UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Jona Koltaj

ELIMINACIJA REZOV V LINEARNI LOGIKI

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Andrej Bauer

Ljubljana, 2025

Kazalo

Eliminacija rezov v linearni logiki

Povzetek

Vpeljemo sekventni račun, njegova strukturna pravila ter logični pravili za veznik $\wedge$, nato pa se omejimo na linearno logiko ter veznik $\wedge$ razdelimo na dva. Vpeljemo še vse ostale veznike v linearni logiki ter razložimo njihov pomen, nato vpeljemo pravilo reza. Formuliramo izrek o eliminaciji reza, nato vsakemu rezu pripišemo mero, imenovano stopnja, in izrek dokažemo z dvojno indukcijo, zunanjo na številu rezov v drevesu izpeljave, notranjo na stopnji reza. Znotraj indukcije ločimo primere glede vrsto reza in rezani veznik. Definiramo glavni rez in mu znižamo stopnjo za vsak veznik posebej, pri eksponentih pa definiramo še posplošeni rez in mu nato znižamo stopnjo. Rezu (in posplošenemu rezu) znižamo stopnjo tudi, ko ni glaven, nato pa se lotimo še baze indukcije, s čimer zaključimo dokaz izreka.

Cut elimination in linear logic

Abstract

We introduce sequent calculus, its structural rules and the logical rules for the logical connective $\wedge$. We then limit the sequent calculus to linear logic nad split $\wedge$ into two connectives. We further introduce all other connectives in linear logic and explain their interpretations, then we introduce the cut rule. We formulate the cut elimination theorem then ascribe a numeric value, called degree, to each cut and prove the theorem using double induction, the outer induction on the number of cuts in the proof tree, the inner induction on the degree of the cut. Within the induction we split cases based on the type of cut and the formula being cut. We define the principal cut and lower its degree it for each connective seperately. We define the generalised cut rule for the exponentials and lower its degree. We lower the degree of the non-principal cut rule (and the non-principal generalised cut rule) and then proceed to the induction base, with which we finish the proof.

Math. Subj. Class. (2020): 03B47,03F05

Ključne besede: sekventni račun, linearna logika, eliminacija rezov

Keywords: sequent calculus, linear logic, cut elimination

1 Uvod

Ko preučujemo trditve in izreke, nas velikokrat bolj od izrekov samih zanimajo njihovi dokazi, saj ti držijo bistvo izreka. Ker bi torej želeli bolje preučiti strukturo teh dokazov, bi pomagalo, če bi lahko kako formalizirali to dokazovanje. Tu nastopijo formalni sistemi dokazovanja, ki – kot pove že ime – formalizirajo dokaze. Takih sistemov je mnogo, najbolj poznani izmed njih pa se delijo na tako imenovani Hilbertov stil dokazovanja in Gentzenov stil dokazovanja. Prvi sistem dokazovanja je bil predstavljen v letu 1879 s strani Gottloba Frege [3], nemškega filozofa in matematika. Spada pod Hilbertov stil dokazovanja, saj je v drugem desetletju dvajsetega stoletja podoben sistem opisal David Hilbert [3] in o formalizaciji matematike odprl več pomembnih vprašanj. Tak sistem je karakteriziran s tem, da je vsak korak dokaza ali aksiom, ali pa je dobljen iz aksioma z enim izmed dveh pravil sklepanja Sistem tudi uporablja le dva veznika, namreč negacijo in implikacijo. V Gentzenovem stilu sta najbolj znana sekventni račun in naravna dedukcija, ki ju je prvi opisal nemški matematik Gerhard Gentzen, v članku iz leta 1934 [3] Oba sistema vključujeta več veznikov in tudi več pravil sklepanja kot sistemi v Hilbertovem stilu. Sekventni račun temelji na levih in desnih pravilih, naravna dedukcija pa ima pravila vpeljave ter pravila eliminacije. Načeloma sta sekventni račun in naravna dedukcija bolj „pregledna” in se v določeni meri lepše prilagodita sklepanju, ki smo ga vajeni iz drugih vej matematike. A preglednost niti ni bila cilj Hilbertovih sistemov, saj so bile motivacije za uvedbo obeh vrst dokazovalnih sistemov pač različne. V tem delu bomo preučevali sekventni račun, ki ga bomo bolj natančno vpeljali v poglavju 2.

V članku, kjer sta bila sekventni račun in naravna dedukcija vpeljana, je poleg tega Gentzen dokazal enega izmed pomembnejših izrekov, ki se tiče sistemov dokazovanja, namreč izrek o eliminaciji rezov. Ta sistemu dokazovanja na formalen način zagotavlja konsistentnost. V poglavju 4 bomo tudi mi ta izrek formulirali ter dokazali, le da bomo to naredili za različico sekventnega računa, imenovano linearna logika. Slednjo je prvič v članku iz leta 1987 opisal Jean-Yves Girard [1], francoski matematik, ki je ugotovil, da z omejitvijo določenih strukturnih pravil v formalnem sistemu dokazovanja lahko bolj natančno preučujemo, *koliko* predpostavk smo porabili v dokazu. Linearno logiko je možno obravnavati tako v naravni dedukciji kot sekventnem računu, a se bomo v tem delu omejili na sekventni račun.

Glavna motivacija za linearno logiko je zavedanje, koliko „surovin” smo porabili in pridelali, torej kolikokrat smo tekom dokaza predpostavko uporabili, katere predpostavke smo zavrgli ter katere sklepe smo dokazali večkrat. Omejitev podvajanja in odvečnih predpostavk pomembno vpliva tudi na veznike, ki jih uporabljamo. Več o tem bomo povedali v poglavju 3.

2 Sekventni račun

Sekventni račun je formalni sistem dokazovanja, ki sestoji iz t. i. sekventov in vnaprej določenih pravil, kako jih smemo preoblikovati. Vsak korak dokaza torej uporabi enega izmed teh pravil, dokler začetnega sekventa ali sekventov ne preoblikujemo v tistega, ki smo ga želeli dokazati.

Korake ločimo s horizontalno črto, nad katero so vsi sekventi, ki jih pravilo uporabljeno na tem koraku sprejme, velikokrat pomimenovani *hipoteze*, pod njo pa je novo dobljeni sekvent, navadno imenovan *zaključek*. Označimo hipoteze s $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$, zaključek pa s $\mathcal{Z}$. Korak izpeljave bo torej izgledal takole:

$$\frac{\mathcal{H}_0 \qquad \mathcal{H}_1 \qquad \ldots \qquad \mathcal{H}_n}{\mathcal{Z}}\ \text{Pravilo}$$

Na desni ponavadi označimo, katero pravilo smo uporabili na tem koraku, zavoljo preglednosti.

2.1 Sekvent in formula

Sekvent sestoji iz *logičnih formul*, ki jih je torej potrebno definirati preden lahko definiramo sekvent. Definicija je induktivna, kar pomeni, da se formule gradijo iz podformul, te iz svojih podformul in tako dalje, na dnu pa so t. i. osnovne formule. Te pa so zgrajene iz termov, ki so prav tako induktivno definirani.

Definicija 2.1. *Term* je izraz, ki je lahko oblike:

- spremenljivka,
- konstanta,
- $f(t_1, \ldots, t_n)$, kjer je t_i term za vsak $i \in [n]$ in je f nek funkcijski simbol, ki sprejme $n \in \mathbb{N}$ termov.

Primer 2.2. Na voljo imamo denimo naravna števila, na katerih je definiran funkcijski simbol $+$, ki sprejme dva terma. Možni termi, ki jih lahko tvorimo, so torej lahko npr. spremenljivka x, konstanta 3 ali pa izraz $x + 3$.

Definicija 2.3. *Formula* je izraz oblike:

- *osnovna formula*; $R(t_1, ..., t_n)$, kjer je t_i term za vsak $i \in [n]$ in je R nek *relacijski simbol*, ki sprejme $n \in \mathbb{N}$ termov,
- *sestavljena formula*, ki je – kot pove ime – sestavljena iz ene ali več podformul, med seboj povezanih z veznikom ali kvantifikatorjem.

Primer 2.4. Imamo denimo terma t_1 in t_2 in relacijski simbol $\geq$, ki sprejme dva terma. Tvorimo torej lahko osnovno formulo $t_1 \geq t_2$.

Primer 2.5. Če imamo formuli A in B, so npr. $A \wedge B, \neg A, A \vee B$ ali $\forall x A$, kjer je x neka prosta spremenljivka v A, tudi formule.

Katere sestavljene formule lahko tvorimo je odvisno od tega, s kakšnimi vezniki želimo delati. Če na primer nimamo veznika $\wedge$, $A \wedge B$ ne more biti formula. Specifične veznike, ki jih bomo uporabljali pri linearni logiki, bomo natančneje definirali v poglavju 3.

Definicija 2.6. Naj bodo $A_0, \ldots, A_n$ ter $B_0, \ldots, B_m$ neke logične formule. *Sekvent* je izraz oblike $A_0, \ldots, A_n \Rightarrow B_0, \ldots, B_m$.

Formulam na levi strani sekventa navadno pravimo *predpostavke*, formulam na desni pa *sklepi*, obojemu pa lahko rečemo tudi *kontekst.* Predpostavke navadno označujemo z Γ, sklepe pa z Δ, kjer tako Γ kot Δ predstavljata *multimnožici* logičnih formul.

Definicija 2.7. *Multimnožica* je funkcija $f : A \to \mathbb{N}$, ki vsakemu elementu iz končne množice A priredi naravno število. Drugače povedano je to množica, kjer se elementi lahko ponavljajo.

Multimnožice kontekstov še vedno zapišemo kot sezname, le da vrstni red ni pomemben, število pojavitev pa je. Tako sta na primer sekventa $A, A, B \Rightarrow C$ in $A, B, A \Rightarrow C$ pravzaprav isti sekvent, ki pa je različen od sekventa $A, B \Rightarrow C$. Pomembno je omeniti še, da simbol $\Rightarrow$ v sekventu ne predstavlja običajne implikacije in ga raje beremo kot „dokaže". Vejice na levi strani sekventa se bere kot „in", vejice na desni strani pa kot „ali". Sekvent $A, B \Rightarrow C, D$ bi se torej razumel kot „predpostavki A in B dokažeta sklep C ali sklep D".

2.2 Pravila sekventnega računua

Pravila sekventnega računa delimo na *pravilo aksioma*, *logična pravila*, ki nam povedo kako z različnimi vezniki tvorimo nove formule in pa *strukturna pravila*, ki nam povedo kako ravnati s poljubnimi multimnožicami formul.

2.2.1 Pravilo aksioma

Definicija 2.8. *Aksiom* je vsak sekvent oblike $A \Rightarrow A$, *pravilo aksioma*, krajše Ax, pa pravi:

$$\frac{}{A \Rightarrow A}\,\mathrm{Ax}$$

Aksiom lahko interpretiramo kot „formula dokaže samo sebe", kar pa seveda vedno velja. Zato pravilo aksioma pove, da lahko take vrste sekvent vedno tvorimo t. j. da zanj ne potrebujemo predhodnih sekventov.

