$

für die Temperatur und von Winkelgrad mit

$$1 \text{ } ^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ rad}$$

abgewichen.

Vektoren **V** werden durch eine fette Schriftart kenntlich gemacht.

Es werden alle Messwerte an derselben Apparatur aufgenommen. Während der gesamten Messzeit wird kein Bauteil ausgetauscht. Die Messungen finden immer am selben Ort statt.

¹http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?e|search_for=elementary+charge

5.1.2 Theorie

5.1.2.1 Versuchsprinzip

Das Kernstück des Versuches bildet ein Plattenkondensator, in dessen elektrischen Feld \mathbf{E} sich geladene Öltröpfchen befinden. Diese werden vor einem dunklen Hintergrund beschienen und können beobachtet werden. Eine angelegte Skala dient zur Bestimmung der in der Zeit Δt zurückgelegten Strecke Δs .

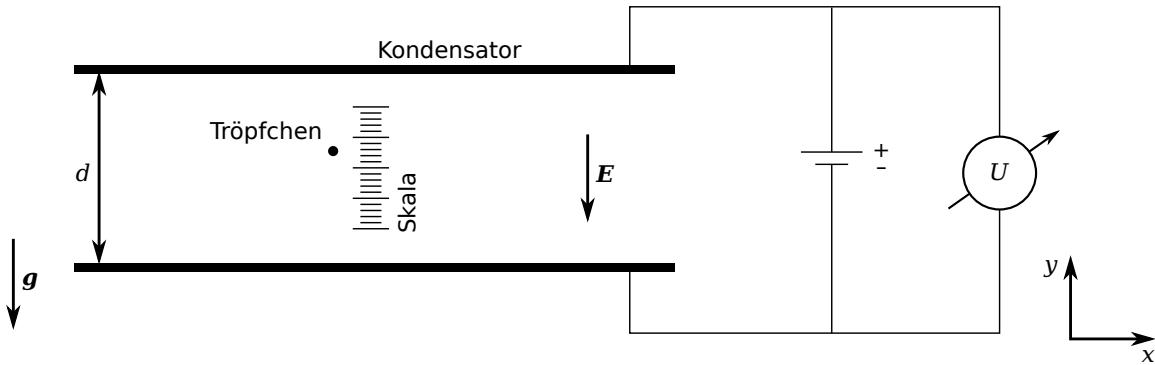


Abbildung 5.1: Das Schema des Millikan-Versuchs: Ein geladenes Öl-Tröpfchen bewegt sich im elektrischen Feld \mathbf{E} zwischen zwei Kondensatorplatten. Mit einer Skala kann die Strecke in einer bestimmten Zeit gemessen und damit die Geschwindigkeit und Ladung bestimmt werden.

Die Tröpfchen werden von der Seite zwischen die Platten gesprüht. Der Impuls in x-Richtung nimmt durch die Reibung schnell ab, sodass im Folgenden (vorerst) mit einer senkrechten Bewegung gerechnet werden kann.

Ohne angelegte Spannung wirken auf dieses Tröpfchen nur die Gewichtskraft

$$\mathbf{F}_{\text{Gr}} = \frac{4\pi}{3} r_0^3 \rho_{\text{Oel}} \cdot g$$

und die Auftriebskraft

$$\mathbf{F}_{\text{Auf}} = -\frac{4\pi}{3} r_0^3 \rho_{\text{Luft}} \cdot g$$

sowie die Stokessche Reibungskraft

$$\mathbf{F}_{\text{Stokes}} = -6\pi \cdot \eta_{\text{Luft}} \cdot r_0 \cdot \mathbf{v}(t) \quad (5.1)$$

mit der Viskosität der Raumluft η_{Luft} und der Momentangeschwindigkeit des Tropfens $\mathbf{v}(t)$. $\mathbf{v}(t)$ wird solange betragsmäßig größer werden, bis die Beträge der Erdanziehungs- und Reibungskraft gleich groß sind: Dies sei bei der Geschwindigkeit \mathbf{v}_1 der Fall:

$$\mathbf{F}_{\text{Auf}} + \mathbf{F}_{\text{Gr}} + \mathbf{F}_{\text{Stokes},1} = 0 \quad (5.2)$$

Nach Anlegen der Spannung U steige das Tröpfchen nach kurzer Beschleunigung mit der konstanten Geschwindigkeit \mathbf{v}_2 :

$$\mathbf{F}_{\text{Auf}} + \mathbf{F}_{\text{Gr}} + \mathbf{F}_{\text{Feld}} + \mathbf{F}_{\text{Stokes},2} = \mathbf{0} \quad (5.3)$$

Die Differenz der Gleichungen 5.2 und 5.3 ergibt:

$$\mathbf{F}_{\text{Feld}} = \mathbf{F}_{\text{Stokes},1} - \mathbf{F}_{\text{Stokes},2}$$

$$\Leftrightarrow q_0 \cdot \mathbf{E} = 6\pi \cdot \eta_{\text{Luft}} \cdot \mathbf{r}_0 \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \quad (5.4)$$

, wobei q_0 die Ladung des Tröpfchens ist.

Mit dem homogenen Feld im Kondensator $\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{U}$ mit dem Plattenabstand \mathbf{d} erhält man

$$q_0 = 6\pi \cdot \eta_{\text{Luft}} \cdot r_0 \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{d}/\mathbf{U} \quad (5.5)$$

r_0 lässt sich aus Gleichung 5.2 gewinnen:

$$\mathbf{0} = \frac{4\pi}{3} \cdot r_0^3 \underbrace{\rho_{\text{Oel}} - \rho_{\text{Luft}}}_{=: \Delta\rho} \cdot \mathbf{g} - 6\pi \cdot \eta_{\text{Luft}} \cdot \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_1 \quad (5.6)$$

$$\Rightarrow r_0 = \sqrt{\frac{9\eta_{\text{Luft}} v_1}{2 \Delta\rho g}} \quad (5.7)$$

Die wichtigsten Proportionalitäten sind damit:

$$r_0 \propto \sqrt{v_1}, \sqrt{\eta_{\text{Luft}}} \quad \xrightarrow{\text{Gl.5.5}} \quad q_0 \propto (v_1 + v_2) \cdot \sqrt{v_1}, (\eta_{\text{Luft}})^{3/2} \quad (5.8)$$

Ferner kann man noch nach der Sinkgeschwindigkeit auflösen:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{2 \mathbf{r}_0^2 \Delta\rho \mathbf{g}}{9 \eta_{\text{Luft}}}$$

5.1.2.2 Cunningham-Korrektur

Für Teilchenradien im Bereich der mittleren freien Weglänge des umgebenden Mediums erweist sich das Stoke'sche Gesetz (s. Gleichung 5.1) als nicht mehr zutreffend (siehe [Mill1], ab S. 370). Tatsächlich liegt die mittlere freie Weglänge für Teilchen in Luft nach [Dem1] bei etwa $6 \cdot 10^{-8}$ m, und die Teilchenradien im Bereich von $5 \cdot 10^{-7}$ m.

Der Grund für das „Scheitern“ des Stoke'schen Gesetzes liegt darin, dass die äußere Reibung zwischen Öl und der Luft vernachlässigt wurde. Dieser Term gewinnt aber mit kleiner werdenden Teilchenradien an Bedeutung.

Gleichung 5.1 wird ergänzt zu

$$\mathbf{F}_{\text{Stokes}} = -6\pi \cdot \eta_{\text{Luft}} \cdot \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 \cdot \left(1 + f \left(\frac{1}{r} \right) \right)^{-1} \quad (5.9)$$

mit einer vom Umgebungsmedium abhängigen Konstante l und einer Funktion f der Form

$$f\left(\frac{l}{r}\right) = A'\frac{l}{r} + B'\frac{l^2}{r^2} + C'\frac{l^3}{r^3} \dots \quad (5.10)$$

in der die Konstanten A', \dots experimentell zu bestimmen sind.

Im Experiment ist es ausreichend die konvergierende Reihe (5.10) nach dem linearen Term abzubrechen²:

$$f\left(\frac{l}{r}\right) = A'\frac{l}{r} = f(r) = \frac{A}{r}$$

mit einer Konstanten A , die durch $A = \frac{b}{p}$ beschrieben wird.

In unserem Fall ist $b = 80 \mu\text{m} \cdot \text{hPa}$. p sei der vorherrschende Luftdruck.

Anstatt der Gleichung 5.6 gilt nun

$$\mathbf{0} = \frac{4\pi}{3} \cdot \mathbf{r}^3 \Delta\rho \cdot \mathbf{g} - 6\pi \cdot \eta_{\text{Luft}} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_1 \left(1 + \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{r}}\right)^{-1}$$

Hier liegen neben der trivialen auch die folgenden Lösungen vor³:

$$r_{1,2} = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{9 \cdot \eta_{\text{Luft}} \cdot v_1}{2 \cdot \Delta\rho \cdot g}}$$

was mit der Bedingung $r > 0$ und r_0 aus Gleichung 5.7 zu

$$r = \sqrt{r_0^2 + \frac{A^2}{4}} - \frac{A}{2}$$

führt.

Für die Anpassung der Ladung vergleichen wir noch einmal Gleichung 5.1 und Gleichung 5.9 und stellen fest:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \cdot \left(1 + \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{r}}\right)^{-1}$$

Mit Gleichung 5.8 erhält man so

$$q = \tilde{q} \cdot (v_1 + v_2) \cdot v_1 \quad (5.11)$$

$$= \tilde{q} \cdot (v_{0,1} + v_{0,2}) \cdot \left(1 + \frac{A}{r}\right)^{-1} \cdot v_1 \cdot \left(1 + \frac{A}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

$$= q_0 \cdot \left(1 + \frac{A}{r}\right)^{-\frac{3}{2}} \quad (5.13)$$

$$= q_0 \cdot \left(1 + \frac{\frac{b}{p}}{r}\right)^{-\frac{3}{2}} \quad (5.14)$$

²der Übersichtlichkeit wegen wurde die Notation von Leybold beibehalten

³Beachte: Aufgrund der Notation gilt für den Übergang zur skalaren Schreibweise: $\mathbf{v}_1 \rightarrow -\mathbf{v}_1$

mit der geeigneten Proportionalitätskonstante \tilde{q} , der experimentell bestimmten Konstanten $b = 80\mu\text{m} \cdot \text{hPa}$ und dem Luftdruck p .

Ein Beispiel

Mit einem Luftdruck von $p = 980 \text{ hPa}$ und einem Teilchenradius von $r = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ergibt sich der Korrekturfaktor auf die Ladung zu ($b = 80\mu\text{m} \cdot \text{hPa}$):

$$\left(1 + \frac{A}{r}\right)^{-3/2} = \left(1 + \frac{b/p}{r}\right)^{-3/2} \approx 0,7970$$

Die Cunningham-Korrektur ist also für eine Bestimmung der Elementarladung unumgänglich.

5.1.2.3 Messmethoden

Sink-Steig-Methode

Sie entspricht dem im Theorienteil 5.1.2 vorgestellten Verfahren. Zur Bestimmung werden bei jeder Messung die Sink- und Steigzeit, die angelegte Spannung und wenn möglich die Temperatur notiert. Die Sink- und Steigstrecke wird gleich gewählt und konstant gehalten. Das hat den Vorteil, das eine Abweichung, die aus einer fehlerhaften Streckenbestimmung resultiert, leichter abgeschätzt werden kann.

Schwebemethode

Sie stellt eine Vereinfachung der Sink- und Steigmethode dar: Anstatt den Tropfen steigen zu lassen, wird die Spannung jeweils so eingestellt, dass der Tropfen schwebt. Mit $v_{sink} = 0 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ vereinfachen sich die Ausdrücke zur Bestimmung der Ladung. Der große Nachteil liegt aber in der Unsicherheit, zu messen, dass ein Tropfen „schwebt“: Wie lange darf er keinen Skalenstrich überquert haben? Der Versuch sollte nicht mit der Schwebemethode durchgeführt werden, sondern mit der Sink-Steig-Methode.

5.1.3 Teile des Versuchs

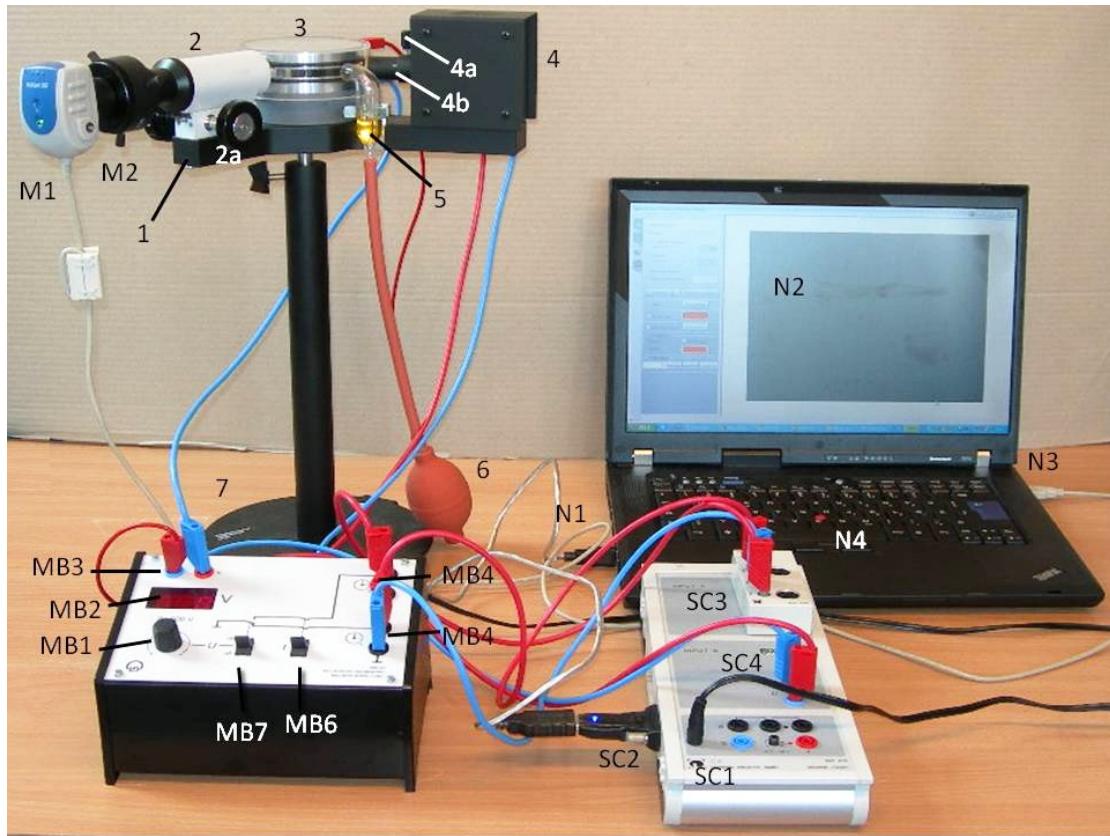


Abbildung 5.2: Bild des Aufbaus des verwendeten Millikan-Versuches. Die Bedeutung der eingezahlten Zahlen ist den nachfolgenden Tabellen zu entnehmen.

Nr.	Bezeichnung
1	Grundplatte mit Halter für Ölzerstäuber, Stifte für Plattenkondensator, Stativstange
2	Messmikroskop mit Mikrometerokular
2 a	Rädelschraube, Mikrometerokular, Feststellschraube
3	Plattenkondensator mit Beobachtungsfenster, Kunststoffhaube, Anschlussbuchsen, Einsprühöffnungen

Nr.	Bezeichnung
4	Beleuchtungseinrichtung
4 a	Feststellschraube
4 b	Kondensator, Justierschrauben, Anschlussbuchsen
5	Ölzerstäuber mit Aussprühöffnung, Kapillarrohr
6	Gummiball
7	Stativfuß
M1	Mikroskopkamera moticam 352
M2	35-mm-Aufsatz

Tabelle 5.1: Die Bauteile des Millikan-Versuches – Versuchsapparatur

Nr.	Bezeichnung
MB1	Spannungsteller
MB2	Spannungsanzeige
MB3	Anschluss für Plattenkondensator
MB4	Zeitmessausgang 2 (Steigzeit)
MB5	Zeitmessausgang 1 (Sinkzeit)
MB6	Zeitmessschalter t
MB7	Spannungsschalter U auf der Rückseite des Millikan-Geräts: Ausgang für die Spannungsmessung, Anschluss für Beleuchtungseinrichtung, Hohlbuchse

Tabelle 5.2: Die Bauteile des Millikan-Versuches – Millikan-Betriebsgerät

Nr.	Bezeichnung
SC1	Spannungsversorgung
SC2	COM-Empfänger
SC3	Timer-Box
SC4	Eingang der Kondensatorspannung

Tabelle 5.3: Bauteile: Sensor-Cassy



Abbildung 5.3: Die Bauteile des verwendeten Lots.

Nr.	Bezeichnung
N1	Dateneingang Sensor-Cassy
N2	Bildschirmbereich mit gestarteter moticam@-Software
N3	Dateneingang Mikroskopkamera
N4	Maus-Ersatz

Tabelle 5.4: Bauteile: Praktikumsnotebook

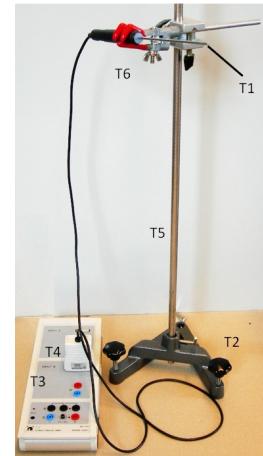


Abbildung 5.4: Die Bauteile des Temperatursensors.

Nr.	Bezeichnung
L1	Lotaufhängung
L2	Lotfaden (nicht sichtbar; in Ellipse)
L3	Lotkörper
L4	Stativfuß
L5	Stativstange

Nr.	Bezeichnung
T1	Spitze des Messfühlers
T2	Stativfuß
T3	Sensor-Cassy
T4	Anschluss Temperatursensor
T5	Stativstange
T6	Greifarm

5.1.4 Messanleitung

5.1.4.1 Vorarbeiten

Vorarbeiten zum Versuchsaufbau

- Stativfuß und Grundplatte aufbauen.



- Den Kondensator ohne Plastikabdeckung auf die Grundplatte setzen und die einzelnen Beine des Stativfuß' mit den Stellschrauben ausrichten, bis der Kondensator waagrecht ist. Anschließend den Kondensator wieder abnehmen und Plastikabdeckung aufsetzen.
- Durch das Objektiv die Ausrichtung der internen Skala überprüfen und ggf. neu ausrichten.
- Den 35 mm-Ring auf die Mikroskopkamera drehen.
- Die Mikroskopkamera NUR auf den äußersten Ring des Okulars schrauben. Die Kamera sollte dabei möglichst „plan“ auf dem Okular liegen (ohne nach vorne oder hinten verkippt zu sein) und das Kabel sollte nach unten hängen um ein nachträgliches, langsames Drehen der Kamera zu vermeiden.

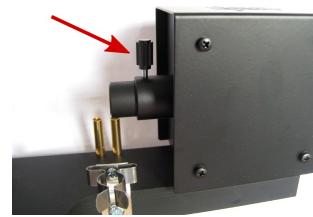
Eine Fokussierung des Okulars mit dem Auge ist überflüssig.



- Die Moticam-Software mit einem Klick auf und starten. Noch in den grundlegenden Einstellungen (Reiter auf der linken Seite) darauf achten, dass bei „Spiegel“ und „Wenden“ die Haken aktiviert sind Spiegel Wenden. Damit ist links im Bild auch links in der Realität.
- Im Bild der Kamera nachsehen, ob die eingebaute Skala gut zu sehen ist. Die Skala und der zu ihr senkrechte Strich sollten zumindest als unscharfes Kreuz erkennbar sein. Zum Scharfstellen: Die Kamera abschrauben und Okularring leicht in eine Richtung drehen. Zuletzt sollte die Skala senkrecht und die einzelnen Teilstriche gut von einander unterscheidbar sein (noch schärfer muss es nicht sein)

- Die Beleuchtungslampe über die Millikan-Supply-Unit mit Strom versorgen 5.5 (Wechselspannungsausgänge in schwarz auf der Rückseite). Mit der restlichen Verkabelung noch warten!

Zur Verbesserung der Ausleuchtung kann die Feststellschraube gelockert und anschließend die Linse verschoben werden.



- Das Lot aufbauen (Länge \leq 50 cm) und möglichst dicht über den größeren der beiden Stifte bringen. Dabei darauf achten, dass der Draht von der Lampe angestrahlt wird.



- In der *moticam*-Software zum Reiter der erweiterten Einstellungen wechseln und öffnen, im folgenden Fenster „100X“ auswählen und bestätigen.

