UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Jona Koltaj

ELIMINACIJA REZOV V LINEARNI LOGIKI

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Andrej Bauer

Ljubljana, 2025

Kazalo

Eliminacija rezov v linearni logiki

Povzetek

...

Cut elimination in linear logic

Abstract

...

Math. Subj. Class. (2020): ..., ...
Ključne besede: ..., ...
Keywords: ..., ...

1 Sekventni račun

Sekventni račun je formalni sistem dokazovanja, ki sestoji iz t. i. sekventov in vnaprej določenih pravil, kako jih smemo preoblikovati. Vsak korak dokaza torej uporabi enega izmed teh pravil, dokler začetnega sekventa ali sekventov ne preoblikujemo v tistega, ki smo ga želeli dokazati.

Korake ločimo s horizontalno črto, nad katero so vsi sekventi, ki jih pravilo uporabljeno na tem koraku sprejme, velikokrat pomimenovani *hipoteze*, pod njo pa je novo dobljeni sekvent, navadno imenovan *sklep*. Označimo hipoteze s $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$, sklep pa s $\mathcal{C}$. Korak izpeljave bo torej izgledal takole:

$$\frac{\mathcal{H}_0 \qquad \mathcal{H}_1 \qquad \ldots \qquad \mathcal{H}_n}{\mathcal{C}}\ \text{Pravilo}$$

Na desni ponavadi označimo, katero pravilo smo uporabili na tem koraku, zavoljo preglednosti.

1.1 Sekvent in formula

Definicija 1.1. Naj bosta $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ter $B_0, B_1, \ldots, B_n$ končni zaporedji logičnih formul. *Sekvent* je izraz oblike $A_0, \ldots, A_n \Rightarrow B_0, \ldots, B_m$.

Formulam na levi strani sekventa navadno pravimo *predpostavke*, formulam na desni pa *sklepi*. Celotno zaporedje predpostavk bomo označevali z Γ, zaporedje sklepov pa z Δ.

Pomembno je omeniti še, da simbol $\Rightarrow$ v sekventu ne predstavlja običajne implikacije in ga raje beremo kot „dokaže”. Vejice na levi strani sekventa se bere kot „in”, vejice na desni strani pa kot „ali”. Sekvent $A, B \Rightarrow C, D$ bi se torej razumel kot „formuli A in B dokažeta formulo C ali formulo D”.

V zgornji definiciji smo uporabili besedo *formula*, ki jo je potrebno bolj formalno definirati. Definicija je induktivna, kar pomeni, da se formule gradijo iz podformul, te iz svojih podformul in tako dalje, na dnu pa so t. i. osnovne formule. Te pa so zgrajene iz termov, ki so prav tako induktivno definirani.

Definicija 1.2. *Term* je izraz, ki je lahko v treh različnih oblikah.

1. To je lahko neka spremenljivka.

2. Lahko je konstanta.

3. Lahko pa je rezultat funkcije, ki sprejme določeno število termov.

Primer 1.3. Na voljo imamo denimo naravna števila, na katerih je definirana funkcija $+$, ki sprejme dva terma. Možni termi, ki jih lahko tvorimo, so torej lahko npr. spremenljivka x, konstanta 3 ali pa izraz $x + 3$.

Definicija 1.4. *Formula* je izraz v dveh oblikah.

1. *Osnovna formula* je predikatni simbol ali relacija, ki sprejme določeno število termov.

2. *Sestavljena formula* je – kot pove ime – sestavljena iz ene ali več podformul, med seboj povezanih z veznikom.

Primer 1.5. Imamo denimo terma t_1 in t_2 in relacijo $=$, ki sprejme dva terma. Tvorimo torej lahko osnovno formulo $t_1 = t_2$.

Primer 1.6. Če imamo dve formuli A in B, so npr. $A \wedge B$, $\neg A$, $A \vee B$ tudi formule.

Katere sestavljene formule lahko tvorimo je odvisno od tega, s kakšnimi vezniki želimo delati. Če naša logika na primer ne uporablja veznika $\wedge$, formula $A \wedge B$ ne pomeni ničesar. Specifične veznike, ki jih bomo uporabljali pri linearni logiki, bomo natančneje definirali v ?? odseku.