2.2.2 Logična pravila

Logična pravila praviloma sestojijo iz *levih pravil* in *desnih pravil.* Prva nam povedo, kako veznik uporabiti med predpostavkami, druga pa kako dani veznik dokazati. Oglejmo si kot primer logični pravili za veznik $\wedge$.

Definicija 2.9. *Levo pravilo za veznik* $\wedge$, krajše $L\wedge$:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\wedge \qquad \text{in} \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\wedge$$

To pomeni, da če znamo nekaj dokazati iz formule A, znamo isto dokazati iz $A \wedge B$ za poljubno formulo B. Ker je veznik $\wedge$ simetričen, je tudi to pravilo simetrično.

Definicija 2.10. *Desno pravilo za veznik* $\wedge$, krajše $R\wedge$:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta}\,\mathrm{R}\wedge$$

To pa pomeni, da če znamo iz nekih predpostavk dobiti formulo A in iz istih predpostavk dobiti formulo B, znamo iz teh predpostavk dobiti tudi formulo $A \wedge B$.

2.2.3 Strukturna pravila

Običajno je sekventni račun opremljen z dvema strukturnima praviloma.

Definicija 2.11. *Ošibitev*, krajše W, nam pove, da lahko tako predpostavke kot sklepe „ošibimo” z dodatno formulo:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{W} \qquad \text{in} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\,\mathrm{W}$$

Levo pravilo pomeni, da smemo med predpostavke dodati odvečne formule, ki jih nikjer ne uporabimo. Ker na desni vejice beremo kot „ali”, je dovolj da dokažemo vsaj enega izmed sklepov, ne pa nujno vse. To pa je ravno bistvo desnega pravila, saj če smo namreč iz Γ že dokazali Δ, znamo seveda dokazati tudi Δ ali A.

Definicija 2.12. *Skrčitev*, krajše C, nam pove, da število ponovitev formule tako med predpostavkami kot sklepi ni pomembno:

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{C} \qquad \text{in} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\,\mathrm{C}$$

Če torej znamo dokazati Δ iz dveh ponovitev formule A, znamo isto dokazati iz le ene kopije. Prav tako nam je vseeno koliko kopij formule imamo na desni, saj je potrebno dokazati le eno izmed njih.

Opomba 2.13. Kot smo omenili, predstavljata Γ in Δ multimnožici formul. Če bili to raje množici, pravila skrčitve ne bi potrebovali, saj bi sledilo že iz same strukture sekventa. Vendar nam bo število predpostavk in sklepov v nadaljnih poglavjih pomembno, zato Γ in Δ ostaneta multimnožici.

Preden preidemo specifično na linearno logiko je potrebno še omeniti, da pri sekventnem računu dokazujemo „od spodaj navzgor”. Začnemo torej s sekventom, ki bi ga želeli dokazati in poiščemo katera pravila, strukturna ali logična, so nam na voljo. Analogija pri dokazovanju v vsakdanji matematiki je, da začnemo s problemom, ki ga želimo dokazati, in ga razčlenimo na manjše podprobleme, dokler ne dobimo nečesa, kar lahko zagotovo dokažemo. Podobno pri sekventnem računu sekvente postopoma prevajamo na aksiome.

Tudi pravila si zato lahko interpretiramo drugače. Pravilo L$\wedge$ iz definicije 2.9 lahko sedaj razumemo kot; če želimo iz $A \wedge B$ dokazati neke sklepe Δ je dovolj da Δ dokažemo že iz ene izmed formul A ter B. Pravilo R$\wedge$ iz definicije 2.10 pa sedaj pravi; če želimo iz predpostavk Γ dokazati $A \wedge B$, je dovolj da iz Γ dokažemo A ter da iz Γ dokažemo B.

Za enostaven primer dokaza v sekventnem računu si oglejmo malodane trivialen dokaz komutativnosti veznika $\wedge$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \Rightarrow B}\,\mathrm{Ax}}{A \wedge B \Rightarrow B}\,\mathrm{L}\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow A}\,\mathrm{Ax}}{A \wedge B \Rightarrow A}\,\mathrm{L}\wedge}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\,\mathrm{R}\wedge$$

V besedah lahko ta dokaz razumemo sledeče. Želimo izpeljati, da $A \wedge B$ dokaže $B \wedge A$. Dovolj je, da pokažemo, da $A \wedge B$ dokaže A ter da $A \wedge B$ dokaže B, po desnem pravilu za $\wedge$. Na levi je potem dovolj pokazati, da že B dokaže B, po levem pravilu za $\wedge$, kar pa je ravno aksiom, torej velja. Na desni se zgodi podobno.

Od tu dalje bomo vsa pravila in dokaze brali od spodaj navzgor.

3 Linearna logika

Linearna logika je različica logike sekventnega računa, kjer zavržemo pravili ošibitve in skrčitve iz definicij 2.11 in 2.12. To pomeni, da moramo vsako predpostavko uporabiti in vsak sklep dokazati natanko enkrat.

To dejstvo znatno vpliva tudi na same veznike. Za primer si oglejmo še eno možno definicijo veznika $\wedge$, poleg 2.9 ter 2.10 , označimo ga v tem primeru z $\wedge'$.

Definicija 3.1. *Levo pravilo za veznik* $\wedge'$, krajše L$\wedge'$, enostavno prevede vejico na levi v konjunkcijo:

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge' B \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{L}\wedge'$$

Definicija 3.2. *Desno pravilo za veznik* $\wedge'$, krajše R$\wedge'$:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \wedge' B, \Delta, \Delta'}\ \mathrm{R}\wedge'$$

To pravilo pove, da če želimo $A \wedge' B$ dokazati, lahko predpostavke ločimo na dva dela ter z enim delom dokažemo A, z drugim pa B. Obratno gledano, če znamo iz Γ dokazati A ter iz Γ' dokazati B, lahko predpostavke združimo in dokažemo $A \wedge' B$.

Lema 3.3. *Če dopustimo uporabo ošibitve in skrčitve, sta levi in desni pravili za* $\wedge$ *ter* $\wedge'$ *medsebojno izpeljivi.*

Dokaz. Začnimo z dokazom medsebojne izpeljivosti levih pravil za veznika $\wedge$ iz definicije 2.9 ter $\wedge'$ iz definicije 3.1. To pomeni, da lahko s pomočjo L$\wedge$ dokažemo L$\wedge'$ in obratno:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B, B \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{L}\wedge}{\Gamma, A \wedge B, A \wedge B \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{L}\wedge}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{C}$$

Najprej torej predpostavko $A \wedge B$ „podvojimo”, s pomočjo skrčitve, nato pa dvakrat uporabimo L$\wedge$, vsakič ne eni izmed podvojenih predpostavk. Obratna izpeljava pa poteka tako, da najprej uporabimo L$\wedge'$, nato pa odvečno izmed predpostavk odstranimo s pomočjo ošibitve:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{W}}{\Gamma, A \wedge' B \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{L}\wedge'$$

Podobno dokažemo medsebojno izpeljivost R$\wedge$ iz definicije 2.10 ter R$\wedge'$ iz definicije 3.2:

$$\cfrac{\mathrm{W}\times|\Gamma' \cup \Delta'|\ \cfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta, \Delta'} \qquad \cfrac{\Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow B, \Delta, \Delta'}\ \mathrm{W}\times|\Gamma \cup \Delta|}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \wedge B, \Delta, \Delta'}\ \mathrm{R}\wedge$$

Najprej torej uporabimo R$\wedge$, kar pomeni da predpostavk (in sklepov) ne razdelimo, zato se s pomočjo ošibitve na levi „znebimo" predpostavk Γ' in sklepov Δ'. To naredimo tako, da ošibitev iteriramo tolikokrat, kolikor je velikost multimnožice $\Gamma' \cup \Delta'$. Enako naredimo z odvečnimi Γ ter Δ na desni. Ko pa iz R$\wedge'$ izpeljujemo R$\wedge$, najprej „podvojimo" vse predpostavke v Γ in vse sklepe v Δ, nato pa uporabimo R$\wedge'$ in podvojena konteksta spet razpolovimo:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma, \Gamma \Rightarrow A \wedge' B, \Delta, \Delta}\,\mathrm{R}\wedge'}{\Gamma \Rightarrow A \wedge' B, \Delta}\,\mathrm{C}\times|\Gamma \cup \Delta|$$

□

Kot smo v zgornjem dokazu lahko videli, se za dokaz medsebojne izpeljivost $\wedge$ ter $\wedge'$ na bistven način uporabi tako skrčitev kot ošibitev. Brez teh dveh pravil veznika pravzaprav nista medsebojno izpeljiva, zato se ju v linearni logiki obravnava kot ločena veznika.

3.1 Izjavni vezniki

Definicija 3.4. Veznik $\wedge$ se še vedno glasi *in*, zapišemo pa ga s simbolom $\sqcap$. Zapišimo še enkrat njegovo levo in desno pravilo, tokrat s pravilnimi simboli:

$$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \sqcap B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\sqcap \qquad \dfrac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \sqcap B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\sqcap \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \sqcap B, \Delta}\,\mathrm{R}\sqcap$$

Definicija 3.5. Veznik $\wedge'$ pa preimenujemo v *tenzor* ter ga zapišemo s simbolom $\star$:

$$\dfrac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \star B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\star \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \star B, \Delta, \Delta'}\,\mathrm{R}\star$$

Zakaj te dva veznika v kontekstu linearne logike nista enaka, je razvidno že če primerjamo njuni levi in desni pravili. Pomembno nam je namreč, koliko „informacij" vsebujejo z vezniki zgrajene formule, saj nam je pomembno koliko predpostavk smo za njih porabili in pa koliko sklepov lahko z njimi dokažemo. Veznik $\sqcap$ med predpostavkami na nek način vsebuje le eno izmed predpostavk, ki ju združuje, medtem ko veznik $\star$ vsebuje obe. Ko torej uporabimo $A \sqcap B$¸ da dokažemo neki Δ, uporabimo le A ali B, medtem ko pri $A \star B$ uporabimo tako A kot B. Če pa želimo dokazati, da velja $A \sqcap B$, pa je dovolj, da iz istih predpostavk dokažemo tako A kot B, kar spet namiguje, da $A \sqcap B$ vsebuje enako število informacij kot le A ali B. Če pa dokazujemo $A \star B$, pa moramo posebej dokazati A, nato pa iz ločenega sklopa predpostavk dokazati B, kar pomeni da vsebuje $\star$ informacij tako za A kot B.

Oglejmo si sedaj še preostale veznike, začenši z veznikom $\vee$. V linearni logiki se ta spet razdeli na dvoje, intuicija za to pa je simetična intuiciji za veznik $\wedge$, zato jo prepustimo bralcu.

