# Examen analyse numérique 4GI, juin 2019 durée 3H

## Exercice 1

On considère l'équation suivante :
-laplacien(u)+u=f sur $\Omega=[0,1]*[0,1]$ (1)
U(0)=alpha, U(1)=beta.
f continue et dérivable sur $\Omega$, u de classe C4 sur $\Omega$.

Pour résoudre ce problème, on envisage d'utiliser la méthode des volumes finis, sur un maillage rectangulaire pas forceément uniforme.

a) Définir un maillage admissible au sens des volumes finis 1pt
b) C'est quoi la stabilité pour un schéma numérique ? 1pt
c) Ecrire la formulation volumes finis discrète de l'équation (1) sur le maillage proposé 4pts
d) Proposer une numérotation des inconnues discrètes 1pt
e) Sans écrire la matrice du système, montrer que cette dernière est inversible 1pt
f) Ecrire la matrice du système discret pour un maillage 3*3 2pt
g) Proposer 3 données de tests qui serviront à valider le programme réalisé pour résoudre l'équation initiale par la méthode des volumes finis.1,5pt
h) Proposer un format adapté au stockage de la matrice 1pt
i) Partant du principe que vous aurez à travailler au minimum sur des maillages 10000*10000, quelles sont les principales préoccupations qui doivent être gérées si on utilise une méthode directe de résolution ? 1,5pt

## Exercice 2

On considère l'équation suivante :
-2u''+4u=f sur $\Omega=[0,1]$ (1)
U(0)=alpha, U(1)=beta.
f continue et dérivable sur $\Omega$, u de classe $C^4$ sur $\Omega$.

Pour résoudre ce problème, on envisage d'utiliser la méthode des différences finies, sur un maillage uniforme, en faisant l'approximation de dérivée première en $O(h^2)$.

a) Définir un maillage admissible au sens des différences finies 1
b) Ecrire le système discret correspondant à l'équation (1) 2pts
c) Montrer que la matrice obtenue est inversible pour h faible 1
d) Montrer que l'erreur de consistance du schéma tend vers 0, et donner une estimation de cette erreur en fonction du pas maximal h du maillage. 1.5
e) Dans le cas d'un maillage à 3 mailles, écrire le système discret obtenu 1

Cc 4gi · 60 min

**Ex1 :**

problème : on souhaite résoudre sur l'intervalle I= ]0,1[*]0,1[ l'équation –div(Kgradu)=f et u=ub sur la frontière de I, où f est dérivable jusqu'à l'ordre 4 sur I, K la matrice identité.

1) Définir un maillage admissible au sens des différences finis
2) Réaliser la discrétisation de cette équation avec les différences finies sur un maillage rectangulaire.
3) Ecrire sous forme matricielle le système linéaire correspondant
4) Prouver que la matrice du système est inversible.

**Exercice 2 :**

On désire écrire une fonction qui calcule les racines du polynôme $ax^2+bx+c=0$

1) Définir la notion de classe d'équivalence de test
2) Définir la notion de limite
3) Proposer au moins 4 données de tests pour le problème.

Cc 4gi 60 mn 2020/03/11

1) On souhaite écrire le programme qui calcule ln(x) pour un réel x donné.
   a. Compléter cet énoncé pour que ledit programme soit « testable »
   b. Produire 4 données de test pour ce programme, réalisant au mieux une partition
2) Soit l'équation $-u''=f$, avec $u[0]=a$ et $u[1]=b$, a et b deux réels donnés, f une fonction donnée.
   a. Proposer 3 données de test pour un programme devant résoudre numériquement cette équation
3) Produire des données de tests
4) Décrire les grands principes permettant d'écrire un programme de test d'une classe ou de fonctions alors que les implémentations n'existent pas, et de manière à ce que le programme ne soit pas modifié pour toute nouvelle implémentation.
5) Produire 4 données de tests pour un programme qui calcule racinecubique(x), x étant un réel donné

Cc 4gi : 60 mn

Ex1 : on souhaite résoudre sur l'intervalle $I= ]0,1[$ l'équation $-(u+2x^2)''+u'=f$, où $f$ est dérivable jusqu'à l'ordre 4 sur $I$.

a) Définir un maillage admissible au sens des volumes finis, avec un maillage pas forcément uniforme.

b) Réaliser la discrétisation de cette équation avec les volumes finis, et écrire le système discret associé

c) Proposer un format matriciel adapté au stockage de la matrice obtenue

d) Démontrer que la matrice est inversible

e) Ecrire complètement la matrice pour un maillage à trois mailles