Kalibrierungstabelle							
Zeichen...	µm/Pixel...	µm/Pixel...	Objektiv	Zoom	Zeichen...	Zeichen...	Kalibrier...
100X	1.00	1.00	100	false	320	240	false
10X	10.00	10.00	10	false	320	240	false
1X	100.00	100.00	1	false	320	240	false
20X	5.00	5.00	20	false	320	240	false
2X	50.00	50.00	2	false	320	240	false
3X	33.33	33.33	3	false	320	240	false
40X	2.50	2.50	40	false	320	240	false
4X	25.00	25.00	4	false	320	240	false
5X	20.00	20.00	5	false	320	240	false
60X	1.67	1.67	60	false	320	240	false
6X	16.67	16.67	6	false	320	240	false
7X	14.29	14.29	7	false	320	240	false
80X	1.25	1.25	80	false	320	240	false

Zeichennamen: 100X
 Zoom

- Das Gitter aktivieren und in die Gittereinstellungen gehen.
- Die Breite anschließend auf „10“ stellen und bestätigen⁴.



- Das Lot mit den gegebenen Gummistopfern beruhigen, indem diese langsam in kleinen Schritten an den Lotkörper herangeführt werden und somit die Amplitude seiner Bewegung immer weiter eingeschränkt wird. Anschließend den Draht mit der Rändelschraube an der Optik fokussieren. Wenn sich der Draht nicht in der Mitte des Bildes befindet, den Fuß der Lothalterung leicht verschieben.

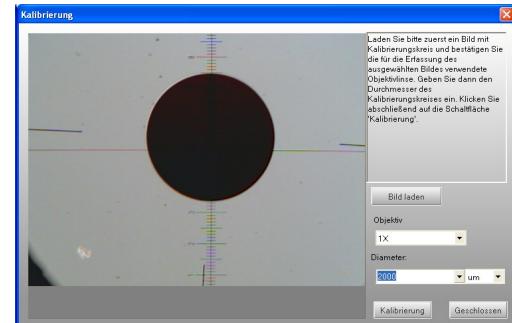
⁴Tipp: Das Augen-Symbol , dass sich ganz oben rechts neben den Minimieren-Maximieren-Schließen-Icons befindet, blendet die Konfigurationsleiste links aus und ein.

- Die eingebaute Skala mit dem mittleren Ring am Messmikroskop ins Lot bringen.



- Das Bild der Kamera durch leichtes Verdrehen der Kamera ins Lot bringen. Dies sollte allerdings so gering sein, dass das Bild noch scharf erscheint.
- Das Lot vorsichtig entfernen und das Netzteil der Millikan-Supply-Unit wieder ausstrecken.
- Das 2-mm-Kalibrierungsplättchen aus der Motic-Kiste an die Lotstange befestigen und im Kamerabild positionieren⁵.
- Wenn der Kreis scharf zu sehen ist in der Software **Kalibrierung** auswählen.

Im folgenden Einstellungsfenster den Durchmesser des Kreises auswählen ($2000 \mu\text{m}$) und die Kalibrierung starten.



- Wenn die Kalibrierung durchgelaufen ist, die Umrechnungswerte auf grobe Fehler überprüfen (Umrechnung sollte etwa bei $6,6 \mu\text{m}/\text{Pixel}$ liegen) und Kalibrierungsfenster schließen.
- Danach die Gittereinstellungen öffnen⁶ und eine sinnvolle Rasterung wählen, z.B. $100 \mu\text{m}$ in der Breite und $500 \mu\text{m}$ in der Höhe.
- Den Kondensator wieder auf die Grundplatte setzen.
- Überprüfen des Ölstands im Ölzerstäuber, ggf. auffüllen, bis das gebogene Kapillarrohr ca. 2 mm im Öl steht. Ölzerstäuber anschließend mit dem Gummi-ball verbinden und in die Halterung von unten einsetzen (vgl. Bild).



⁵Tipp: Die Feinjustierung der Höhe stellt man am besten über die Schrauben am Stativfuß des Lots ein.

⁶Das Gitter sollte aktiviert sein...

- Die Kabel so anschließen, wie dies in Abbildung 5.5 dargestellt ist und insbesondere darauf achten, dass die Spannungsmessung über das Cassy mit dem verringerten Spannungsausgang ($0 \dots 0,6 \text{ V}$) gemacht wird. **Bevor die Netzteile eingesteckt werden, die Verkabelung von einem Betreuer gegenprüfen lassen.**

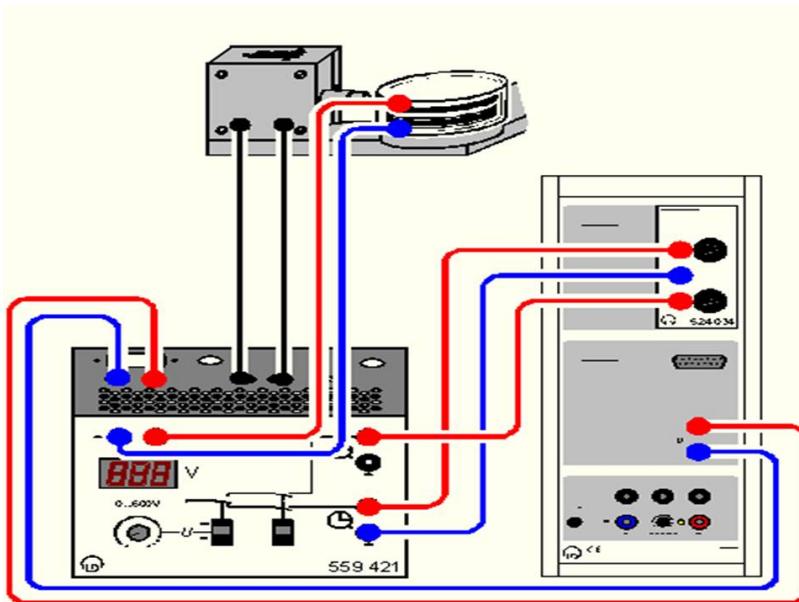


Abbildung 5.5: Das Verkabelungs-Schema aus dem „Hilfe-Eintrag“ von Cassy-Lab zum Millikan-Versuch.

Software-Einstellungen

Die Einstellungen der Software haben zum Ziel

- alle Daten aufzunehmen und darzustellen:
Die Aufzeichnung der Sink- und Steigzeiten sowie der Kondensatorspannung erfolgt automatisch, für die Speicherung genügt ein Tastendruck.
- Ergebnisse der Einzelmessungen sofort anzuzeigen um grobe Fehler zu vermeiden:
Da die Vermessung eines einzelnen Tropfens im Schnitt zwei Minuten in Anspruch nimmt, ist es wichtig schnell zu lernen grobe Fehler zu vermeiden und Tropfen geringer Ladung zu erkennen.
- die Messwertaufnahme genau und komfortabel zu machen:
Mehrere Stunden auf einen Bildschirm zu sehen und sich auf ein einzelnes Tröpfchen aus mehreren Dutzend zu konzentrieren, wirkt schnell ermüdend. Nicht nur die Bestimmung der korrekten Strecke (Umkehrvorgang!) und der Steig-und Sinkzeiten leidet darunter, ein „Aus-den-Augen-Verlieren“ eines Tröpfchens oder die Verwechslung mit einem anderen stellen grobe Fehler dar und machen aufsummiert schnell eine halbe Stunde Messzeit (15 Fehlmessungen à 2 Minuten) zunichte.

Die folgenden Einstellungen sind der bequemste Weg eine (ungenaue) Anzeige der gemessenen Werte zu erhalten und somit grobe Fehler zu erkennen. Es werden später allerdings nur drei Werte ausgelesen: Sink- und Steigzeit und die Spannung. Eine genaue Beschäftigung mit der Verrechnung der Parameter in der Software ist also unnötig.

- Starten der *Cassy*-Software über .

- Den entsprechenden „COM“-Port für das Sensor-Cassy auswählen und anschließend das Einstellungsfenster schließen.



- Die Hilfe-Funktion starten .

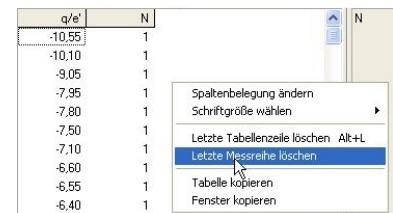
- Das Stichwort „Millikan“ eingeben und Ergebnisse anzeigen lassen.



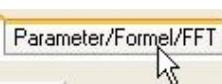
- „Millikan-Versuch“ und anschließend „Beispiel laden (Sink-/Steigmethode)“ auswählen
 [Beispiel laden \(Schwebemethode\)](#)
 [Beispiel laden \(Sink-/Steigmethode\)](#) und die Datei öffnen.

Die eingetragenen Werte sind mit dem unveränderten Datenblatt aufgenommen und enthalten darüberhinaus auch unrealistisch große Ladungen.
 Sie dienen also in keiner Weise als Ersatz für eigene Werte!

- Nach einem Rechtsklick auf das weiße Feld die vorangeghenden Ergebnisse löschen.



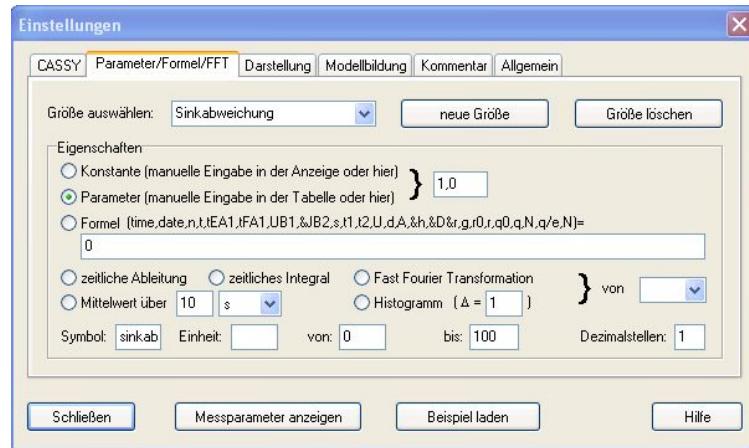
- In den Einstellungen , „Parameter“ auswählen



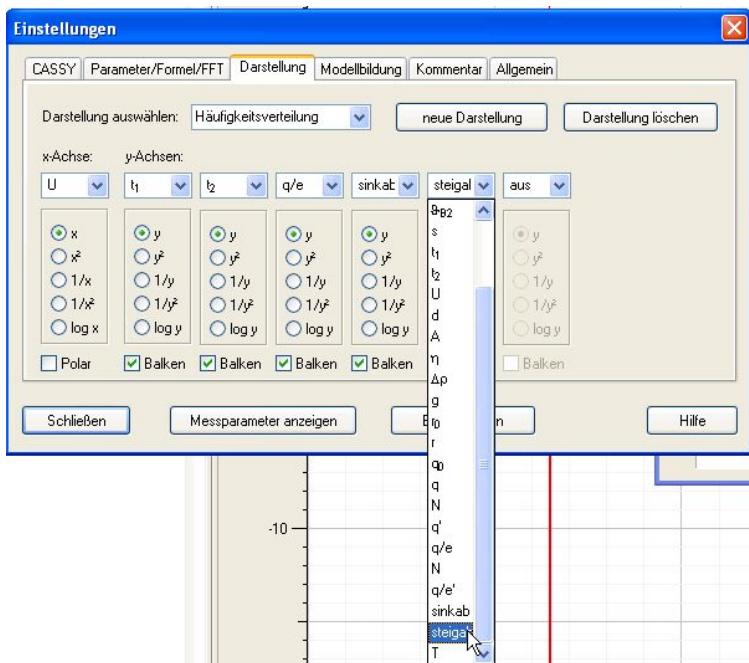
- Die Größe „Strecke“ auf die Strecke in mm setzen, die später vermessen werden soll.



- Für die Notierung der Sink- und Steigabweichungen 5.1.6.1 wird die Größe „Sinkabweichung“ und auf dieselbe Weise die „Steigabweichung“ eingeführt.



- Die nebenstehenden Größen anzeigen lassen und anschließend die Einstellungen schließen.



5.1.4.2 Der Bildschirmbereich

Der Bildschirmbereich bei Messungen mit der Sink-/Steigmethode stellt sich folgendermaßen dar:

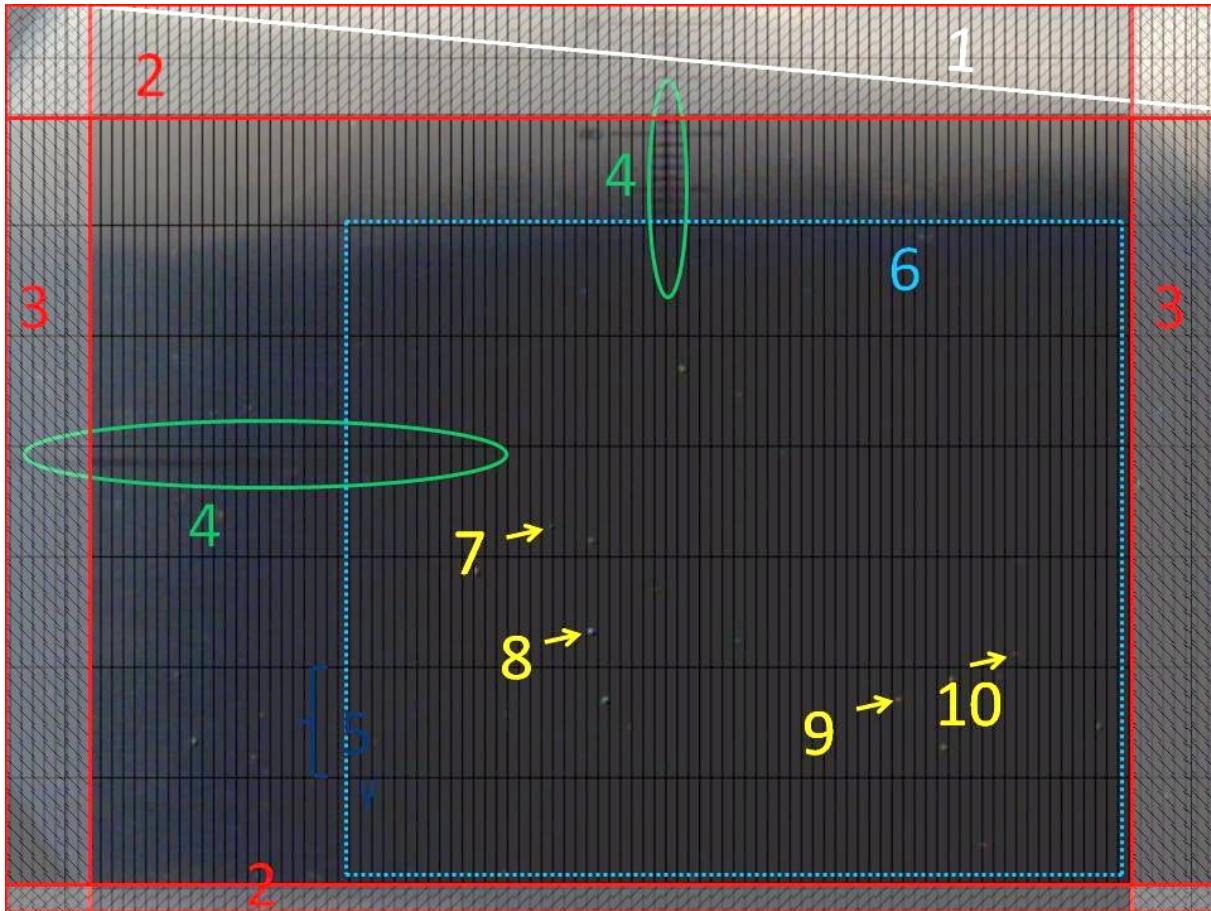


Abbildung 5.6: Ein typisches Bild bei der Messwertaufnahme

- Die Messapparatur ist abgedunkelt.
 - Richtungen werden aus der Sicht des Beobachters beschrieben.
 - Farbige Zahlen und Striche wurden im Nachhinein zur Erläuterung eingefügt
- 1 Die Spiegelung der unteren Kondensatorplatte erscheint schief: Eine Ausrichtung als waagrechte Marke würde schräg steigende/fallende Tröpfchen ergeben.
 - 2 Aufgrund der Helligkeit im oberen Bereich kann man einen Tropfen in diesem Bereich leicht aus den Augen verlieren. Im unteren dagegen gelingt es nicht gut, den Durchgang durch die Wegmarke beim Ausschalten der Spannung zu finden: diese Bereiche besser meiden.

- 3 Beinahe alle Tropfen weisen einen horizontalen Drift auf, der sich auch nach dem Einschalten der Spannung fortsetzt. Es besteht in diesem Bereich also die Gefahr, dass der Tropfen aus dem Bildbereich driftet. Da dies meist am Ende der Messung passiert, ist das besonders ärgerlich.
- 4 Software-Gitter und Skala des Messmikroskops sollten übereinstimmen, andernfalls ist das ein Zeichen, dass die Mikroskopkamera auf dem Mikrometerokular verstellt wurde: Dann ist ein erneutes Ausrichten am Lot notwendig.
- 5 Die vertikale Länge des Software-Gitters wurde (in ausgeleuchtetem Zustand) an die Messskala oder besser an kalibriertes Skalenblättchen angepasst. Für die horizontale Länge stellt der Durchmesser eines Tropfens einen guten Richtwert dar. So werden Abweichungen von der Senkrechten schnell erkannt und können auch quantifiziert werden.
- 6 Durch die schwache Belichtung sind in diesem Bereich nur wenige Tröpfchen-Schichten zu erkennen. Ein Tröpfchen, das einer Drift vom Beobachter weg oder zu ihm hin unterliegt, muss also zur Beobachtung nachfokussiert werden: Es fällt auf, wenn dies häufig geschehen muss. Dann sollte nochmals mit der Dosenlibelle überprüft werden, ob die Messapparatur in Waage ist.
- 7 Auch wenn es in diesem Bild durch das Gitter überdeckt ist, so wird dieses Tröpfchen gut zur Messung geeignet sein: Aufgrund seiner Größe wird es nur 1-2 Elementarladungen tragen. Es muss allerdings noch fokussiert werden.



Abbildung 5.7: Nichtfokussierter Tropfen gewünschter Größe

- 8 Ein gut fokussiertes Tröpfchen, das aber wahrscheinlich aufgrund seiner Größe $q \geq 4e$ tragen wird:



Abbildung 5.8: Tropfen zu großer Ladung

- 9 Ein gut fokussiertes Tröpfchen in der richtigen Größe: An diesem dürfte schon die Brownsche Bewegung zu sehen sein.



Abbildung 5.9: Tropfen gewünschter Größe

- 10 Ein kleines nicht fokussiertes Tröpfchen: Das seitliche „Verschmieren“ ist häufig zu sehen.



Abbildung 5.10: Nichtfokussierter kleiner Tropfen

Nicht zu sehen sind:

Sehr große Tropfen: Sind für diese Messungen ungeeignet und haben sich schon aufgrund der hohen Ladungen bzw. der großen Massen aus dem Bildbereich bewegt

5.1.4.3 Messwertaufnahme

Vor der Messreihe:

- Die Temperatur und den Luftdruck⁷ notieren.
- Den Schalter für die Spannung nach oben („on“) legen und die Kondensatorspannung auf 300 V bis 350 V einstellen.

Die Messwerte:

- Darauf achten, dass der Schalter für die Zeitmessung nach unten gestellt ist.
- Die Gesamtheit der Tröpfchen sowohl mit ein- als auch ausgeschalteter Spannung in der moticam-Software beobachten und eines auswählen, das sich langsam im Vergleich zu anderen Tropfen bewegt und die Richtung mit Umschalten der Spannung ändert.
- Kondensatorspannung mit dem Schalter ausschalten.
- Die Zeitmessung durch den *t*-Schalter dann starten, wenn sich der gedachte Schwerpunkt des Öltröpfchens auf der Marke befindet. Den Tropfen vorher ein Stück beobachten, um durch Interpolation einen genauen Durchgangszeitpunkt zu finden.
- Nach der gewählten Strecke (z.B. 1,5 mm bzw. drei Skaleneinheiten des Software-Gitters) die Spannung wieder einschalten. Die horizontale Sinkabweichung notieren.
- Die Zeitmessung mit dem Schalter stoppen, wenn das Tröpfchen wieder auf der ursprünglichen Höhe angelangt ist. Die horizontale Steigabweichung notieren.
- Zum Cassy-Ausleseprogramm wechseln und mit **F9** den Messwert in die Tabelle übernehmen. Darauf achten, dass die Kondensatorspannung noch eingeschaltet ist, sonst wird der Wert 0 notiert.
- Auf grobe Fehler achten (s.u.), den letzten Messwert ggf. mit **ALT+L** löschen.
- Die Spannung ausschalten und ein neues Tröpfchen suchen, evtl. neue Tropfen einsprühen.