Definicija 3.6. Veznik *ali* $\sqcup$, ima sledeče levo in desno pravilo:

$$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \sqcup B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\sqcup \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \sqcup B, \Delta}\,\mathrm{R}\sqcup \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \sqcup B, \Delta}\,\mathrm{R}\sqcup$$

Kot vidimo sta obe pravili popolnoma simetrični praviloma za veznik $\sqcap$.

Definicija 3.7. Veznik *plus* $+$ pa je analogno simetričen vezniku $\star$:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A + B \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{ L+} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A + B, \Delta} \text{ R+}$$

Vsi nadaljni vezniki imajo v linearni logiki enaka pravila kot v navadnem sekventnem računu in se ne delijo na dva dela, še vseeno pa so to *linearni* vezniki, že samo zaradi pogojev pod katerimi so vpeljani. Če na primer A linearno implicira B to pomeni, da natanko en A implicira natanko en B, linearna negacija formule A pa negira natanko en A.

Za vpeljavo implikacije zopet potrebujemo drugačen simbol kot smo ga vajeni, saj se $\Rightarrow$ že uporablja v strukturi sekventa samega. Običajni sekventni račun v ta namen uporablja $\rightarrow$, linearna implikacija pa, da se loči od nelinearne, spet uporabi svoj simbol.

Definicija 3.8. *Implikacija* $\multimap$, je definirana z naslednjimi pravili:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \Rightarrow \Delta, \Delta'} \text{ L}\multimap \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B, \Delta} \text{ R}\multimap$$

Kot lahko vidimo je desno pravilo dokaj jasno za interpretacijo. Če dokazujemo $A \multimap B$, je dovolj da pod predpostavko A dokažemo B. Levo pravilo pa je morda lažje brati od zgoraj navzdol. Če torej z Γ dokažemo A ter neke druge sklepe Δ, iz Γ' in B pa dokažemo Δ', lahko iz združenih predpostavk Γ, Γ' ter dejstva, da A implicira B dokažemo združene sklepe Δ, Δ'.

Definicija 3.9. *Negacija*, označena s simbolom $\sim$, ima naslednji pravili:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, {\sim}A \Rightarrow \Delta} \text{ L}{\sim} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow {\sim}A, \Delta} \text{ R}{\sim}$$

Tudi interpretacija veznika $\sim$ je lažja od zgoraj navzdol, pomembno pa je tudi dejstvo, da vejice na desni interpretiramo kot „ali”, vejice na levi pa kot „in”. Levo pravilo nam pove, da če znamo iz predpostavk Γ dokazati A *ali* Δ, lahko preprosto predpostavimo, da ne velja A in dokažemo Δ. Desno pravilo pa pravi, da če znamo iz Γ *in* A dokazati Δ, lahko iz Γ dokažemo ali da A ne velja, ali pa da velja Δ.

3.2 Izjavne konstante

V običajnem sekventnem računu imamo dvoje konstant; resnico in neresnico, ki pa se v linearni logiki spet razdelita. Resnici se delita na enoto za $\star$ ter enoto za $\sqcap$, neresnici pa na enoto za $+$ ter enoto za $\sqcup$.

Definicija 3.10. *Enota* $\mathbf{1}$, ima levo in desno pravilo:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{1} \Rightarrow \Delta} \text{ L}\mathbf{1} \qquad \frac{}{\Rightarrow \mathbf{1}} \text{ R}\mathbf{1}$$

Lahko jo brez predpostavk dokažemo, kar nam pove desno pravilo, levo pravilo pa pove, da če pa vemo da enota velja je to trivialna informacija.

Definicija 3.11. *Resnica* $\top$, ima le desno pravilo:

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow \top, \Delta}\ \mathrm{R}\top$$

Ker levega pravila nima, je med predpostavkami ne moremo uporabiti. Kar pa nam desno pravilo pove, je da resnica vedno velja.

Lema 3.12. *Konstanta* $\mathbf{1}$ *je enota za za veznik* $\star$*, konstanta* $\top$ *pa je enota za veznik* $\sqcap$*.*

Dokaz. Za dokaz leme nam je potrebno izpeljati sekvente $A \star \mathbf{1} \Rightarrow A$, $A \Rightarrow A \star \mathbf{1}$, $A \sqcap \top \Rightarrow A$ ter $A \Rightarrow A \sqcap \top$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow A}\ \mathrm{Ax}}{A, \mathbf{1} \Rightarrow A}\ \mathrm{L}\mathbf{1}}{A \star \mathbf{1} \Rightarrow A}\ \mathrm{L}\star \qquad \dfrac{\mathrm{Ax}\ \dfrac{}{A \Rightarrow A} \quad \dfrac{}{\Rightarrow \mathbf{1}}\ \mathrm{R}\mathbf{1}}{A \Rightarrow A \star \mathbf{1}}\ \mathrm{R}\star$$

$$\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow A}\ \mathrm{Ax}}{A \sqcap \top \Rightarrow A}\ \mathrm{L}\sqcap \qquad \dfrac{\mathrm{Ax}\ \dfrac{}{A \Rightarrow A} \quad \dfrac{}{A \Rightarrow \top}\ \mathrm{R}\top}{A \Rightarrow A \sqcap \top}\ \mathrm{R}\sqcap$$

□

Definicija 3.13. *Ničla* $\mathbf{0}$ ima levo in desno pravilo:

$$\frac{}{\mathbf{0} \Rightarrow}\ \mathrm{L}\mathbf{0} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \mathbf{0}, \Delta}\ \mathrm{R}\mathbf{0}$$

Definicija 3.14. *Neresnica* $\perp$ ima le levo pravilo, kar pomeni, da ne more biti uporabljena kot sklep:

$$\frac{}{\Gamma, \perp \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{L}\perp$$

Kot lahko vidimo, so zgornja pravila za ničlo in neresnico simetrična pravilom za enoto in resnico, prav tako pa je simetričen dokaz naslednje leme dokazu leme 3.12, zato ga bomo opustili.

Lema 3.15. *Konstanta* $\mathbf{0}$ *je enota za za veznik* $+$*, konstanta* $\perp$ *pa je enota za veznik* $\sqcup$*.*

3.3 Kvantifikatorja

Definicija 3.16. *Univerzalni kvantifikator* $\forall$ je definiran z naslednjima praviloma:

$$\frac{\Gamma, A[t/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[y/x], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x A, \Delta}\ \mathrm{R}\forall \qquad ;\ y \text{ ni prost v } \Gamma \text{ in } \Delta$$

Zapis $A[a/x]$ pomeni, da vsako prosto pojavitev spremenljivke x zamenjamo s termom a. V L$\forall$ s t označujemo specifičen term t, v R$\forall$ pa z y označujemo poljubno spremenljivko. Levo pravilo nam torej pravi, da če želimo iz dejstva, da za vsak x velja formula A, dokazati Δ, je dovolj, da spremenljivko x v A nadomestimo z nekim specifičnim termom in s tem dokažemo Δ. Desno pravilo pa je ekvivalentno temu, da pri dokazovanju tega, da za vsak x velja A, fiksiramo poljuben y in dokazujemo A.

Definicija 3.17. *Eksistenčni kvantifikator* $\exists$ je simetričen univerzalnemu kvantifikatorju:

$$\frac{\Gamma, A[y/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[t/x], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x A, \Delta}\,\mathrm{R}\exists \qquad ;\, y \text{ ni prost v } \Gamma \text{ in } \Delta$$

Tokrat levo pravilo vsebuje prosto spremenjlivko y, desno pa specifičen term t. Če torej želimo uporabiti dejstvo, da obstaja x, da velja A, je dovolj da Δ dokažemo pri poljubnem y na mestu spremenljivke x, če pa želimo dokazati, da obstaja x, da velja A, le poščemo nek specifičen term t, da A velja.

3.4 Eksponenta

Da bi lahko določene stvari dokazali, si želimo v linearni logiki modelirati tudi običajen sekventni račun, vključno torej z ošibitvijo ter skrčitvijo. A to nelinearnost želimo omejiti na specifične formule. Namen teh „nelinearnih” formul je, da nam dovolijo v linearni logiki dokazati vse, kar je možno dokazati tudi v običajnem sekventnem računu, a da je iz dokaza takoj razvidno, kateri deli sekventa so bili dokazani linearno in kateri ne. Ker želimo označiti formulo kot nelinearno, jo modificiramo v novo formulo z veznikom. Imamo dva takšna veznika, ki ju imenujemo *eksponenta*.

Definicija 3.18. Veznik *seveda* je označen s simbolom ! in označuje nelinearnost na levi strani sekventa, veznik *zakaj ne* pa je označen s simbolom ? in označuje nelinearnost na desni strani:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L!} \qquad \frac{!\Gamma \Rightarrow A, ?\Delta}{!\Gamma \Rightarrow !A, ?\Delta}\,\mathrm{R!} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{W!} \qquad \frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{C!}$$

$$\frac{!\Gamma, A \Rightarrow ?\Delta}{!\Gamma, ?A \Rightarrow ?\Delta}\,\mathrm{L?} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow !A, \Delta}\,\mathrm{R?} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta}\,\mathrm{W?} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow ?A, ?A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta}\,\mathrm{C?}$$

Za oba veznika veljajo štiri pravila. Oba lahko vpeljemo na levi ali desni strani, lahko pa na ustrezni strani uporabimo tudi skrčitev in ošibitev. Zapis $!\Gamma$ (ali $?\Delta$) označuje, da je vsaka formula v Γ (ali Δ) predznačena z veznikom ! (ali ?).

Z eksponenti označimo, da imamo na voljo "poljubno mnogo"kopij predpostavke ali sklepa. Ker vejice na levi beremo kot „in”, vejice na desni pa kot „ali”, je za to treba podati dva različna veznika. Formula $!A$ torej označuje „A in A in $\ldots$ A”, kolikor kopij pač potrebujemo, formula $?A$ pa označuje „A ali A ali $\ldots$ A”.

Interpretacija L! je dokaj enostavna. Pove le, da se kadarkoli v procesu dokazovanja lahko odločimo formulo označiti kot nelinearno. Ker pa se med sklepi ! ne pojavi naravno, morajo za vpeljavo na desni veljati strožji pogoji, namreč, da je že celoten sekvent nelinearen. Interpretacija L? ter R? je simetrična.

3.5 Nekaj opomb o zapisu

Na koncu tega poglavja je potrebnih še nekaj opomb glede zapisa veznikov ter strukture sekventov.