1.2 Pravila pri sekventnem računu

Pravila pri sekventnem računu delimo na *strukturna pravila*, ki nam povedo kako ravnati s poljubnimi zaporedji formul, *logična pravila* ali *pravila vpeljave*, ki nam povedo kako z različnimi vezniki tvorimo nove formule, in pa pravilo aksioma.

Definicija 1.7. *Aksiom* je vsak sekvent oblike $A \Rightarrow A$, kar lahko interpretiramo kot „formula dokaže sama sebe". To je seveda vedno res, zato pravilo aksioma, skrajšano *Ax*, pravi, da aksiome lahko vedno tvorimo, t. j. zanje ne potrebujemo predhodnih sekventov. Zapisano v sekventnem računu torej:

$$\frac{}{A \Rightarrow A}\,\text{Ax}$$

1.2.1 Pravila vpeljave

Pravila vpeljave pri sekventnem računu načeloma sestojijo iz *levega pravila vpeljave* ter *desnega pravila vpeljave*. Prvo nam pove kako veznik uporabiti med predpostavkami, drugo pa kako dani veznik dokazati.

Oglejmo si kot primer pravilo vpeljave za veznik $\wedge$. Več veznikov bomo vpeljali in si podrobneje pogledali v poglavju ??.

Definicija 1.8. *Levo pravilo vpeljave veznika* $\wedge$, krajše $L\wedge$, pravi, da če znamo nekaj dokazati iz formule A, znamo isto dokazati iz $A \wedge B$ za poljubno formulo B. Ker je veznik $\wedge$ simetričen, je tudi to pravilo simetrično.

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}\,\text{L}\wedge \qquad \text{in} \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}\,\text{L}\wedge$$

Definicija 1.9. *Desno pravilo vpeljave veznika* $\wedge$, krajše $R\wedge$, pa pravi, da če znamo iz nekih predpostavk dobiti formulo A ter iz istih predpostavk dobiti formulo B, znamo iz teh predpostavk dobiti tudi formulo $A \wedge B$.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta}\,\text{R}\wedge$$

1.2.2 Strukturna pravila

Običajno je sekventni račun opremljen s tremi strukturnimi pravili.

Definicija 1.10. *Pravilo menjave*, krajše *Ex*, nam pove, da lahko vrstni red predpostavk in sklepov med seboj poljubno menjamo.

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Ex} \qquad \text{in} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A, \Delta'}\,\mathrm{Ex}$$

Opomba 1.11. Do sedaj smo na Γ in Δ gledali kot zaporedji formul. Če ju namesto tega definiramo kot *multimnožici*, torej množici, kjer je vsakemu elementu prirejeno število pojavitev, lahko pravilo menjave završemo, saj sledi že iz same strukture predpostavk in sklepov. Zavoljo enostavnosti bomo torej na Γ in Δ v nadaljevanju gledali kot multimnožici.

Tu je pomembno, da to ni le množica, saj nas še vedno zanima koliko formul, četudi istih, nastopa v sekventu.

Definicija 1.12. *Ošibitev*, krajše W, nam pove, da lahko tako predpostavke kot sklepe „ošibimo” z dodatno formulo.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{W} \qquad \text{in} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\,\mathrm{W}$$

Kar to pomeni na levi je, da če znamo že iz Γ dokazati Δ, potem lahko med predpostavke dodamo kakršnokoli odvečno formulo in bomo Δ še vedno znali dokazati. Odvečne predpostavke nam torej ne škodujejo.

Na desni pa, ker tam vejico beremo kot „ali” velja podobno. Če znamo iz Γ dokazati Δ, potem znamo iz Γ dokazati tudi Δ ali A.

Definicija 1.13. *Skrčitev*, krajše C, nam pove, da število ponovitev formule tako med predpostavkami kot sklepi ni pomembno.

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{C} \qquad \text{in} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\,\mathrm{C}$$

Če torej znamo dokazati Δ iz dveh ponovitev formule A, znamo isto dokazati iz le ene kopije. Prav tako, če znamo dvakrat dokazati A, znamo to seveda narediti tudi enkrat.