Nach der Messreihe:

- Die Temperatur und den Luftdruck notieren.

Für die Aufnahme positiv geladener Tropfen müssen die Anschlüsse am Plattenkondensator und am Cassy-Eingang B 5.5 vertauscht werden: Bei vorsichtigem Umstecken kann die Messwertaufnahme im selben Cassy-Sheet fortgesetzt werden. Die Ladungen werden ab sofort mit einem negativen Vorzeichen versehen.

Generell gilt: Kleine Ladungen sind deutlich besser festzustellen als große. Reicht die Zeit also nur für 60-80 Messungen, so ist es ratsam sich auf $q \leq 2|e|$ zu konzentrieren.

⁷<http://www.klimageo.rwth-aachen.de/wtst/ACHoern.htm#Daten>

5.1.4.4 Grobe Fehler

Große Fehler können – entgegen der ersten Einschätzung – sehr schnell eintreten. Sie liegen bspw. dann vor, wenn

- einer der verzeichneten Messwerte unphysikalisch ist (bspw. eine negative Zeit),
- für die Spannung der Wert 0 V verzeichnet wurde,
- nicht mit äußerster Sicherheit immer ein- und dasselbe Tröpfchen vermessen wurde,
- Fenster oder Türen geöffnet wurden oder offen sind,
- der Versuchstisch Erschütterungen unterlag,
- die Mikroskopkamera oder ein anderer Bauteil der Messoptik verschoben wurde oder
- das Tröpfchen nicht annäherungsweise einer gleichförmigen Bewegung folgt.

5.1.4.5 Ein Zeitplan

Für die Messung mit der Sink- und Steigmethode sieht der zeitliche Aufwand für eine Messreihe mit 60 Werten 5.1.5.2 folgendermaßen aus:

Schritt	Vorgang	Dauer [min]	Besonderheiten
1	In-Waage-Setzen	10	kleinere Abweichungen bleiben
2	Bau des Lots	10	zügig arbeiten
3	Ins-Lot-Bringen	10	
4	Geräte anschließen/verbinden	5	Kabel vorher bereitlegen
5	Software-Einstellungen	15	
\sum Vorbereitungen		50	
6	60 (80) Messwerte aufnehmen	120 (160)	
7	Rückbau / Übertragen der Messdaten	10	
\sum Messreihe		180 (220)	

Tabelle 5.5: Zeitplan einer Messung mit dem Sink- und Steigverfahren

Die Bestimmung ist gegenüber einer geringen Anzahl an Messwerten robust. Mindestens genauso wichtig wie das zügige Arbeiten ist bei Zeitmangel die Konzentration auf kleine Ladungen und die Vermeidung grober Fehler.

5.1.5 Hinweise zur Auswertung des Versuchs

5.1.5.1 Prinzipielles Ziel bei der Auswertung

Soll der Nachweis einer Quantelung der Ladung gelingen, so ist es notwendig, dass Werte, die nahe an ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung liegen, häufiger vorkommen als andere. Tatsächlich haben sich in den Häufigkeitshistogrammen bisheriger Messungen größere

Balken im Bereich von $-6\text{ e}, -5\text{ e} \dots 6\text{ e}$ gezeigt.

Zur Bestimmung des Hochpunktes einer solchen Häufung werden Gaußverteilungen angepasst: Physikalisch sind diese durch den Zentralen Grenzwertsatz zu erwarten und es zeigt sich auch, dass sie den Verlauf der Kurven gut beschreiben können (besser als Polynome oder Lorentz-Verteilungen). Sind die Gaußverteilungen angepasst, so kommt es auf die X-Koordinaten der Hochpunkte an: Wie genau liegen sie auf $1\text{ e}, 2\text{ e}, 3\text{ e} \dots$? Schwanken sie um diese Werte oder liegen sie immer etwas darüber/darunter? Gibt es Ausreißer?

Anschließend wird überprüft, wie gut die Elementarladung mit dieser Messreihe bestimmt werden kann. Im Idealfall sind die Werte natürlich genau $1\text{ e}, 2\text{ e}, 3\text{ e} \dots$, woraus der Schritt von einer zur anderen Ladung genau auf 1 e bestimmt werden kann⁸. So genaue Ergebnisse wird es natürlich in diesem Praktikumsversuch nicht geben: So werden beispielsweise die Ergebnisse $-2,1\text{ e}, -0,9\text{ e}, 1,2\text{ e}, 1,9\text{ e}$ auf die ganzen Zahlen $Z = -2, -1, 1, 2$ aufgetragen und eine Gerade angepasst, die dann die Steigung $m = \frac{\Delta q}{\Delta Z} \approx \frac{1\text{ e}}{1} = 1\text{ e}$ aufweist. Es kommt also nun darauf an, wie genau die Geradensteigung bei 1 e liegt!

In die Anpassung der Gaußverteilungen geht der Stichprobenfehler \sqrt{N} mit N , der Anzahl der Einträge, ein. Für die Geradenanpassungen werden die Fehler auf die Maximumstellen der Gaußkurven verwendet.

Neben den statistischen Fehlerquellen gehen noch diverse systematische Ungenauigkeiten in die Ladungsbestimmung ein. Sie werden im Abschnitt 5.1.6 besprochen, um die Fehlerquellen in ihrer Auswirkung einschätzen zu können. Da ihre Untersuchung im Rahmen des Versuchs meistens zu aufwendig bzw. mit der gegebenen Ausstattung nicht möglich ist, muss die konkrete Untersuchung und Abschätzung der Effekte durch die Praktikumsteilnehmer nicht selber durchgeführt werden.

5.1.5.2 Beispieldmessung inkl. Auswertungsstichpunkte

In diesem Teil der Anleitung wird gezeigt, welche Aspekte bei der Analyse der Messung im Grundpraktikum betrachtet werden sollten. Der Auswertung liegt eine Messreihe mit 100 Messwerten zugrunde, deren Umfang vergleichbar mit den Messreihen im Grundpraktikum ist.

Im Gegensatz zum Grundpraktikum wurde hier für jeden Wert die Temperatur notiert mit einem Durchschnitt von:

$$T = 24,9 \pm 0,3 \text{ }^\circ\text{C}$$

⁸Zu beachten ist hier nochmals, dass die durch moderne, sehr genaue Methoden ermittelte Elementarladung 5.1.1 hier **nur als eine naheliegende Quantität** verwendet wird!

Das Ergebnis

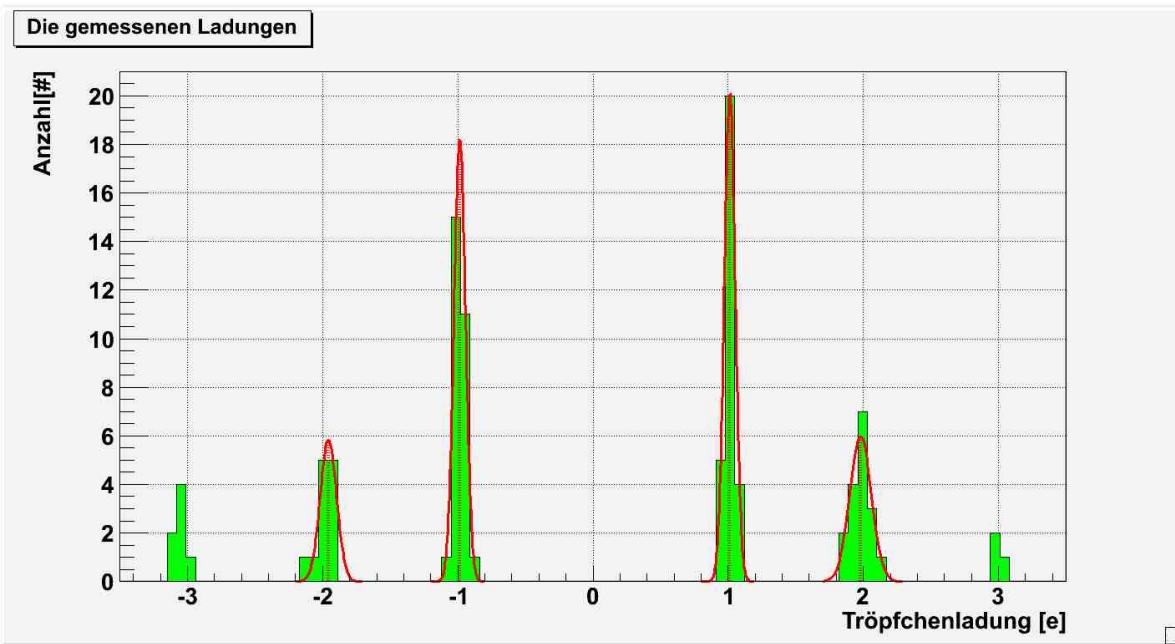


Abbildung 5.11: Beispieldmessung: Histogramm der vermessenen Tropfenladungen

Zu sehen sind

die Anzahl der in einem Ladungsbereich gemessenen Tropfen (als **grüne Balken** dargestellt),
 die an diese Histogramm-Balken angepassten Gaußverteilungen (**rot**),
 die Maximumstellen der Gaußverteilungen (...).

Es sind hier 6 Peaks zu erkennen, zwischen denen sich kein einzelner Messwert befindet. Es kann also von einer sehr guten Genauigkeit der Messung gesprochen werden. Ein Vergleich der eingezeichneten Maximumstellen der Gaußverteilungen mit der Abszissen-Skala verrät eine ebenfalls gute Präzision. Da für 3 e und -3 e nur sehr wenige Werte existieren, wird auf eine Anpassung verzichtet.

Die Werte der Anpassungen im Einzelnen:

Nummer	$\mu \pm \sigma_{\mu}$	$s \pm \sigma_s$	$f_{\max} \pm \sigma_{f_{\max}}$	χ^2/dof	angepasster Bereich
-2	$-1,96 \pm 0,04$	$0,06 \pm 0,04$	$5,8 \pm 2,7$	0,9/1	$[-2,2, -1,7]$
-1	$-0,99 \pm 0,01$	$0,04 \pm 0,01$	$18,2 \pm 4,6$	0,2/1	$[-1,2, -0,8]$
1	$1,01 \pm 0,01$	$0,04 \pm 0,01$	$20,0 \pm 4,5$	0,0/0	$[0,8, 1,2]$
2	$1,98 \pm 0,02$	$0,08 \pm 0,02$	$6,0 \pm 2,0$	0,4/2	$[1,7, 2,3]$

Tabelle 5.6: Beispieldmessung: Die Werte der angepassten Gaußverteilungen

Alle Mittelwerte der Gaußverteilungen stimmen innerhalb einer Standardabweichung (des Mittelwertes) mit der nächsten ganzzahligen Ladung überein. Auch liegen die Breiten deutlich unter 0,1, was schon in der Betrachtung des Histogramms durch die äußerst scharfen Spitzen auffällt.

Schon an dieser Stelle lässt sich zusammenfassen, dass auch eine Messung mit einer geringer Anzahl an Messwerten für eine Bestimmung der Elementarladung ausreichend ist.

Die Lage der Hochpunkte wird aufgetragen und eine Gerade angepasst. Wie zu sehen sind, können die vier Werte durch eine Gerade $y = a + b \cdot x$ beschrieben werden. Wie gut das gelingt, zeigen die Ergebnisse der Geradenanpassung:

$a \pm \sigma_a[e]$	$b \pm \sigma_b[e]$	χ^2/dof
$0,017 \pm 0,056$	$0,995 \pm 0,006$	$1,7/2$

Tabelle 5.7: Beispilmessung: Die Werte der angepassten Geraden

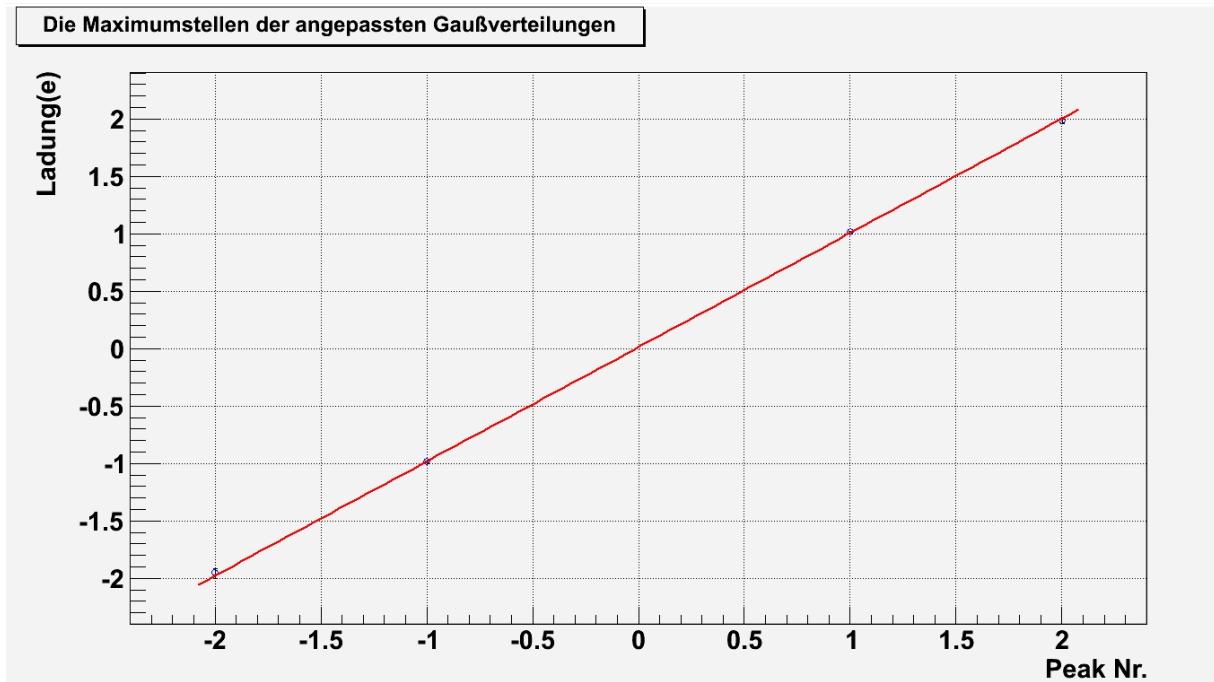


Abbildung 5.12: Beispilmessng: Die Lage des -2. bis 2. Peaks

Das Ergebnis stimmt innerhalb einer Standardabweichung mit dem Wert der modern ermittelten Elementarladung überein! Der Fehler fällt mit $0,006 e$ etwa dreimal so hoch aus wie in einer Messung mit 1000 Messwerten. Trotzdem gibt das Ergebnis doch Vertrauen in die Messprozedur und ist für einen Grundpraktikumsversuch ein sehr gutes Ergebnis.

Vorsicht ist aber auch hier in Bezug auf die Messunsicherheiten der Parameter geboten: Da die Unsicherheit von $0,006\text{ e}$ bei weitem von den Unsicherheiten der Parameter übertrroffen werden, kommt es bei den Messungen des Grundpraktikums sehr auf deren genaue Kenntnis an 5.1.6.9.

Ist die Anpassung durch eine Gerade gerechtfertigt und wieweit weichen die Ergebnisse bezüglich ihrer Standardabweichungen von den ganzzahligen Elementarladungen ab? Die Residuen geben Auskunft. Die Abweichungen der vier Werte sind im Verhältnis zu ihren Standardabweichungen klein. Die vier Pulls liegen im erwarteten Bereich. Bei vier Messwerten ist die Anpassung einer Gaußverteilung nicht sinnvoll.

Der Versuch des Grundpraktikums mit seiner beschränkten Zeit ist also durchaus für eine zufriedenstellende, quantitative Bestimmung der Elementarladung geeignet.

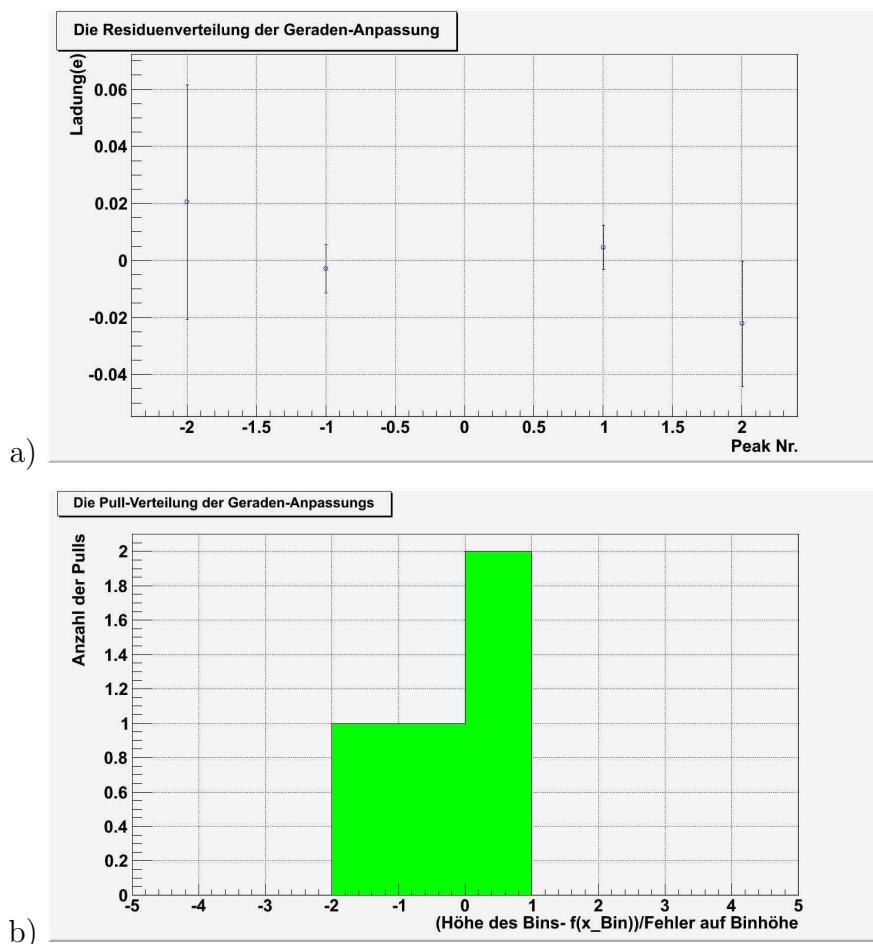


Abbildung 5.13: Beispieldmessung: a) Residuen b) Pullverteilung der Anpassung

5.1.6 Betrachtung verschiedener Fehlerquellen

In diesem Abschnitt wurden diverse Messreihen der Sink- und Steigmethode aufgezeichnet, um die Auswirkungen verschiedener Effekte bestimmen zu können. Ihnen liegen die Parameter der folgenden Tabelle zugrunde:

Abk.	Größe	Einheit	verwendeter Wert
T	Temperatur	°C	wird für jede Messreihe angegeben
η	Viskosität der Luft	$\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$	$(1,8277 \pm 0,0005) \cdot 10^{-5} \cdot (T - 23)$
d	Abstand der Kondensatorplatten	m	$6,0 \cdot 10^{-3}$
$\rho_{\text{Öl}}$	Dichte des Millikan-Öls	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$877,0 - 0,6 \cdot (T - 15,0)$
ρ_{Luft}	Dichte der Luft	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$1,177 + 4,0 \cdot (T - 18,5)$
g	Erdbeschleunigung	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	9,811
p	Luftdruck	Pa	985
Kalib	Faktor der Streckenkalibrierung	1	0,98328

5.1.6.1 Bestimmung der Strecke Δs

Kalibrierung der Längenskala

Da die Sink- und Steiggeschwindigkeit nach Gl. 5.5 direkt in die Berechnung der Ladung eingeht, ist eine genaue Kenntnis der zurückgelegten Strecke entscheidend. Es existiert zwar eine in die Optik integrierte Skala, sie ist aber nicht exakt auf die zurückgelegten Strecken an der Stelle der Tröpfchen kalibriert. Um das zu umgehen, wird ein Software-Gitter über das Kamerabild gelegt und mit einem Referenzkreis kalibriert. Das Software-Gitter hat außerdem den Vorteil, dass es über die gesamte Bildbreite eine genaue Messung ermöglicht.

