UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESTRUCTURAS DISCRETAS

LÓGICA PROPOSICIONAL Y CÁLCULO DE PREDICADOS

CUADERNO DE EJERCICIOS

Orlando Zaldívar Esquivel
Orlando Zaldívar Zamorategui

2014

BC181
Z35
G.- 204050
FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.
204050

ZALDÍVAR ESQUIVEL, Orlando y Orlando Zaldívar Zamorategui. *Estructuras discretas. Lógica proposicional y cálculo de predicados. Cuaderno de ejercicios.* 2ª. ed. México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, 2015.

BIBLIOTECA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL
MEXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

Estructuras discretas. Lógica proposicional y cálculo de predicados. Cuaderno de ejercicios.

Prohibida la reproducción o transmisión total o parcial de esta obra por cualquier medio o sistema electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado, la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento de información), sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Derechos reservados.
© 2015, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.
Avenida Universidad No. 3000
Col. Universidad Nacional Autónoma de México, C. U.,
Delegación Coyoacán, México, D. F.
Código postal 04510

Primera edición, agosto de 2011
Segunda edición, enero de 2015

FACULTAD DE INGENIERÍA
http://www.ingenieria.unam.mx/

Impreso y hecho en México

Factura Donación
Proveedor
No. Adq. G-204050
Clasif. BC181 Z35
3-1500501
G-204050

Prólogo

Tengo el placer de presentar esta segunda edición del cuaderno de ejercicios de los ingenieros Orlando Zaldivar Esquivel y Orlando Zaldivar Zamorategui sobre el tópico de Lógica Proposicional y Cálculo de Predicados, del área de Estructuras Discretas. Los autores ambos ingenieros en computación de esta casa de estudios, uno de ellos con amplia experiencia en docencia y dirección de tesis en las materias de ingeniería de software y estructuras discretas, y el otro joven egresado de alto nivel académico, es decir, la combinación adecuada entre experiencia y entusiasmo respaldados por un alto compromiso educativo y de competencia en el tema abordado.

Los ejercicios tratados son formativos y de alta necesidad en la preparación de los estudiantes de la carrera de Ingeniería en Computación. Respaldados por una amplia bibliografía sobre el tema.

La parte sustancial del cuaderno de ejercicios es el fruto de varios años de trabajo de uno de los autores en la carrera de Ingeniería en Computación de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Así como de la actual necesidad de mejorar el curso de Estructuras Discretas del plan de estudios de la misma carrera.

El cuaderno aborda de manera progresiva los tópicos de lógica proposicional y cálculo de predicados, básicos del área. Con el propósito de facilitar el aprendizaje de temas con reputación de ser difícil para los ingenieros.

Respecto al "Plan de estudios" actual de la carrera de Ingeniería en Computación este cuaderno será de utilidad para el curso de Estructuras Discretas y otros relacionados.

Estoy por lo tanto convencido de que este cuaderno de ejercicios seguirá otorgando un apoyo importante a los estudiantes en el área de computación, y a los ingenieros que se desarrollan en el campo profesional de la algorítmica y la programación. Prueba de ello es la alta demanda que ha tenido la primera edición entre la comunidad estudiantil de la carrera de ingeniería en computación de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

Atentamente,

Francisco García Ugalde

Presentación

La lógica proposicional y el cálculo de predicados dentro de las Estructuras Discretas constituyen un área importante de las Ciencias de la Computación. Su dominio teórico y metodológico está orientado hacia la demostración de la validez del razonamiento.

Si consideramos que uno de los objetivos de la lógica es el de proporcionar reglas de inferencia que permitan demostrar la validez del razonamiento, entonces debemos generar el dominio de la teoría y de las metodologías más adecuadas para tal fin.

Este Cuaderno de ejercicios tiene como objetivo principal que Usted, como alumno, realice de manera metódica y programada una serie de ejercicios que le permitirá el dominio de los conceptos relacionados con la lógica proposicional y el cálculo de predicados.

Se presenta una metodología para la solución de problemas. Trate de seguirla. Recuerde que el orden le garantiza el éxito en su trabajo. Siga un método. La probabilidad de éxito es mayor. La metodología desarrollada integra el enfoque del alumno y del docente.

Para cada tipo de ejercicio se presenta una forma de solución. Siga el procedimiento y genere dudas o cuestionamientos. Busque respuestas. Entienda el proceso. Cuando haya entendido el ejercicio busque otro camino para llegar a la solución. Ensaye, practique, no importa que cometa errores; si no lo intenta no hay nada que hacer. Finalmente, dominará los métodos de solución.

El orden de los ejercicios coincide con el temario de la asignatura.

Al principio del cuaderno aparecen cinco tablas, las cuales se usan de acuerdo con el problema de que se trate.

Tabla I. Formalización de la lógica proposicional
Contiene las expresiones más usadas en el lenguaje natural y su traducción a la lógica simbólica.

Tabla II. Leyes y propiedades
Presenta las equivalencias, leyes y propiedades fundamentales para el desarrollo de diversos ejercicios que involucran operaciones de la lógica.

Tabla III. Implicaciones tautológicas
Contiene las catorce implicaciones más usadas. A través de la práctica se pod eliminar algunas. Primero entiéndalas, después busque algunas simplificaciones tabla es indispensable para el Método de Deducción Paso a Paso, MDPP.

Tabla IV. Reglas para Prueba Automática de Teoremas, PAT
Especifica las diez reglas usadas en el método PAT.

Tabla V. Reglas específicas para el cálculo de predicados
Contiene las reglas para el manejo de cuantificadores.

Se recomienda desprender las tablas para su manejo.