Preden preidemo specifično na linearno logiko je potrebno še omeniti, da pri sekventnem računu dokazujemo „od spodaj navzgor”. Začnemo torej s sekventom, ki bi ga želeli dokazati in poiščemo katera pravila, strukturna ali logična, so nam na voljo. Analogija pri dokazovanju v vsakdanji matematiki je, da začnemo s problemom, ki ga želimo dokazati, in ga razčlenimo na manjše podprobleme, dokler ne dobimo nečesa, za kar gotovo vemo da je res. Prav tako poskušamo pri sekventnem računu sekvente postopoma prevesti na aksiom, ki pa bo vedno veljal.

Tudi pravila si zato lahko interpretiramo drugače. Levo pravilo za veznik $\wedge$ iz definicije 1.8 lahko sedaj razumemo kot; če želimo iz $A \wedge B$ dokazati neke sklepe Δ je dovolj da Δ dokažemo iz formule A ali iz formule B. Desno pravilo za $\wedge$ iz definicije 1.9 pa razumemo kot; če želimo iz predpostavk Γ dokazati $A \wedge B$, je dovolj da iz Γ dokažemo A ter da iz Γ dokažemo B.

Za primer dokaza v sekventnem računu si oglejmo skoraj trivialen dokaz komutativnosti veznika $\wedge$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \Rightarrow B}\,\mathrm{Ax}}{A \wedge B \Rightarrow B}\,\mathrm{L}\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow A}\,\mathrm{Ax}}{A \wedge B \Rightarrow A}\,\mathrm{L}\wedge}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\,\mathrm{R}\wedge$$

V besedah lahko ta dokaz razumemo sledeče. Želimo izpeljati, da $A \wedge B$ dokaže $B \wedge A$. Dovolj je, da dokažemo, da $A \wedge B$ dokaže A ter da dokaže B. Na levi je potem dovolj pokazati, da že B dokaže B, kar pa je vedno res. Na desni se zgodi podobno.

Od sedaj naprej bomo vsa pravila in dokaze interpretirali od spodaj navzgor.

2 Linearna logika

Linearna logika je podzvrst logike sekventnega računa, kjer zavržemo pravili ošibitve in skrčitve iz definicij 1.12 in 1.13. To pomeni, da moramo vsako predpostavko uporabiti natanko enkrat ter da ne smemo imeti odvečnih predpostavk. Prav tako moramo vsak sklep dokazati natanko enkrat, brez odvečnih sklepov.

Za primer si oglejmo še eno možno definicijo veznika $\wedge$, poleg 1.8 ter 1.9 , označimo ga v tem primeru z $\wedge'$.

Definicija 2.1. *Levo pravilo vpeljave veznika* $\wedge'$ pravi, če želimo iz $A \wedge' B$ dokazati Δ, lahko veznik na levi enostavno prevedemo nazaj v vejico in iz A ter B dokazujemo Δ.

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge' B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\wedge'$$

Definicija 2.2. *Desno pravilo vpeljave veznika* $\wedge'$ pa pravi, da če želimo $A \wedge' B$ dokazati, lahko predpostavke (in preostale sklepe, ki niso povezani z A in B) ločimo na dva dela ter z enim delom dokažemo A, z drugim pa B. Obratno gledano, če znamo iz Γ dokazati A ter iz Γ' dokazati B, lahko predpostavke združimo in dokažemo $A \wedge' B$.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \wedge' B, \Delta, \Delta'}\,\mathrm{R}\wedge'$$

Lema 2.3. *Če dopustimo uporabo ošibitve in skrčitve, sta si levi in desni pravili vpeljave za* $\wedge$ *ter* $\wedge'$ *ekvivalentni.*

Dokaz. Začnimo z dokazom ekvivalence levih pravil za veznika $\wedge$ ter $\wedge'$. Dokaz ekvivalence v tem kontekstu pomeni, da sta pravili medsebojno izpeljivi. Izpeljava levega pravila za $\wedge'$ iz definicije 2.1 na podlagi levega pravila za $\wedge$ iz definicije 1.8 poteka s pomočjo skrčitve.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B, B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\wedge}{\Gamma, A \wedge B, A \wedge B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\wedge}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{C}$$

Najprej torej predpostavko $A \wedge B$ „podvojimo”, nato pa dvakrat uporabimo levo pravilo za $\wedge$, vsakič ne eni izmed podvojenih predpostavk.

