数学软件作业 2-王锦宸

数学与应用数学 2002 王锦宸

July 2023

12.2 不可压缩的纳维-斯托克斯方程

不可压缩流体的二维流场完全由速度矢量 $q = (u(x,y), v(x,y)) \in \mathbb{R}^2$ 和压力 $p(x,y) \in \mathbb{R}$ 描述。这些函数是下列守恒定律的解（例如，见 Hirsch, 1988）：

- 质量守恒：

$$\mathrm{div}(q) = 0 \tag{1}$$

或者，用发散[1]算子的明确形式来写、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

- 动量守恒方程的闭形式[2]

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathrm{div}(q \otimes q) = -\mathcal{G}p + \frac{1}{Re}\Delta q \tag{3}$$

或，使用外显形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \end{array} \right. \tag{4}$$

前面的方程以无量纲形式写出，使用以下比例的变量：

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{L}, \quad u = \frac{u^*}{V_0}, \quad v = \frac{v^*}{V_0}, \quad t = \frac{t^*}{L/V_0}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_0 V_0^2}, \tag{5}$$

其中上标（*）表示以物理单位测量的变量。常数 L, V_0 分别是模拟流动的特征的参考长度和速度。无量纲数 Re 被称为雷诺数，用于量化流动中惯性（或对流）项和粘性（或扩散）[3] 项的相对重要性：

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu} \tag{6}$$

---

[1]我们回顾一下二维场的微分算子发散、梯度和拉普拉斯的定义：如果 $v = (v_x, v_y) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ and $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, 那么

$$\mathrm{div}(v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \mathcal{G}\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right), \quad \Delta\varphi = \mathrm{div}(\mathcal{G}\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$

. 且 $\Delta v = (\Delta v_x, \Delta v_y)$.

[2]我们用 $\otimes$ 表示张量乘积.

其中 ν 是流动的运动黏度。综上所述，本项目中要数值求解的 Navier-Stokes PDEs 系统由2和 4定义；初始条件 (在 $t=0$ 时) 和边界条件将在以下章节中讨论。

12.4 计算域、交错网格和边界条件

通过考虑一个矩形域 $L_x \times L_y$(见图 1)，并在各处设置周期性边界条件，可以大大简化纳维-斯托克斯方程的数值求解。速度 $q(x,y)$ 和压力 $p(x,y)$ 场的周期性在数学上表示为

$$\begin{aligned} q(0,y) = q\left(L_x, y\right), \quad p(0,y) = p\left(L_x, y\right), \quad \forall y \in [0, L_y] \\ q(x,0) = q\left(x, L_y\right), \quad p(x,0) = p\left(x, L_y\right), \quad \forall x \in [0, L_x] \end{aligned} \tag{7}$$

计算解决方案的点是按照一个矩形的、统一的 2D 的网格分布在域中。由于在我们的方法中不是所有的变量都在同一个网格中，我们首先定义一个主网格（图 12.1），分别沿 x 取 n_x 计算点和沿 y 取 n_y 点来生成：

$$\begin{aligned} x_c(i) = (i-1)\delta x, \quad \delta x = \frac{L_x}{n_x - 1}, \quad i = 1, \ldots, n_x, \\ y_c(j) = (j-1)\delta y, \quad \delta y = \frac{L_i}{n_y - 1}, \quad j = 1, \ldots, n_y \end{aligned} \tag{8}$$

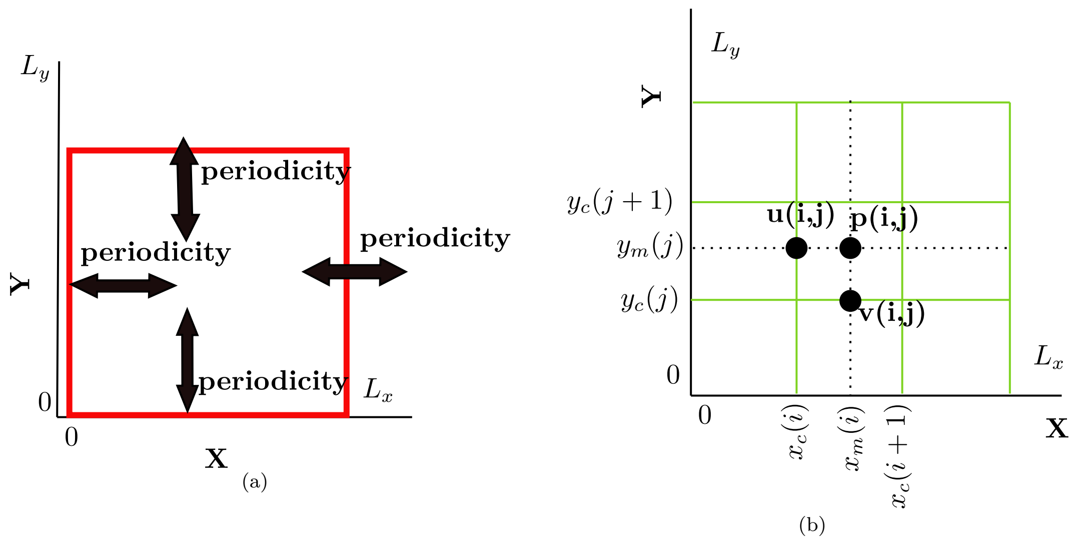

图 1: 计算域、交错网格和边界条件

二级网格是由一级网格单元的中心定义的：

$$\begin{aligned} x_m(i) = (i-1/2)\delta x, \quad i = 1, \ldots, n_{xm}, \\ y_m(j) = (j-1/2)\delta y, \quad j = 1, \ldots, n_{gm}, \end{aligned} \tag{9}$$

其中我们使用了 $n_{xm} = n_x - 1, n_{ym} = n_y - 1$ 的简记符号。在定义为矩形 $[x_c(i), x_c(i+1)] \times [y_c(j), y_c(j+1)]$ 的计算单元内，未知变量 u, v, p 将被计算为不同空间位置的解决方案的近似值：

- $u(\dot{x}, j) \approx u\left(x_c(i), y_m(j)\right)$ (计算单元的西面)
- $v(i,j) \approx v\left(x_m(i), y_c(j)\right)$ （计算单元的南面）

- $p(i, j) \approx p\left(x_m(i), \psi_m(j)\right)$ (计算单元的中心)

这种变量的交错排列具有压力和速度之间强烈耦合的优点。它还有助于（见本章末尾的参考文献 [1]）避免同位排列（所有变量都在同一网格点上计算）所遇到的一些稳定性和收敛性问题。

参考文献

[1] Ionut Danaila. *An Introduction to Scientific Computing : Twelve Computational Projects Solved with MATLAB* . Springer, 2006.