Revise las tablas y reafirme los aspectos teóricos necesarios. De todas manera aplicación se especifica en la solución de los ejercicios.

Por otra parte, al final de cada ejercicio aparece un comentario, el cual tiene v objetivos a saber:

1. Aclarar aquellos aspectos teóricos necesarios para la solución del ejercici
2. Presentar un resumen o recordatorio de los aspectos teóricos que el al debe conocer.
3. Permitir reafirmar el concepto mediante el enfoque de los autores.
4. Promover la actitud creadora del alumno, orientada hacia la solución d problemas.

La profundidad del comentario está en función del ejercicio y de su complejid cuaderno es de ejercicios, lo cual presupone que el alumno tiene al antecedentes teóricos.

Estudie, practique, enfréntese a los problemas; lo están esperando. Usted pue ellos. Adelante. Para comprobar su dominio, busque otros ejercicios y resuélv

Cualquier comentario, crítica o sugerencia es bienvenida por parte de los a No dude en escribir a la dirección zazor1@fi-b.unam.mx

Los autores

Orlando Zaldívar Esquivel
Orlando Zaldívar Zamorategui

Índice

Contenido	Pág.
Prólogo	*i*
Presentación	*iii*
Índice	*v*
Tablas	1
Tabla I. Formalización de la lógica proposicional	3
Tabla II. Leyes y propiedades	4
Tabla III. Implicaciones tautológicas	5
Tabla IV. Reglas para Prueba Automática de Teoremas, PAT	6
Tabla V. Reglas específicas para el cálculo de predicados	7
1. Fórmulas proposicionales y tablas de verdad	9
1.1 Conceptos	
1.2 Tablas de verdad	
2. Formas normales y dispositivos de dos estados	55
2.1 Forma normal disyuntiva principal	
2.2 Forma normal conjuntiva principal	
3. Notación polaca y parentizada	89
3.1 Notación	
3.2 Transformación de notaciones	
4. Elementos de inferencia para el cálculo proposicional	95
4.1 Método basado en tablas de verdad	
4.2 Método de derivación paso a paso	
5. Prueba automática de teoremas	157
5.1 Razonamiento automático	
5.2 Prueba automática de teoremas	
6. Cálculo de predicados	177
6.1 Predicados	
6.2 Fórmulas de predicados	
Recomendaciones finales	207
Bibliografía	209

Tablas

Tabla I. Formalización de la lógica proposicional

Tabla II. Leyes y propiedades

Tabla III. Implicaciones tautológicas

Tabla IV. Reglas para Prueba Automática de Teoremas, PAT

Tabla V. Reglas específicas para el cálculo de predicados

Conectivo	Expresión en lenguaje natural	Formalización	Tabla de verdad
Negación	No P No ocurre que P No es cierto que P No es el caso que P Es falso que P Ni P etc.	7P	$\begin{array}{c\|c} P & 7P \\ \hline T & F \\ F & T \end{array}$
Conjunción	P y Q P pero Q P aunque Q P sin embargo Q P no obstante Q P a pesar de Q etc.	$P \wedge Q$	$\begin{array}{cc\|c} P & Q & P \wedge Q \\ \hline T & T & T \\ T & F & F \\ F & T & F \\ F & F & F \end{array}$
Disyunción	P o Q o ambos O bien P o bien Q Al menos P o Q P a menos que Q Como mínimo P o Q etc.	$P \vee Q$	$\begin{array}{cc\|c} P & Q & P \vee Q \\ \hline T & T & T \\ T & F & T \\ F & T & T \\ F & F & F \end{array}$
Condicional	Si P entonces Q P sólo si Q P es suficiente para Q No P a menos que Q No P o Q Q si P Sólo si Q entonces P Q es necesario para P etc.	$P \rightarrow Q$	$\begin{array}{cc\|c} P & Q & P \rightarrow Q \\ \hline T & T & T \\ T & F & F \\ F & T & T \\ F & F & T \end{array}$
Bicondicional	P si y sólo si Q P es necesario y suficiente para Q etc.	$P \rightleftarrows Q$	$\begin{array}{cc\|c} P & Q & P \rightleftarrows Q \\ \hline T & T & T \\ T & F & F \\ F & T & F \\ F & F & T \end{array}$

Tabla I. Formalización de la lógica proposicional

Expresión	Equivalencia, ley o propiedad
$77P \Leftrightarrow P$	Doble negación
$P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$	Idempotencia
$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	Conmutativa
$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$ $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$	Asociativa
$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	Distributiva
$P \vee 7P \Leftrightarrow \mathbf{T}$	Tercero excluido Complemento Tautología
$P \wedge 7P \Leftrightarrow \mathbf{F}$	Tercero excluido Complemento Contradicción
$P \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow P$ $P \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow P$	Identidad
$P \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$ $P \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$	Dominancia o Dominante
$7(P \vee Q) \Leftrightarrow 7P \wedge 7Q$ $7(P \wedge Q) \Leftrightarrow 7P \vee 7Q$	De Morgan
$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	Absorción
$P \rightarrow Q \Leftrightarrow 7P \vee Q$	Condicional-Disyunción (Con-Dis), (Dis-Con)
$P \rightleftarrows Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	Bicondicional-Condicional (Bi-Con), (Con-Bi)
$7A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A^*(7P_1, 7P_2, \ldots, 7P_n)$	1ª. Ley de dualidad
$A(7P_1, 7P_2, \ldots, 7P_n) \Leftrightarrow 7A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$	2ª. Ley de dualidad
Si $A \Leftrightarrow B$ entonces $A^* \Leftrightarrow B^*$	3ª. Ley de dualidad

