TRABAJO FINAL

Métodos Numéricos y Ecuaciones Diferenciales

Christian Bernal Díaz

Víctor Donoso Rojas

Alex Arancibia Espinola

Jonathan Lagos Pino

Julio, 2022

Nota

Todos los programas utilizados en el cálculo de las soluciones numéricas presentadas en este informe, pueden encontrarse en un notebook paralelo que los continene, al que en adelante se hará referencia como "Notebook". Para acceder a ellos haga click en el siguiente enlace:

Google Colab Notebook: Programas

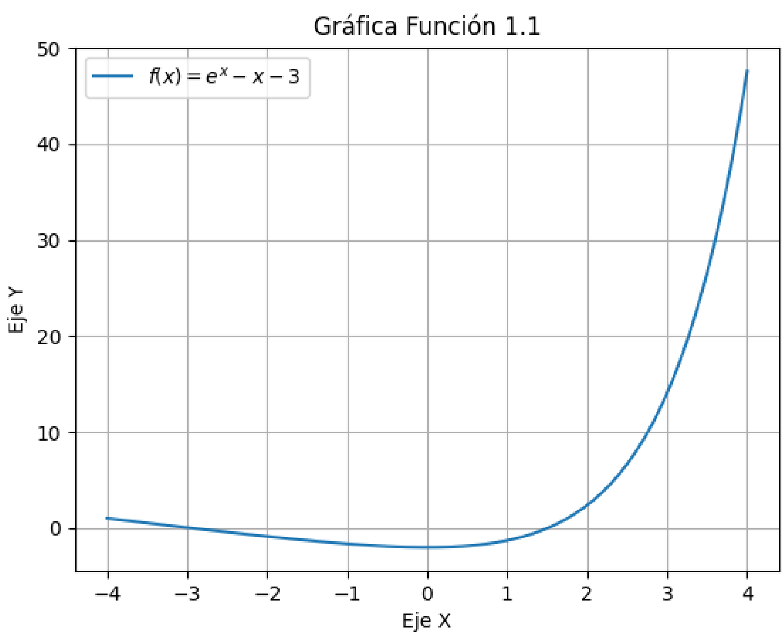
PROBLEMA 1

Con un error menor a 10^{-8} determine (utilizando el programa Bissecc.m para el *Método de Bisección*) las raíces de las siguientes ecuaciones. Si tienen más de una raíz, vea cómo encontrar al menos dos de ellas.

SOLUCIÓN:

A partir de un análisis gráfico, podemos estimar los intervalos candidatos para la búsqueda de aproximaciones de los ceros de la función de interés.

(a) $e^x - x - 3 = 0$



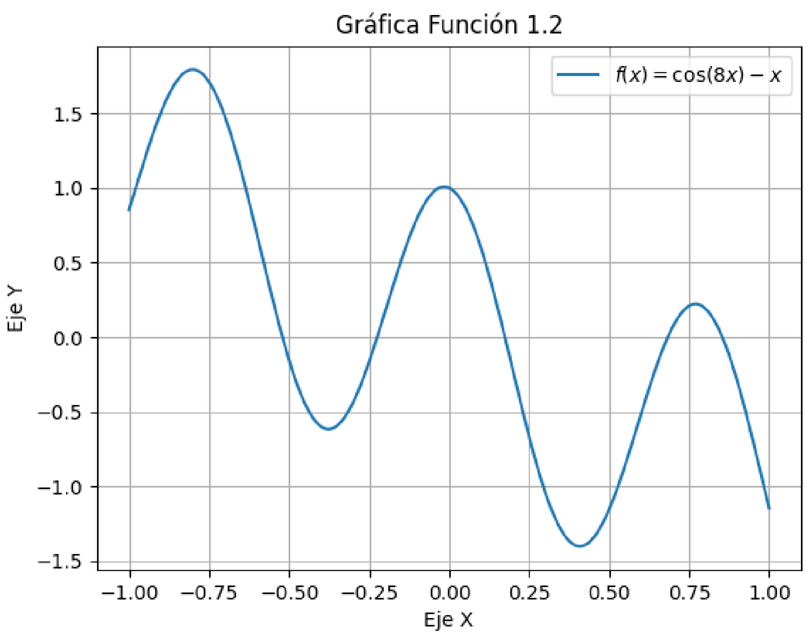
Teniendo en cuenta la gráfica anterior, podemos observar que los intervalos candidatos para aproximar los ceros de la función son $[-3, -2]$ y $[1, 2]$.

A continuación, implementaremos el metodo de la *Bisección* detallado en el Notebook para obtener las mejores aproximaciones a los ceros de la función que se encuentran en los intervalos indicados.

```
INPUT<<
biseccion(x_inf = -3, x_sup = -2, tolerancia = 10 ** -8)
biseccion(x_inf = 1, x_sup = 2, tolerancia = 10 ** -8)
OUTPUT>>
x_24 = -2.9475309
x_25 = 1.5052415
```

El índice de cada x_i señala el número de iteraciones en el que fue obtenido dicho valor.