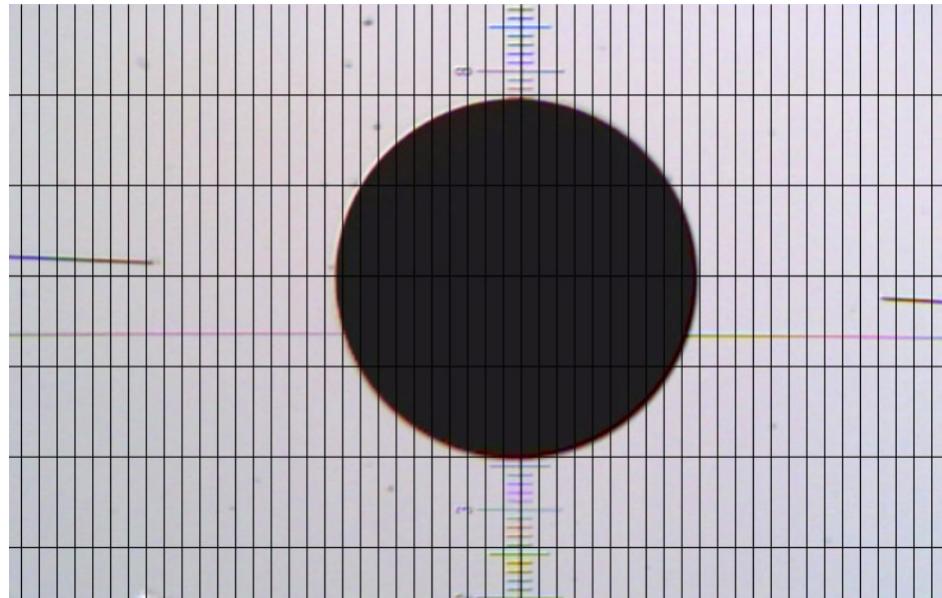


Abbildung 5.14: Der Kalibrierungskreis mit einem Durchmesser von 2 mm. Überlagert ist das Software-Gitter mit einer Rasterung von 0,5 mm in der Höhe und 0,1 mm in der Breite.

Es gibt leider keine Informationen zur Genauigkeit des verwendeten Kalibrierungsplättchen mit einem Durchmesser für den aufgedruckten Kreis von 2 mm. Auch die Genauigkeit der Anpassung innerhalb der Software ist unbekannt. Somit bleibt nur eine Untersuchung der Schwankungen in der Umrechnung von Softwarebild zu Realabstand.

Dazu wurden acht leicht unterschiedliche Aufnahmen⁹ des Kreises gemacht (siehe Abbildung 5.14) und damit eine Kalibrierung durchgeführt. In Tabelle 5.8 (rechts) sind die Ergebnisse dieser Kalibrierung zu sehen. Ihnen ist zu entnehmen, dass die relative Ungenauigkeit bei etwa 0,5 % liegt.

Bild	μm pro Pixel	
	x -Achse	y -Achse
1	6,645	6,667
2	6,623	6,579
3	6,645	6,601
4	6,623	6,601
5	6,645	6,579
6	6,645	6,623
7	6,623	6,558
8	6,667	6,623
Mittel	$6,64 \pm 0,02$	$6,60 \pm 0,03$

Tabelle 5.8: Ergebnisse der Kalibrierungsreihe

Die senkrechte Strecke

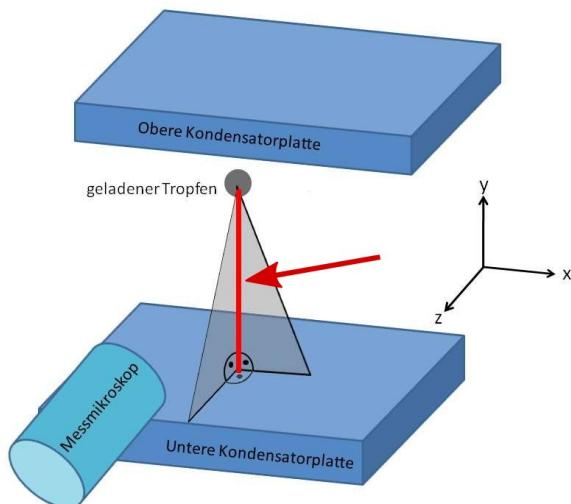


Abbildung 5.15: Verdeutlichung der Lage der senkrechten Strecke (|)

Das im letzten Abschnitt 5.1.6.1 vorgestellte Verfahren bestimmt die Schwankungen auf die Kalibrierung des Software-Gitters. Mit der relativen Ungenauigkeit von 0,5 % und einer Messstrecke von 1,5 mm bedeutet das also $7,5 \mu\text{m}$ Unsicherheit durch die Kalibrierung (vorausgesetzt, die Fehler durch den Referenzkreis und die Software-Anpassung sind kleiner). Wie man in Tabelle 5.8 sehen kann, entspricht das ungefähr einem Pixel und ist somit im Rahmen des technisch Möglichen für diesen Versuch.

⁹Fokussierung neu eingestellt, Position leicht verändert.

Mit dieser Unsicherheit ergibt sich ein Fehler auf die Ladung von $1,4 \cdot 10^{-2} e$, wobei hier noch keine Genauigkeit des Referenzkreises berücksichtigt ist. Da es dazu keine Angabe gibt, ist die Abschätzung schwierig.

Allerdings liegen Fertigungstoleranzen häufig bei 0,1 % bis 1 %, also zumindest im gleichen Bereich. Geht man davon aus, dass es sich hier um ein Kalibrierungswerkzeug handelt, ist eine Ungenauigkeit von 0,1 % durchaus realistisch und somit kleiner als die oben beschriebenen Schwankungen. Trotzdem ist diese Überlegung sehr spekulativ.

Die Abweichungen von der Vertikalen

Im Idealfall sinken und steigen die Tröpfchen genau entlang der vertikalen Achse, so dass nur diese Strecke gemessen werden muss. Mit zwei Schritten wird versucht, sich diesem Fall möglichst gut anzunähern.

In-Waage-Bringen der Versuchsapparatur

Das Feld der Kondensatorplatten ist nach dem Aufbauen nicht unbedingt an der Gravitation ausgerichtet. Neben den starken Tendenzen der Tröpfchen nach rechts oder links zu fallen und zu steigen fällt auch auf, dass die Optik im Verlauf der Bewegung häufig nachgestellt werden muss. Die Tröpfchen wandern also im Laufe der Zeit aus der Bildebene heraus. Um das auszugleichen, wird der Kondensator ohne Plastikdeckel mit einer Dosenlibelle ausgerichtet.



In Abbildung 5.16 sind zu sehen:

- die obere Platte des Edelstahl-Plattenkondensators,
- drei Löcher in dieser Platte, die für die Plastikstifte gebohrt wurden, die beide Kondensatorplatten trennen,
- die Dosenlibelle mit der Luftblase innerhalb des aufgemalten Toleranz-Ringes.

Abbildung 5.16: Dosenlibelle

Ausrichten der Kamera am Lot

Das Bild der Mikroskopkamera verrät nicht, ob die Vertikale im Bild mit der realen Vertikalen übereinstimmt. Die Kamera muss also durch einen optischen Anhaltspunkt ausgerichtet werden. Ein Lot mit einem handelsüblichen Faden mit etwa 1 mm Durchmesser ist bei weitem zu dick, um ihn genau in der Apparatur lokalisieren zu können.

Erst ein Kupferdraht mit einem Durchmesser von $30 \mu\text{m}$ ist ausreichend dünn: Der Hintergrund wird abgedunkelt und der Draht von der Seite angestrahlt. Anschließend ist eine

Orientierung an einem der Ränder des Drahtes möglich:

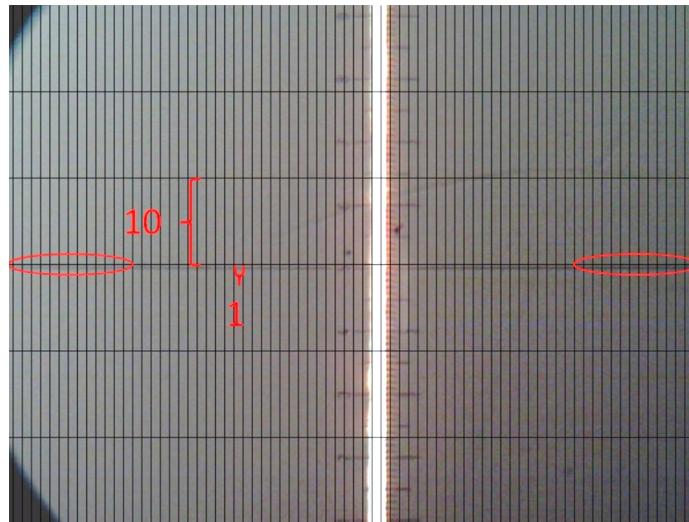


Abbildung 5.17: Ins-Lot-Bringen des Messmikroskopes und der Mikroskopkamera.

Zu sehen sind
der hell erleuchtete Cu-Draht (weiß),
das Software-Raster (schwarze Linien),
die eingebaute Längenskala (direkt am Draht),
zwei Ellipsen (in rot), die die Bereiche markieren, an denen besonders gut eine Übereinstimmung von Software- und eingebauten Gitter festgestellt werden kann,
die Zahlen 10 und 1, die das Längenverhältnis von Gitterlänge zu -breite beschreiben.

Bei einem Durchmesser von $30 \mu\text{m}$ müsste der Draht dünner erscheinen als der Abstand zweier Skalenteile ($\approx 50 \mu\text{m}$). Dies gelingt jedoch nicht wegen des Pendeln des Lotes (auch in beruhigtem Zustand), der Überblendung des Kamera-Chips in diesem Bereich und aufgrund der Tatsache, dass der Faden nicht ganz genau fokussiert werden kann. Das Bild 5.17 zeigt den Lot-Draht kurz vor dem Anfang des Lot-Körpers.

Wie genau dieses Verfahren ist, zeigt ein interessanter Zwischenfall in Abbildung 5.18.

Um den Körper des Lotes mit dem Lot-Draht zu verbinden, ist jeglicher Knoten ungeeignet: Da Draht -im Gegensatz zu einem Faden- starr ist, verbiegt sich der Teil des Drahtes, der kurz oberhalb des Lot-Körpers liegt und später auch mit dem Messmikroskop betrachtet werden muss. Also wird der Cu-Draht am Ende des Lotes zwischen einer Schraube und einer passenden Mutter geklemmt. Es kann also angenommen werden, dass der Schwerpunkt des Pendelkörpers nicht genau auf der Verlängerung des Drahtes lag und das entstandene Drehmoment die senkrechte Lage des Drahtes um einige wenige Grad veränderte (siehe Abbildung 5.19 rechts).

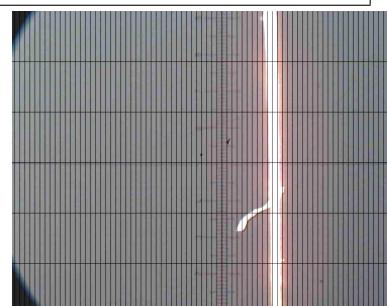


Abbildung 5.18: Ein mittelgroßer Staubfaden am Draht des Lotes.

Um diesen Effekt zu verringern, wird ein Lot mit Länge von mindestens 50 cm (vom Aufhängepunkt bis zum unteren Ende des Pendelkörpers) verwendet. Bei diesem kann der „Drehmoment“-Fehler auf

$$\begin{aligned}\alpha &= \arctan\left(\frac{\delta s}{s_{Lot}}\right) \approx \frac{\delta s}{s_{Lot}} \leq \frac{2 \text{ mm}}{50 \text{ cm}} \\ &\approx 4 \cdot 10^{-3} \approx 0.2^\circ\end{aligned}$$

abgeschätzt werden. Da die Ausrichtung des Messmikroskopes an das Lot wesentlich ungenauer gelingt, bleibt dieser Fehler unberücksichtigt.

Aufgrund der Länge des Lots sind die Rest-Pendelbewegungen so stark, dass im vergrößerten Bild der Rand des Drahtes nicht wahrgenommen werden kann. Zur Beruhigung der pendelnden Bewegung können langsam kleine Gummistopper an den Pendelkörper herangeführt werden. Dies geschieht derart, dass der Draht immer noch um die vermutete Gleichgewichtslage pendelt, jedoch mit deutlich kleinerer Amplitude.

Der Fehler der Gleichgewichtslage, der eventuell aus diesem „Abstoppen“ resultiert, bewegt sich deutlich unter 1 mm, weswegen er noch unter dem des Drehmomentes liegt und daher ebenso vernachlässigt wird.

Abweichung in Beobachtungsebene

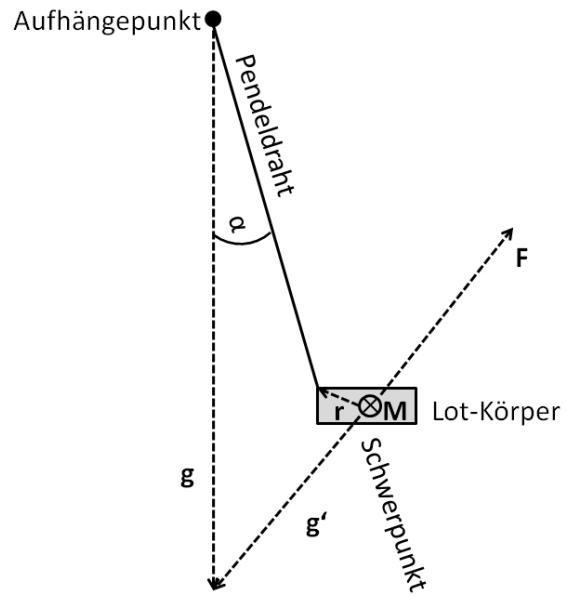


Abbildung 5.19: Ein unaustariertes Lot

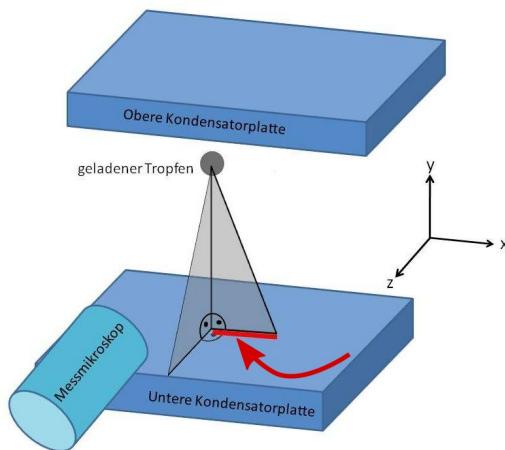


Abbildung 5.20: Verdeutlichung der Lage der Abweichung in der Beobachtungsebene (|)

Nach den Vorarbeiten bleiben noch zwei Effekte:

Der Hersteller gibt an, dass die **Parallelität der beiden Platten** um bis zu $\delta s = 0,1 \text{ mm}$ abweichen könnte (s. dazu und auch zum Plattendurchmesser die Gebrauchsanweisung von Leybold):

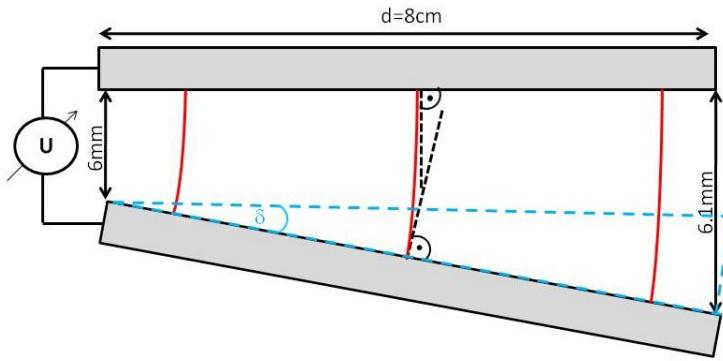


Abbildung 5.21: Schema nichtparalleler Kondensatorplatten (grau) mit den Feldlinien des elektrischen Feldes (rot).

Die obere Kondensatorplatte wird mit der Dosenlibelle in Waage gebracht. Deshalb ist sie hier waagrecht eingezeichnet. Für die Abschätzung „nach oben“ wird angenommen, das Tröpfchen bewege sich nah an der unteren Platte, wo die Feldlinien (|) senkrecht auf der unteren Platte sitzen:

$$\delta \approx \arctan \left(\frac{\delta s}{d} \right) = \arctan \left(\frac{0.1 \text{ mm}}{8 \text{ cm}} \right) = 0.07^\circ \quad (5.15)$$

In der Beispieldmessung 5.1.5.2 ist der Unterschied mit

$\Delta q = 0,995074 e - 0,995074 e = 0,0 \cdot 10^{-6} e$ nicht festzustellen. Tatsächlich wird auch dieser Effekt aus zwei Gründen geringer ausfallen:

Die Tropfen werden mittig zwischen beiden Kondensatorplatten beobachtet. Dort ist die Krümmung der Feldlinien durch beide Platten beeinflusst und nicht mehr so stark.

Die Parallelität der vorliegenden Apparatur wurde mit einer handelsüblichen Schieblehre (Messungenauigkeit 0,05 mm) untersucht. Es zeigten sich keine Unterschiede im Abstand der Platten. Der resultierende Fehler wird daher vernachlässigt.

Durch die **Wärmeabstrahlung der Lampe** können Konvektionsströme stattfinden. Millikan versuchte diesen Effekt so gering wie möglich zu halten: „[...]the heating effects of the illuminating arc were eliminated, first by filtering the light through about two feet of water(sic!), and second, by shutting off the light from the arc altogether except at occasional instants, when the shutter was opened to see that the star was in place, or to make an observation of the instant of its transit across a cross-hair.“¹⁰.

Dieser Effekt lässt sich allerdings in der hier verwendeten Apparatur kaum verringern.

¹⁰siehe S.355 [Mill1]

Er fällt zusammen mit den Auswirkungen einer **Messoptik**, deren Skala **nicht genau in Richtung der Erdbeschleunigung** zeigt und einer **Messapparatur**, welche **nicht in Waage** ist.

Es ist unbedingt notwendig die **gesamte Messapparatur** in Waage zu setzen und die **Messoptik an einem Lot auszurichten**. Die Länge des Lotes sollte ≈ 110 cm betragen.

Trotz der Ausrichtung wird es zu Abweichungen in der Sink- bzw. Steigbewegung kommen. Diese müssen in die Messstrecke einbezogen werden und anhand der Genauigkeit der Aufzeichnungen ist die Unsicherheit darauf abzuschätzen.

Die Abweichung von der Vertikalen senkrecht zur Beobachtungsebene

Diese Abweichung ist aufgrund des zweidimensionalen Kamerabildes deutlich schlechter abzuschätzen. Da die Beleuchtungseinrichtung beinahe senkrecht auf dieser Ebene steht, fällt die Wärmeabstrahlung bedingte Abweichung geringer aus.

Tatsächlich erweist sich die Auswirkung eines schiefen Versuchstisches als weitaus größer. War die Apparatur in Waage, musste kaum noch nachfokussiert werden. Generell ist es aber besser den Beobachtungsbereich dunkel zu halten, da dadurch der Tropfen genau fokussiert werden muss: Eine größere Abweichung wird so schnell bemerkt. Der durch diesen Effekt entstandene Fehler wird nach allen Vorarbeiten klein ausfallen. Für eine Beispielrechnung wird er nach oben mit 1° abgeschätzt, womit sich in der Beispieldmessung 5.1.5.2 mit einer „wahren“ Strecke

$$s' = \sqrt{s^2 + (s \cdot \tan(1^\circ))^2} \quad (5.16)$$

ein Unterschied von $\Delta q = q(s) - q(s') = 0,995074 e - 0,996424 e \approx -1,4 \cdot 10^{-3} e$.

Die Abweichung vom wahren Wert durch diesen Fehler ist also gering.

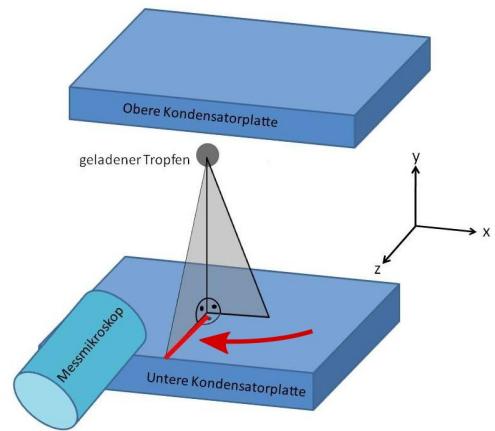


Abbildung 5.22: Verdeutlichung der Lage der Abweichung senkrecht zur Beobachtungsebene (||)

5.1.6.2 Zeitenmessung Δt

Nach Gl.5.8 geht die Zeitmessung insgesamt mit dem Faktor 1,5 in die Bestimmung der Ladung ein, sie ist daher – genau wie Streckenbestimmung – sehr genau durchzuführen.