3.5.1 Poimenovanje veznikov

Zapis, uporabljen v tem diplomskem delu, je črpan iz vira [4], ni pa najbolj standarden. Jean-Yves Girard, ki se je prvi ukvarjal z linearno logiko je veznike in konstante označil drugače [2], ta zapis pa se je tudi ohranil. Razlog za spremembo zapisa v mojem delu je bolj slogoven kot zgodovinski. Načini kako je zapis spremenjen ter standardna imena veznikov v angleščini so prikazana v spodnji tabeli:

Simbol veznika	Simbol v standardnem zapisu	Ime
$\sqcap$	$\&$	with
$\star$	$\otimes$	tensor
$\sqcup$	$\oplus$	plus
$+$	$⅋$	par
$\top$	$\top$	top
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	one
$\bot$	$\mathbf{0}$	zero
$\mathbf{0}$	$\bot$	bottom

Kot lahko vidimo so v standardnem zapisu parni drugačni vezniki kot v našem. Razlog za to je, da veznik $+$ distribuira čez veznik $\sqcap$, veznik $\star$ pa distribuira čez $\sqcup$ [2, trditev 1.13]. Velja torej:

$$
\begin{aligned}
A + (B \sqcap C) &\equiv (A + B) \sqcap (A + C) \\
A \star (B \sqcup C) &\equiv (A \star B) \sqcup (A \star C)
\end{aligned}
$$

Toda če veznik $+$ negiramo, ne dobimo veznika $\sqcap$, ampak $\star$, če negiramo veznik $\sqcap$ pa dobimo $\sqcup$ in seveda obratno. Dualna para sta torej $(\star, +)$ ter $(\sqcap, \sqcup)$, kar je veliko bolj razvidno pri naših oznakah. Poleg tega sta si že sami pravili za veznika $\star$ ter $+$, iz definicij 3.5 in 3.7, simetrični, kot sta si pravili za $\sqcap$ ter $\sqcup$, iz definicij 3.4 in 3.6. Zdi se mi, da sta to dovolj pomembna razloga za razumevanje veznikov, da sem se odločila za nestandarden zapis.

3.5.2 Intuicionistična linearna logika

Članki o linearni logiki pogosto omenajo tudi intuicionistično linearno logiko, zato se mi zdi pomembno slednje vsaj predstaviti tudi v mojem delu.

Intuicionistična logika je logika brez principa izključene tretje možnosti. To je aksiom, ki pravi, da za poljubno trditev P velja $P \vee \neg P$. V sekventnem računu kot smo ga predstavili do sedaj, se da to pravilo izpeljati iz pravila aksioma. V linearni logiki ta princip velja za veznik $+$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow A}\,\mathrm{Ax}}{\Rightarrow A, {\sim}A}\,\mathrm{R}{\sim}}{\Rightarrow A + ({\sim}A)}\,\mathrm{R}{+}
$$

V običajnem sekventnem računu je izpeljava sekventa $\Rightarrow A \vee \neg A$ zelo podobna. Če torej želimo delati z intuicionistično linearno logiko, moramo strukturo sekventnega računa nekoliko spremeniti. Dovolj je, da na desni strani sekventov ne dopustimo več kot ene formule [4, stran 20]. Kot lahko hitro vidimo, zgornja izpeljava sedaj ne deluje, saj sekvent $\Rightarrow \sim A, A$ ni več veljaven.

Vendar pa intuicionistična logika poruši simetrijo, ki jo drugače nosi klasični sekventni račun. Zaradi omejitve števila sklepov desnega pravila za veznik + na primer ne moremo imeti. Ker sama izključena tretja možnost in njen (ne)obstoj v mojem diplomskem delu ne igrata nobene vloge, sem se zavoljo ohranjanja simetrije odločila uporabljati klasično – torej neintuicionistično – logiko.

4 Izrek o eliminaciji rezov

Poslednje pravilo, ki ga je potrebno vpeljati, je *pravilo reza.* To pravilo obstaja tudi v običajnem sekventnem računu in formalizira koncept dokazovanja s pomočjo leme.

Definicija 4.1. *Pravilo reza*, krajše *Rez*:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma', A \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

To pravilo pravi, da če znamo pod določenimi predpostavkami dokazati formulo A, potem pa iz te formule dokažemo nekaj drugega, lahko A enostavno režemo iz procesa.

Opomba 4.2. Sekventni račun brez uporabe pravila reza ima pomembno lastnost, namreč da vsak dokaz sekventa $\Gamma \Rightarrow \Delta$ v svoji izpeljavi uporabi le podformule formul, ki nastopajo v Γ in Δ. To je osnova za mnoge algoritme, ki iščejo dokaze, pa tudi sicer ima ta lastnost mnogo koristnih posledic, recimo da je sekventni račun konsistenten. To pomeni, da določenih sekventov, na primer $\Rightarrow \bot$, ne moremo dokazati. Ko vpeljemo pravilo reza, se ta lastnost izgubi, saj lahko na vsakem koraku „vrinemo" poljubno formulo.

Če pravilo reza res interpretiramo kot uporabo leme, bi imelo smisel sklepati, da z uporabo rezov ne moremo pridelati sekventov, ki jih brez tega pravila nismo mogli dokazati. Ravno temu služi naslednji izrek.

Izrek 4.3 (Izrek o eliminaciji rezov)**.** *Vsak sekvent, izpeljan z uporabo reza, lahko izpeljemo tudi brez uporabe reza.*

4.1 Potrebne definicije

Dokaz zgornjega izreka poteka s pomočjo indukcije na drevesih izpeljave nad rezom ter na kompleksnosti formul, ki jih režemo. Zavoljo tega moramo tako na drevesih kot formulah vpeljati nekakšno mero, glede na katero bomo potem izvalali proces indukcije. Formula je induktivno definirana v definiciji 2.3, zato je tudi kompleksnost formule definirana induktivno.

Definicija 4.4. Naj bosta A in B poljubni formuli, P pa naj bo neka osnovna formula. *Rang formule*, označen s simbolom $\mathfrak{R}$, je definiran sledeče:

- $\mathfrak{R}(P) = \mathfrak{R}(\top) = \mathfrak{R}(\bot) = \mathfrak{R}(\mathbf{1}) = \mathfrak{R}(\mathbf{0}) = 1$

- $\mathfrak{R}(\sim A) = \mathfrak{R}(\forall x A) = \mathfrak{R}(\exists x A) = \mathfrak{R}(!A) = \mathfrak{R}(?A) = \mathfrak{R}(A) + 1$
- $\mathfrak{R}(A * B) = \mathfrak{R}(A) + \mathfrak{R}(B) + 1$; kjer je $*$ poljuben veznik, ki sprejme dve formuli.

Podobno je definirana višina drevesa. Imejmo naslednji dve drevesi, levo označeno z $\mathcal{D}$, desno pa z $\mathcal{D}'$:

$$\frac{\mathcal{D}_0 \qquad \mathcal{D}_1 \qquad \dots \qquad \mathcal{D}_n}{\mathcal{S}}\,\text{Pravilo} \qquad \frac{}{\mathcal{S}'}\,\text{Pravilo'}$$

Tu je $n \in \mathbb{N}$, Pravilo je poljubno pravilo, ki sprejme n sekventov, Pravilo' pa je poljubno pravilo, ki jih ne sprejme nič. Slednje je na primer pravilo aksioma ali nekatera izmed pravil za konstante:

Definicija 4.5. *Višina drevesa izpeljave* je označena s simbolom $\mathfrak{h}$ in je enaka:

- $\mathfrak{h}(\mathcal{D}) = \sum_{i=0}^{n} \mathfrak{h}(\mathcal{D}_i) + 1$
- $\mathfrak{h}(\mathcal{D}') = 1$

Rekli bomo, da je višina drevesa enaka 0, ko je drevo prazno.

Sedaj ko imamo mero tako na formulah kot na drevesih izpeljave, lahko defniramo skupno mero vsakega reza. Oglejmo si poljubno pravilo reza:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_0\\ \Gamma, A \Rightarrow \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \Gamma' \Rightarrow A, \Delta'\end{array}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}$$

Tu $\mathcal{D}_0$ in $\mathcal{D}_1$ označujeta drevesi izpeljav, ki sta vodili do sekventov pod njima.

Definicija 4.6. *Stopnja reza* je par števil $(\mathfrak{R}, \mathfrak{h})$, kjer je $\mathfrak{R}$ rang rezane formule, $\mathfrak{h}$ pa višina samega drevesa. Z zgornjimi oznakami je stopnja reza torej enaka:

$$(\mathfrak{R}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{R}(A), \mathfrak{h}(\mathcal{D}_0) + \mathfrak{h}(\mathcal{D}_1) + 3)$$

Stopnja reza je urejena *leksikografsko*, kar pomeni, da relacijo $<$ na paru $(\mathfrak{R}, \mathfrak{h})$ definiramo sledeče:

$$(\mathfrak{R}, \mathfrak{h}) < (\mathfrak{R}', \mathfrak{h}') \Leftrightarrow (\mathfrak{R} < \mathfrak{R}') \text{ ali } ((\mathfrak{R} = \mathfrak{R}') \text{ in } (\mathfrak{h} < \mathfrak{h}'))$$

Definicija 4.7. Rezu bomo rekli *vrhnji rez*, če se nad njim ne pojavi nobeno drugo pravilo reza. To seveda ne pomeni nujno, da ima najnižjo stopnjo ali da je v drevesu izpeljave le en takšen rez.

Preden začnemo z dokazom je nazadnje potrebno definirati še eno vrsto reza, in sicer glavni rez.

Definicija 4.8. Če je rezana formula vpeljana v obeh poddrevesih nad pravilom reza, to imenujemo *glavni rez*.

Primer 4.9. Za primer poglejmo glavni rez za formulo $A \sqcap B$ in za njim primer reza, ki ni glaven:

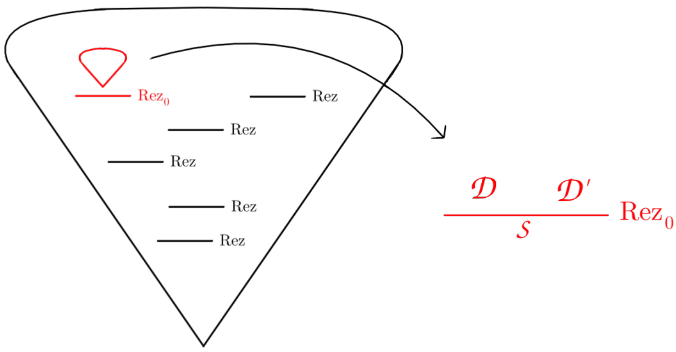
$$\dfrac{\mathrm{L}\sqcap\,\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \sqcap B \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\Gamma' \Rightarrow A, \Delta' \qquad \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma' \Rightarrow A \sqcap B, \Delta'}\,\mathrm{R}\sqcap}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

$$\dfrac{\mathrm{L}\sqcap\,\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \sqcap B \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\Gamma', C \Rightarrow A \sqcap B, \Delta'}{\Gamma' \Rightarrow \ \sim C, A \sqcap B, \Delta'}\,\mathrm{R}\sim}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \ \sim C, \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

4.2 Dokaz izreka o eliminaciji rezov

Izrek 4.3 imenujemo izrek o *eliminaciji* rezov, ker v njegovem dokazu postopoma odstranjujemo (eliminiramo) reze iz drevesa izpeljave, dokler nam na koncu ne ostane drevo izpeljave brez rezov. Dokaz poteka z dvojno indukcijo, zunanjo na številu rezov v dokazu, notranjo pa na stopnji reza, kot je definirana v 4.6.