(b) $\cos(8x) - x = 0$



Al igual que antes, observando la gráfica, podemos determinar a $[-0.25, 0]$ y $[0, 0.25]$ como los intervalos candidatos.

Aplicamos el método de la *Bisección* y obtenemos las aproximaciones de los ceros:

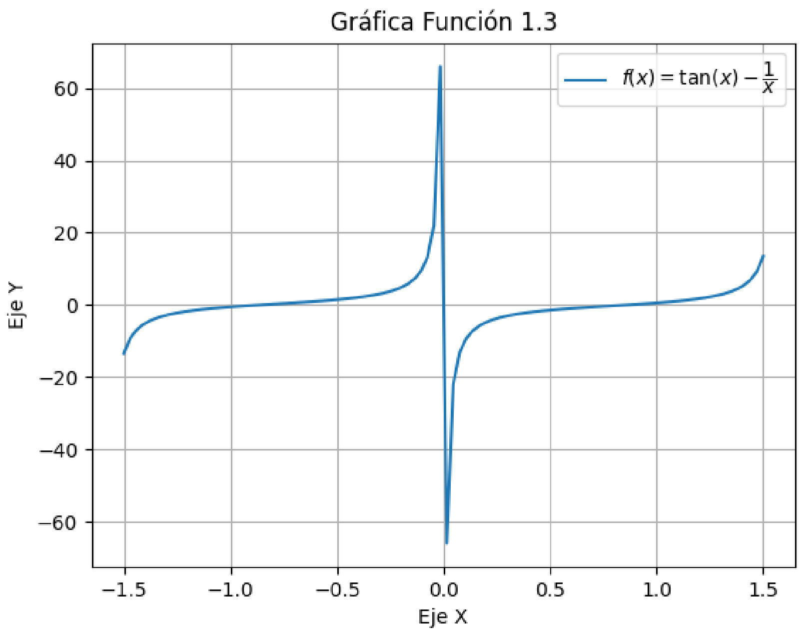
```
INPUT<<
biseccion(x_inf = -0.25 , x_sup =0 , tolerancia = 10 ** -8)
biseccion(x_inf = 0 , x_sup = 0.25 , tolerancia = 10 ** -8)
```

```
OUTPUT>>

x_21 = -0.22467583

x_24 = 0.17443327
```

(c) $\tan(x) - \dfrac{1}{x} = 0$



Observando la gráfica obtenemos a los intervalos $[-1.5, 0.5]$ y $[0.5, 1.5]$ como candidatos para encontrar ceros de nuestra función.

Aplicando nuevamente el método de la *Bisección* obtenemos las dos mejores aproximaciones de los ceros de la función:

```
INPUT<<

biseccion(x_inf = -1.5 , x_sup = -0.5 , tolerancia = 10 ** -8)

biseccion(x_inf = 0.5 , x_sup = 1.5 , tolerancia = 10 ** -8)

OUTPUT>>

x_24 = -0.86033359

x_24 = 0.86033359
```

PROBLEMA 2

Aplique el *Método de Bisección* para calcular la raíz positiva de la ecuación $x^2 - 20 = 0$, con un error de $\epsilon < 10^{-4}$. Haga una adecuada elección del intervalo inicial. ¿Cuántas iteraciones *a priori* son necesarias y cuántas fueron realmente necesarias para alcanzar dicha precisión?

SOLUCIÓN:

Consideremos la función $f(x) = x^2 - 20$. Analíticamente sus soluciones son $x_1 = 2\sqrt{5}$ y $x_2 = -2\sqrt{5}$. A nosotros nos interesa solamente la solución positiva. Notemos que $2\sqrt{4} < 2\sqrt{5} < 2\sqrt{9}$, luego, una primera alternativa de intervalo para la búqueda de la aproximación será $4 \leq x \leq 6$. Observemos que

$$x = 4 \to f(x) = (4)^2 - 20 = -4$$
$$x = 5 \to f(x) = (5)^2 - 20 = 5$$
$$x = 6 \to f(x) = (6)^2 - 20 = 16$$

A partir de estos resultados, nos basta tomar el intervalo $[4, 5]$, pues en dicho intervalo la función cambia de signo, y por el *Teorema de Bolzano* sabemos que dicho intervalo contiene uno de los ceros de la función.