Dabei sind zwei Dinge zu beachten:

- Fehler, die aus dem Verpassen des richtigen Zeitpunkts der Überschreitung des Tröpfchens der gewählten Marke resultieren, werden – so klein sie auch sein mögen – als **grobe Fehler** behandelt: Hier kann nur so genau wie möglich und mit ungeteilter Aufmerksamkeit gemessen werden.
- Das Umlegen des Schalters benötigt eine endliche Zeit, in dessen Prozess die Zeitmessung gestoppt wird. Es ergibt sich somit eine Ungenauigkeit in der Zeitmessung, weil der Start-

punkt z.B. leicht verpasst wird. Bei gleichem „Schaltverhalten“ kompensiert sich der Fehler aber bei dem Endpunkt der Messung.

Der Umkehrvorgang

Die Auswirkungen der Richtungsumkehr des Tropfens beim Übergang vom Sinken zum Steigen werden in der Theorie nicht bedacht. Sie führt allerdings bei schnelleren Tropfen ($\gtrsim 7 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$) zu einer Verlängerung der gesamten zurückgelegten Strecke. Die Abschätzung dieses Fehlers ist schwer: Die Zunahme des Sink- und des Steigweges kann bis zu einem Skalenstrich des eingebaueten Gitters ($\equiv 0,025 \text{ mm}$) betragen. In der Beispieldmessung 5.1.5.2 wird die verwendete Strecke ($\approx 1,5 \text{ mm}$) um diese Strecke variiert:

$$\begin{aligned}\Delta q &= q|_{s=1,50 \text{ mm}} - q|_{s=1,45 \text{ mm}} = 0,995074 e - 0,969328 e \approx 2,6 \cdot 10^{-2} e \\ \Delta q &= q|_{s=1,50 \text{ mm}} - q|_{s=1,55 \text{ mm}} = 0,995074 e - 1,02437 e \approx -2,9 \cdot 10^{-2} e\end{aligned}\quad (5.17)$$

Zur Verringerung dieses Fehlers werden drei Dinge bei der Messanleitung des Grundpraktikums beachtet:

- Es werden nur Tröpfchenladungen $|q| \leq 2e$ betrachtet; dies sind in den meisten Fällen die langsamsten Tropfen
- Die Messstrecke wird mit 1,5 mm lang gewählt
- Die empfohlene Spannung beträgt – entgegen dem Herstellerhinweis – 350 V statt 450 V, was zu geringeren Geschwindigkeiten führt

Die Verringerung dieses Fehlers wirkt sich stark auf Kosten der Messzeit aus: In 1 Stunde können dadurch nicht mehr als etwa 30 Tropfen (!) vermessen werden. Die eingeführten Veränderungen in der Messung machen jedoch auch die Bestimmung anderer Parameter genauer, wie etwa der verschiedenen Abweichungen von der Vertikalen und der Bestimmung der Durchgangszeit.

5.1.6.3 Das elektrische Feld mit U und d

Die Abweichung vom idealen Feld-Verlauf

Sie beruht auf der endlichen Größe der Platten (8 cm ohne Fehlerangabe) und dem Vorhandensein dreier Plastik-Stifte zwischen den Platten, die diese auf konstantem Abstand halten. Da nur Tröpfchen im mittleren Bereich des Kondensators beobachtet werden, wird der Fehler aus beiden Effekten als klein eingestuft.

Der Abstand der Kondensatorplatten d

Es sind zwei Dinge zu beachten:

Der Fehler durch eine Nichtparallelität der Platten wird in einem früheren Abschnitt behandelt 5.1.6.1. Andererseits geht der Plattenabstand d nach Gl.5.8 selbst direkt in die Bestimmung der Ladung ein. Der Hersteller macht in der Gebrauchsanweisung die Angabe

$d = 6 \pm 0,05$ mm. Ein Nachmessen mit einer handelsüblichen Schieblehre (Ablesegenaugigkeit 0,05 mm) weist bei der vorliegenden Versuchsaufbau keine Abweichung von 6 mm aus. Für die Abschätzung eines zu groß/zu klein angenommenen Abstandes (und damit eines zu klein/zu groß angenommenen Feldes) wird erneut die Beispilmessung 5.1.5.2 herangezogen:

$$\Delta q = q|_{d=6,00 \text{ mm}} - q|_{d=5,95 \text{ mm}} = 0,995074 e - 0,989254 e \approx 5,8 \cdot 10^{-3} e$$

$$\Delta q' = q|_{d=6,00 \text{ mm}} - q|_{d=6,05 \text{ mm}} = 0,995074 e - 1,00285 e \approx -7,8 \cdot 10^{-3} e \quad (5.18)$$

Die Kondensatorspannung U

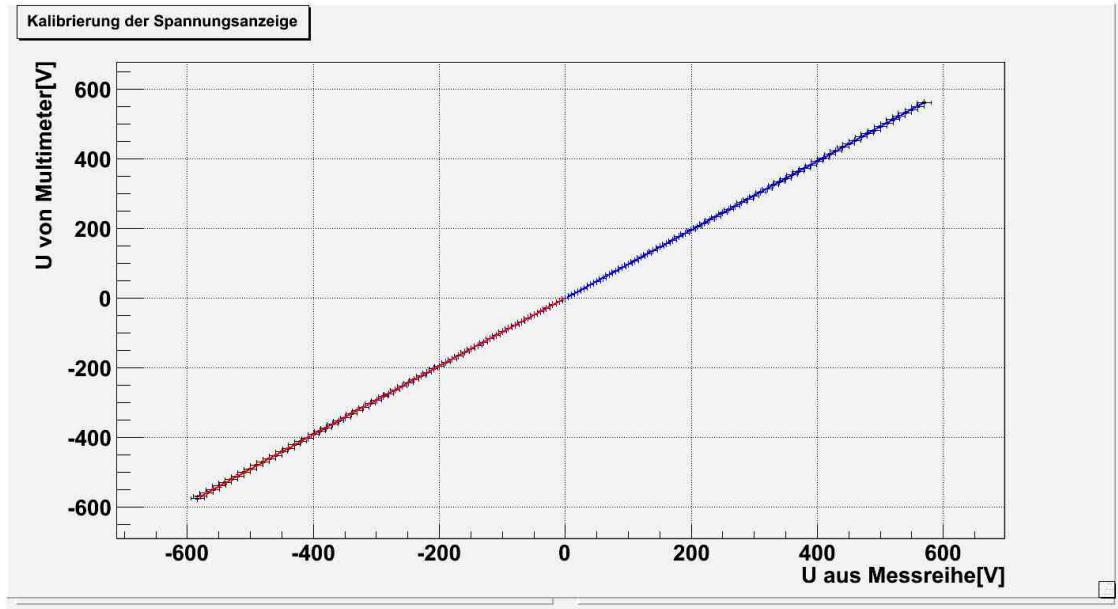


Abbildung 5.23: Die tatsächlichen Spannungswerte gegen die von Cassy aufgenommenen aufgetragen

Die in der Messwertaufnahme eingetragenen Spannungswerte speisen sich aus dem zweiten Eingang der „Millikan-Supply-Unit“, der den 1000ten Teil der Kondensatorspannung wiedergibt. Es wird kein Fehler auf die Spannungsaufteilung angegeben. Die tatsächlich über dem Kondensator abfallende Spannung wird über die vom Cassy aufgenommenen Werte aufgetragen. Letztere wird mit einem externen Multimeter bestimmt. Die Fehler sind den Dokumentationen beider Geräte entnommen.

Es wird eine Anpassung der Art $y(U) = a + b \cdot U + c \cdot U^2$ durchgeführt (eine lineare Anpassung weist eine Systematik der Residuen auf):

	Anpassung für $U \leq 0$ V	Anpassung für $U > 0$ V	Einheit
$a \pm \sigma_a$	$0,285 \pm 0,049$	$-0,589 \pm 0,048$	V
$b \pm \sigma_b$	$0,970 \pm 0,002$	$0,978 \pm 0,002$	1
$c \pm \sigma_c$	$(-2,22 \pm 0,44) \cdot 10^{-5}$	$(1,50 \pm 0,47) \cdot 10^{-5}$	V^{-1}
χ^2/dof	10,1/56	21,4/54	—

Tabelle 5.9: Die Werte der angepassten Parabel

Es folgen der Residuengraph und die Pull-Verteilung:

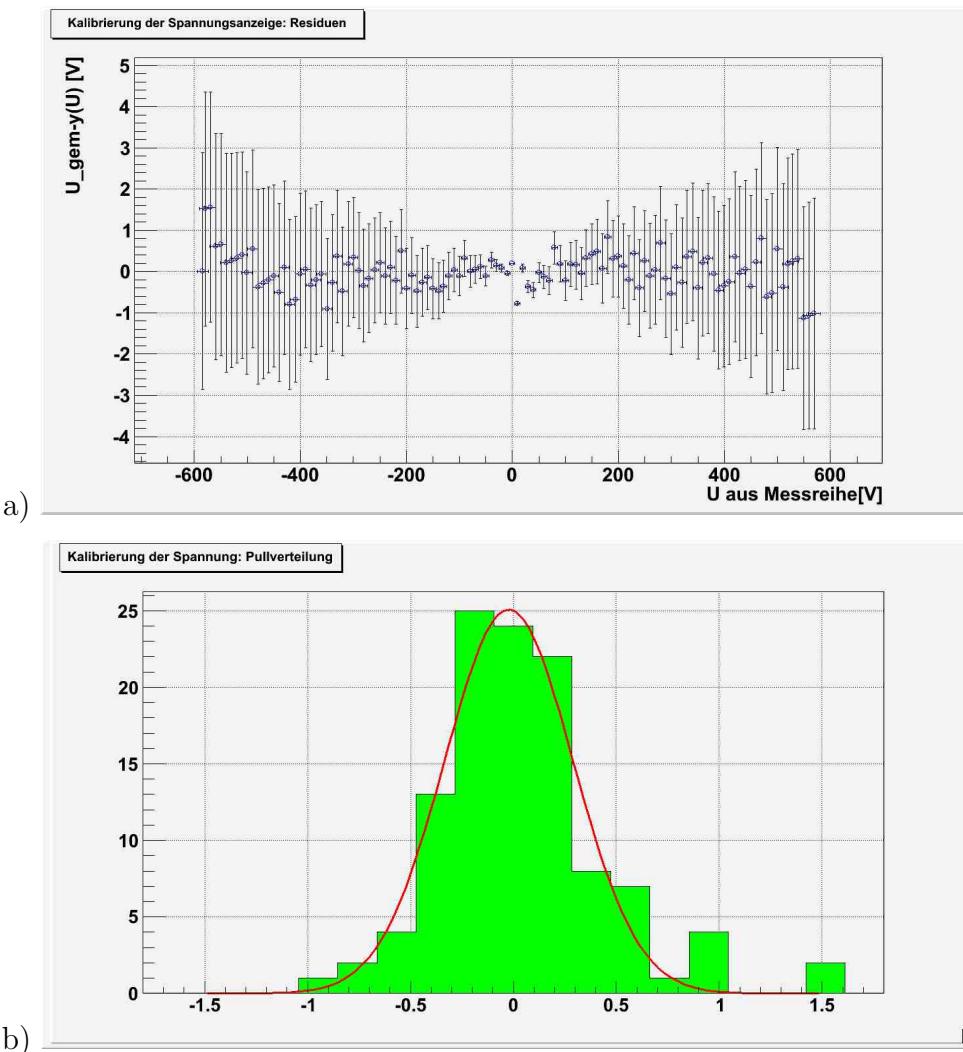


Abbildung 5.24: a) Die Residuen b) die Pullverteilung der Parabelanpassungen an die Spannungswerte

Mit der Anpassung einer Gaußverteilung:

$\mu \pm \sigma_\mu$	$s \pm \sigma_s$	$f_{\max} \pm \sigma_{f_{\max}}$	χ^2/dof	# Einträge
$-0,02 \pm 0,03$	$0,31 \pm 0,03$	$25,1 \pm 3,3$	$7,6/8$	117

Tabelle 5.10: Spannungskalibrierung: Die Werte der angepassten Gaußverteilung

Wie wichtig diese Anpassung für eine korrektes Ergebnis ist, zeigt die Beispilmessung 5.1.5.2:

$$\Delta q = q|_{U_{\text{angepasst}}} - q|_{U_{\text{Cassy}}} = 0,995074 e - 0,97361 e \approx 2,1 \cdot 10^{-2} e \quad (5.19)$$

Dieser Fehler übertrifft damit die meisten Parameterkorrekturen. (Dies liegt daran, dass U direkt in die Bestimmung eingeht: mit einer Funktion also, die linear in U ist (siehe Gl. 5.4)).

5.1.6.4 Der Dichteunterschied $\Delta\rho$

Die Messungen werden bei Temperaturen von $18,5^\circ\text{C}$ bis 24°C durchgeführt. Wie verändern sich dabei die Dichten?¹¹

Dichte der Luft

Zur Abschätzung der Dichteänderung der Luft wird ein ideales Gas angenommen. Für das Physikzentrum wird eine Höhe von 222 m ü.NN angenommen¹².

Dann gilt¹³:

$$\rho_{\text{Luft}} (13,375^\circ\text{C} = 286,525 K, 983,57 \text{ hPa}) = 1,1959 \text{ kg/m}^3 \quad (5.20)$$

Und mit

$$\rho_{\text{ideales Gas}} \propto \frac{p}{T} \quad (5.21)$$

mit Luftdruck p und Lufttemperatur T ergeben sich für $18,5^\circ\text{C}$ bis $24,0^\circ\text{C}$ und 985 hPa die Werte:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{Luft}} (291,65 K, 985 \text{ hPa}) &= 1,177 \text{ kg/m}^3 \\ \rho_{\text{Luft}} (297,15 K, 985 \text{ hPa}) &= 1,155 \text{ kg/m}^3 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Somit wird die Dichte der Luft durch Lineare Regression beschrieben mit:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{Luft}} &= 1,177 \text{ kg/m}^3 + \frac{1,155 - 1,177}{24,0 - 18,5} \frac{\text{kg}}{\text{°C} \cdot \text{m}^3} \cdot (T[\text{°C}] - 18,5^\circ\text{C}) \\ &= 1,177 \text{ kg/m}^3 + 4,0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{°C} \cdot \text{m}^3} \cdot (T[\text{°C}] - 18,5^\circ\text{C}) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Zur Abschätzung des Einflusses der Dichte der Luft wird angenommen, die Beispilmessung 5.1.5.2 sei mit dem Wert bei $18,5^\circ\text{C}$ ausgewertet worden:

$$\begin{aligned} \Delta q &= q|_{\rho_T} - q|_{\rho_{18,5^\circ\text{C}}} = 0,995074 e - 0,996424 e \\ &\approx 1,4 \cdot 10^{-3} e \end{aligned} \quad (5.24)$$

¹¹Millikan selbst hat zu den einzelnen Messreihen jeweils die Temperatur notiert (s. [Mill1]).

¹²<http://www.klimageo.rwth-aachen.de/index.php?id=777>

¹³http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19770009539_1977009539.pdf, Table I

Dichte des Öls

Leybold Didactics verwendet für das „Millikanöl [685 78]“ die synthetische Mischung „Violan CV 100 L“, für das die Dichte bei drei Temperaturen bekannt ist¹⁴:

T [°C]	ρ [kg m^{-3}]
15	877
25	871
35	865

Aufgrund der gleichbleibenden Zunahme der Dichte in einem Temperaturbereich von 20 °C kann für die Messung (18 °C–24 °C) eine lineare Anpassung erfolgen:

$$\rho_{\text{Öl}} = 877 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 0,6 \frac{\text{kg}}{\text{°C} \cdot \text{m}^3} \cdot (T[\text{°C}] - 15,0 \text{ °C}) \quad (5.25)$$

Zur Abschätzung des Einflusses der Dichte des Öls wird angenommen, die Beispielmessung 5.1.5.2 sei mit dem Wert bei 15,0 °C ausgewertet worden:

$$\Delta q = q|_{\rho(T)} - q|_{\rho(15,0 \text{ °C})} = 0,995074 e - 0,991559 e \approx 3,5 \cdot 10^{-3} e \quad (5.26)$$

5.1.6.5 Viskosität der Raumluft

Ihr kommt durch die Potenz 1,5 (s.Gl.5.8) eine wichtige Bedeutung zu. Millikan selbst gibt (s. [Mill1]) sie für Atmosphärendruck mit

$$\eta_{\text{Luft}}(T) = \left(1,8240 \cdot 10^{-5} - 4,93 \cdot \frac{(23 \text{ °C} - T[\text{°C}])}{1 \text{ °C}} \cdot 10^{-8} \right) \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} \quad (5.27)$$

Diese Gleichung stellt in der Tat eine Näherung der Formel von Sutherland¹⁵ dar¹⁶:

$$\eta_{\text{Luft}}(T) = \frac{\beta \cdot T^{3/2}}{T + S} \quad (5.28)$$

mit einer Konstanten $\beta = 1,458 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{1/2}}$ und der Sutherland-Konstante $S = 110,4 \text{ K}$. Diese Gleichung um $T_0 = 23 \text{ °C} \approx 296,15 \text{ K}$ entwickelt ergibt:

$$\eta_{\text{Luft}}(T) = \underbrace{\frac{\beta \cdot T_0^{3/2}}{T_0 + S}}_{=1,8277 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\beta \sqrt{T_0} (T_0 + 3 \cdot S)}{(T_0 + S)^2} \cdot (T - T_0)}_{=4,7617 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Ns}}{\text{K m}^2}} + \mathcal{O}((T - T_0)^2) \quad (5.29)$$

Diese 65 Jahre später entstandenen Werte weichen also leicht von der Originalpublikation von Millikan ab. Die Fehler durch den Abbruch nach dem linearen Term bewegen sich also im Bereich von

¹⁴ohne Fehlerangabe

¹⁵Sutherland, William (1859 - 1911)

¹⁶s. [Prandtl] und http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19770009539_1977009539.pdf

$$\begin{aligned}\Delta\eta_{\text{Luft}}(T) &= -\frac{1}{8} \frac{\beta(T_0^2 + 6 T_0 S - 3S^2)}{\sqrt{T_0} (T_0 + S)^3} \cdot (T - T_0)^2 + \mathcal{O}((T - T_0)^3) \\ &\lesssim -3,8977 \cdot 10^{-11} \frac{Ns}{K^2 m^2} \cdot (5K)^2 \approx -1 \cdot 10^{-9} \frac{Ns}{m^2}\end{aligned}\quad (5.30)$$

Eine weitere Abschätzung bei der Frage, ob die zweite Ordnung mitgeführt werden soll, geht aus dem Hinzunehmen dieses Termes in die Beispielrechnung 5.1.5.2 hervor:

$$\begin{aligned}\Delta q &= q|_{\eta_0+a \cdot (T-T_0)} - q|_{\eta_0+a \cdot (T-T_0)+b \cdot (T-T_0)^2} \\ &= 0,995074 e - 0,996424 e \approx 1,4 \cdot 10^{-3} e\end{aligned}\quad (5.31)$$

Für größere Temperaturunterschiede wird die zweite Ordnung also mitgeführt.

Weiter wird der Fehler abgeschätzt, der durch eine falsche Temperaturannahme aus der Viskosität resultiert. Dazu werden in der Beispielmessung 5.1.5.2 nur das Temperaturargument der Viskosität verändert.

$$\begin{aligned}\Delta q &= q|_{\eta_T} - q|_{\eta_{T+3K}} = 0,995074 e - 1,00194 e \approx -6,9 \cdot 10^{-3} e \\ \Delta q' &= q|_{\eta_T} - q|_{\eta_{T-3K}} = 0,995074 e - 0,982339 e \approx 12,7 \cdot 10^{-3} e\end{aligned}\quad (5.32)$$

5.1.6.6 Die Erdbeschleunigung

Nach [Kohlr] ist die Erdbeschleunigung von der geographischen Breite abhängig und berechnet sich für Aachen über:

$$\begin{aligned}g(\theta) &= g_e \cdot (1 + 0.0051790414 \cdot \sin^2(\theta) + 0.0000232718 \cdot \sin^4(\theta) \\ &\quad + 0.0000001262 \cdot \sin^6(\theta) + 0.0000000007 \cdot \sin^8(\theta))\end{aligned}\quad (5.33)$$

Was mit $g_e = 9.7803267715 \text{ m/s}$ für Aachen ($50^\circ 47' {}^{17}$)

$$g\left(50 \frac{47}{60} {}^\circ\right) = 9,810813543 \text{ m/s}^2 \approx 9,811 \text{ m/s}^2\quad (5.34)$$

ergibt.

Die Abschätzung einer Unsicherheit der ergibt sich nach der Beispielmessung 5.1.5.2:

$$\begin{aligned}\Delta q &= q|_{g=9,811 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} - q|_{g=9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \\ &= 0,995074 e - 0,996424 e \approx 1,4 \cdot 10^{-3} e\end{aligned}\quad (5.35)$$

Die dritte Nachkommastelle wird also mitgeführt. Da der Unterschied zu einer noch genauer bestimmten Erdbeschleunigung minimal ist, wird auf weitere geltende Ziffern verzichtet.