Tabla II. Leyes y propiedades
T corresponde a True
F corresponde a False

No.	Implicación tautológica	Nombre
I_1	$P \wedge Q \Rightarrow P$	Simplificación
I_2	$P \wedge Q \Rightarrow Q$	Simplificación
I_3	$P \Rightarrow P \vee Q$	Adición
I_4	$Q \Rightarrow P \vee Q$	Adición
I_5	$7P \Rightarrow P \rightarrow Q$	Adición
I_6	$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$	Adición
I_7	$7(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$	Simplificación
I_8	$7(P \rightarrow Q) \Rightarrow 7Q$	Simplificación
I_9	$P, Q \Rightarrow P \wedge Q$	Conjuntividad
I_{10}	$7P, P \vee Q \Rightarrow Q$	Modus Tollendo Ponens, MTP, Silogismo Disyuntivo
I_{11}	$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$	Modus Ponendo Ponens, MPP, Modus Ponens, MP
I_{12}	$7Q, P \rightarrow Q \Rightarrow 7P$	Modus Tollendo Tollens, MTT, Modus Tollens, MT
I_{13}	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$	Transitividad de la condicional, Silogismo Hipotético
I_{14}	$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$	Dilema

Tabla III. Implicaciones tautológicas

Reglas del antecedente
Regla $7 \Rightarrow$: Si $\alpha, \beta \Rightarrow X, \gamma$, entonces $\alpha, 7X, \beta \Rightarrow \gamma$.
Regla $\wedge \Rightarrow$: Si $X, Y, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma$, entonces $\alpha, X \wedge Y, \beta \Rightarrow \gamma$.
Regla $\vee \Rightarrow$: Si $X, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma$ y $Y, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma$, entonces $\alpha, X \vee Y, \beta \Rightarrow \gamma$.
Regla $\rightarrow \Rightarrow$: Si $Y, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma$ y $\alpha, \beta \Rightarrow X, \gamma$, entonces $\alpha, X \rightarrow Y, \beta \Rightarrow \gamma$.
Regla $\rightleftarrows \Rightarrow$: Si $X, Y, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma$ y $\alpha, \beta \Rightarrow X, Y, \gamma$, entonces $\alpha, X \rightleftarrows Y, \beta \Rightarrow \gamma$.
Reglas del consecuente
Regla $\Rightarrow 7$: Si $X, \alpha \Rightarrow \beta, \gamma$, entonces $\alpha \Rightarrow \beta, 7X, \gamma$.
Regla $\Rightarrow \wedge$: Si $\alpha \Rightarrow X, \beta, \gamma$ y $\alpha \Rightarrow Y, \beta, \gamma$, entonces $\alpha \Rightarrow \beta, X \wedge Y, \gamma$.
Regla $\Rightarrow \vee$: Si $\alpha \Rightarrow X, Y, \beta, \gamma$, entonces $\alpha \Rightarrow \beta, X \vee Y, \gamma$.
Regla $\Rightarrow \rightarrow$: Si $X, \alpha \Rightarrow Y, \beta, \gamma$, entonces $\alpha \Rightarrow \beta, X \rightarrow Y, \gamma$.
Regla $\Rightarrow \rightleftarrows$: Si $X, \alpha \Rightarrow Y, \beta, \gamma$ y $Y, \alpha \Rightarrow X, \beta, \gamma$ entonces $\alpha \Rightarrow \beta, X \rightleftarrows Y, \gamma$.

Tabla IV. Reglas para Prueba Automática de Teoremas, PAT

Nombre	Expresión
Negación del Cuantificador, NC	$7(\forall x)\ P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\ 7P(x)$
Negación del Cuantificador, NC	$7(\exists x)\ P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\ 7P(x)$
Especificación Universal, EU	$(\forall x)\ P(x) \Rightarrow P(y)$ (y arbitraria)
Especificación Existencial, EE	$(\exists x)\ P(x) \Rightarrow P(a)$ (a específica)
Generalización Universal, GU	$P(x)$ (x arbitraria) $\Rightarrow (\forall x)\ P(x)$
Generalización Existencial, GE	$P(a)$ (a específica) $\Rightarrow (\exists x)\ P(x)$

Tabla V. Reglas específicas para el cálculo de predicados

1. Fórmulas proposicionales y tablas de verdad

1.1 Conceptos

1.2 Tablas de verdad

1. A partir de las siguientes expresiones, subraye las que correspondan a proposiciones válidas.

a) María juega basquetbol

b) ¿Cómo te llamas?

c) 2 + 6 = 8

d) Cancún tiene playas hermosas

e) ¿Cuántos hermanos tienes?

f) La casa es roja

g) ¡Comes y te vas!

h) Hugo

i) Carlos no tiene dinero

j) ¡Cuidado con el perro!

Comentarios:

Recuerde: La proposición es un enunciado declarativo, que puede adquirir el valor de falso o verdadero.

Analizando las expresiones, tenemos lo siguiente:

a) Es una proposición
b) No es proposición, porque es un enunciado interrogativo
c) Es una proposición
d) Es una proposición
e) No es proposición, porque es un enunciado interrogativo
f) Es una proposición
g) No es proposición, porque es un enunciado imperativo
h) No es proposición, porque es una frase
i) Es una proposición
j) No es proposición, porque es un enunciado exclamativo

A partir de este momento a la proposición válida la vamos a nombrar simplemente como proposición.

1. A partir de las siguientes expresiones, subraye las que correspondan a proposiciones válidas.

a) María juega basquetbol

b) ¿Cómo te llamas?

c) 2 + 6 = 8

d) Cancún tiene playas hermosas

e) ¿Cuántos hermanos tienes?

f) La casa es roja

g) ¡Comes y te vas!

h) Hugo

i) Carlos no tiene dinero

j) ¡Cuidado con el perro!