Error e Iteraciones *a priori*

Para un error dado ϵ en un intervalo $[a, b]$, es posible determinar el número de iteraciones N necesarias para alcanzar una aproximación $|x_n - c| < \epsilon$, donde x_n es el valor real de la función y c la aproximación numérica, mediante la expresión:

$$N = \frac{\ln\left(\dfrac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(2\right)} + 1$$

Para el intervalo $[4, 5]$ y un error $\epsilon = 10^{-4}$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
&N = \frac{\ln\left(\dfrac{5-4}{10^{-4}}\right)}{\ln\Big(2\Big)} + 1 = \frac{\ln\left(\dfrac{1}{10^{-4}}\right)}{\ln\Big(2\Big)} + 1 \\
\iff\ &N = \frac{\ln(10000)}{\ln(2)} + 1 \approx 13.28771 + 1 \approx 14 \\
\implies\ &N = 14
\end{aligned}
$$

Implementación del *Método de Bisección* en Python

A continuación implementaremos el *Método de la Bisección* detallado en el Notebook. Se define una función llamada **biseccion()**, que toma los siguinetes parámetros: «x_{inf}» que denota al límite inferior del intervalo seleccionado, «x_{sup}» que denota al límite superior del intervalo seleccionado, y «*tolerancia*» que denota el error estipulado. Para nuestro caso de estudio, el llamado de la función se hace con los siguientes valores:

```
INPUT<<
biseccion(x_inf = 4, x_sup = 5, tolerancia = 10 ** -4)
OUTPUT>>
La mejor aproximación es x_14 = 4.47213745
```

Notemos que el número de iteraciones *teóricas* coincide con el número de iteraciones empíricas expresado en el subíndice de x_{14}. Esto nos indica que la fórmula utilizada nos entrega valores adecuados tanto de iteraciones como del error esperado para un número de iteraciones N predeterminado.

PROBLEMA 3

Repita el ejercicio anterior usando el *Método de Newton-Raphson*. ¿Cuáles son sus conclusiones?¿Qué puede decir de las estimaciones *a priori*, y *a posteriori*?

SOLUCIÓN:

Recordemos que la función a estudiar es $f(x) = x^2 - 20$. En el apartado anterior el intervalo seleccionado para aproximar las soluciones fue el intervalo $[4, 5]$. Entonces, como primera aproximación tomamos $x_0 = 4$, y además se tiene que $f'(x) = 2x$. Consideremos adicionalmente el error $e = 10^{-4}$ es igual que en el problema anterior.

Implementación en Python : *Método de Newton-Raphson*

Se define la función computacional **newton(x_n, tolerancia)**, donde x_n corresponde a la aproximación inicial $f(x_n) \approx 0$, y **tolerancia** corresponde al número de decimales de exactitud requeridos. Llamamos a la función con los siguientes parámetros:

```
INPUT<<
newton(x_n = 4, tolerancia = 10 ** -4)
OUTPUT>>
La mejor aproximación es x_3 = 4.47213596
```

Notemos que para una tolerancia de 10^{-4} , el *Método de Bisección* obtiene una aproximación de $x_{14} = 4.47213745$ en 14 iteraciones. Por otro lado, el *Método de Newton-Raphson* obtiene una aproximación de $x_3 = 4.47213596$ en 3 iteraciones. Al evaluar estos valores en $f(x)$, es fácil comprobar que se da la siguiente relación de orden:

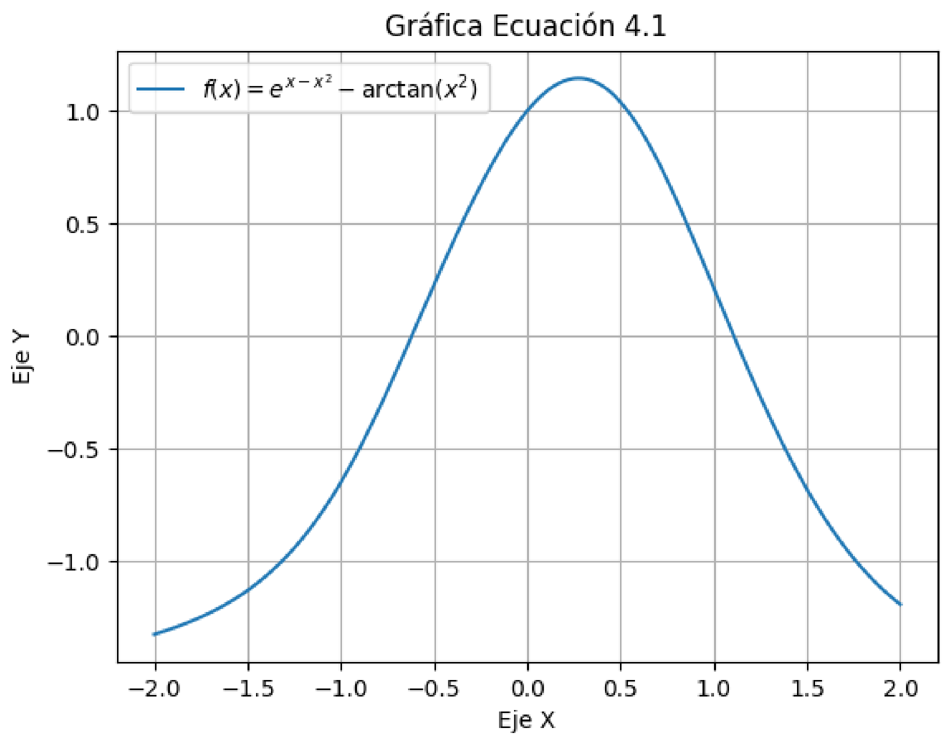
$$0 < f(x_3) < f(x_{14})$$

PROBLEMA 4

Compare los resultados obtenidos por los métodos de *Bisección* y *Newton-Raphson* en la solución de la ecuación $e^{x-x^2} - \arctan(x^2) = 0$.