Začnimo z indukcijo na številu rezov. Če je drevo brez rezov, smo dokaz končali. Bazi indukcije, torej primeru ko je $n = 0$, smo tako avtomatično zadostili. Sedaj denimo, da imamo v drevesu izpeljave $n + 1$ rezov. Ker je to drevo končno, si lahko izberemo enega izmed vrhnjih rezov, denimo mu Rez_0. Oglejmo si poddrevo, ki se konča z Rez_0:



Drevesi $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$ ne vsebujeta pravila rez. Če znamo torej eliminirati rez iz takšnega poddrevesa, lahko zgornje drevo izpeljave prevedemo na drevo, ki vsebuje le n rezov. Po indukcijski predpostavki znamo sedaj eliminirati še ostale reze. Dokaz eliminacije rezov smo tako prevedli na dokaz eliminacije rezov iz drevesa, kjer je zadnje pravilo rez, nad njim pa ni drugih rezov.

Za eliminiacijo zgoraj opisanega reza pa potrebujemo indukcijo na stopnjo reza. Indukcijski korak poteka tako, da drevo, ki se konča z rezom stopnje $(\mathfrak{R}, \mathfrak{h})$ preobrazimo v drevo, ki vsebuje končno mnogo – lahko tudi nobenega – rezov stopenj $(\mathfrak{R}_0, \mathfrak{h}_0)$, $(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{h}_1)$, … , $(\mathfrak{R}_n, \mathfrak{h}_n)$, kjer je $(\mathfrak{R}_i, \mathfrak{h}_i) < (\mathfrak{R}, \mathfrak{h})$ za vsak $i \in [n]$. Ker vsakič „pridelamo” le končno mnogo rezov, vsak izmed katerih je strogo nižje stopnje od začetnega, se bo proces zaključil v končno mnogo korakih. Če res pridelamo več rezov in je kateri izmed njih nad drugim, zopet nadaljujemo indukcijo na najnižjem izmed njih. Baza indukcije je primer, ko je $(\mathfrak{R}, \mathfrak{h}) = (1, h)$, za poljuben $h \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

Oris dokaza. Ko imamo poljubno drevo izpeljave, iz njega eliminiramo reze tako, da si izberemo poddrevo izpeljave, ki se konča z vrhnjim rezom. Nato preobrazimo omenjeno poddrevo v drevo, ki vsebuje reze kvečjemu nižje stopnje in to ponavljamo, dokler rezov iz drevesa ne eliminiramo.

Pri tem postopku pa moramo ločiti primere glede na to, kakšne vrste rez je bil na dnu našega poddrevesa, namreč če je bil rez glaven, kot definirano v 4.8, ali če ni bil. Začnimo z eliminacijo glavnega reza.

4.2.1 Eliminacija glavnega reza

Od tu naprej bomo zavoljo preglednosti nad sekventi označevali še drevesa izpeljave, ki so do sekventov vodila.

Oblika glavnega reza je odvisna od vsake rezane formule posebej, zato je njegovo eliminacijo potrebno ločiti glede na veznik, ki rezano formulo sestavlja. Začnimo kar z glavnim rezom veznika $\sqcap$, kot v primeru 4.9:

$$\dfrac{\text{L}\sqcap\,\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0\\ \Gamma, A \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma, A \sqcap B \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \Gamma' \Rightarrow A, \Delta'\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma' \Rightarrow A \sqcap B, \Delta'}\,\text{R}\sqcap}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0\\ \Gamma, A \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \Gamma' \Rightarrow A, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}$$

Sklep pred puščico in po njej je enak, saj iz istih poddreves dokažemo isti sekvent. Tako smo rez stopnje $(\mathfrak{R}(A) + \mathfrak{R}(B) + 1, \mathfrak{h})$ zamenjali z rezom stopnje $(\mathfrak{R}(A), \mathfrak{h}')$, ki je očitno manjša. Podobno lahko naredimo za glavni rez $A \star B$:

$$\dfrac{\text{L}\star\,\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0\\ \Gamma, A, B \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma, A \star B \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \Gamma' \Rightarrow A, \Delta'\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ \Gamma'' \Rightarrow B, \Delta''\end{matrix}}{\Gamma', \Gamma'' \Rightarrow A \star B, \Delta', \Delta''}\,\text{R}\star}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''}\,\text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\text{Rez}\,\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0\\ \Gamma, A, B \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \Gamma' \Rightarrow A, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', B \Rightarrow \Delta, \Delta'} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ \Gamma'' \Rightarrow B, \Delta''\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''}\,\text{Rez}$$

Tokrat smo prvotno drevo izpeljave prevedli na drevo z dvema rezoma, a imata oba nižjo stopnjo, saj je rang rezane formule očitno nižji. Zelo podobno kot zgornje dva primera izvedemo korak indukcije za $A \sqcup B$ ter $A + B$:

$$\dfrac{\mathrm{L}\sqcup\,\dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}_0}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}_1}{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, A \sqcup B \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}_2}{\Gamma' \Rightarrow A, \Delta'}}{\Gamma' \Rightarrow A \sqcup B, \Delta'}\,\mathrm{R}\sqcup}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}_0}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}_2}{\Gamma' \Rightarrow A, \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

Kot vidimo je zgornji korak indukcije simetričen koraku indukcije za $A \sqcap B$, saj sta tudi veznika sama simetrična. Enako je korak indukcije za $A + B$ simetričen koraku indukcije za $A \star B$:

$$\dfrac{\mathrm{L}+\,\dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}_0}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}_1}{\Gamma', B \Rightarrow \Delta'}}{\Gamma, \Gamma', A + B \Rightarrow \Delta, \Delta'} \qquad \dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}_2}{\Gamma'' \Rightarrow A, B, \Delta''}}{\Gamma'' \Rightarrow A + B, \Delta''}\,\mathrm{R}+}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\mathrm{Rez}\,\dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}_0}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}_2}{\Gamma'' \Rightarrow A, B, \Delta''}}{\Gamma, \Gamma'' \Rightarrow B, \Delta, \Delta''} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}_1}{\Gamma', B \Rightarrow \Delta'}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''}\,\mathrm{Rez}$$

Naslednji primer, ki ga obravnavamo, je veznik $\multimap$. Zopet se rez prevede na dva reza nižje stopnje, na enak način kot pri veznikih $A \star B$ in $A + B$:

$$\dfrac{\mathrm{L}\multimap\,\dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}_0}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}_1}{\Gamma', B \Rightarrow \Delta'}}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \Rightarrow \Delta, \Delta'} \qquad \dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}_2}{\Gamma'', A \Rightarrow B, \Delta''}}{\Gamma'' \Rightarrow A \multimap B, \Delta''}\,\mathrm{R}\multimap}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\mathrm{Rez}\,\dfrac{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}_0}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}_2}{\Gamma'', A \Rightarrow B, \Delta''}}{\Gamma, \Gamma'' \Rightarrow B, \Delta, \Delta''} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}_1}{\Gamma', B \Rightarrow \Delta'}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''}\,\mathrm{Rez}$$

Poslednji izmed izjavnih veznikov, ki nam ga je potrebno obravnavati je negacija:

$$\dfrac{\mathrm{L}{\sim}\,\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0\\ \Gamma \Rightarrow A, \Delta\end{matrix}}{\Gamma, {\sim}A \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \Gamma', A \Rightarrow \Delta'\end{matrix}}{\Gamma' \Rightarrow {\sim}A, \Delta'}\,\mathrm{R}{\sim}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0\\ \Gamma \Rightarrow A, \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \Gamma', A \Rightarrow \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

Pri eliminaciji glavnega reza, kjer režemo izjavno konstanto, imamo moč obravnavati le konstanti **1** in **0**, saj za $\top$ levo pravilo ne obstaja, za $\bot$ pa ni desnega. Glavni rez, kjer režemo $\top$ ali $\bot$ se torej ne more zgoditi. Za konstanti **1** in **0** eliminacija glavnega reza izgleda sledeče:

$$\dfrac{\mathrm{L}\mathbf{1}\,\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma, \mathbf{1} \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{}{\Rightarrow \mathbf{1}}\,\mathrm{R}\mathbf{1}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Rez} \qquad\qquad \dfrac{\mathrm{L}\mathbf{0}\,\dfrac{}{\mathbf{0} \Rightarrow} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \mathbf{0}, \Delta}\,\mathrm{R}\mathbf{0}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad\qquad\qquad \begin{matrix}\mathcal{D}\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix}$$

Kot lahko vidimo sta primera dokaj trivialna, saj je že sam rez take vrste trivialen. Ker smo rez popolnoma eliminirali je indukcijski predpostavki zadoščeno na prazno. Sedaj si oglejmo eliminacijo glavnega reza obeh kvantifikatorjev. Zopet s t označimo specifičen term¸ z y pa neko (svežo) prosto spremenljivko:

$$\dfrac{\mathrm{L}\forall\,\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0\\ \Gamma, A[t/x] \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \Gamma' \Rightarrow A[y/x], \Delta'\end{matrix}}{\Gamma' \Rightarrow \forall x A, \Delta'}\,\mathrm{R}\forall}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0\\ \Gamma, A[t/x] \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \Gamma' \Rightarrow A[y/x], \Delta'\end{matrix}}{\Gamma' \Rightarrow A[t/x], \Delta'}\,y := t}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

V desnem poddrevesu novonastalega drevesa izpeljave spremenljivko y nadomestimo s specifičnim termom t. Ker je bil y *prosta* spremenljivka, to lahko naredimo. Tako dobimo formulo, ki je enaka formuli v levem poddrevesu, in jo zato lahko režemo.

V definiciji ranga formule so pomembni le vezniki, ki formulo sestavljajo, ne pa tudi termi, ki se v njej pojavljajo, zato je $\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{R}(A[t/x])$. Dalje je:

$$\mathfrak{R}(\forall x A) = \mathfrak{R}(A) + 1 = \mathfrak{R}(A[t/x]) + 1$$

To pomeni, da je stopnja novega reza nižja od stopnje prvega, torej je indukcijski predpostavki zadoščeno. Postopek pri eliminaciji reza eksistenčnega kvantifikatorja je simetričen:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_0}{\Gamma, A[y/x] \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\exists \qquad \dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_1}{\Gamma' \Rightarrow A[t/x], \Delta'}}{\Gamma' \Rightarrow \exists x A, \Delta'}\,\mathrm{R}\exists}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_0}{\Gamma, A[y/x] \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, A[t/x] \Rightarrow \Delta}\,y := t \qquad \dfrac{\mathcal{D}_1}{\Gamma' \Rightarrow A[t/x], \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

4.2.2 Glavni rez eksponentov ter posplošeno pravilo reza

Eliminacija glavnega reza eksponentov zahteva posebno obravnavo, saj se dokazovanje tu nekoliko zaplete. Veznika ! in ? sta simetrična, zato bomo podrobno obravnavali le veznik !, bralec pa si lahko sam izpelje dokaze še za veznik ?.