Comentarios:

Recuerde: La proposición es un enunciado declarativo, que puede adquirir el valor de falso o verdadero.

Analizando las expresiones, tenemos lo siguiente:

a) Es una proposición
b) No es proposición, porque es un enunciado interrogativo
c) Es una proposición
d) Es una proposición
e) No es proposición, porque es un enunciado interrogativo
f) Es una proposición
g) No es proposición, porque es un enunciado imperativo
h) No es proposición, porque es una frase
i) Es una proposición
j) No es proposición, porque es un enunciado exclamativo

A partir de este momento a la proposición válida la vamos a nombrar simplemente como proposición.

2. Analice las siguientes expresiones. Subraye las que correspo
proposiciones.

a) $x + 1 = y$

b) ¿Estudias o trabajas?

c) ¿Todo quedó claro?

d) ¡Parece que fue ayer!

e) $a + b = c$

f) ¿Dónde vives?

g) Lety estudia Estructuras Discretas

h) Manuel no aprueba el curso

i) ¡No es posible!

j) ¡Camina siempre adelante!

Comentarios:

Recuerde: La proposición cumple con dos características: es un enunciado decla
puede adquirir el valor de falso o verdadero.

Analizando las expresiones, tenemos lo siguiente:

a) Es una proposición, es verdadera o falsa dependiendo de los valores de x y y
b) No es proposición, porque es un enunciado interrogativo
c) No es proposición, porque es un enunciado interrogativo
d) No es proposición, porque es un enunciado exclamativo
e) Es una proposición, su valor de verdad depende de los valores de a, b y c
f) No es proposición, porque es un enunciado interrogativo
g) Es una proposición
h) Es una proposición
i) No es proposición, porque es un enunciado exclamativo
j) No es proposición, porque es un enunciado imperativo

3. A partir de las siguientes proposiciones, determine cuáles son atómicas y cuáles son moleculares. Hecho lo anterior, obtenga su notación simbólica.

a) Arturo juega fútbol
Sol:
La proposición es atómica, su notación es A, dada por:
A: Arturo juega fútbol

b) Beatriz estudia Ingeniería en computación
Sol:
La proposición es atómica, su notación es B, dada por:
B: Beatriz estudia Ingeniería en computación

c) Carlos no va a la fiesta
Sol:
La proposición es molecular, su notación es 7C, dada por:
C: Carlos va a la fiesta

d) Si Daniel aprueba el examen entonces se va a España de paseo
Sol:
La proposición es molecular, su notación es D→E, dada por:
D: Daniel aprueba el examen
E: Se va a España de paseo

e) La novia de Francisco se llama Gaby
Sol:
La proposición es atómica, su notación es F, dada por:
F: La novia de Francisco se llama Gaby

f) No como alimentos chatarra, mantengo un peso adecuado
Sol:
La proposición es molecular, su notación es 7G→H, dada por:
G: Como alimentos chatarra
H: Mantengo un peso adecuado

Comentarios:
La proposición atómica no contiene conectivos. También se le conoce como primaria, básica, etc. La proposición molecular si contiene conectivos. También se le conoce como secundaria, compuesta, etc. Una fórmula proposicional puede ser una proposición atómica o molecular.

7. Obtenga la tabla de verdad de la siguiente fórmula proposicional. Indique si es una tautología, contradicción o contingencia.

$(P \rightarrow Q) \vee (P \vee Q)$

Solución:

Se construye la tabla de verdad:

P	Q	$(P \rightarrow Q)$	$\vee$	$(P \vee Q)$
T	T	T	**T**	T
T	F	F	**T**	T
F	T	T	**T**	T
F	F	T	**T**	F

La columna resultante contiene únicamente valores verdaderos.
Por lo tanto, la fórmula proposicional es una tautología.

Comentarios:

Una fórmula proposicional es una tautología, si al obtener su tabla de verdad la columna resultante contiene únicamente valores verdaderos.

Aclaración: La disyunción que estamos usando corresponde a la disyunción inclusiva, ya que si dos proposiciones tienen el valor de verdad T entonces a aplicar el conectivo obtenemos como resultado T.

Por otra parte, el número de renglones de la tabla de verdad está en función de 2^n, donde n es el número de proposiciones atómicas que contiene la fórmula proposicional.

8. Elabore la tabla de verdad de la siguiente fórmula proposicional. Indique el tipo de fórmula proposicional que corresponda.

$$(P \vee 7Q) \wedge (P \rightarrow Q)$$

Solución:

Se construye la tabla de verdad:

P	Q	(P ∨ 7Q)	∧	(P → Q)
T	T	T	**T**	T
T	F	T	**F**	F
F	T	F	**F**	T
F	F	T	**T**	T

La columna resultante contiene valores verdaderos y falsos.
Por lo tanto, la fórmula proposicional es una contingencia.

Comentarios:

Una fórmula proposicional es una contingencia, si la columna resultante de la fórmula contiene valores verdaderos y falsos.

9. Construya la tabla de verdad de la siguiente proposición, indicando si es tautología, contradicción o contingencia.

$(P \wedge Q) \vee 7(P \wedge Q)$

Solución:

Se construye la tabla de verdad:

P	Q	$(P \wedge Q)$	$\vee$	$7(P \wedge Q)$
T	T	T	**T**	F
T	F	F	**T**	T
F	T	F	**T**	T
F	F	F	**T**	T

La columna resultante contiene únicamente valores verdaderos.
Por lo tanto, la fórmula proposicional es una tautología.