SOLUCIÓN:

Con el propósito de explorar los posibles candidatos a intervalos para la busqueda de soluciones de la ecuación planteada, realizaremos un análisis gráfico.



En la gráfica se pueden apreciar al menos dos intervalos en los que la función tiene solución, a saber, $[-1, -0.5]$ y $[1, 1.5]$. Por lo tanto, en el caso del *Método de Bisección*, ejecutaremos la función computacional **biseccion()** sobre tales intervalos considerando una tolerancia de 10^{-8}.

```
INPUT<<

biseccion(x_inf = -1, x_sup = -0.5, tolerancia = 10 ** -8)

biseccion(x_inf = 1, x_sup = 1.5, tolerancia = 10 ** -8)
```

```
OUTPUT>>
La mejor aproximación es x_25 = -0.61962024
La mejor aproximación es x_22 = 1.10798746
```

Notemos que las aproximaciones encontradas son coherentes con la vecindades estimadas a partir de la gráfica.

A partir del Método de Newton Raphson, sabemos que es posible aproximar soluciones para ecuaciones algebraicas dadas por la siguiente expresión recursiva:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

donde x_n es una primera aproximación de la raíz de $f(x) = 0$. Dicha aproximación inicial se encuentra de manera exploratoria, seleccionando valores para $\hat{x}$ tales que $f(\hat{x}) \approx 0$.

Para nuestro caso de estudio ya contamos con dos valores $\hat{x}$, estos son, $f(-0.5) \approx 0$ y $f(1) \approx 0$. Recordemos que gracias al *Teorema del Valor Intermedio* sabemos que existen $r_1 \in [-1, -0.5]$ y $r_2 \in [1, 1.5]$, tales que $f(r_1) = 0$ y $f(r_2) = 0$.

Tenemos nuestras aproximaciones iniciales x_n, solo nos resta determinar $f'(x)$. Por la *Regla de la Cadena* se tiene que:

$$f'(x) = e^{x-x^2}(1-2x) - \frac{2x}{x^4+1}$$

Hemos determinado los elementos necesarios para la aplicación del método. Con el propósito de poder establecer una comparación objetiva entre los resultados obtenidos por el *Método de la Bisección* y el *Método de Newton-Raphson*, ejecutaremos el algoritmo del segundo bajo las mismas condiciones de tolerancia, es decir, 10^{-8}. Llamamos a la función en dos instancias con los siguientes parámetros:

```
INPUT<<
newton(x_n = -0.5, tolerancia = 10 ** -8)
newton(x_n = 1, tolerancia = 10 ** -8)
OUTPUT>>
La mejor aproximación es x_3 = -0.61962024
La mejor aproximación es x_3 = 1.10798746
```

A partir de los resultados obtenidos por ambos métodos, es obsolutamente claro que, para los mismos niveles de tolerancia, al buscar la aproximación negativa , el *Método de la Bisección* realizó 25 iteraciones, mientras que el *Método de Newton-Raphson* realizó 3 iteraciones. Por otro lado, para la aproximación positiva, el *Método de la Bisección* realizó 22 iteraciones, mientras que el *Método de Newton-Raphson* nuevamente solo realizó 3 iteraciones. En conclusión, podemos señalar que el *Método de Newton-Raphson* es más "rápido", en el sentido que se subentiende, que el *Método de la Bisección*.

Insistimos en que la afirmación anterior solo se refiere al número de iteraciones, dado que es posible que en términos de recursos computacionales y tiempo empleado en los cálculos, los rendimientos de ambos métodos no mantengan la misma relación de eficiencia.

PROBLEMA 5

Considere el siguiente Problema de Valores Iniciales (P.V.I),

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + ay & = f(x) \\ y(0) & = A \end{cases}$$

Asumiendo que se aproxima la derivada $\dfrac{dy}{dx} \approx \dfrac{y(x+h) - y(x)}{h}$ *Método de Euler*, resuelva numéricamente los siguientes casos.

En cada caso compare el error absoluto entre la solución numérica y la solución exacta del P.V.I en el instante de tiempo $t = Nh$. Para cada caso grafique las soluciones numéricas y exactas en el interalo $[0, Nh]$. Analice los resultados.