Obratna izpeljava pa poteka s pomočjo ošibitve. Tu najprej uporabimo levo pravilo za $\wedge'$, nato pa odvečno izmed predpostavk odstranimo s pomočjo ošibitve.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{W}}{\Gamma, A \wedge' B \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{L}\wedge'$$

Podobno dokažemo ekvivalenco desnega pravila za $\wedge$ iz definicije 1.9 ter desnega pravila za $\wedge'$ iz definicije 2.2.

$$\dfrac{\mathrm{W}\times|\Gamma' \cup \Delta'|\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta, \Delta'} \qquad \dfrac{\Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow B, \Delta, \Delta'}\ \mathrm{W}\times|\Gamma \cup \Delta|}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \wedge B, \Delta, \Delta'}\ \mathrm{R}\wedge$$

Ko zgoraj iz desnega pravila za $\wedge$ izpeljujemo desno pravilo za $\wedge'$, najprej uporabimo desno pravilo za $\wedge$, torej predpostavk (in sklepov) ne razdelimo na dva dela, zato se s pomočjo ošibitve na levi „znebimo” (saj pravila beremo od spodaj navzgor) predpostavk Γ' in sklepov Δ'. To naredimo tako, da ošibitev iteriramo tolikokrat, kolikor je velikost multimnožice $\Gamma' \cup \Delta'$. Podobno naredimo na desni strani.

Ko pa iz desnega pravila za $\wedge'$ izpeljujemo desno pravilo za $\wedge$, najprej „podvojimo” vse predpostavke v Γ in vse sklepe v Δ, nato pa uporabimo desno pravilo za $\wedge'$ in podvojene predpostavke spet razpolovimo.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma, \Gamma \Rightarrow A \wedge' B, \Delta, \Delta}\ \mathrm{R}\wedge'}{\Gamma \Rightarrow A \wedge' B, \Delta}\ \mathrm{C}\times|\Gamma \cup \Delta|$$

□

Opomba 2.4. V zgornjem dokazu smo se malce podrobneje spustili v intuicijo posameznega dela dokaza, saj je to prvi formalen dokaz v sekventnem računu v tem delu. V nadaljnem je intuicija za posamezne vrstice dokaza načeloma prepuščena bralcu.

Kot smo v zgornjem dokazu lahko videli, se za dokaz ekvivalence $\wedge$ ter $\wedge'$ na bistven način uporabi tako skrčitev kot ošibitev. Slutimo lahko, da brez teh dveh pravil veznika pravzaprav nista ekvivalentna, kar se tudi izkaže za resnično ??cite??. Zato sta sta ta dva veznika v linearni logiki dva različna veznika

2.1 Propozicijski vezniki

Definicija 2.5. Veznik $\wedge$, s pravili iz definicij 1.8 in 1.9, se še vedno glasi *in*, zapišemo pa ga s simbolom $\sqcap$. Zapišimo še enkrat njegovo levo in desno pravilo, tokrat s pravilnim pojmovanjem.

$$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \sqcap B \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{L}\sqcap \qquad \dfrac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \sqcap B \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{L}\sqcap \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \sqcap B, \Delta}\ \mathrm{R}\sqcap$$

Definicija 2.6. Veznik $\wedge'$, s pravili iz definicij 2.1 in 2.2 pa preimenujemo v *tenzor* ter ga zapišemo s simbolom $\star$.