Veznik ! ima štiri logična pravila, ki ga definirajo. Tri pravila veznik vpeljejo na levi strani sekventa, desno pravilo pa ga vpelje na desni. Zato moramo glavni rez formule $!A$ ločiti na tri primere, glede na to kako je bil vpeljan na levi strani. Ogljemo si naprej glavni rez, kjer je $!A$ na levi vpeljan s skrčitvijo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_0}{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{C!} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_1}{!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\mathrm{R!}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

Mikalo bi nas zgornje drevo izpeljave zamenjati s sledečim:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_0}{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_1}{!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\mathrm{R!}}{\Gamma, !\Gamma', !A \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\,\mathrm{Rez} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_1}{!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\mathrm{R!}}{\Gamma, !\Gamma', !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta', ?\Delta'}\,\mathrm{Rez}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta', ?\Delta'}\,\mathrm{C!}\times|\Gamma'|}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\,\mathrm{C?}\times|\Delta'|$$

Če označimo z $(\mathfrak{R}, \mathfrak{h})$ stopnjo prvotnega reza, z $(\mathfrak{R}', \mathfrak{h}')$ stopjo zgornjega izmed novih rezov, z $(\mathfrak{R}'', \mathfrak{h}'')$ pa stopnjo spodnjega, velja:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{R}, \mathfrak{h}) &= (\mathfrak{R}(A) + 1, \mathfrak{h}(\mathcal{D}_0) + \mathfrak{h}(\mathcal{D}_1) + 5) \\
(\mathfrak{R}', \mathfrak{h}') &= (\mathfrak{R}(A) + 1, \mathfrak{h}(\mathcal{D}_0) + \mathfrak{h}(\mathcal{D}_1) + 4) \\
(\mathfrak{R}'', \mathfrak{h}'') &= (\mathfrak{R}(A) + 1, \mathfrak{h}(\mathcal{D}_0) + 2 * \mathfrak{h}(\mathcal{D}_1) + 7)
\end{aligned}$$

Takoj lahko vidimo, da je rang rezane formule v vseh primerih enak, zato bi bilo potrebno zmanjšati višino. Zgornji izmed novih rezov ima sicer nižjo višino kot prvotni rez, pri spodnjem pa višina znatno naraste. To pomeni, da koraku indukcije ne zadostimo. Da bi lahko ta korak indukcije vseeno opravili, potrebujemo pomožno (razširjeno) pravilo reza.

Definicija 4.10. *Posplošeni pravili reza*, označeni z $\mathrm{Rez!}_n$ in $\mathrm{Rez?}_n$, sta definirani za vsak $n \in \mathbb{N}_{>0}$;

$$\frac{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow !A, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ \mathrm{Rez!}_n$$

$$\frac{\Gamma, ?A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow (?A)^n, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ \mathrm{Rez?}_n$$

Opomba 4.11. Formula $(!A)^n$ v definiciji predstavlja n-kratno pojavitev formule $!A$. Pravili $\mathrm{Rez!}_1$ ter $\mathrm{Rez?}_1$ sta torej le pravilo Rez, kjer režemo ali formulo $!A$, ali pa formulo $?A$.

Lema 4.12. *Pravili $\mathrm{Rez!}_n$ ter $\mathrm{Rez?}_n$ sta dopustni, kar pomeni, da ju lahko izpeljemo iz že definiranih pravil linearne logike.*

Dokaz. Lemo dokažemo z indukcijo na številu n. Primer pri $n = 1$ je seveda le običajno pravilo reza, kot omenjeno že v zgornji opombi. Če predpostavimo, da pravilo $\mathrm{Rez!}_n$ že znamo izpeljati, lahko izpeljemo $\mathrm{Rez!}_{n+1}$ na naslednji način.

$$\dfrac{\mathrm{C!}\,\dfrac{\dfrac{\Gamma, (!A)^{n+1} \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (!A)^{n-1}, !A, !A \Rightarrow \Delta}}{\dfrac{\Gamma, (!A)^{n-1}, !A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta}} \qquad \Gamma' \Rightarrow !A, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ \mathrm{Rez!}_n$$

Pri indukcijskem koraku iz $n = 1$ na $n = 2$ moramo paziti, saj se v drugi vrstici dokaza pojavi izraz $(!A)^0$. To enostavno interpretiramo kot prazno multimnožico formul. Dokaz dopustnosti pravila $\mathrm{Rez?}_n$ je simetričen. □

Če želimo uporabiti zgoraj definirano posplošeno pravilo reza, moramo izrek 4.3, ki ga dokazujemo, preoblikovati tako, da ga bo vseboval.

Izrek 4.13. *Vsak sekvent, izpeljan z uporabo pravila reza ali posplošenega pravila reza, lahko dokažemo tudi brez uporabe kateregakoli izmed njiju.*

Zaradi dopustnosti posplošenega reza je ta izrek le posledica izreka 4.3. A ker novi izrek eliminira tako navadni kot posplošeni rez, je izrek 4.3 prav tako le posledica tega, zato sta si izreka na nek način ekvivalentna. Kar je pomembno za nas je slednje; če dokažemo zgornji izrek, dokažemo tudi izrek 4.3.

Sedaj si lahko v dokazu pomagamo s posplošenim rezom. To pomeni, da lahko drevo izpeljave preobrazimo tako, da bo namesto prvotnega reza vsebovalo enega ali več rezov *ali posplošenih rezov* nižje stopnje. A to pomeni, da moramo znati poleg navadnega reza sedaj eliminirati še posplošenega. V podpoglavju 4.2.1, torej pri obravnavi glavnega reza vseh veznikov razen eksponentov, glavnega posplošenega reza niti ne moremo obravnavati. Ta namreč lahko nastopi le, če iz formule režemo eksponente. V nadaljevanju dokaza pa bomo morali biti pazljivi in obdelati še vse primere eliminacije posplošenega reza.

Ostane nam le še definicija stopnje posplošenega reza, saj ta trenutno velja le za navadni rez. V ta namen si oglejmo pravilo $\mathrm{Rez}!_n$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0 \\ \Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \Gamma' \Rightarrow !A, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ \mathrm{Rez}!_n$$

Definicija 4.14. *Stopnja posplošenega reza* je par števil $(\mathfrak{R}, \mathfrak{h})$, kjer je $\mathfrak{R}$ rang formule $!A$ (ali $?A$, glede na vrsto posplošenega reza), $\mathfrak{h}$ pa višina drevesa. Stopnja zgornjega posplošenega reza je torej enaka:

$$(\mathfrak{R}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{R}(A) + 1, \mathfrak{h}(\mathcal{D}_0) + \mathfrak{h}(\mathcal{D}_1)\} + 3)$$

Opomba 4.15. Iz definicije je razvidno, da število rezanih formul ne vpliva na stopnjo reza. Če v indukcijskem koraku torej $\mathrm{Rez}!_n$ zamenjamo z $\mathrm{Rez}!_{n+1}$ na isti višini, režemo pa še zmeraj formulo $!A$, smo stopnjo reza ohranili.

Lotimo se še enkrat drevesa izpeljave, kjer na levi $!A$ vpeljemo s skrčitvijo, tokrat s posplošenim pravilom reza v žepu. Obravnavamo lahko kar posplošeni rez za poljuben $n \in \mathbb{N}_{>0}$, vključno z $n = 1$, torej navadnim pravilom reza:

$$\dfrac{\mathrm{C}!\,\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0 \\ \Gamma, (!A)^{n+1} \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ !\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'\end{matrix}}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\mathrm{R}!}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\ \mathrm{Rez}!_n$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0 \\ \Gamma, (!A)^{n+1} \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ !\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'\end{matrix}}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\mathrm{R}!}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\ \mathrm{Rez}!_{n+1}$$

Zopet se rang formule ohrani, a tokrat je višina novega reza za 1 nižja od višine prvotnega, torej smo indukcijski predpostavki zadostili. Oglejmo si sedaj glavni rez¸ kjer je formula $!A$ na levi vpeljana z ošibitvijo. Tu korak indukcije za posplošeni rez, kjer $n \neq 1$, ter navadni rez ni združljiv, zato primera ločimo, začenši z navadnim pravilom reza:

$$
\dfrac{\text{W!}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}_0}{\Gamma \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\text{R!}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\,\text{Rez}
$$

$$\downarrow$$

$$
\dfrac{\text{W!}\times|\Gamma'|\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}_0}{\Gamma \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\,\text{W?}\times|\Delta'|
$$

Spet smo na prazno zadostili indukcijski predpostavki in se reza v celoti znebili. Za Rez!$_n$, kjer je $n \geq 2$, pa je postopek sledeč:

$$
\dfrac{\text{W!}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}_0}{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, (!A)^{n+1} \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\text{R!}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\,\text{Rez!}_{n+1}
$$

$$\downarrow$$

$$
\dfrac{\overset{\mathcal{D}_0}{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\text{R!}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\,\text{Rez!}_n
$$

Stopnja reza je tu znižana na enak način, kot v primeru, ko na levi $!A$ vpeljemo s skrčitvijo. Pri obravnavi glavnega reza formule $!A$ z levim pravilom je zopet potrebno ločiti Rez!$_n$, kjer $n \geq 2$, od navadnega reza:

$$
\dfrac{\text{L!}\,\dfrac{\overset{\mathcal{D}_0}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\text{R!}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\,\text{Rez}
$$

$$\downarrow$$

$$
\dfrac{\overset{\mathcal{D}_0}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \overset{\mathcal{D}_1}{!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\,\text{Rez}
$$

Uspelo nam je znižati rang rezane formule, zato je stopnja novega reza nižja. Pri eliminaciji pravila Rez!$_n$, ko je $n \geq 2$ se je treba malce bolj potruditi:

$$\dfrac{\mathrm{L!}\,\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_0\\ \Gamma,(!A)^{n-1},A\Rightarrow\Delta\end{array}}{\Gamma,(!A)^n\Rightarrow\Delta} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ !\Gamma'\Rightarrow A,?\Delta'\end{array}}{!\Gamma'\Rightarrow !A,?\Delta'}\,\mathrm{R!}}{\Gamma,!\Gamma'\Rightarrow\Delta,?\Delta'}\,\mathrm{Rez!}_n$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathrm{Rez!}_{n-1}\,\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_0\\ \Gamma,(!A)^{n-1},A\Rightarrow\Delta\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ !\Gamma'\Rightarrow A,?\Delta'\end{array}}{!\Gamma'\Rightarrow !A,?\Delta'}\,\mathrm{R!}}{\Gamma,!\Gamma',A\Rightarrow\Delta,?\Delta'} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ !\Gamma'\Rightarrow A,?\Delta'\end{array}}{\Gamma,!\Gamma',!\Gamma'\Rightarrow\Delta,?\Delta',?\Delta'}\,\mathrm{Rez}}{\Gamma,!\Gamma'\Rightarrow\Delta,?\Delta',?\Delta'}\,\mathrm{C!}\times|\Gamma'|}{\Gamma,!\Gamma'\Rightarrow\Delta,?\Delta'}\,\mathrm{C?}\times|\Delta'|$$