¹⁷<http://www.klimageo.rwth-aachen.de/index.php?id=777>

5.1.6.7 Der Luftdruck

Durch die Cunningham-Korrektur 5.14 ist die bestimmte Ladung auch von dem umgebenden Luftdruck abhängig.

Der aktuelle Wert kann von der Klimamessstation Aachen-Hörn des Geographischen Instituts abgelesen werden¹⁸. Er wird auf 1 hPa genau angegeben, weshalb wir in der Beispilmessung 5.1.5.2 der Luftdruck um diesen Betrag variieren:

$$\begin{aligned}\Delta q &= q|_{p=985 \text{ hPa}} - q|_{p=986 \text{ hPa}} = 0,995074 e - 0,996424 e \approx -1,4 \cdot 10^{-3} e \\ \Delta q' &= q|_{p=985 \text{ hPa}} - q|_{p=984 \text{ hPa}} = 0,995074 e - 0,995074 e = 0,0 \cdot 10^{-3} e\end{aligned}\quad (5.36)$$

Da es zu aufwändig wäre, den Luftdruck vor Ort deutlich genauer als eine professionell geführte Wetterstation zu ermitteln, ist die Größe des Fehlers nicht zu verringern. Er wird künftig am Anfang und am Ende jeder Messreihe aufgenommen werden; existiert ein Unterschied, so wird das arithmetische Mittel gebildet.

5.1.6.8 Weitere Einflussfaktoren

Die Temperatur

Um die Temperatur so genau wie möglich zu bestimmen, wird in der Hitzemessung ein Temperatursensor angeschlossen, sodass zu jedem Messwert die Temperatur in das Datenblatt eingetragen wird. Für die Kalibrierung dieses Temperatursensors 5.4 wird er in Eiswasser und in kochendes Wasser gehalten und 250 Messwerte im Abstand von 200 ms aufgenommen. Die Stichprobenmittelwerte und -fehler betragen:

$$\begin{aligned}T_{\text{Sensor}} (\text{Eiswasser}) &= 0,81 \pm 0,03^\circ\text{C} \\ T_{\text{Sensor}} (\text{Siedendes Wasser}) &= 98,88 \pm 0,03^\circ\text{C}\end{aligned}\quad (5.37)$$

Daraus folgte die lineare Anpassung

$$T_{\text{Sensor}} = 0,981 \cdot T[\text{°C}] + 0,812^\circ\text{C}\quad (5.38)$$

Wie in den Kapiteln 5.1.6.4, 5.1.6.4 und 5.1.6.5 besprochen, sind mehrere Größen temperaturabhängig. Anhand der Beispilmessung 5.1.5.2 werden zwei Effekte untersucht:

Für die Abweichung bei einem **nichtkalibrierten Temperatursensor** gilt:

$$\Delta q = q|_{T_{\text{kal}}} - q|_{T_{\text{Sensor}}} = 0,995074 e - 0,999153 e \approx -4,1 \cdot 10^{-3} e\quad (5.39)$$

In der Beispilmessung 5.1.5.2 werde nun eine durchschnittliche Temperatur von $T = 25,211^\circ\text{C}$ angenommen, mit der alle Temperaturwerte der einzelnen 100 Messungen ersetzt werden (diese Temperatur ist tatsächlich das arithmetische Mittel der Temperaturwerte). Bei einer **systematischen Abweichung** stellen sich folgende Fehler ein:

$$\begin{aligned}\Delta q &= q|_{25,211^\circ\text{C}} - q|_{22,211^\circ\text{C}} = 0,992353 e - 1,00919 e \approx -16,8 \cdot 10^{-3} e \\ \Delta q' &= q|_{25,211^\circ\text{C}} - q|_{28,211^\circ\text{C}} = 0,992353 e - 0,98573 e \approx 6,6 \cdot 10^{-3} e\end{aligned}\quad (5.40)$$

Dies zeigt, dass Temperaturbestimmung für eine genaue Bestimmung der Elementarladung wichtig ist.

¹⁸<http://www.klimageo.rwth-aachen.de/wtst/ACHoern.htm#Daten>

Die Luftfeuchtigkeit

Neben der Temperatur ist die Luftfeuchtigkeit ein weiterer Parameter, der sich im Verlauf des Praktikums deutlich von der Referenzmessung in 5.1.5.2 unterscheiden kann. Um die Auswirkung einer erhöhten Luftfeuchtigkeit zu untersuchen, wird in der Messung mit erhöhter Temperatur 5.1.6.8 auch noch die Luftfeuchtigkeit auf bis zu 66% angehoben. Unter der Annahme, dass sich die Auswirkungen aus beiden Veränderung nicht gerade kompensieren, kann ein Einfluss nicht festgestellt werden.

Messung bei hoher Temperatur („Hitzemessung“)

Es wurden Untersuchungen angestellt zur Temperaturabhängigkeit und erhöhten Luftfeuchtigkeit. Diese Messungen gehen zwei Fragestellungen nach:

- Ist die Temperaturabhängigkeit aller Parameter richtig abgeschätzt?
- Welchen Einfluss hat die erhöhte Luftfeuchtigkeit?

Da die Messungen umfangreich sind, können sie nicht während des Praktikums selbst durchgeführt werden. Benutzt wird im Praktikum nur das auch erwartete Ergebnis:

Insgesamt zeigt sich keine Verfälschung des Ergebnisses bei der Messwertaufnahme bei erhöhter Temperatur und Luftfeuchtigkeit.

5.1.6.9 Zusammenfassung der Fehlerquellen

Die vorgestellten Parameter, ihre Messunsicherheiten und die Maßnahmen zur Verringerung dieser Messunsicherheiten werden in einer Tabelle dargestellt. Dabei gibt die Größe des Fehlers (3. Spalte) den Betrag der maximal ermittelten Auswirkung dieses Fehlers in der Beispieldmessung 5.1.5.2 an. Ist keine Potenz angegeben, so ist die Ladung q zu keiner von null verschiedenen Potenz der Größe proportional.

Parameter	Potenz für q	Fehler [$10^{-2} e$]	Konsequenzen	Bemerkungen
Umkehrvorgang	-	3,0	– Vermessung nur gering geladener Tropfen – große Messstrecke – geringe Spannung – allg. Aufmerksamkeit	schwer abzuschätzen, fällt nur so groß aus, wenn systematisch schlecht gemessen wird
Kondensatorspannung – 1		2,1	Kalibrierung der Spannungsangabe	
Temperatur	-	1,7	Thermometer / kalibrierter Temperatursensor	
senkrechte Strecke	3/2	1,4	gemittelte und software-gestützte Streckenkalibrierung	keine Berücksichtigung der Genauigkeit des Referenzkreises
Viskosität der Luft	3/2	1,3	Temperaturmessung	
Zeitmessung	-3/2	0,7	immer dieselbe Messvorschrift	
Nicht-in-Waage-Setzen	-	0,6	In-Waage-Setzen der Versuchsapparatur	
Dichte des Öls	-1/2	0,4	Temperaturmessung	
Abweichung in Beobachtungsebene	-	0,2	Notieren der Sink- und Steigabweichung	
Abw. senkrecht zur Beobachtungsebene	-	0,1	Waagerecht-Stellen der Apparatur	
Abstand der Kondensatorplatten	1	0,1	-	
Dichte der Luft	-	0,1	Temperaturmessung	
Erdbeschleunigung	-1/2	0,1	Bestimmung von g_{Aachen}	
Luftdruck	-	0,1	Aufzeichnung am Anfang u. Ende der Messreihe	
Luftfeuchtigkeit	-	0	-	keine Auswirkungen erkennbar
Abweichungen vom idealen Feld	-	-	-	keine theoretische Abschätzungen, allen gemachten Messungen zufolge sehr klein

Tabelle 5.11: Die Potenz und Größe des Fehlers, mit der die verschiedenen Parameter in die Berechnung von q eingehen, sowie die daraus resultierenden Konsequenzen.

5.2 Der Versuch zur Temperaturstrahlung

Versuchsziele / Versuchsaufgaben:

- Untersuchungen zum schwarzen Strahler
- Überprüfung des Stefan-Boltzmann Gesetzes

Physikalisches Voraussetzungen / Grundlagen:

Hohlraumstrahlung, Wärmelehre, Plancksche Strahlungsformel

Hinweis:

Diese Anleitung basiert auf der Bachelorarbeit von Frau Pia Schumacher-Piller mit dem Thema:

Der Versuch zur Temperaturstrahlung des physikalischen Grundpraktikums der RWTH-Aachen aus dem Jahr 2014. Teile des Textes, Fotos und Abbildungen sind dieser Arbeit entnommen.

5.2.1 Einleitung und Aufgaben

In diesem Versuch soll durch Vermessung der sog. Wärmestrahlung eines Lesliewürfels das Stefan-Boltzmann Gesetz (Gl. 5.43) überprüft und herausgefunden werden, welche Seite des Lesliewürfels am ehesten einem schwarzen Strahler entspricht. Es folgen daher zunächst die physikalischen Grundlagen und schließlich Versuchsaufbau und Durchführung.

5.2.2 Theorie

Jeder Körper besitzt eine Temperatur T größer als 0 K und sendet eine Strahlung aus, die Temperaturstrahlung (TS), manchmal auch Wärmestrahlung, genannt wird. Dabei handelt es sich um eine elektromagnetische Strahlung, die durch Übergänge von Atomen und Molekülen von energiereicheren zu energieärmeren Bewegungszuständen erzeugt wird. Die Strahlung ist nach heutigen Erkenntnissen gequantelt. Diese Strahlung verändert durch Emissions- und Absorptionsprozesse den Energieinhalt der betroffenen Körper. Die Körper müssen keinen Berührungs kontakt miteinander haben, da sich die elektromagnetische Strahlung auch im Vakuum ausbreiten kann.

Die beiden anderen Arten des Wärmeaustausches geschehen durch Wärmeleitung und durch Konvektion. Bei der Wärmeleitung sind die Körper in Kontakt. Bei der Konvektion werden Teilchenströme beobachtet. Diese Arten des Wärmeaustausches werden hier nicht weiter betrachtet.

In diesem Versuch soll die Temperaturstrahlung behandelt werden. Die Temperaturstrahlung

überdeckt das gesamte elektromagnetische Spektrum und nicht nur den für den Menschen sichtbaren Teil. Es ist in Abbildung 5.25 dargestellt¹⁹.

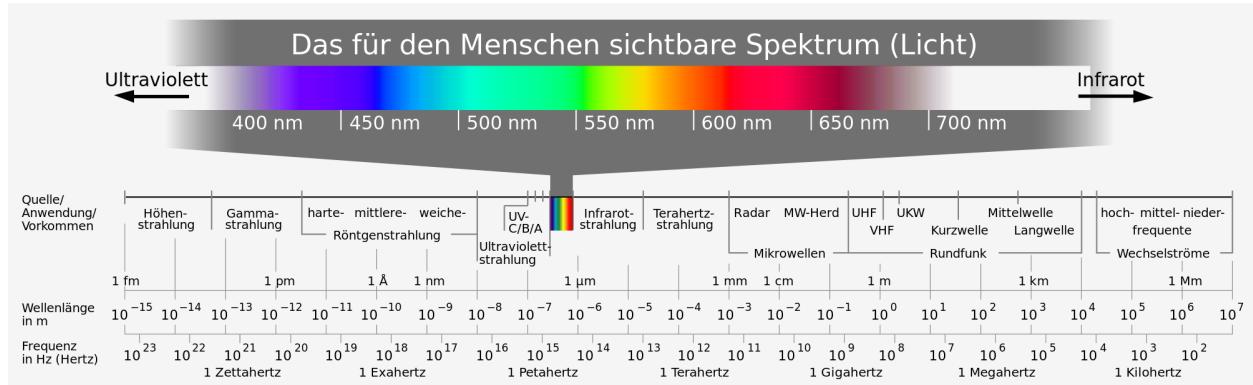


Abbildung 5.25: Das elektromagnetische Spektrum

Die Temperaturstrahlung sollte klar unterschieden werden von anderen Formen der Strahlung, wie z.B. der Strahlung aus Gasentladungslampen (Versuch zum Prisma). Hierbei handelt es sich nicht um Temperaturstrahlung, sondern diese Strahlung wird dominant durch Stöße von Elektronen und Ionen erzeugt.

Die Temperaturstrahlung sollte sowohl im Wellen- (elektromagnetische Wellen) als auch im Teilchenbild (Strom von Photonen) verstanden werden. Dabei hat ein Photon die Energie $E = h \cdot f$ (h : Plancksche Konstante, f : Frequenz) und den Impuls $p = \frac{h \cdot c}{\lambda}$ (λ : Wellenlänge), wobei die Beziehung $c = f \cdot \lambda$ gilt. Die Vakuumlichtgeschwindigkeit c beträgt $c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

5.2.2.1 Definitionen der verwendeten Begriffe

1. Strahlungsstrom $\Phi [\text{W}]$, das ist die gesamte abgestrahlte (einfallende) Strahlungsleistung.
2. Strahlstärke $I = \frac{d\Phi}{d\Omega} \left[\frac{\text{W}}{\text{sr}} \right]$, das ist die abgestrahlte (einfallende) Strahlungsleistung pro Raumwinkelement Ω .
3. Strahldichte $L(\theta, \phi) \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{sr}} \right]$, θ und ϕ sind der Azimuth- und Polarwinkel. Für nicht punktförmige Strahler ist die Strahlstärke abhängig von der abstrahlenden Fläche dA_s der Strahlungsquelle. Da dA_s in Richtung von θ verkleinert erscheint, hat man den Faktor $\cos \theta$:

$$I = L(\theta, \phi) \cos \theta dA_s, \quad (5.41)$$

dabei ist L bereits über alle Wellenlängen integriert. Damit ergibt sich

$$d\Phi = L(\theta, \phi) \cos \theta dA_s d\Omega.$$

¹⁹Quelle: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Electromagnetic_spectrum_c.svg; Stand: 21.1.2014

Ein wichtiger Spezialfall ist der Lambertsche Strahler, für den gilt $L \neq L(\theta, \phi)$. Die Strahldichte ist in alle Richtungen gleich.

(Bem.: Bei sichtbarer Strahlung heisst die Strahldichte L Leuchtdichte oder Flächenhelligkeit.)

4. Bestrahlungsstärke: $E = \frac{\Phi}{A_e} \left[\frac{W}{m^2} \right]$, dabei ist A_e die Fläche des Empfängers (Detektors). Der Raumwinkel unter dem der Detektor vom Sender aus gesehen wird beträgt

$$d\Omega = \frac{dA_e}{r^2} \cos \epsilon,$$

dabei berücksichtigt $\cos \epsilon$ die Tatsache, dass der Einfallswinkel der Strahlung mit der Normalen der Empfängerfläche dA_e einen Winkel $\epsilon \neq 0$ einschließen könnte. Damit ergibt sich für den Strahlungsstrom $\Phi = \int d\Phi = \int I d\Omega$ und der Gleichung 5.41

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{A_s} \int_{A_e} L \cos \theta dA_s \frac{dA_e}{r^2} \cos \epsilon$$

Im Versuchsaufbau gilt in guter Näherung $\cos \theta \approx 1$ und, da die Fläche des Strahlers parallel zur Detektorfläche steht, auch $\cos \epsilon = 1$. Damit ergibt sich die im Versuch erwartete Strahlungsleistung Φ

$$\Phi = L A_s \frac{A_e}{r^2}$$

Das wird mit der gemessenen Strahlungsleistung verglichen.

Die bisher definierten physikalischen Größen beziehen sich auf die integrierte Strahlungsleistung, integriert wurde über die Wellenlänge. Die Größen können auch spektral angegeben werden, z.B.

$$\Phi_\lambda = \frac{d\Phi}{d\lambda} \rightarrow \Phi = \int_0^\infty d\lambda \Phi_\lambda(\lambda),$$

wobei gilt $[\Phi_\lambda] = [W \mu m^{-1}]$.

Im nächsten Kapitel wird die Strahldichte L genauer behandelt, was zum Begriff der Hohlraumstrahlung (Schwarzer Strahler) führt.

5.2.2.2 Gesetze der Temperaturstrahlung

Absorption, Reflexion, Transmission und Kirchhoffsches Gesetz

Wird ein Körper bestrahlt, absorbiert er einen Bruchteil α der einfallenden Strahlungsleistung Φ , einen Bruchteil τ lässt er durch und der Bruchteil ρ wird reflektiert. Der **Absorptionskoeffizient (Absorptionsvermögen)** α gibt in diesem Zusammenhang an, wie groß der Anteil der absorbierten Strahlung ist. Er kann Werte zwischen 0 (keine Absorption) und 1 (alles wird absorbiert) annehmen. Er kann ebenso, wie auch der Emissionskoeffizient ε , der den Anteil der emittierten Strahlung angibt ($0 \leq \varepsilon \leq 1$), als spektrale Größe auftreten.

Der Absorptionskoeffizient hängt vom Material ab und von der Struktur der Oberfläche. Im allgemeinen ist α eine Funktion der Wellenlänge und Temperatur. Hat ein Körper einen

Absorptionskoeffizienten von 1, so spricht man von einem **Schwarzen Strahler (SST)**. Körper mit einem geringeren Absorptionskoeffizienten werden auch graue Strahler (Körper) genannt. Ein schwarzer Strahler ist demnach eine Idealisierung. Jeder Körper hat ein α , das kleiner als 1 ist. Realisieren lässt sich ein schwarzer Strahler durch einen Hohlraum mit kleiner Öffnung. Die Hohlraumwände sind auf konstanter Temperatur, im Hohlraum wird sich eine Gleichgewichtsstrahlung einstellen. Durch die kleine Öffnung entweicht ein kleiner Teil der schwarzen Strahlung derart, dass das Gleichgewicht nicht gestört wird! Diese schwarze Strahlung zeigt nun eine spezielle Abhängigkeit von Wellenlänge und Temperatur, die materialunabhängig ist! Die Hohlraumstrahlung ist isotrop und homogen: Sowohl die spektrale Strahlungsdichte $S_{\lambda,s}$ als auch die spektrale Energiedichte $E_{\lambda,s}$ der Hohlraumstrahlung sind unabhängig vom Ort innerhalb des Hohlraums und von der Form und Beschaffenheit der Wände. Im thermischen Gleichgewicht müssen emittierte - und absorbierte Leistung für alle Frequenzen gleich sein. G.R. Kirchhoff bewies aus thermodynamischen Überlegungen, dass das Verhältnis von spektralem Emissionsvermögen E_λ und Absorptionsvermögen α_λ eine Funktion der Wellenlänge und Temperatur allein ist. Diese Gesetzmäßigkeit wurde dann nach ihm benannt.

$$\frac{E_\lambda(\lambda, T)}{\alpha_\lambda(\lambda, T)} = f(\lambda, T)$$

Dabei hat α_λ keine Einheit, E_λ aber die Einheit $\frac{W}{m^3}$. Damit hat das Produkt $E_\lambda \cdot d\lambda$ die Einheit $\frac{W}{m^2}$ und ist die Leistung, die pro Flächenelement im Wellenlängenintervall $d\lambda$ emittiert wird. Da für schwarze Strahlung $\alpha_\lambda = 1$ ist, gilt:

$$f(\lambda, T) = E_{\lambda,s}(\lambda, T).$$

Dabei ist $E_{\lambda,s}$ das spektrale Emissionsvermögen des schwarzen Strahlers.

Betrachtet man das spektrale Emissionsvermögen eines beliebigen Körpers E_λ und drückt es als Produkt des spezifischen Emissionsverhältnisses $\epsilon_\lambda(\lambda, T)$ und des spektralen Emissionsvermögens $E_{\lambda,s}$ des schwarzen Körpers aus

$$E_\lambda = \epsilon_\lambda(\lambda, T) E_{\lambda,s}(\lambda, T).$$

Aus dem Kirchhoffschen Gesetz ergibt sich dann sofort, dass Emissionsverhältnis und Absorptionskoeffizient gleich groß sein müssen

$$\epsilon_\lambda(\lambda, T) = \alpha_\lambda(\lambda, T).$$

Die Funktion $\frac{E_\lambda(\lambda, T)}{\alpha_\lambda(\lambda, T)}$ ist eine von den Körpereigenschaften unabhängige Größe. Sie hängt nur von Wellenlänge und Temperatur ab. Ein Körper kann nur Strahlung abgeben, die er bei gleicher Temperatur auch absorbieren kann. Ein Spiegel reflektiert die auf ihn einfallende Strahlung, strahlt diese aber nicht aus seinem Wärmeverrat ab. Beim idealen Spiegel sind demnach α und ϵ gleich Null.