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \star B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\star \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \star B, \Delta, \Delta'}\,\mathrm{R}\star$$

Zakaj te dva veznika v kontekstu linearne logike nista enaka je razvidno že če primerjamo njuni levi in desni pravili. Kot smo omenili na začetku tega poglavja je pomembno, da vsako predpostavko uporabimo natanko enkrat. Veznik $\sqcap$ med predpostavkami na nek način vsebuje le eno izmed predpostavk, ki ju združuje, medtem ko veznik $\star$ vsebuje obe. Ko torej uporabimo $A \sqcap B_{\text{¸}}$ da dokažemo neki Δ, uporabimo le A ali B, medtem ko pri $A \star B$ uporabimo tako A kot B. Če pa želimo dokazati, da velja $A \sqcap B$, pa je dovolj, da iz istih predpostavk dokažemo A ter B, prav tako ostale sklepe na desni strani sekventa pustimo pri miru. To spet implicira, da vsebuje $A \sqcap B$ enako število informacij kot le A ali B. Če pa dokazujemo $A \star B$, pa moramo posebej dokazati A, nato pa iz ločenega sklopa predpostavk dokazati B. Ostale sklepe poleg $A \star B$ je tudi potrebno posebej dokazati. Vse to spet implicira, da vsebuje tenzor informacij tako za A kot B.

Oglejmo si sedaj še preostale veznike, začenši z veznikom $\vee$. V linearni logiki se ta spet razdeli na dvoje, intuicija za to pa je simetična intuiciji za veznik $\wedge$, zato jo prepustimo bralcu.

Definicija 2.7. Veznik *ali*, označen z $\sqcup$, ima sledeče levo in desno pravilo vpeljave.

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \sqcup B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\sqcup \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \sqcup B, \Delta}\,\mathrm{R}\sqcup \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \sqcup B, \Delta}\,\mathrm{R}\sqcup$$

Kot vidimo sta obe pravili popolnoma simetrični praviloma za veznik $\sqcap$.

Definicija 2.8. Veznik *plus*, označen z $+$ pa je analogno simetričen vezniku $\star$.

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A + B \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{L}+ \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A + B, \Delta}\,\mathrm{R}+$$

Vsi nadaljni vezniki imajo v linearni logiki enaka pravila vpeljave kot v navadnem sekventnem računu in se ne delijo na dva dela, še vseeno pa so to *linearni* vezniki, že samo zaradi pogojev pod katerimi so vpeljani. Če na primer A linearno implicira B to pomeni, da natanko en A implicira natanko en B, linearna negacija formule A pa negira natanko en A.

Za vpeljavo implikacije zopet potrebujemo drugačen simbol kot smo ga vajeni, saj se $\Rightarrow$ že uporablja v strukturi sekventa samega. Običajni sekventni račun v ta namen uporablja $\rightarrow$, linearna implikacija pa, da se loči od nelinearne, spet uporabi svoj simbol.

Definicija 2.9. *Implikacija*, označena s simbolom $\multimap$, je vpeljana z naslednjimi pravili.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{L}\multimap \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B, \Delta}\,\mathrm{R}\multimap$$

Kot lahko vidimo je desno pravilo vpeljave dokaj jasno za interpretacijo. Če dokazujemo $A \multimap B$, je dovolj da pod predpostavko A dokažemo B. Levo pravilo pa je morda lažje brati od zgoraj navzdol. Če torej z Γ dokažemo A ter neke druge sklepe Δ, iz Γ' in B pa dokažemo Δ', lahko iz združenih predpostavk Γ, Γ' ter dejstva, da iz A sledi B dokažemo združene sklepe Δ, Δ'.

Definicija 2.10. *Negacija*, označena s simbolom $\sim$, ima naslednji pravili vpeljave.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \sim A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\sim \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \sim A, \Delta}\,\mathrm{R}\sim$$

?? Kaj je tuki sploh intuicija lmao??

2.2 Propozicijske konstante

V običajnem sekventnem računu imamo dvoje konstant; resnico in neresnico, ki pa se v linearni logiki spet vsaka razdelita na dvoje. Resnici se delita na enoto za $\star$ ter enoto za $\sqcap$, neresnici pa na enoto za $+$ ter enoto za $\sqcup$.

Definicija 2.11. *Enota*, označena z $\mathbf{1}$, ima levo in desno pravilo vpeljave:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{1} \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\mathbf{1} \qquad \frac{}{\Rightarrow \mathbf{1}}\,\mathrm{R}\mathbf{1}$$

Enoto torej lahko brez predpostavk vedno dokažemo, kar nam pove desno pravilo, če pa vemo da enota velja je to trivialna informacija, kar nam pove levo pravilo.