Novonastalo drevo izpeljave bi nas lahko spominjalo na problem iz začetka tega podpoglavja. Oglejmo si stopnje rezov, kjer prvotni rez zopet označimo z $(\mathfrak{R},\mathfrak{h})$, nova reza pa (po vrsti) z $(\mathfrak{R}',\mathfrak{h}')$ in $(\mathfrak{R}'',\mathfrak{h}'')$:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{R},\mathfrak{h}) &= (\mathfrak{R}(A)+1,\mathfrak{h}(\mathcal{D}_0)+\mathfrak{h}(\mathcal{D}_1)+5)\\ (\mathfrak{R}',\mathfrak{h}') &= (\mathfrak{R}(A)+1,\mathfrak{h}(\mathcal{D}_0)+\mathfrak{h}(\mathcal{D}_1)+4)\\ (\mathfrak{R}'',\mathfrak{h}'') &= (\mathfrak{R}(A),\mathfrak{h}(\mathcal{D}_0)+2*\mathfrak{h}(\mathcal{D}_1)+6)\end{aligned}$$

Pri prvem izmed novih dreves rang rezane formule ostane isti, vendar se višina zmanjša za 1, torej je stopnja tega reza res nižja od stopnje prvotnega. Pri drugem rezu spet nastopi težava veliko večje višine, a se je, za razliko problema iz začetka podpoglavja, rang formule znižal. Ker je ureditev leksikografska, se lahko višina poljubno veča; čim je rang rezane formule nižji, bo stopnja reza nižja. Indukcijski predpostavki je torej zadoščeno in ta korak indukcije je opravljen.

4.2.3 Eliminacija reza, ki ni glaven

V tem podpoglavju bomo obravnavali le eliminacijo navadnega reza, posplošeni rez si bomo ogledali posebej, v naslednjem podpoglavju.

Če rez ni bil glaven, je moralo biti na levi ali desni strani pravilo, ki ni vpeljalo rezane formule. Denimo, da je bil na levi z L$\sqcap$ pravkar vpeljan veznik $\sqcap$, nato pa smo rezali neko drugo formulo C:

$$\dfrac{\mathrm{L}\sqcap\,\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_0\\ \Gamma,A,C\Rightarrow\Delta\end{array}}{\Gamma,A\sqcap B,C\Rightarrow\Delta} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \Gamma'\Rightarrow C,\Delta'\end{array}}{\Gamma,\Gamma',A\sqcap B\Rightarrow\Delta,\Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

Ne glede na to kakšna je formula C in ne glede na to kaj je bilo zadnje pravilo v drevesu $\mathcal{D}_1$, lahko to drevo preobrazimo tako, da bo zadoščalo indukcijski predpostavki:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0 & \mathcal{D}_1\\ \Gamma, A, C \Rightarrow \Delta & \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}}{\Gamma, \Gamma', A \sqcap B \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{L}\sqcap$$

Višina reza je očitno nižja in kot lahko vidimo sama formula C na indukcijski korak ni vplivala. Zato pri rezu, ki ni glaven, namesto glede na rezano formulo, ločimo primere glede na zadnje pravilo pred rezom, ki ne vpelje formule C. Seveda tudi ni pomembno, ali se ta vpeljava zgodi v levem ali desnem poddrevesu nad rezom, saj je to asimetrično le, če obravnavamo rezano formulo. Pomembno pa je, ali je bil veznik vpeljan z levim ali desnim pravilom, zato si oglejmo še drugi primer, ko je vpeljana formula $A \sqcap B$:

$$\dfrac{\text{R}\sqcap\,\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0 & \mathcal{D}_1\\ \Gamma, C \Rightarrow A, \Delta & \Gamma, C \Rightarrow B, \Delta\end{matrix}}{\Gamma, C \Rightarrow A \sqcap B, \Delta} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \sqcap B, \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\text{Rez}\,\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0 & \mathcal{D}_2\\ \Gamma, C \Rightarrow A, \Delta & \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta, \Delta'} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ \Gamma, C \Rightarrow B, \Delta & \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow B, \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \sqcap B, \Delta, \Delta'}\,\text{R}\sqcap$$

Oba nova reza sta očitno nižje višine kot prvotni rez, zato sta tudi nižjih stopenj. Ker v obeh dosedanjih primerih – in v vseh prihodnjih – strukture rezane formule ne obravnavamo, ranga ne bomo mogli znižati. Eliminacija reza, ki ni glaven, torej temelji na tem, da znižamo višino reza. Večina teh primerov je trivialnih, zato si pri veznikih oglejmo le še L$\star$ in R$\star$:

$$\dfrac{\text{L}\star\,\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0\\ \Gamma, A, B, C \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma, A \star B, C \Rightarrow \Delta} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', A \star B \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0 & \mathcal{D}_1\\ \Gamma, A, B, C \Rightarrow \Delta & \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', A, B \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}}{\Gamma, \Gamma', A \star B \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{L}\star$$

Kot v primeru levega pravila za veznik $\sqcap$, pravilo reza ter logično pravilo le zamenjamo, zato enostavno zadostimo indukcijski predpostavki. Primeri R$\sqcup$, R$+$, L$\multimap$, L$\sim$ in R$\sim$ potekajo enako. Oglejmo si torej še desno pravilo za veznik $\star$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0 \\ \Gamma, C \Rightarrow A, \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', C \Rightarrow A \star B, \Delta, \Delta'}\,\mathrm{R}\star \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ \Gamma'' \Rightarrow C, \Delta''\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow A \star B, \Delta, \Delta', \Delta''}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0 \\ \Gamma, C \Rightarrow A, \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ \Gamma'' \Rightarrow C, \Delta''\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma'' \Rightarrow A, \Delta, \Delta''}\,\mathrm{Rez} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow A \star B, \Delta, \Delta', \Delta''}\,\mathrm{R}\star$$

Pri tem koraku je pomembno, da se formula C, ki jo režemo, kot predpostavka dodatno pojavi le v enem izmed skventov $\Gamma \Rightarrow A, \Delta$ in $\Gamma' \Rightarrow B, \Delta'$, ne v obeh. Pravilo R$\star$ namreč združi konteksta, tako da bi drugače morali C iz sekventa rezati dvakrat. To pa nam tudi omogoči zelo enostaven korak indukcije, kot je izveden zgoraj. Enako se obravnava primera L$+$ in R$\multimap$, primer L$\sqcup$, ki nam med izjavnimi vezniki še edini ostane, pa se obravnava enako kot primer R$\sqcap$.

Oglejmo si še konstante. Tokrat seveda obravnavamo tudi konstanti $\top$ ter $\bot$, saj rez ni glaven in nimamo več težave z dejstvom, da imata vsaka le po eno logično pravilo:

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, C \Rightarrow \top, \Delta}\,\mathrm{R}\top \qquad \begin{matrix}\mathcal{D} \\ \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \top, \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \top, \Delta, \Delta'}\,\mathrm{R}\top$$

Ker lahko $\top$ med sklepi vedno dokažemo, lahko končni sekvent dobimo tudi ne da bi rezali formulo C, saj je ta že od začetka med predpostavkami nastala „odvečno”. Korak indukcije za konstanto $\bot$ izvedemo simetrično, saj zanjo velja ista lastnost, tokrat med predpostavkami. Pri obravnavi konstante **1** desno pravilo ne pride v poštev, saj v nastalem sekventu druga formula kot **1** ne more nastopati. Oglejmo si raje L**1**:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0 \\ \Gamma, C \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma, C, \mathbf{1} \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\mathbf{1} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', \mathbf{1} \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0\\ \Gamma, C \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}}{\Gamma, \Gamma', \mathbf{1} \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{L}\mathbf{1}$$

Seveda je korak indukcije pri konstantni **0** simetričen. Pri kvantifikatorjih so vsi primeri zopet enaki, zato obravnavajmo le enega:

$$\dfrac{\text{L}\forall\,\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0\\ \Gamma, C, A[t/x] \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma, C, \forall x A \Rightarrow \Delta} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', \forall x A \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0\\ \Gamma, C, A[t/x] \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', A[t/x] \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}}{\Gamma, \Gamma', \forall x A \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{L}\forall$$

Lotimo se sedaj eksponentov. Zaradi simetričnosti bomo podrobno spet obravnavali le veznik !. Začnimo s primerom, ko je bila nad rezom vpeljana formula !A s skrčitvijo, ošibitvijo ali levim pravilom. Vsi ti primeri so si enaki, zato obravnavajmo le skrčitev:

$$\dfrac{\text{C!}\,\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0\\ \Gamma, C, !A, !A \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma, C, !A \Rightarrow \Delta} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', !A \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0\\ \Gamma, C, !A, !A \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', !A, !A \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}}{\Gamma, \Gamma', !A \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{C!}$$

Pri pravilu R? pa moramo biti bolj pozorni. Da smo lahko desno pravilo za veznik ? sploh uporabili, je morala biti formula C, ki jo režemo, oblike $!C$, če je v danem poddrevesu na desni strani sekventa, ali $?C$, če je na levi. Oba primera sta simetrična, zato si poglejmo rezanje formule oblike $!C$:

$$\dfrac{\text{R!}\,\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0\\ !\Gamma, !C \Rightarrow A, ?\Delta\end{matrix}}{!\Gamma, !C \Rightarrow !A, ?\Delta} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \Gamma' \Rightarrow !C, \Delta'\end{matrix}}{!\Gamma, \Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta, \Delta'}\,\text{Rez}$$

Tu pa nastopi težava, saj drevesa izpeljave ne moremo preoblikovati, ne da bi vedeli kaj več o desnem poddrevesu nad rezom:

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_0\\ !\Gamma, !C \Rightarrow A, ?\Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \Gamma' \Rightarrow !C, \Delta'\end{array}}{!\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}}{?}$$

Če namreč Γ' ni oblike $!\Gamma'$ in Δ' ni oblike $?\Delta'$, desnega pravila za veznik ! ne moremo več uporabiti. Ločiti je treba tri primere, glede na zadnje pravilo pred sekventom $\Gamma' \Rightarrow !C, \Delta'$:

1. zadnje pravilo je R!,
2. zadnje pravilo je L?,
3. zadnje je katerokoli drugo pravilo.