Comentarios:

La fórmula proposicional es una tautología, si la columna resultante de la tabla de verdad contiene únicamente valores verdaderos.

10. Obtenga la tabla de verdad de la siguiente fórmula proposicional
tipo de fórmula proposicional.

Pv(7P→(Qv(7Q→R)))

Solución:

Se construye la tabla de verdad:

P	Q	R	P	v	(7P → (Q v (7Q → R)))
T	T	T	T	**T**	T
T	T	F	T	**T**	T
T	F	T	T	**T**	T
T	F	F	T	**T**	T
F	T	T	F	**T**	T
F	T	F	F	**T**	T
F	F	T	F	**T**	T
F	F	F	F	**F**	F

La columna resultante contiene valores verdaderos y un falso.
Por lo tanto, la fórmula proposicional es una contingencia.

Comentarios:

Una fórmula proposicional es una contingencia, si al obtener su tabla de ve
resultante contiene valores verdaderos y falsos, aun cuando sólo tenga un va
en este caso.

II. Obtenga la tabla de verdad de la siguiente fórmula proposicional. Indique el tipo de fórmula proposicional.

$$(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (7P \rightarrow (7Q \wedge 7R))$$

Solución:

Se construye la tabla de verdad:

P	Q	R	$(P \rightarrow (Q \wedge R))$	$\wedge$	$(7P \rightarrow (7Q \wedge 7R))$
T	T	T	T	**T**	T
T	T	F	F	**F**	T
T	F	T	F	**F**	T
T	F	F	F	**F**	T
F	T	T	T	**F**	F
F	T	F	T	**F**	F
F	F	T	T	**F**	F
F	F	F	T	**T**	T

La columna resultante contiene valores verdaderos y falsos.
Por lo tanto, la fórmula proposicional es una contingencia.

Comentarios:

Una fórmula proposicional es una contingencia, si al obtener su tabla de verdad la columna resultante contiene valores verdaderos y falsos.

13. Compruebe que la siguiente fórmula proposicional es una contradicción. Use tablas de verdad y el método algebraico.

$(P \wedge Q) \wedge 7(P \vee Q)$

Solución:

Por tabla de verdad:

P	Q	$(P \wedge Q)$	$\wedge$	$7(P \vee Q)$
T	T		**F**	
T	F		**F**	
F	T		**F**	
F	F		**F**	

La columna resultante contiene únicamente valores falsos.
Por lo tanto, la fórmula proposicional es una contradicción.

Por el método algebraico:

Procedimiento	Ley o propiedad
$(P \wedge Q) \wedge 7(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge (7P \wedge 7Q)$	De Morgan
$\Leftrightarrow (P \wedge 7P) \wedge (Q \wedge 7Q)$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow (\ \mathbf{F}\ ) \wedge (\ \mathbf{F}\ )$	Contradicción
$\Leftrightarrow \mathbf{F}$	Idempotencia
Busque otro camino.	

Comentarios:

Para demostrar que una fórmula proposicional es una contradicción, lo hacemos por tabla de verdad. La columna resultante contiene únicamente valores falsos.
En el método algebraico debemos usar las leyes y propiedades de la Tabla II.
Para simplificar el uso de propiedades, cuando aparezca el caso $P \wedge 7P$, corresponderá a una contradicción F.

14. A partir de la siguiente expresión condicional obtenga la con
contrapositiva. Demuestra cuáles son equivalentes entre sí. H
de verdad y por el método algebraico.

Si estudio Estructuras Discretas entonces apruebo el examen

Solución:

Encuentro las proposiciones atómicas:

P: Estudio Estructuras Discretas
Q: Apruebo el examen

Anotación en lógica simbólica Condicional $P \rightarrow Q$

A partir de esta expresión obtengo las restantes

Conversa $Q \rightarrow P$

En lenguaje natural:

Si apruebo el examen entonces estudio Estructuras Discretas

Inversa $7P \rightarrow 7Q$

En lenguaje natural:

Si no estudio Estructuras Discretas entonces no apruebo el e

Contrapositiva $7Q \rightarrow 7P$

En lenguaje natural:

Si no apruebo el examen entonces no estudio Estructuras D

Resumiendo, tenemos lo siguiente:

Condicional $P \rightarrow Q$

Conversa $Q \rightarrow P$

Inversa $7P \rightarrow 7Q$

Contrapositiva: $7Q \rightarrow 7P$

Por tabla de verdad:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$7P \rightarrow 7Q$	$7Q \rightarrow 7P$
T	T	**T**	**T**	**T**	**T**
T	F	**F**	**T**	**T**	**F**
F	T	**T**	**F**	**F**	**T**
F	F	**T**	**T**	**T**	**T**

Comparando las columnas resultantes se observa que:

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow 7Q \rightarrow 7P$$

y que

$$Q \rightarrow P \Leftrightarrow 7P \rightarrow 7Q$$

Por el método algebraico:	
Se demuestra la primera equivalencia.	
Procedimiento	Ley o p
$P \rightarrow Q \Leftrightarrow 7P \vee Q$	Con-Di
$\Leftrightarrow Q \vee 7P$	Conmu
$\Leftrightarrow 7Q \rightarrow 7P$	Dis-Co
De esta manera se demuestra que:	
La condicional es equivalente a la contrapositiva	
Se demuestra la segunda equivalencia.	
Procedimiento	Ley o p
$Q \rightarrow P \Leftrightarrow 7Q \vee P$	Con-Di
$\Leftrightarrow P \vee 7Q$	Conmu
$\Leftrightarrow 7P \rightarrow 7Q$	Dis-Co
De esta manera se demuestra que:	
La conversa es equivalente a la inversa	