SOLUCIÓN:

Todos los subproblemas de este item se resuelven con la implementación del *Método de Euler*, la cual puede encontrarse en el Notebook asociado, que se ejecuta llamando a la siguiente función:

```
euler(x, y, h, N)
PARÁMETROS
x = Valor inicial de x
y = Valor inicial de y
h = Variación de x
N = Número máximo de iteraciones
```

El programa imprime el último valor que toma x, el valor de $y(x)$, y el error absoluto en el tiempo $t = Nh$.

(a) $a = 5,\ A = 5,\ h = 0.01,\ N = 314$ y $f(x) = 0$.

Consideremos el siguiente Problema de Valores Iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 5y & = 0 \\ y(0) & = 5 \end{cases}$$

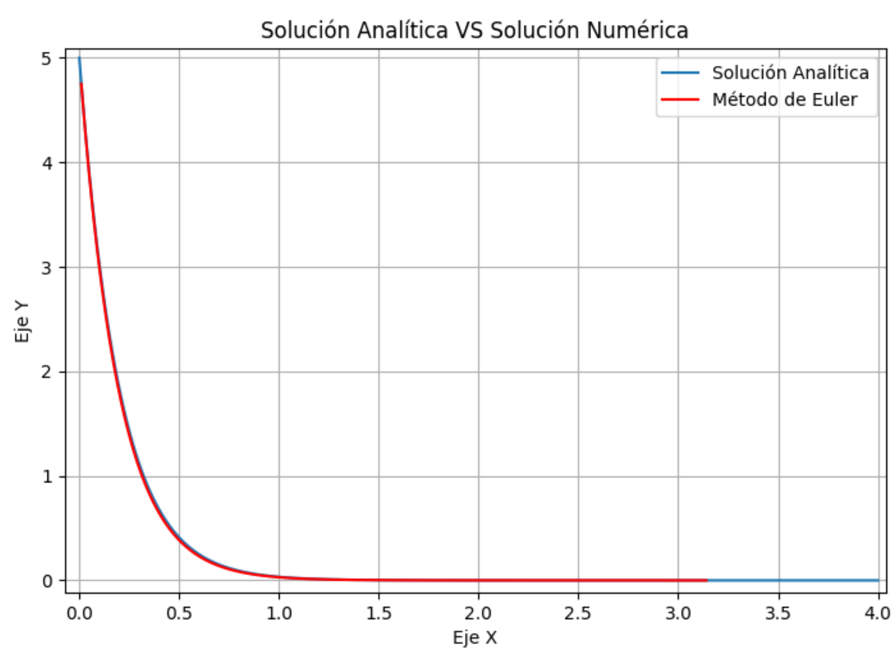
Es fácil demostrar que su solución analítica es:

$$y(x) = 5e^{-5x}$$

Ejecutando el programa para los parámetros del P.V.I. indicado se obtiene lo siguiente:

```
INPUT<<
euler(x = 0, y = 5, h = 0.01, N = 314)
OUTPUT>>
x = 3.14, y(x) = 5.060367583905954e-07
Error Absoluto en t=Nh: 2.534962253939735e-07.
```

En el siguiente gráfico podemos comparar los resultados del método numérico versus la solución analítica del P.V.I.:

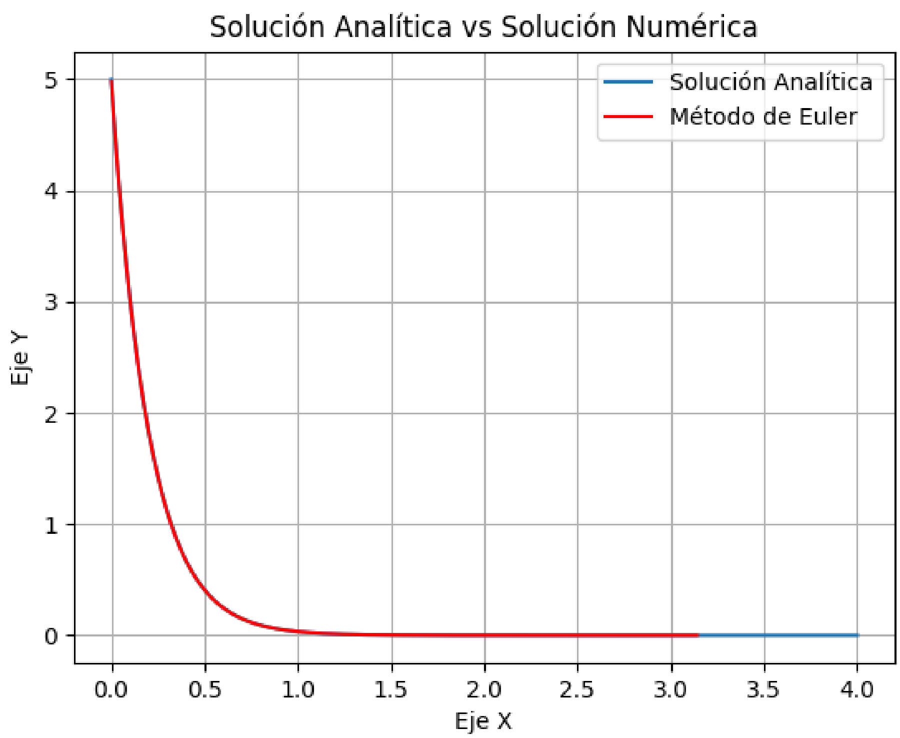


(b) $a = 5$, $A = 5$, $h = 0.001$, $N = 3140$ y $f(x) = 0$.