Definicija 2.12. *Resnica*, označena z $\top$, ima le desno pravilo vpeljave. Ne moremo je torej uporabiti kot sklep.

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow \top, \Delta}\,\mathrm{R}\top$$

Kar nam to pove je, da resnica vedno velja.

Lema 2.13. *Enota* $\mathbf{1}$ *je enota za za* $\star$*, resnica* $\top$ *pa je enota za* $\sqcap$*.*

Dokaz. Za dokaz leme potrebujemo izpeljati sekvente $A \star \mathbf{1} \Rightarrow A$, $A \Rightarrow A \star \mathbf{1}$, $A \sqcap \top \Rightarrow A$ ter $A \Rightarrow A \sqcap \top$.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow A}\,\mathrm{Ax}}{A, \mathbf{1} \Rightarrow A}\,\mathrm{L}\mathbf{1}}{A \star \mathbf{1} \Rightarrow A}\,\mathrm{L}\star \qquad \frac{\mathrm{Ax}\,\dfrac{}{A \Rightarrow A} \quad \dfrac{}{\Rightarrow \mathbf{1}}\,\mathrm{R}\mathbf{1}}{A \Rightarrow A \star \mathbf{1}}\,\mathrm{R}\star$$

$$\frac{\dfrac{}{A \Rightarrow A}\,\mathrm{Ax}}{A \sqcap \top \Rightarrow A}\,\mathrm{L}\sqcap \qquad \frac{\mathrm{Ax}\,\dfrac{}{A \Rightarrow A} \quad \dfrac{}{A \Rightarrow \top}\,\mathrm{R}\top}{A \Rightarrow A \sqcap \top}\,\mathrm{R}\sqcap$$

□

Pri neresnici je razlog za razdvojitev enak, pravila vpeljave pa so simetrična, zato interpretacijo prepustimo bralcu.

Definicija 2.14. *Ničla*, označena z $\mathbf{0}$ ima levo in desno pravilo vpeljave:

$$\frac{}{\mathbf{0} \Rightarrow}\,\mathrm{L}\mathbf{0} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \mathbf{0}, \Delta}\,\mathrm{R}\mathbf{0}$$

Definicija 2.15. *Neresnica*, označena z $\bot$, ima le levo pravilo vpeljave. Ne moremo je torej uporabiti kot predpostavko.

$$\frac{}{\Gamma, \bot \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\bot$$

Dokaz naslednje leme bomo opustili, saj je simetričen dokazu leme 2.13.

Lema 2.16. *Ničla* $\mathbf{0}$ *je enota za* $+$*, neresnica* $\bot$ *pa je enota za* $\sqcup$*.*

2.3 Kvantifikatorja

Definicija 2.17. *Univerzalni kvantifikator*, označen kot navadno s simbolom $\forall$, je definiran z naslednjima praviloma vpeljave. Tu y ne sme biti prost v Γ in Δ.

$$\frac{\Gamma, A[t/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[y/x], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x A, \Delta}\ \mathrm{R}\forall$$

Notacija $A[y/x]$ pomeni, da vsako instanco spremenljivke x zamenjamo s spremenljivko y. Spremenljivka t v definiciji označuje nek specifičen term t, ki si ga izberemo. Levo pravilo vpeljave torej pomeni, da če želimo iz dejstva, da za vsak x velja formula A dokazati Δ, je dovolj, da spremenljivko x v A zamenjamo z nekim specifičnim termom in z njim dokažemo Δ. Spremenljivka y v definiciji pa označuje prosto spremenljivko. Desno pravilo vpeljave je ekvivalentno temu, da pri dokazovanju, da za vsak x velja A, fiksiramo poljuben y in dokazujemo A.

Definicija 2.18. *Eksistenčni kvantifikator* je spet brez sprememb označen s simbolom $\exists$. Spremenljivka y spet ne sme biti prosta v Γ ter Δ.

$$\frac{\Gamma, A[y/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[t/x], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x A, \Delta}\ \mathrm{R}\exists$$

Tokrat levo pravilo vsebuje prosto spremenljivko y, desno pa specifičen term t. Če torej želimo uporabiti dejstvo, da obstaja x, da velja A, fiksiramo poljuben y in dokazujemo A, če pa želimo dokazati, da obstaja x, da velja A, le poščemo nek specifičen term t, da A velja.