Comentarios:

A partir de una condicional se obtienen varias expresiones, como las siguien

Condicional $P \rightarrow Q$

Conversa $Q \rightarrow P$ también llamada **Recíproca**

Inversa $7P \rightarrow 7Q$ también llamada **Contraria**

Contrapositiva: $7Q \rightarrow 7P$ también llamada **Contrarrecíproca**

Se cumplen las equivalencias:

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow 7Q \rightarrow 7P$$

$$Q \rightarrow P \Leftrightarrow 7P \rightarrow 7Q$$

15. Demuestre que la siguiente fórmula proposicional es una tautología. Hágalo por tabla de verdad y por el método algebraico.

$$((P \rightleftarrows Q) \wedge Q) \rightarrow P$$

Solución:

Por tabla de verdad:

P	Q	$((P \rightleftarrows Q) \wedge Q) \rightarrow P$
T	T	**T**
T	F	**T**
F	T	**T**
F	F	**T**

La columna resultante está llena de valores verdaderos.
Por lo tanto, la fórmula proposicional es una tautología.

Por el método algebraico:

Procedimiento	Ley o propiedad
$((P \rightleftarrows Q)\wedge Q)\rightarrow P \Leftrightarrow [((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P))\wedge Q]\rightarrow P$	Bi-Con
$\Leftrightarrow [((7P \vee Q)\wedge(7Q \vee P))\wedge Q]\rightarrow P$	Con-Dis
$\Leftrightarrow [((7P \vee Q)\wedge Q)\wedge((7Q \vee P)\wedge Q)]\rightarrow P$	Distributiva
$\Leftrightarrow [\quad Q \quad \wedge (7Q \vee P)\wedge Q\ ]\rightarrow P$	Absorción
$\Leftrightarrow [\quad Q \quad \wedge (7Q \vee P)\quad]\rightarrow P$	Idempotencia
$\Leftrightarrow [\ (Q \wedge 7Q) \vee (Q \wedge P)\quad]\rightarrow P$	Distributiva
$\Leftrightarrow [\ (\ \mathbf{F}\ ) \vee (Q \wedge P)\quad]\rightarrow P$	Contradicción
$\Leftrightarrow [\quad (Q \wedge P)\quad]\rightarrow P$	Identidad
$\Leftrightarrow [\quad (P \wedge Q)\quad]\rightarrow P$	Conmutativa
$\Leftrightarrow 7(P \wedge Q) \vee P$	Con-Dis
$\Leftrightarrow 7P \vee 7Q \vee P$	De Morgan
$\Leftrightarrow (7P \vee P) \vee 7Q$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow (\ \mathbf{T}\ ) \vee 7Q$	Tautología
$\Leftrightarrow \mathbf{T}$	Dominancia

Comentarios: Busque otro camino o procedimiento. Repase los conceptos.

17/09/15

16. Demuestre que la siguiente fórmula proposicional es una tautol

$$P \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow P))$$

Solución:

Por tabla de verdad:

P	Q	$P \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow P))$
T	T	**T**
T	F	**T**
F	T	**T**
F	F	**T**

La columna resultante está llena de valores verdaderos. Por lo tan
proposicional es una tautología.

Por el método algebraico:

Procedimiento	
$P \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow P)) \Leftrightarrow 7P \vee (P \wedge (7Q \vee P))$	Ley
$\Leftrightarrow 7P \vee (\quad P \quad)$	Con-
$\Leftrightarrow 7P \vee P$	Abs
$\Leftrightarrow$ **T**	Asoc
	Tau

Otro procedimiento	
$P \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow P)) \Leftrightarrow 7P \vee (P \wedge (7Q \vee P))$	Ley
$\Leftrightarrow 7P \vee ((P \wedge 7Q) \vee (P \wedge P))$	Con-
$\Leftrightarrow 7P \vee ((P \wedge 7Q) \vee \quad (P))$	Dist
$\Leftrightarrow (7P \vee P) \vee (P \wedge 7Q)$	Ide
$\Leftrightarrow (\quad \mathbf{T} \quad) \vee (P \wedge 7Q)$	Com
$\Leftrightarrow$ **T**	Tau
	Dom

Comentarios:
Recuerde: Cualquier proposición en disyunción con una tautología nos
una tautología.

Demuestre la siguiente equivalencia:

$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$ Restricción: No use absorción.

Solución:	
Procedimiento 1	Ley o propiedad
$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow (P \vee F) \wedge (P \vee Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge 7Q)) \wedge (P \vee Q)$	Contradicción
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee 7Q) \wedge (P \vee Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee 7Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge 7Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P \vee (\ F\ )$	Contradicción
$\Leftrightarrow P$	Identidad
Procedimiento 2	
$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow (P \vee F) \wedge (P \vee Q)$	Identidad
$\Leftrightarrow P \vee (F \wedge Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P \vee (\ F\ )$	Dominancia
$\Leftrightarrow P$	Identidad
Procedimiento 3. Ahora por el lado derecho:	
$P \Leftrightarrow P \vee F$	Identidad
$\Leftrightarrow P \vee (F \wedge Q)$	Dominancia
$\Leftrightarrow (P \vee F) \wedge (P \vee Q)$	Distributiva
$\Leftrightarrow P \wedge (P \vee Q)$	Identidad
Siguiendo otro camino.	

Comentarios:

Observe: Vea la utilidad de la contradicción.

La contradicción nos sirve para introducir aquella atómica que haga falta. En este caso la contradicción se escribió en función de Q.

Comprenda y maneje las propiedades.

37. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(7P \vee (7P \vee Q)) \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (7P \vee Q)$$

Solución:		
Procedimiento		Ley o propiedad
$(7P \vee (7P \vee Q)) \vee (P \wedge Q)$	$\Leftrightarrow ((7P \vee 7P) \vee Q) \vee (P \wedge Q)$	Asociativa
	$\Leftrightarrow (7P \vee Q) \vee (P \wedge Q)$	Idempotencia
	$\Leftrightarrow 7P \vee (Q \vee (P \wedge Q))$	Asociativa
	$\Leftrightarrow 7P \vee (Q)$	Absorción
	$\Leftrightarrow 7P \vee Q$	
Otro procedimiento.		
$(7P \vee (7P \vee Q)) \vee (P \wedge Q)$	$\Leftrightarrow ((7P \vee 7P) \vee Q) \vee (P \wedge Q)$	Asociativa
	$\Leftrightarrow (7P \vee Q) \vee (P \wedge Q)$	Idempotencia
	$\Leftrightarrow ((7P \vee Q) \vee P) \wedge ((7P \vee Q) \vee Q)$	Distributiva
	$\Leftrightarrow ((7P \vee P) \vee Q) \wedge (7P \vee (Q \vee Q))$	Conm. y asoc.
	$\Leftrightarrow ((T) \vee Q) \wedge (7P \vee (Q \vee Q))$	Tautología
	$\Leftrightarrow ((T) \vee Q) \wedge (7P \vee Q)$	Idempotencia
	$\Leftrightarrow (T) \wedge (7P \vee Q)$	Dominancia
	$\Leftrightarrow 7P \vee Q$	Identidad

Comentarios:

Compare el ejercicio 36 con el ejercicio 37.

Del ejercicio 36: $(7P \wedge (7P \wedge Q)) \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow (7P \wedge Q)$

Del ejercicio 37: $(7P \vee (7P \vee Q)) \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (7P \vee Q)$

La expresión del lado izquierdo del ejercicio 36 y la expresión del lado izquierdo del ejercicio 37 son duales entre sí.

La expresión del lado derecho del ejercicio 36 y la expresión del lado derecho del ejercicio 37 son duales entre sí.

Por lo tanto, las leyes de dualidad sirven para demostrar equivalencias. Investigue.

39. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(P \rightarrow (7Q \rightarrow P)) \rightarrow Q \Leftrightarrow 7Q \rightarrow (P \wedge ((Q \wedge P) \wedge Q))$$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$(P \rightarrow (7Q \rightarrow P)) \rightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \vee P)) \rightarrow Q$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (7P \vee (Q \vee P)) \rightarrow Q$	Con-Dis
$\Leftrightarrow 7(7P \vee (Q \vee P)) \vee Q$	Con-Dis
$\Leftrightarrow 7((7P \vee P) \vee Q) \vee Q$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow 7((\ \mathbf{T}\ ) \vee Q) \vee Q$	Tautología
$\Leftrightarrow 7(\ \mathbf{T}\ ) \vee Q$	Dominancia
$\Leftrightarrow \mathbf{F} \vee Q$	Negación
$\Leftrightarrow Q$	Identidad
$\Leftrightarrow Q \vee (P \wedge Q)$	Absorción
$\Leftrightarrow 7Q \rightarrow (P \wedge Q)$	Dis-Con
$\Leftrightarrow 7Q \rightarrow (P \wedge P \wedge Q \wedge Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow 7Q \rightarrow (P \wedge ((Q \wedge P) \wedge Q))$	Conm. y asoc.
Busque otro camino.	

Comentarios:

De nuevo aplicamos la absorción y nos saca del apuro. Idempotencia no se queda atrás. Piense, qué es lo que está buscando. A partir de esto, seleccione la ley o la propiedad más adecuada.

41. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$(S\rightarrow(7P\rightarrow S))\rightarrow P \Leftrightarrow 7P\rightarrow(S\wedge(P\wedge S)\wedge S)$$

Solución:	
Procedimiento	Ley o propiedad
$(S\rightarrow(7P\rightarrow S))\rightarrow P \Leftrightarrow (7S \vee(P \vee S)) \rightarrow P$	Con-Dis
$\Leftrightarrow 7(7S \vee(P \vee S)) \vee P$	Con-Dis
$\Leftrightarrow 7((7S \vee S) \vee P) \vee P$	Conm. y asoc.
$\Leftrightarrow 7(\quad \mathbf{T} \quad \vee P) \vee P$	Tautología
$\Leftrightarrow 7(\quad \mathbf{T} \quad) \vee P$	Dominancia
$\Leftrightarrow \quad \mathbf{F} \quad \vee P$	Negación
$\Leftrightarrow P$	Identidad
$\Leftrightarrow P \vee (S\wedge P)$	Absorción
$\Leftrightarrow 7P\rightarrow (S\wedge P)$	Dis-Con
$\Leftrightarrow 7P\rightarrow (S\wedge S\wedge S\wedge P)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow 7P\rightarrow (S\wedge (P\wedge S)\wedge S)$	Conm. y asoc.
Trate de hacerlo Usted.	

Comentarios:

Espero que comprenda la importancia de la idempotencia, la cual sirve para eliminar atómicas repetidas, pero también es útil para introducir aquello que haga falta, como es el caso que nos ocupa.

Compare este ejercicio con el ejercicio 39. ¿Encuentra alguna similitud?

Bien, vamos muy bien.