Es ist wichtig, die Funktion $\frac{E_\lambda(\lambda, T)}{\alpha_\lambda(\lambda, T)}$ modellmäßig zu erfassen und experimentell zu überprüfen. Das führt dann zur Planckschen Strahlungsgesetzmäßigkeit.

Bem.: Das Kirchhoffsche Strahlungsgesetz ist nicht allgemein gültig. Ein Beispiel sind Körper mit speziellen rauen Oberflächen. Hier kommt es zusätzlich zu Reflexions- und Brechungseigenschaften. Dadurch wird das Gesetz modifiziert.

Das Plancksche Strahlungsgesetz

Für das Emissionsvermögen $E_{\lambda,s}(\lambda, T)$ des schwarzen Körpers wurde um 1900 von Max Planck ein die Quantenmechanik begründendes Modell vorgeschlagen. Dieses Modell konnte experimentell nicht falsifiziert werden und wurde später mit Hilfe von quantenmechanischen Rechnungen abgeleitet. Entscheidend hierbei war die Annahme, dass die elektromagnetische Wechselwirkung mit dem schwarzen Körper nur in Quanten stattfinden kann. Die Aufnahme und Abgabe von Energie des Strahlungsfeldes kann nur in einem Vielfachen der Photonenenergie $E = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda}$ erfolgen. Das widerspricht der klassischen Vorstellung des Wärmeaustausches. Für das Emissionsvermögen des schwarzen Körpers ergibt sich das Plancksche Strahlungsgesetz (unpolarisierte Photonen angenommen)

$$E_{\lambda,s}(\lambda, T) = 2 \cdot \pi \cdot \frac{h \cdot c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot k \cdot T}} - 1}, \quad (5.42)$$

mit der Boltzmannkonstanten $k = 1,3806488 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ und $[E_{\lambda,s}(\lambda, T)] = \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$. Es handelt sich um eine Leistungsdichte.

Dabei ist über den Halbraum (2π) integriert worden unter Beachtung aller Abstrahlungsrichtungen (Faktor $\cos \theta$)²⁰. Das liefert den Faktor π . Lässt man die Integration zunächst weg, ergibt sich die spektrale Strahlungsdichte $S_{\lambda,s}(\lambda, T)$, die die Einheit $[S_{\lambda,s}(\lambda, T)] = \frac{\text{W}}{\text{m}^3 \text{sr}}$ hat. Bildet man $S_{\lambda,s}(\lambda, T) \cdot d\lambda$ ergibt dies eine Leistung pro Fläche und pro Steradian.

Die Abbildung 5.26 zeigt das Plancksche Strahlungsgesetz für verschiedene Temperaturen, die im Versuch vorkommen.

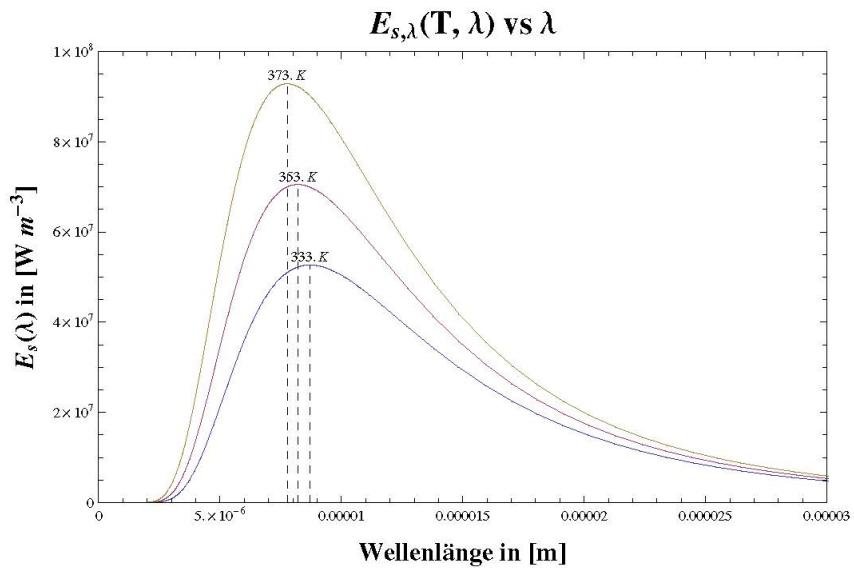


Abbildung 5.26: Plancksches Strahlungsgesetz, sichtbarer Bereich unterhalb von ca. 700 nm.

²⁰ $\int_{\text{Halbraum}} \cos \theta \cdot d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi = \pi$

Es fällt auf: Je höher die Temperatur eines Körpers ist, desto kürzer ist die Wellenlänge beim Maximum der Strahlungsintensität. **Das Wiensche Verschiebungsgesetz** erklärt diesen Zusammenhang genau und stellt eine Formel dafür auf, die man durch Nullsetzen der Ableitung der Planckschen Strahlungsformel erhält:

$$\lambda_{max} \cdot T = b \text{ mit } b = 2898 \mu\text{m K.}$$

Integriert man das Emissionsvermögen aus Gleichung 5.42 über alle Wellenlängen, so erhält man

$$E_s(T) = \int_{\lambda=0}^{\infty} E_{\lambda,s}(\lambda, T) d\lambda = \sigma \cdot T^4 \quad \text{mit} \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} \quad (5.43)$$

und $[E_s] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$. Dabei ergibt sich die Stefan-Boltzmann-Konstante $\sigma = 5,670373 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$. Ohne den Faktor π in Gl. 5.42 wäre diese Größe noch pro Steradian sr zu nehmen!²¹ Für einen grauen Körper muss jeweils der Emissionskoeffizient ε einbezogen werden:

$$E_s(T) = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4$$

und

$$P = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (5.44)$$

Dieser Zusammenhang aus Gl. 5.43 bzw. für graue Körper aus Gl. 5.44 wird Stefan-Boltzmann Gesetz genannt und soll anhand des Experimentes mit dem Leslie-Würfel nachvollzogen werden. Man muss bei der Messung jedoch beachten, dass man nicht die gesamte ausgestrahlte Leistung messen kann, sondern nur die Differenz zur Leistung bei Umgebungstemperatur T_0 . Für die späteren Messungen wird also folgender Zusammenhang von Interesse sein:

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 - \varepsilon \cdot \sigma \cdot T_0^4 \\ &= \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_0^4) \end{aligned} \quad (5.45)$$

5.2.3 Versuchsdurchführung

5.2.3.1 Materialien und Aufbau

Die benötigten Materialien werden im Folgenden abgebildet (siehe Abb. 5.29 bzw. Einzelabbildungen) und notwendige Hinweise werden gegeben.

1. Führungsschiene mit Befestigungsmöglichkeit
2. Thermosäule nach Moll²² mit schwarzem Schutzrohr

²¹Diese Größe mit der Einheit $\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{sr}}$ entspricht der vorne definierten Strahldichte L.

²²PHYWE, Thermosäule nach Moll 08479.00 Betriebsanleitung

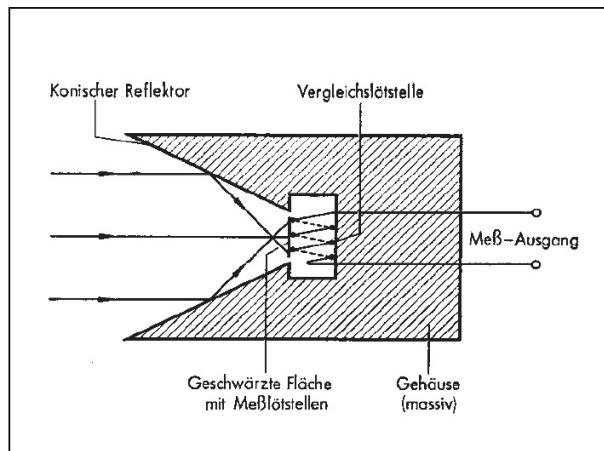


Abbildung 5.27: Schematischer Aufbau der Thermosäule nach Moll

Die geschwärzte Detektorfläche besteht aus in Reihe geschalteten Thermoelementen. Die zugehörigen Vergleichslötstellen sind thermisch in das massive Metallgehäuse eingebettet. Es ist also wichtig, die Thermosäule nicht an ihrem Gehäuse anzufassen, damit das Vergleichselement auf Umgebungstemperatur bleibt und sich nicht auf Körpertemperatur aufheizt. Der konische Reflektor dient dazu, einen breiten einfallenden Strahl auf die kleine Messfläche umzulenken. Man misst eine Thermospannung von 0,16 mV pro 1 mW Strahlungsleitung. Weitere Technische Daten können der Betriebsanleitung der Thermosäule im Anhang entnommen werden (Abb.5.33, Abb.5.34).

3. Leslie-Würfel
4. Messverstärker
5. Heizplatte mit Rührfisch und Thermometer (Abb.5.28a)
Die Temperaturregulierung aktiviert man mittels Drücken des Temperaturreglers. Dreht man an diesem, lässt sich die Temperatureinstellung vornehmen. Nach wenigen Sekunden wechselt die Anzeige auf die aktuelle Temperatur, die sie über das Regelungsthermometer erfährt. Die Drehfrequenz des Rührfisches passt man über den anderen Regler an. Auch hier folgt die Aktivierung durch Drücken.
6. Cassy-Sensorplatte mit Temperatursensorplatte und Thermometer (Abb.5.28b)
7. Laptop mit CassyLab
8. Ausreichend Kabel für die Verbindung von Thermosäule - Messverstärker - Cassy-Modul
9. Topflappen und ein Stück Schaumstoff (ohne Abbildung)

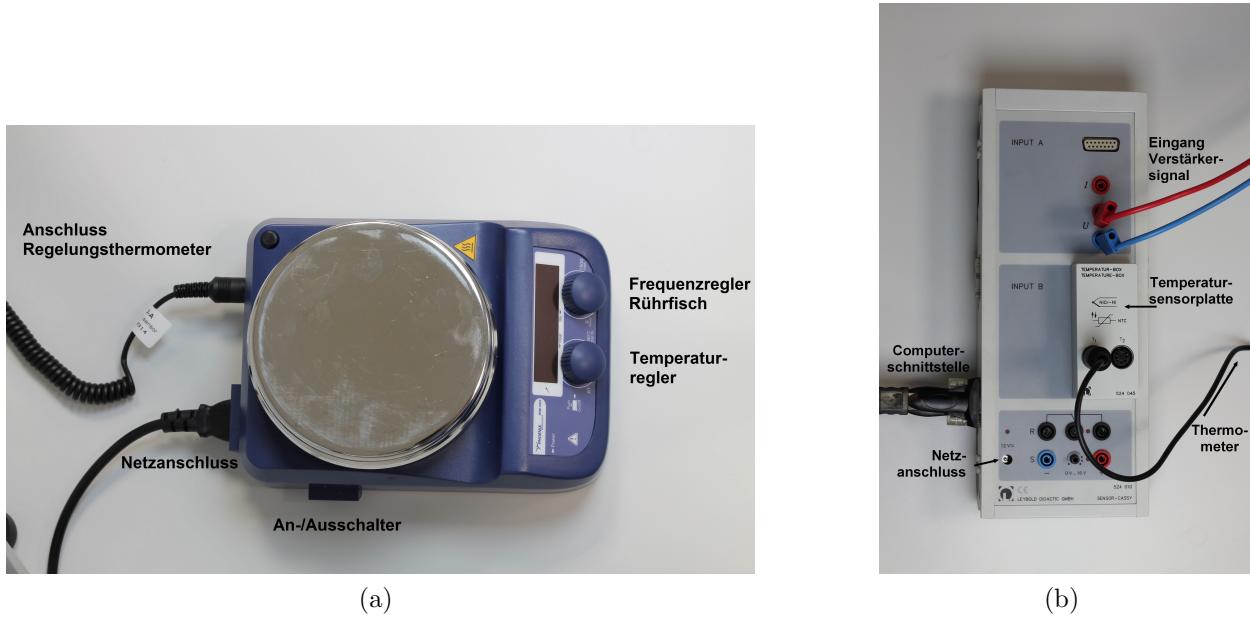


Abbildung 5.28: Heizplatte (a) und CASSY-Modul (b)

Bauen Sie den Versuch wie in der Abbildung gezeigt auf und füllen Sie den Leslie-Würfel mit Wasser.

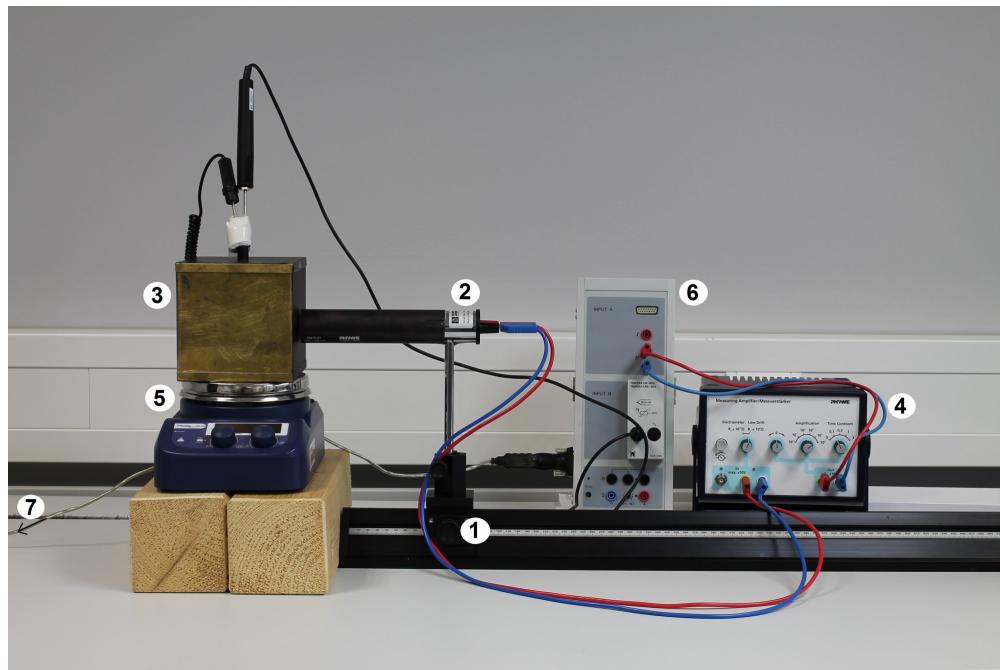


Abbildung 5.29: Versuchsaufbau

Achten Sie darauf, dass

- das Schutzglas vorne an der Thermosäule vor den Messungen entfernt wird und zum Schluß wieder angebracht wird.
- das Schutzrohr bis zum Stiel auf die Thermosäule aufgeschoben wird.
- die Thermometer nicht den Boden des Würfels und die Heizplatte berühren.

Sie können die Heizplatte nun einschalten und den Würfel auf eine Temperatur ca. 5°C unter Ihrem ersten Messwert aufheizen. Schalten Sie den Computer an und legen Sie für jede Messseite (schwarz, weiß, silber, gold) einen eigenen Ordner zum Abspeichern der Messungen an. Dann starten Sie CassyLab und wählen den Reiter *Cassy* aus und öffnen dort durch Klicken auf die genutzten Eingänge des Cassy-Moduls das Menü *Einstellungen Sensoreingang*. Für die Temperaturbox wird die Messgröße T und der Messbereich 250 K...400 K ausgewählt. Für die Spannung wird mit gleicher Vorgehensweise ein Messbereich von –10...10 V festgelegt. Die Einstellungen für die Messparameter in CASSY Lab sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Intervall	Messungen	Messzeit
50 ms	125	6.25 s

Tabelle 5.12: Einstellungen der Messparameter in Cassy Lab

Stellen Sie für die Messungen am Verstärker eine Verstärkung von 10^4 ein. Zuletzt wird noch der Spannungsnulnpunkt kalibriert. Hierzu kann die Verstärkereinstellung zunächst höher gewählt werden, um präziser arbeiten zu können. Drehen Sie die Thermosäule so, dass sie beispielsweise auf eine Wand zeigt und nicht auf den bereits vorgewärmten Leslie-Würfel. Regulieren Sie dann die in CASSY Lab angezeigte Spannung auf 0,0 durch Drehen des Stellreglers „ $\leftarrow 0 \rightarrow$ “ am Verstärker. Platzieren Sie nun noch den Rührfisch im Leslie-Würfel und wählen Sie eine geeignete Rührfrequenz. Es sollte dadurch kein Wasser während des Experimentes aus dem Würfel herausgedrückt werden. Notieren Sie vor den Messungen alle Einstellungen, insbesondere, wenn Sie andere gewählt haben.

5.2.3.2 Messung

Umgebungstemperatur:

Als erstes messen Sie über CassyLab die Umgebungstemperatur. Wiederholen Sie diese Messung nach Abschluss aller Messreihen, um sicherzugehen, dass die Umgebungstemperatur konstant geblieben ist.

Wärmestrahlung:

Stellen Sie den Startwert von 50°C an der Heizplatte ein. Wenn dieser Wert erreicht ist, starten Sie die Messung. Messablauf: Zunächst wird eine Abschirmung aus Schaumstoff vor

den Leslie-Würfel gehalten. Dann wird die Thermosäule (mit aufgestecktem Schutzrohr) von der anderen Seite an den Schaumstoff herangestellt. Nun wird der Schaumstoff entfernt und 15 s lang gewartet, bis sich der Wert für die in Cassy Lab angezeigte Spannung einigermaßen stabilisiert hat. Jetzt wird in Cassy Lab die Messung gestartet. Durch diese Vorgehensweise soll der Einfluß der Erwärmung des Schutzrohres (und damit eines höheren, falschen Spannungswertes) minimiert werden. Nach der Messung wird die Thermosäule wieder weggeschoben und auf eine Wand gerichtet (wie bei der Messung des Spannungsnullpunktes). Die Cassy Lab Datei wird in einen entsprechenden Ordner (Schwarz, Weiss, Silber, Gold) unter einem passenden Dateinamen (z.Bsp.: 50Grad.lab) gespeichert. Der Würfel wird nun so gedreht, dass die nächste Seite vermessen werden kann. Bevor die nächste Messung gestartet wird, sollte gewartet werden, bis die in Cassy Lab angezeigte Spannung wieder der Nullpunktstmessung entspricht.

Wiederholen Sie den Messablauf in 5°C-Schritten bis zu 95°C. Zu Beginn der Messungen wird am Verstärker eine Verstärkung von 10^4 eingestellt. Für die Spannung wird in Cassy-Lab ein Messbereich von ± 10 V gewählt.

Sollte im Laufe der Messungen der Messbereich des Verstärkers von 10 V überschritten werden (Sättigung), dann ist wie folgt vorzugehen:

1. Verstärkungsfaktor am Verstärker auf 10^3 einstellen.
2. Den Offset **nicht** erneut durch Drehen des Stellreglers am Verstärker korrigieren, sondern den in Cassy angezeigten Wert notieren.
3. In Cassy im Fenster „Einstellungen“ auf den Spannungseingang klicken-; das Fenster „Einstellungen Sensoreingang“ öffnet sich.
4. Den Messbereich von ± 10 V auf ± 30 V ändern.
5. Auf die Schaltfläche „Korrigieren“ klicken, das Fenster „Messwerte korrigieren“ erscheint.
6. In diesem Dialog den vorher abgelesenen Offset korrigieren, auf „Offset korrigieren“ klicken, anschließend den Faktor „ $\times 10$ “ eingeben und auf „Faktor korrigieren“ klicken. Danach das Fenster schließen und mit diesen Einstellungen fortfahren.

5.2.3.3 Aufgabenstellung

1. Erstellen Sie mit Ihren gemessenen Daten eine lineare Anpassung an T^4 und verifizieren Sie so die Theorie des Stefan-Boltzmann-Gesetzes.
2. Bestimmen Sie die Strahlungsstärken und Emissionsgrade der verschiedenen Seiten des Leslie-Würfels und vergleichen Sie sie miteinander. Was gibt es für Auffälligkeiten? Wie erklären Sie sich diese? Welche Seite ähnelt am meisten einem perfekten Schwarzen Strahler?
3. (Optional) Erstellen Sie mit denselben Daten eine nichtlineare Anpassung, bei der Sie den Exponenten von T^x und seinen Fehler bestimmen und vergleichen Sie ihn mit der Theorie.