2.4 Eksponenta

Včasih si želimo v linearni logiki emulirati tudi običajen sekventni račun, vključno torej z ošibitvijo ter skrčitvijo, a želimo to nelinearnost omejiti na specifične formule. Namen teh „nelinearnih" formul je, da nam dovolijo v linearni logiki dokazati vse, kar je možno dokazati tudi v običajnem sekventnem računu, a da je iz dokaza takoj razvidno, kateri deli sekventa so bili dokazani linearno in kateri ne. Ker želimo označiti formulo kot nelinearno, jo modificiramo v novo formulo z veznikom. Imamo dva takšna veznika, ki ju imenujemo *eksponenta*.

Definicija 2.19. Veznik *seveda* je označen s simbolom !, poleg levega in desnega pravila vpeljave pa zanj veljata še ošibitev in skrčitev na levi strani sekventa. Veznik *zakaj ne* pa je označen s simbolom ?, zanj pa prav tako veljajo štiri pravila; levo in desno pravilo vpeljave ter skrčitev in ošibitev na desni strani sekventa.

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{L!} \qquad \frac{!\Gamma \Rightarrow A, ?\Delta}{!\Gamma \Rightarrow !A, ?\Delta}\ \mathrm{R!} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{W!} \qquad \frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{C!}$$

$$\frac{!\Gamma, A \Rightarrow ?\Delta}{!\Gamma, ?A \Rightarrow ?\Delta}\ \mathrm{L?} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow !A, \Delta}\ \mathrm{R?} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta}\ \mathrm{W?} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow ?A, ?A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta}\ \mathrm{C?}$$

Notacija $!\Gamma$ (ali $?\Delta$) označuje, da je vsaka formula v Γ (ali Δ) predznačena z veznikom ! (ali ?).

Kar želimo z eksponenti označiti je, da imamo „poljubno mnogo” označene formule na voljo. Ker vejice na levi beremo kot „in”, vejice na desni pa kot „ali”, je treba podati dva različna veznika. Formula $!A$ torej označuje „A in A in $\dots$ A”, kolikor kopij pač potrebujemo, formula $?A$ pa označuje „A ali A ali $\dots$ A”.

Interpretacija levega pravila vpeljave za ! je dokaj enostavna. Pove le, da se kadarkoli v procesu dokazovanja lahko odločimo formulo označiti kot nelinearno. Desno pravilo pa je malce bolj komplicirano, saj veznika ! ni tako lahko razumeti na desni strani sekventa. Rabimo, da je že celoten sekvent nelinearen, da lahko ! vpeljemo na desni. Interpretacija levega in desnega pravila za ? je simetrična.

2.5 Notacija in druge formalnosti

Na koncu tega poglavja je potrebnih še nekaj opomb glede zapisa veznikov, strukture sekventov ter strukture linearne logike.

2.5.1 Poimenovanje veznikov

Notacija, uporabljena v tem diplomskem delu, je črpana iz vira ??daj vir??, ni pa najbolj standardna. Jean-Yves Girard, ki se je prvi ukvarjal z linearno logiko je veznike in konstante označil drugače, ta notacija pa se je tudi ohranila. Razlog za spremembo notacije v mojem delu je bolj slogoven kot zgodovinski. Načini kako je notacija spremenjena ter standardna imena veznikov v angleščini so prikazana v spodnji tabeli. ??Daj also vir??

Simbol veznika	Simbol v standardni notaciji	Ime
$\sqcap$	$\&$	with
$\star$	$\otimes$	tensor
$\sqcup$	$\oplus$	plus
$+$	$⅋$	par
$\top$	$\top$	top
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	one
$\bot$	$\mathbf{0}$	zero
$\mathbf{0}$	$\bot$	bottom

??tudi tukej navedi troelstra vir kjer razlozi notacijo?? Kot lahko vidimo so v standardni notaciji parni drugačni vezniki kot v naši notaciji. Razlog za to je, da veznik $+$ distribuira čez veznik $\sqcap$, veznik $\star$ pa distribuira čez $\sqcup$. Velja torej:

$$A + (B \sqcap C) \equiv (A + B) \sqcap (A + C)$$
$$A \star (B \sqcup C) \equiv (A \star B) \sqcup (A \star C)$$