V tretjem primeru nimamo težav, saj smo vsak tak primer že obravnavali tekom tega podpoglavja. Drugi primer se pravzaprav ne more zgoditi, prvi pa se ne more zgoditi, razen če R! vpelje ravno formulo $!C$:

$$\mathrm{R!}\,\dfrac{!\Gamma' \Rightarrow !C, B, ?\Delta'}{!\Gamma' \Rightarrow !C, !B, ?\Delta'} \qquad \text{ali} \qquad \dfrac{!\Gamma', B \Rightarrow !C, ?\Delta'}{!\Gamma', ?B \Rightarrow !C, ?\Delta'}\,\mathrm{L?}$$

Zaradi formule $!C$, ki jo želimo rezati, sklepi namreč niso v celoti predznačeni z veznikom ?. Ostane nam torej le primer, ko je formula $!C$ na desni vpeljana tik nad rezom:

$$\dfrac{\mathrm{R!}\,\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_0\\ !\Gamma, !C \Rightarrow A, ?\Delta\end{array}}{!\Gamma, !C \Rightarrow !A, ?\Delta} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ !\Gamma' \Rightarrow C, ?\Delta'\end{array}}{!\Gamma' \Rightarrow !C, ?\Delta'}\,\mathrm{R!}}{!\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta, ?\Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_0\\ !\Gamma, !C \Rightarrow A, ?\Delta\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ !\Gamma' \Rightarrow C, ?\Delta'\end{array}}{!\Gamma' \Rightarrow !C, ?\Delta'}\,\mathrm{R!}}{!\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta, ?\Delta'}\,\mathrm{Rez}}{!\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta, ?\Delta'}\,\mathrm{R!}$$

4.2.4 Eliminacija posplošenega reza, ki ni glaven

Obravnavali bomo le eliminacijo pravila $\mathrm{Rez!}_n$, saj je eliminacija $\mathrm{Rez?}_n$ simetrična. Zopet bomo primere ločili glede na zadnje pravilo pred rezom, ki ne vpelje rezane formule. Za razliko od prejšnjega podpoglavja pa je tu pomembno, na kateri strani nad rezom se to pravilo zgodi, saj rez ni več simetričen. Denimo, da formula ni vpeljana na desni, torej:

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0 \\ \Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \dfrac{\mathcal{D}_1}{\Gamma' \Rightarrow !A, C, \Delta'}\,\text{Pravilo, ki vpelje } C}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow C, \Delta, \Delta'}\,\text{Rez!}_n$$

V tem primeru pravzaprav ni važno, ali je bil obravnavani rez posplošen ali ne. Pri vseh pravilih iz prejšnjega poglavja, razen R! in L?, je bilo drugo poddrevo za korak indukcije nepomembno. Pravili R! in L? pa zopet ne moreta vpeljati formule C, saj sklepi $!A, \Delta$, zaradi formule $!A$ ne morejo biti predznačeni z veznikom ?.

Korak indukcije, ko formula $!A$ na desni *ni* bila vpeljana, smo torej obdelali že v prejšnjem podpoglavju, zato nam ostane le še naslednji primer:

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0 \\ \Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ !\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'\end{matrix}}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\text{R!}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez!}_n$$

Sedaj moramo primere ločiti glede na zadnje pravilo nad sekventom $\Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta$. Ti primeri so si med seboj spet zelo podobni, zato bomo obravnavali le pravili R$\sqcap$ ter R$\star$, začenši z desnim pravilom za veznik $\sqcap$:

$$\dfrac{\text{R}\sqcap\,\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0 \\ \Gamma, (!A)^n \Rightarrow B, \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \Gamma, (!A)^n \Rightarrow C, \Delta\end{matrix}}{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow B \sqcap C, \Delta} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ !\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'\end{matrix}}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\text{R!}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow B \sqcap C, \Delta, ?\Delta'}\,\text{Rez!}_n$$

$$\downarrow$$

$$\text{R}\sqcap\,\dfrac{\text{Rez!}_n\,\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0 \\ \Gamma, (!A)^n \Rightarrow B, \Delta\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ !\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'\end{matrix}}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\text{R!}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow B, \Delta, ?\Delta'} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \Gamma, (!A)^n \Rightarrow C, \Delta\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ !\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'\end{matrix}}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\text{R!}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow C, \Delta, ?\Delta'}\,\text{Rez!}_n}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow B \sqcap C, \Delta, ?\Delta'}$$

Pri R$\sqcap$ predpostavke ostanejo v isti obliki, kar pomeni, da je korak indukcije enak, kot če bi obravnavali le navadni rez. Dejstvo, da je bilo rezanih več formul naenkrat namreč ne pride v poštev. Enako se seveda zgodi pri vsakem pravilu, ki predpostavk ne razdeli na dvoje. Pri R$\star$ pa se zgodi naslednje:

$$\dfrac{\text{R}\star\,\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_0 \\ \Gamma, (!A)^p \Rightarrow B, \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \Gamma', (!A)^q \Rightarrow C, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', (!A)^{p+q} \Rightarrow B \star C, \Delta, \Delta'} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ !\Gamma'' \Rightarrow A, ?\Delta''\end{matrix}}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\text{R!}}{\Gamma, \Gamma', !\Gamma'' \Rightarrow B \star C, \Delta, \Delta', ?\Delta''}\,\text{Rez!}_{p+q}$$

$$\downarrow$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_0}{\Gamma, (!A)^p \Rightarrow B, \Delta} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_2}{!\Gamma'' \Rightarrow A, ?\Delta''}}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\text{R!}}{\Gamma, !\Gamma'' \Rightarrow B, \Delta, ?\Delta''}\,\text{Rez!}_p \qquad \dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_1}{\Gamma', (!A)^q \Rightarrow C, \Delta'} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_2}{!\Gamma'' \Rightarrow A, ?\Delta''}}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\text{R!}}{\Gamma', !\Gamma'' \Rightarrow C, \Delta', ?\Delta''}\,\text{Rez!}_q}{\Gamma, \Gamma', !\Gamma'', !\Gamma'' \Rightarrow B \star C, \Delta, \Delta', ?\Delta'', ?\Delta''}\,\text{R}\star}{\Gamma, \Gamma', !\Gamma'' \Rightarrow B \star C, \Delta, \Delta', ?\Delta'', ?\Delta''}\,\text{C!}\times|\Gamma''|}{\Gamma, \Gamma', !\Gamma'' \Rightarrow B \star C, \Delta, \Delta', ?\Delta''}\,\text{C?}\times|\Delta''|}{}
$$

Pomembno je, da so predpostavke v desnem poddrevesu začetnega drevesa oblike $!\Gamma''$, sklepi pa oblike $?\Delta''$, saj smo jih zaradi tega lahko uporabili dvakrat. Enako se zgodi pri L$+$ ter R$\multimap$, saj ti dve pravili predpostavke prav tako razdelita na dva dela.

4.2.5 Baza indukcije

Začnimo z navadnim rezom. Kot omenjeno na začetku tega dokaza, je pri bazi indukcije potrebno preveriti, kaj se zgodi, ko je stopnja reza enaka $(1, \mathfrak{h})$, za nek $h \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Denimo, da $\mathfrak{h} \neq 3$:

$$
\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_0}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\mathcal{D}_1}{\Gamma' \Rightarrow A, \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}
$$

To pomeni, da $\mathfrak{h}(\mathcal{D}_0) \neq 0$ ali $\mathfrak{h}(\mathcal{D}_1) \neq 0$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da to velja prvo. Ker je $\mathfrak{R}(A) = 1$, je A po definiciji lahko le osnovna formula ali pa ena izmed konstant. Osnovna formula je lahko vpeljana le s strani pravila aksiom, zato je moralo zadnje pravilo vpeljati neko drugo formulo v Γ ali Δ. To pa pomeni, da se lahko skličemo na podpoglavje 4.2.3. Enako se zgodi, če je bila A ena izmed konstant, ki na levi ni bila vpeljana.

Če pe je bila formula A neka konstanta, ki jo je vpeljalo zadnje pravilo na levi, imamo tri možnosti. Če je bila vpeljana tudi na drugi strani, je to glavni rez konstante in lahko se skličemo na podpoglavje 4.2.1. Če je bila na desni vpeljana neka druga formula, smo to zopet že obravnavali, tako da nam preostane le primer, ko je na desni pravilo aksioma:

$$
\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}_0}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{}{A \Rightarrow A}\,\text{Ax}}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\,\text{Rez}
$$

$$
\downarrow
$$

$$
\dfrac{\mathcal{D}_0}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}
$$

Kot lahko vidimo je to precej trivialen korak, saj rezanje formule, ki je bila ravnokar vpeljana z aksiomom, nima učinka. Ostane nam le, da preverimo ali lahko rez eliminiramo, če $\mathfrak{h} = 3$. Drevo je moralo biti oblike:

$$
\dfrac{\text{Ax}\,\dfrac{}{A \Rightarrow A} \qquad \dfrac{}{A \Rightarrow A}\,\text{Ax}}{A \Rightarrow A}\,\text{Rez}
$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{}{A \Rightarrow A}\,\text{Ax}$$

Baza indukcije pri posplošenem rezu se obravnava za $\mathfrak{R} = 2$, saj je to najnižji možni rang rezane formule pri take vrste rezu. Višina reza ne more biti 3, saj na levi ni moglo nastopati pravilo aksioma. Vsi argumenti, kako to prevesti na probleme prejšnjih podpoglavij, so enaki kot pri navadnem rezu, kjer $\mathfrak{h} \neq 3$. Oglejmo si le, kaj se zgodi, če je na desni strani tik nad rezom aksiom:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_0\\ \Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta\end{array} \qquad \dfrac{}{!A \Rightarrow !A}\,\text{Ax}}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\,\text{Rez}!_n$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_0\\ \Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\,\text{C}!\times(n-1)$$

S tem smo dokaz izreka o eliminaciji rezov zaključili, saj smo obdelali vse primere koraka indukcije ter bazni primer za obe vrsti rezov.

Slovar strokovnih izrazov

atomic formula osnovna formula
axiom aksiom
connective „of course” veznik „seveda”
connective „why not” veznik „zakaj ne”
contraction skrčitev
cut rule pravilo reza
cut elimination eliminacija rezov
cutrank rang rezane formule
exchange menjava
exponentials eksponenti
generalised cut rule posplošeno pravilo reza
intuitionistic logic intuicionistična logika
level of cut višina
principal cut glavni rez
proof tree drevo izpeljave
rank of formula rang formule
sequent sekvent
term term
weakening ošibitev

Literatura

[1] R. Di Cosmo in D. Miller, *Linear Logic*, v: The Stanford Encyclopedia of Philosophy (ur. E. N. Zalta in U. Nodelman), Fall 2023, Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2023.

[2] J.-Y. Girard, *Linear logic*, Theor. Comput. Sci. **50**(1) (1987) 1–102, DOI: `10.1016/0304-3975(87)90045-4`, dostopno na `https://doi.org/10.1016/0304-3975(87)90045-4`.

[3] J. von Plato, *The Development of Proof Theory*, v: The Stanford Encyclopedia of Philosophy (ur. E. N. Zalta), Winter 2018, Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018.

[4] A. Troelstra, *Lectures on linear logic*, Center for the Study of Language and Information Publication Lecture Notes, Cambridge University Press, 1992.