5.2.4 Auswertung

Erstellen Sie zu jeder Messreihe zunächst je ein Histogramm für die Temperatur und die Spannung und ermitteln so die Mittelwerte, Standardabweichungen und die mittleren Fehler auf die Mittelwerte. Mit dem so erhaltenen Datensatz kann man verschieden umgehen:

5.2.4.1 Lineare Anpassung an T^4

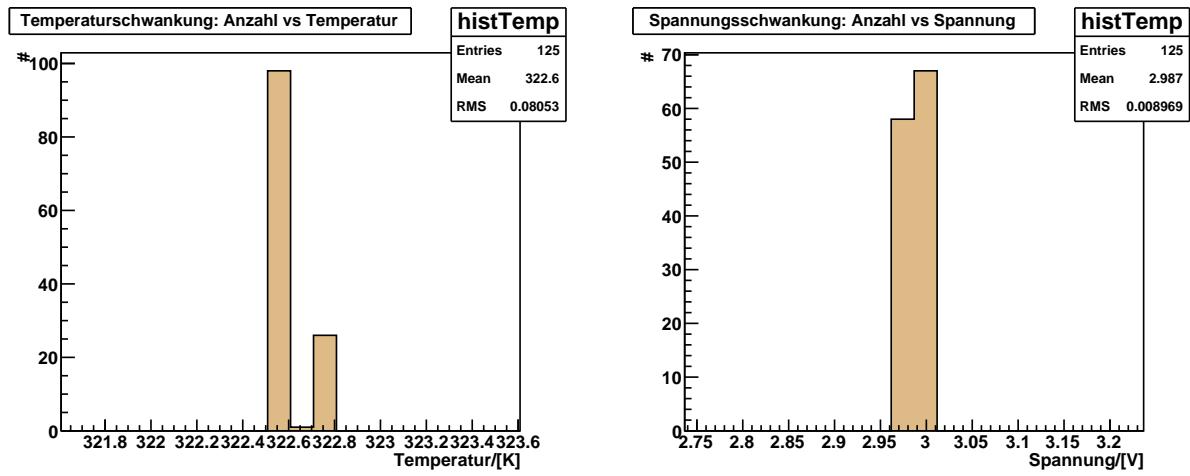


Abbildung 5.30: Rauschen der Temperatur- und Spannungsmessungen

Eine lineare Anpassung an T^4 ist die einfachste Art, die vermutete T^4 -Abhängigkeit des Stefan-Boltzmann-Gesetzes zu bestätigen. Es werden U und T^4 gegeneinander aufgetragen. Bei Verwendung von Einzelmessungen werden die Fehler auf die Einzelmessungen fortgepflanzt, bei Verwendung von Mittelwerten die mittleren Fehler auf die Mittelwerte. An diese Daten wird eine Gerade angepasst, um die Linearität und so die T^4 -Abhängigkeit zu bestätigen. Im Folgenden wird beispielhaft anhand einer Messreihe der schwarzen Seite des Leslie-Würfels die Auswertung gezeigt. Für die zu dem Wert 50°C gehörige Messung sind die Verteilungen der Temperatur und Spannungswerte dargestellt. Aus den gemessenen Verteilungen erhält man die Mittelwerte für Temperatur und Spannung, sowie die jeweiligen Standardabweichungen und die mittleren Fehler auf die Mittelwerte.

Stellt man den nächsten Temperaturwert ein, wird diese Rauschmessung wiederholt und ausgewertet. Die für die verschiedenen Temperaturpunkte bestimmten Mittelwerte und deren mittlere Fehler auf die Mittelwerte werden dann für die Auftragung der Spannung U gegen die vierte Potenz der Temperatur T^4 verwendet. An die Messpunkte wird dann die Funktion

$$U(T) = p_0 + p_1 (T^4 - T_0^4) \quad (5.46)$$

angepasst. Die Umgebungstemperatur T_0 wird ebenfalls im Rahmen einer Rauschmessung mit Fehler bestimmt. Für die Beispilmessung ergibt sich die Abbildung 5.31.

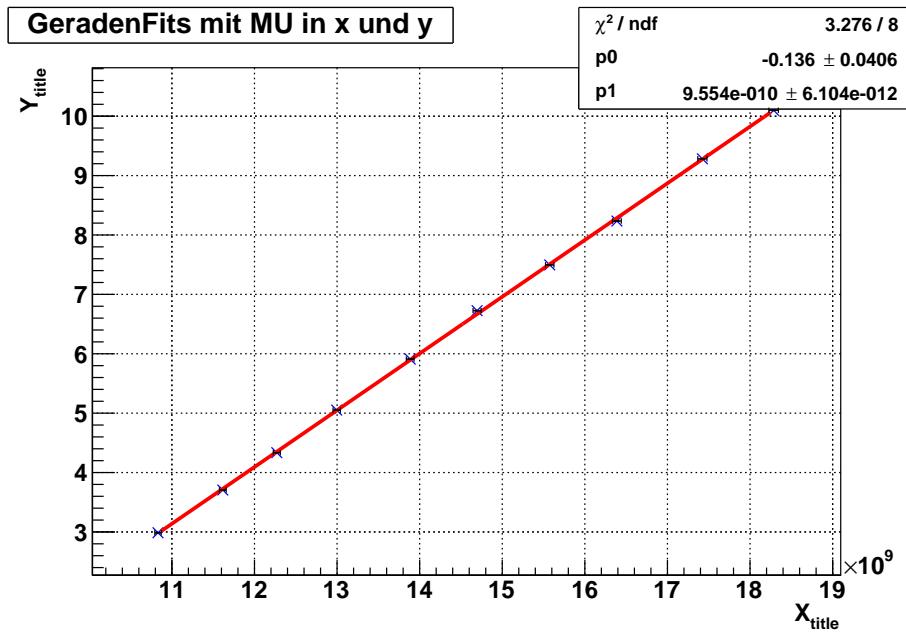


Abbildung 5.31: Lineare Anpassung zur Überprüfung der T^4 -Abhängigkeit

5.2.4.2 Strahlungsleistung und Emissionskoeffizient

Die Empfindlichkeit der Thermosäulen beträgt laut Herstellerangaben $const \frac{mV}{mW} = const \frac{V}{W}$. Der Hersteller gibt als relativen Fehler auf die Empfindlichkeit einen Wert von 3% an. In der folgenden Tabelle sind die Empfindlichkeiten der verschiedenen Thermosäulen angegeben:

Seriennummer der Thermosäule	Empfindlichkeit (const) [$\frac{V}{W}$]	rel.Fehler [$\frac{V}{W}$]
120631	0.160	0.0048
130803	0.276	0.0083
130810	0.198	0.0059
130812	0.175	0.0053
130813	0.194	0.0058
130814	0.175	0.0053
130815	0.221	0.0066
130817	0.229	0.0069

Die gemessene Strahlungsleistung P_{gemessen} berechnet sich also aus

$$P_{\text{gemessen}} = \frac{U_{\text{gemessen}}}{const \frac{V}{W}}$$

Für die Berechnung der erwarteten Strahlungsleistung eines schwarzen Körpers P_{ideal} geht man wie folgt vor: Der rohrförmige Aufsatz auf der Thermosäule reicht so knapp bis vor

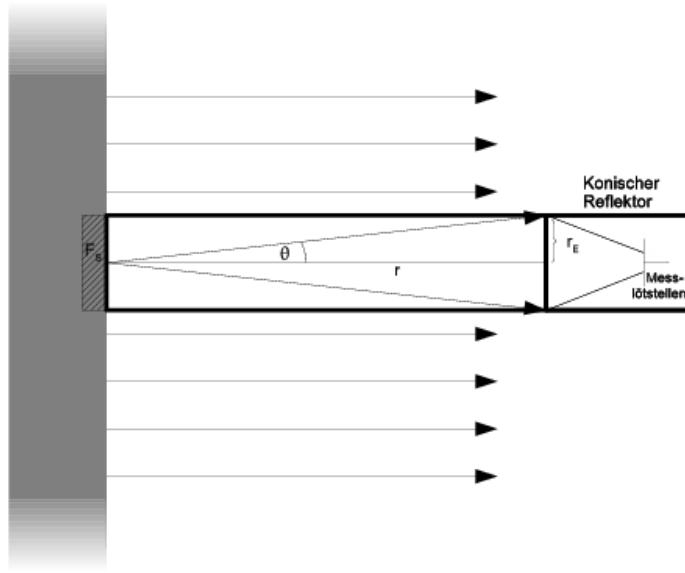


Abbildung 5.32: Strahlungsleistung und Raumwinkel

den Lesliwürfel, dass er die Fläche A_s quasi einschließt. Strahlung außerhalb dieser Fläche wird nicht wahrgenommen. Die Fläche selbst strahlt jedoch in den gesamten Raum ab. Ein großer Teil ihrer Strahlung wird vom Rohraufsatz absorbiert und erreicht die Thermosäule nicht. Der Anteil, der sie erreicht (Empfängerfläche A_e), wird vom konischen Reflektor auf die Messlötstellen gebündelt und dort in voller Stärke registriert und umgewandelt. Die erwartete Strahlungsleistung P_{ideal} eines schwarzen Körpers berechnet sich nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz Gl.5.45 unter Einbeziehung der konkreten Flächen A_s , A_e und des Raumwinkels $\Omega = \frac{A_e}{r^2}$:

$$P_{ideal} = A_s \cdot \frac{A_e}{r^2} \cdot \frac{\sigma}{\pi} \cdot (T_{gemessen}^4 - T_0^4)$$

Der Abstand r vom Rohraufsatz bis zur Empfängerfläche beträgt: $r = 15 \text{ cm}$ (Länge Rohraufsatz) - $4,2 \text{ cm}$ (Abstand der Empfängerfläche zum Stiel) = $0,108 \text{ m}$. Der Faktor π ergibt sich, weil die Abstrahlung in den Halbraum betrachtet wird. Zur Berechnung der Senderfläche wird der Innendurchmesser des Rohraufsatzes ($d_S = 0,035 \text{ m}$) benutzt, für die Empfängerfläche der Innendurchmesser am Eingang der Thermosäule ($d_E = 0,023 \text{ m}$). Für die Senderfläche ergibt sich also

$$A_s = \pi \cdot \left(\frac{0,035 \text{ m}}{2} \right)^2$$

entsprechend für die Empfängerfläche

$$A_e = \pi \cdot \left(\frac{0,023 \text{ m}}{2} \right)^2$$

Die Berechnung des Emissionskoeffizienten ε ergibt sich schließlich aus

$$\varepsilon = \frac{P_{\text{gemessen}}}{P_{\text{ideal}}}$$

Der Emissionskoeffizient ε soll für jede Temperatur und für jede Seite des Würfels bestimmt werden.

5.2.4.3 Nichtlinearer Fit an T^x

Beim nichtlinearen Fit wird direkt T gegen U aufgetragen und eine Funktion der Form $U(T) = z + y \cdot T^x$ angepasst. Hierfür wird diese Funktionsgleichung verwendet:

$$U(T) = p_0 + p_1(T^{p_2} - T_0^4) \quad (5.47)$$

Aus dem Zusammenhang zur Gleichung 5.46 können die Parameter p_0 und p_1 auf einen Bereich um die Parameter beschränken, die aus der linearen Anpassungen hervorgegangen sind. Es besteht die Möglichkeit, zu überprüfen, ob die T^4 -Abhängigkeit den Messungen entspricht oder andere Modelle der T^x -Abhängigkeit zu erhalten, sofern diese besser zu den gemessenen Daten passen.

Hinweis: Da hier eine Anpassung mit drei Freiheitsgraden, unter anderem einem Exponenten, durchgeführt wird, ist diese sehr sensibel. Dies umgeht man durch die Übernahme von Fitparametern aus der linearen Anpassung an T^4 . Je nach Wahl der Startparameter kann man fast jedes Ergebnis erzeugen, das mit Blick auf die graphische Darstellung und das χ^2 aber nicht unbedingt sinnvoll ist.

5.2.5 Fehlerbetrachtung

Bestimmung des Fehlers auf die gemessene Leistung

$$P_{\text{gemessen}} = \frac{U_{\text{gemessen}} \cdot v}{\text{const.}}$$

Dabei ist der Verstärkungsfaktor $v = 10^{-4}$ und $\text{const.} \frac{\text{V}}{\text{W}}$. Der Fehler berechnet sich nach Gauß:

$$\sigma_{P_{\text{gemessen}}} = \frac{v}{\text{const.}} \cdot \sigma_U$$

Der Fehler für P_{ideal} wird mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$$\sigma_{P_{\text{ideal}}} = \sqrt{\left(\frac{\partial P_i}{\partial A_s}\right)^2 \cdot \sigma_{A_s}^2 + \left(\frac{\partial P_i}{\partial A_e}\right)^2 \cdot \sigma_{A_e}^2 + \left(\frac{\partial P_i}{\partial r}\right)^2 \cdot \sigma_r^2 + \left(\frac{\partial P_i}{\partial T}\right)^2 \cdot \sigma_T^2 + \left(\frac{\partial P_i}{\partial T_0}\right)^2 \cdot \sigma_{T_0}^2}$$

Für die Längenmessung werden folgende Fehler angenommen: $\sigma_r = 1 \text{ mm} = 0,001 \text{ m}$.

Für die Fehler der Durchmesser wird die Ablesegenauigkeit des Meßschiebers angenommen:

$$\sigma_{d_S} = \sigma_{d_E} = 0,1 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m.}$$

Den Fehler auf den Emissionskoeffizienten

$$\varepsilon = \frac{P_{\text{gemessen}}}{P_{\text{ideal}}}$$

erhält man nach Gauß mit $P_{\text{gemessen}} \equiv P_g$ und $P_{\text{ideal}} \equiv P_i$:

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial P_g}\right)^2 \cdot \sigma_{P_g}^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial P_i}\right)^2 \cdot \sigma_{P_i}^2}$$

zu:

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{1}{P_i} \cdot \sigma_{P_g}\right)^2 + \left(\frac{P_g}{P_i^2} \cdot \sigma_{P_i}\right)^2}$$

5.2.6 Quellenangaben

Bücher und Lektüre

- Demtröder, Wolfgang: Experimentalphysik 1 – Mechanik und Wärme, Springer Verlag, 5. Auflage.
- Demtröder, Wolfgang: Experimentalphysik 3 - Atome, Moleküle und Festkörper, Springer Verlag, 4. Auflage.
- Landau L.D., Lifschitz E.M.: Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 5, Statistische Physik, Akademie-Verlag-Berlin, 1979.
- Herwig, Heinz/Moschallski, Andreas: Wärmeübertragung - Physikalische Grundlagen, Illustrierte Beispiele, Übungsaufgaben mit Musterlösungen, Vieweg und Sohn Verlag, 1. Auflage.

5.2.7 Anhang: Betriebsanleitung Thermosäule



Abb. 1: Thermosäule nach Moll mit Schutzrohr 08479.01 und Spalt 08479.02

1 ZWECK UND BESCHREIBUNG

Die Thermosäule nach Moll dient als Strahlungssensor für einen breiten Spektralbereich vom UV bis weit in das langwellige IR. Die Empfindlichkeit ist dabei im Wellenlängenbereich von 150 nm bis 15 µm konstant. Abb. 2 zeigt schematisch einen Längsschnitt durch die Thermosäule. Die geschwärzte Detektorfläche besteht aus in Reihe geschalteten Thermoelementen. Die zugehörigen Vergleichslöstellen sind thermisch in das massive Metallgehäuse eingebettet. Der konische Reflektor erweitert den Querschnitt des vom Detektor erfassten Strahlenbündels.

2 HANDHABUNG

Die Ausgangsbuchsen der Thermosäule sind mit einem empfindlichen Spannungsmesser zu verbinden. Je nach Versuchsbedingungen sind Meßbereiche zwischen 30 µV und 10 mV geeignet.

Da das Schutzfenster besonders im IR- und im UV-Bereich nur eine geringe Durchlässigkeit besitzt, muß es für Messungen in der Regel abgenommen werden. Bei Messungen an stärkeren Lichtquellen (sichtbarer Bereich) kann es in Ausnahmefällen von Vorteil sein, das Schutzglas zur Unterdrückung störender Wärmestrahlung zu benutzen.

Die Thermosäule ist ein äußerst empfindlicher Detektor für Wärmestrahlung. Ein Gegenstand vor der Öffnung der Thermosäule, der nur um wenige Grad wärmer ist als die Gehäusetemperatur der Thermosäule, führt zu einer deutlich meßbaren Thermospannung. Entsprechend ergibt sich bei einem Gegenstand der kälter als die Raumtemperatur ist (z.B. Gefäß mit Eiswasser) eine Thermospannung entgegengesetzter Polarität.

Wegen der großen Bandbreite der Empfindlichkeit kommt es leicht zu störenden Überlagerungen des eigentlichen Meßsignals von der z.B. vom Körper des Experimentators ausgehenden Infrarotstrahlung. Man muß wissen, daß jede im „Sichtbereich“ der Thermosäule befindliche Oberfläche,

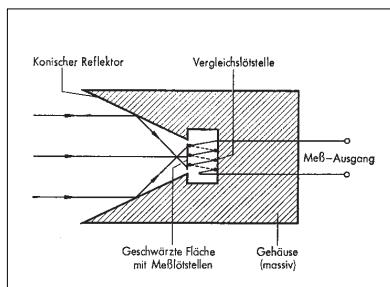
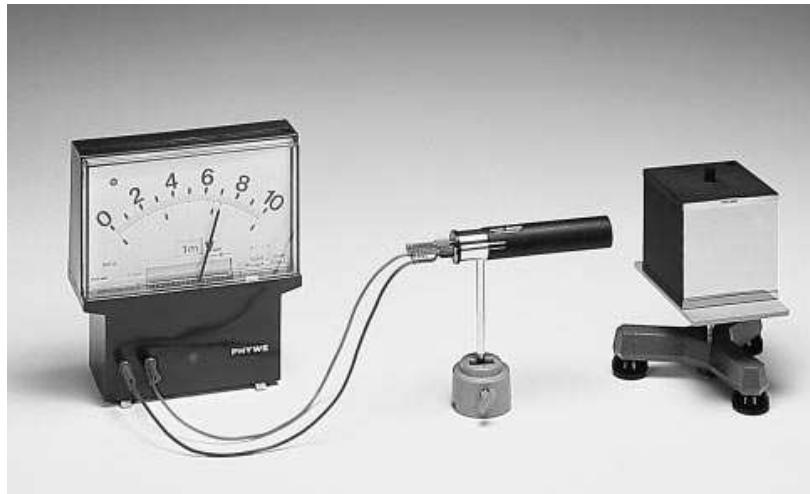


Abb. 2

die wärmer oder kälter als das Gehäuse der Thermosäule (Vergleichslöstellen) ist, einen Beitrag zu Ausgangsspannung liefert. Wir empfehlen daher die folgenden Maßnahmen zur Vermeidung von Fehlmessungen:

- Engen Sie den von der Thermosäule erfaßten Raumwinkel ein, indem Sie das als Zubehör lieferbare Schutzrohr 08479.01 aufstecken.
- Sorgen Sie dafür, daß sich das Gehäuse des Thermoelements bei Meßbeginn auf der Temperatur der Umgebung befindet, damit die Nullpunkt drift möglichst gering ist. Fassen Sie deshalb die Thermosäule nur am Stiel, nicht aber am Gehäuse an.
- Schirmen Sie zunächst die zu untersuchende Strahlungsquelle z.B. mit einem auf Raumtemperatur befindlichen Metallschirm (08062.00) gegen die Thermosäule ab und stellen Sie die Anzeige mit Hilfe des Stellknopfes „Kompensation“ am verwendeten Meßverstärker auf „0“.



- Warten Sie mit dem Ablesen des Meßwertes nach Freigabe der Strahlenquelle ca. 5 s, damit sich ein thermisches Gleichgewicht an der Sensorfläche der Thermosäule einstellen kann.
 - Führen Sie die Nullpunkt kompensation bei längeren Meßreihen wiederholt durch.
- Für die Ausmessung von Spektren ist ein auf die Thermosäule aufsteckbarer Spalt lieferbar. Er besitzt einen weißen Schirm, auf dem der jeweils nicht gemessene Teil des Spektrums zu beiden Seiten der Spaltöffnung sichtbar ist.

3 LITERATURHINWEIS

University Laboratory Experiments,
Physics: „3.17 - Stefan-Boltzmann's
Law of Radiation“

00067.72

4 TECHNISCHE DATEN

Kreisförmige Detektorfläche	$d = 10 \text{ mm}$
Anzahl der Thermopaare	16
Innenwiderstand	10Ω
Einstellzeit	< 5 s
Empfindlichkeit (Thermospannung/Strahlungsleistung)	ca. 0,16 mV/mW
Abstand Achse-Stielende	180 mm
Gehäusedurchmesser	34 mm
Gehäuselänge	80 mm

5 GERÄTELISTE

Schutzrohr für Thermosäule	08479.01
Spalt für Thermosäule, steckbar	08479.02
Drehspulinstrument	11100.00
Meßbereich, Verstärker 30 μV -10 mV oder	11110.01
Meßverstärker, universal	13626.93

Abbildung 5.34: Betriebsanleitung der Thermosäule -Seite 2