Para este enunciado nos basamos en el mismo P.V.I. que el anterior y solo se modifican los parámetros h y N. Ejecutamos la función para los nuevos parámetros y se observa lo siguiente:

```
INPUT<<
euler(x = 0, y = 5, h = 0.001, N = 3140)
OUTPUT>>
x = 3.14, y(x) = 7.302028873844056e-07
Error Absoluto en t=Nh: 2.9330096400967493e-08.
```

En el siguiente gráfico podemos comparar los resultados del método numérico versus la solución analítica del P.V.I.:



Si comparamos los resultados obtenidos a partir de las ejecuciones anteriores en (a) y (b), se observa que para $h = 0.01$ y $N = 314$ el error relativo de la solución aproximada es del 33.37%. Por otro lado, para $h = 0.001$ y $N = 3140$ el error relativo es de 3.86%, lo que es significativamente más cercano a lo solución analítica de la P.V.I.. Lamentablemente, la resolución de los gráficos no permite dar cuenta de la mejora en dicha aproximación.

(c) $a = 5$, $A = 5$, $h = 0.01$, $N = 314$ y $f(x) = \sin(x)$.

Consideremos el siguiente Problema de Valores Iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 5y & = \sin(x) \\ y(0) & = 5 \end{cases}$$

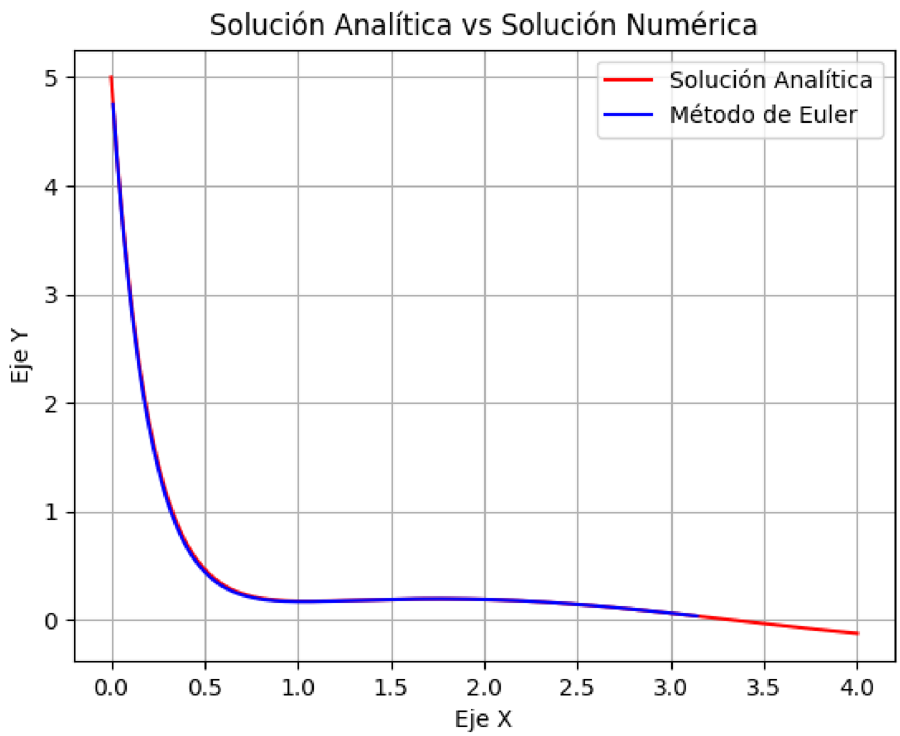
Es fácil demostrar que su solución analítica es:

$$y(x) = \frac{131}{26}e^{-5x} - \frac{1}{26}\cos(x) + \frac{5}{26}\sin(x)$$

Ejecutando el programa para los parámetros del P.V.I. indicado se obtiene lo siguiente:

```
INPUT<<
euler(x = 0, y = 5, h = 0.01, N = 314)
OUTPUT>>
x = 3.14, y(x) = 0.03884203880168166
Error Absoluto = 7.3504337286881e-05.
```

En el siguiente gráfico podemos comparar los resultados del método numérico versus la solución analítica del P.V.I.:

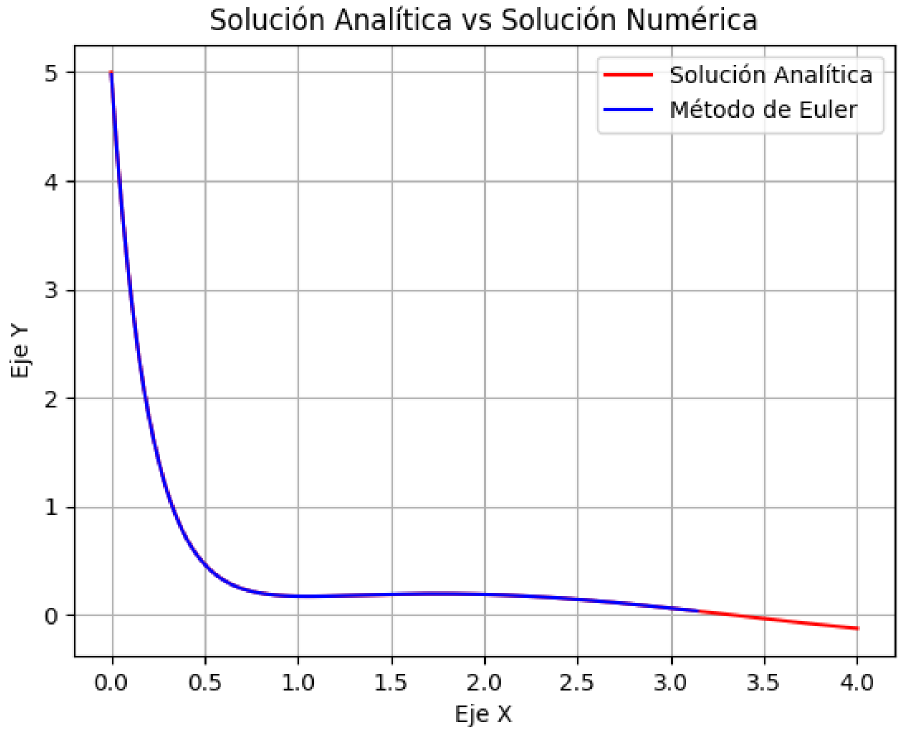


(d) $a = 5$, $A = 5$, $h = 0.001$, $N = 3140$ y $f(x) = \sin(x)$.

Para este enunciado nos basamos en el mismo P.V.I. que el anterior y solo se modifican los parámetros h y N. Ejecutamos la función para los nuevos parámetros y se observa lo siguiente:

```
INPUT<<
euler(x = 0, y = 5, h = 0.001, N = 3140)
OUTPUT>>
x = 3.14, y(x) = 0.03877592476237462
Error Absoluto = 7.390297939113832e-06.
```

En el siguiente gráfico podemos comparar los resultados del método numérico versus la solución analítica del P.V.I.:



Si comparamos los resultados obtenidos a partir de las ejecuciones anteriores en (c) y (d), se observa que para $h = 0.01$ y $N = 314$ el error relativo de la solución aproximada es del 0.189%. Por otro lado, para $h = 0.001$ y $N = 3140$ el error relativo es de 0.019%, lo que es significativamente más cercano a lo solución analítica de la P.V.I., no obstante, ambas aproximaciones quedan por debajo del 1% de error relativo. Lamentablemente, la resolución de los gráficos no permite dar cuenta de la mejora en dicha aproximación.

(e) $a = 5$, $A = 5$, $h = 0.01$, $N = 314$ y $f(x) = e^x \sin(x)$.

Consideremos el siguiente Problema de Valores Iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 5y & = e^x \sin(x) \\ y(0) & = 5 \end{cases}$$

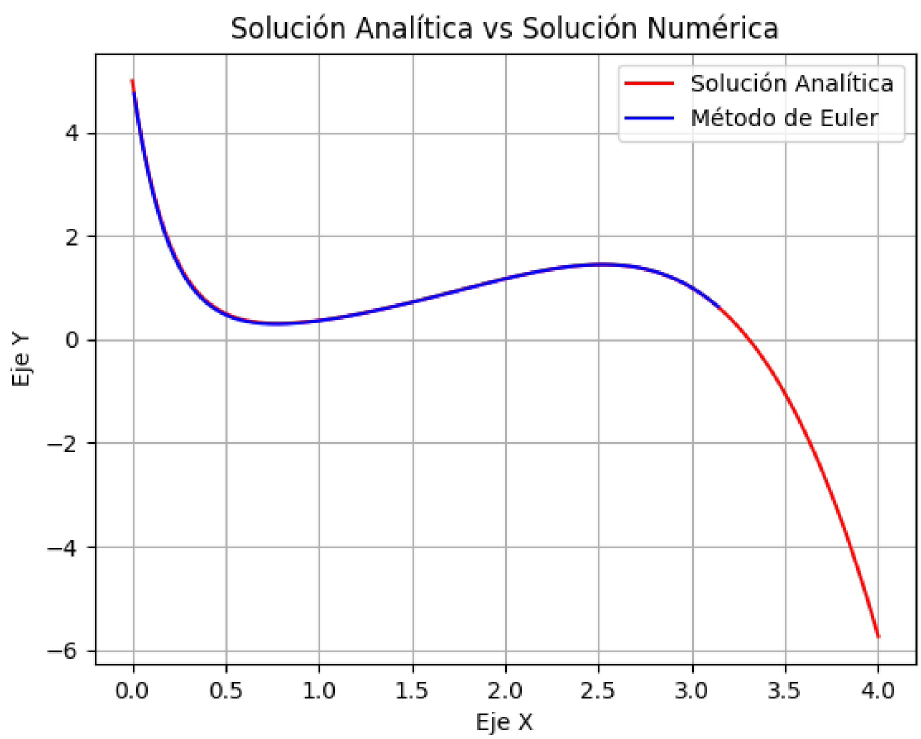
Es fácil demostrar que su solución analítica es:

$$y(x) = \frac{186}{37}e^{-5x} + \frac{6}{37}e^{x}\sin(x) - \frac{1}{37}e^{x}\cos(x)$$

Ejecutando el programa para los parámetros del P.V.I. indicado se obtiene lo siguiente:

```
INPUT<<
euler(x = 0, y = 5, h = 0.01, N = 314)
OUTPUT>>
x = 3.14, y(x) = 0.6363206814098415
Error Absoluto en t=Nh: 0.8534040912525024.
```

En el siguiente gráfico podemos comparar los resultados del método numérico versus la solución analítica del P.V.I.:

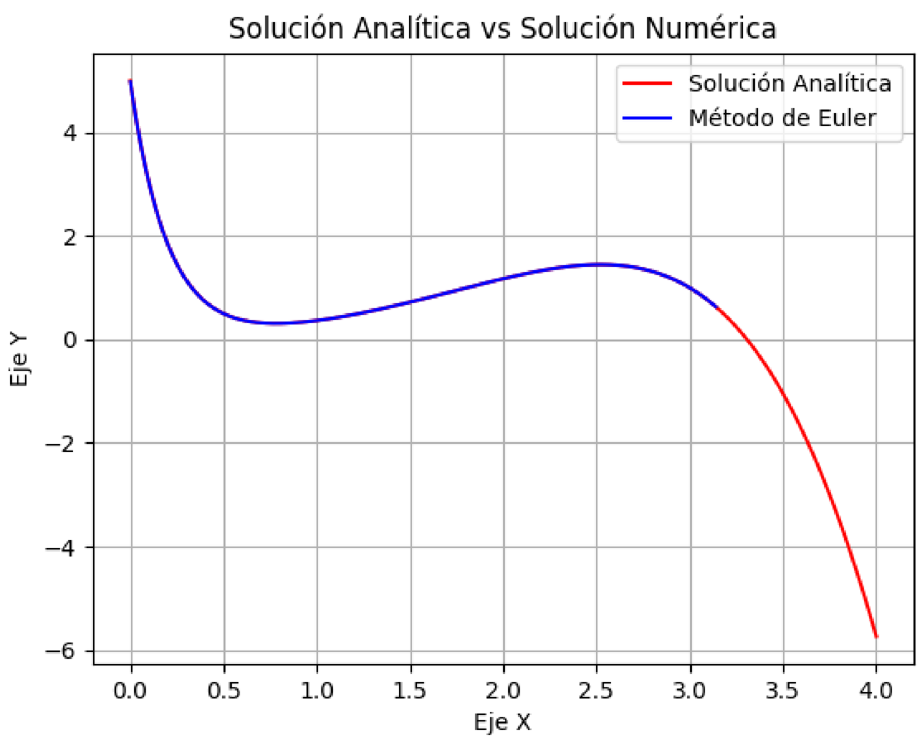


(f) $a = 5$, $A = 5$, $h = 0.001$, $N = 3140$ y $f(x) = e^x \sin(x)$.

Para este enunciado, nos basamos en el mismo P.V.I. que el anterior y solo se modifican los parámetros h y N. Ejecutamos la función para los nuevos parámetros y se observa lo siguiente:

```
INPUT<<
euler(x = 0, y = 5, h = 0.001, N = 3140)
OUTPUT>>
x = 3.14, y(x) = 0.6309863349877372
Error Absoluto en t=Nh: 0.0005905388529753308.
```

En el siguiente gráfico podemos comparar los resultados del método numérico versus la solución analítica del P.V.I.,



Si comparamos los resultados obtenidos a partir de las ejecuciones anteriores en (e) y (f), se observa que para $h = 0.01$ y $N = 314$ el error relativo de la solución aproximada es del 0.939%. Por otro lado, para $h = 0.001$ y $N = 3140$ el error relativo es de 0.093%, lo que es significativamente más cercano a lo solución analítica de la P.V.I., aunque ambas se mantienen bajo el 1% de error relativo. Lamentablemente, la resolución de los gráficos no permite dar cuenta de la mejora en dicha aproximación.