2. Formas normales y dispositivos de dos estados

2.1 Forma normal disyuntiva principal

2.2 Forma normal conjuntiva principal

43. Obtenga las formas normales principales de la siguiente fórmula proposicional:

$P \rightarrow Q$

Use los siguientes métodos:

a) Por medio del método algebraico obtenga la FNDP.
b) Por medio del método algebraico obtenga la FNCP.
c) A partir de la FNDP obtenga la FNCP.
d) A partir de la FNCP obtenga la FNDP.
e) Obtenga las formas normales principales por el método de tablas de verdad.

Solución:	
Método a: Por medio del método algebraico se obtiene la FNDP	
Procedimiento	Ley o propiedad
Ahora, se trabaja para llegar a la FNDP	
$P \rightarrow Q \Leftrightarrow 7P \vee Q$	Con-Dis
$\Leftrightarrow (7P \wedge \mathbf{T}) \vee (Q \wedge \mathbf{T})$	Identidad
$\Leftrightarrow (7P \wedge (Q \vee 7Q)) \vee (Q \wedge (P \vee 7P))$	Tautología
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge 7P)$	Distributiva
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q) \vee (P \wedge Q) \vee (7P \wedge Q)$	Conmutativa
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q) \vee (P \wedge Q)$	Idempotencia
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q)$ FNDP	Conmutativa

Método b: Por medio del método algebraico se obtiene la FNCP	
Procedimiento	Ley o propiedad
Obtener la FNCP	
$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (7P \vee Q)$ FNCP	Con-Dis

Método c: A partir de la FNDP obtener la FNCP	Ley o pr
Procedimiento	
Ahora, se llega a la FNCP	
$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q)$ trabaje con ella.	Con-Dis
$(P \wedge Q) \vee (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (7P \wedge (Q \vee 7Q))$	Distribu
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (7P \wedge (\mathbf{T}))$	Tautolo
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (7P)$	Identida
$\Leftrightarrow (P \vee 7P) \wedge (Q \vee 7P)$	Distribu
$\Leftrightarrow (\mathbf{T}) \wedge (7P \vee Q)$	Tautolo
$\Leftrightarrow 7P \vee Q$ FNCP	Identida

Método d: A partir de la FNCP obtener la FNDP	Ley o
Procedimiento	
Ahora, se llega a la FNDP	
$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (7P \vee Q)$ ésta es la FNCP, trabaje con ella.	Con-I
$(7P \vee Q) \Leftrightarrow (7P \wedge \mathbf{T}) \vee (Q \wedge \mathbf{T})$	Ident
$\Leftrightarrow (7P \wedge (Q \vee 7Q)) \vee (Q \wedge (P \vee 7P))$	Tautr
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q) \vee (Q \wedge P) \vee (Q \wedge 7P)$	Distr
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q) \vee (P \wedge Q) \vee (7P \wedge Q)$	Com
$\Leftrightarrow (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q) \vee (P \wedge Q)$	Iden
$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q)$ FNDP	Com

Método e: Obtenga las formas normales principales por el método de tablas de verdad.

Otra forma de resolver el problema consiste en el uso de la tabla de verdad.

Se construye la tabla de verdad de la fórmula dada.

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	**T**
T	F	**F**
F	T	**T**
F	F	**T**

De acuerdo con la tabla de verdad, se observa que la fórmula original, $P \rightarrow Q$ es una contingencia. Por lo tanto, tiene las dos formas normales principales: FNDP y FNCP.

Para obtener la FNDP a partir de la tabla de verdad, trabaje con los renglones que tienen valor verdadero en la columna resultante y genere las combinaciones directamente. Cada combinación es un mintérmino. El único conectivo binario que contiene cada mintérmino corresponde a la conjunción.

P	Q	$P \rightarrow Q$	FNDP	FNCP
T	T	**T**	$(P \wedge Q)$	
T	F	**F**		
F	T	**T**	$(7P \wedge Q)$	
F	F	**T**	$(7P \wedge 7Q)$	

Finalmente, relacione los mintérminos obtenidos por medio de disyunciones.

Así, la FNDP está dada por:

$$(P \wedge Q) \vee (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q)$$

Se cumple la equivalencia:

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (7P \wedge Q) \vee (7P \wedge 7Q)$$

3. Notación polaca y parentizada

3.1 Notación

3.2 Transformación de notaciones

54. A partir de cada expresión infija, obtenga la notación prefija (polaca prefija) y la notación sufija (posfija o polaca inversa).

a) $P \wedge 7Q$
b) $P \wedge (Q \vee 7R)$
c) $(P \vee ((7Q \wedge R) \wedge S))$

Inciso a)
Solución:
Procedimiento:
Infija: $P \wedge 7Q$ Prefija: $\wedge P\ 7Q$ Sufija: $P\ Q\ 7 \wedge$

Inciso b)
Solución:
Procedimiento:
Infija: $P \wedge (Q \vee 7R)$ Prefija: $\wedge P \vee Q\ 7\ R$ Sufija: $P\ Q\ R\ 7 \vee \wedge$

Inciso c)
Solución:
Procedimiento:
Infija: $(P\vee((7Q\wedge R)\wedge S))$ Prefija: $\vee P\wedge\wedge 7QRS$ Sufija: $PQ7R\wedge S\wedge\vee$

Comentarios:

Recuerde:

Notación infija:	Operando 1	Operador	Operando 2
Notación prefija:	Operador	Operando 1	Operando 2
Notación sufija:	Operando 1	Operando 2	Operador

Relacionando lo que ya sabemos: operador es lo mismo que conectivo y operando corresponde a la proposición.
Por otra parte, dos puntos importantes:
1. Cada atómica conserva su posición origi[illegible], sin importar el tipo de notación que se trate.
2. Si la notación infija tiene paréntesis, la notación prefija y sufija elimina los paréntesis.