Toda če veznik $+$ negiramo, ne dobimo veznika $\sqcap$, ampak $\star$, če negiramo veznik $\sqcap$ pa dobimo $\sqcup$ in seveda obratno. Dualna para sta torej $(\star, +)$ ter $(\sqcap, \sqcup)$, kar je veliko bolj razvidno pri naših oznakah. Poleg tega sta si že sami pravili za veznika $\star$ ter $+$, iz definicij 2.6 in 2.8, simetrični, kot sta si pravili za $\sqcap$ ter $\sqcup$, iz definicij 2.5 in 2.7. Zdi se mi, da sta ta dva razloga dokaj pomembna za razumevanje veznikov, zato sem se odločila za takšno notacijo, kot jo imam.

2.5.2 Intuicionistična linearna logika

Ker je pogosto, da članki, ki govorijo o linearni logiki, govorijo specifično o intuicionistični linearni logiki, se mi zdi pomembno predstaviti slednje tudi v mojem delu.

Intuicionistična logika je logika brez principa izključene tretje možnosti. To je aksiom, ki pravi, da za poljubno trditev P velja $P \vee \neg P$. V sekventnem računu kot smo ga predstavili do sedaj, se da to pravilo izpeljati iz pravila aksioma. V linearni logiki ta princip velja le za veznik $+$, ne pa za veznik $\sqcup$.??citiraj??

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow A}\,\mathrm{Ax}}{\Rightarrow A, {\sim}A}\,\mathrm{R}{\sim}}{\Rightarrow A + ({\sim}A)}\,\mathrm{R}+$$

V običajnem sekventnem računu je pravilo za negacijo enako, linearnost je ne spremeni, veznika $+$ in $\sqcap$ pa sta si ekvivalnetna in sta oba reprezentaciji veznika $\vee$. To pomeni, da izpeljava principa izključene tretje možnosti poteka enako kot zgoraj.

Če torej želimo delati z intuicionistično linearno logiko, moramo strukturo sekventnega računa nekoliko spremeniti. Izkaže se, ??citiraj?? da je dovolj, da na desni strani sekventov ne dopustimo več kot ene formule. Kot lahko hitro vidimo, zgornja izpeljava ne deluje več, saj sekvent $\Rightarrow {\sim}A, A$ ne more obstajati.

Bistvo intuicionistične logike je poudarek na tem *kako* dokazujemo izreke in trditve, ne le da jih dokažemo. A ker je linearna logika že zelo strukturirana, poleg tega pa bi dopuščanje le ene formule na desni strani sekventa uničilo simetrijo pravil, saj na primer ne bi smeli imeti desnega pravila za $+$, sem se odločila v tem delu uporabljati klasično – torej neintuicionistično – logiko.

2.5.3 Naravna dedukcija

Poleg sekventnega računa je v matematiki zelo pogost sistem dokazovanja *naravna dedukcija*. Naravna dedukcija je načeloma zelo podobna sekventnemu računu, glavna razlika je, da imajo namesto levega in desnega pravila vpeljave vezniki *pravilo vpeljave* in *pravilo eliminacije*??. Tudi naravna dedukcija ima pravili ošibitve in skrčitve, ki ju lahko odstranimo iz sistema, kar pomeni, da sekventni račun ni edini način zapisovanja linearne logike. Za tiste, ki jih zanima linearna logika v naravni dedukciji, si več lahko preberejo ??tukaj??.

3 Izrek o eliminacija rezov

Poslednje pravilo, ki ga je potrebno vpeljati, je *pravilo reza*. To pravilo obstaja tudi v običajnem sekventnem računu in formalizira koncept dokazovanja s pomočjo leme.

Definicija 3.1. *Pravilo reza* pravi, da če znamo pod določenimi predpostavkami dokazati formulo A, potem pa iz te formule dokažemo nekaj drugega, lahko A enostavno režemo iz procesa.

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma', A \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

Opomba 3.2. Vsa dosedanja pravila v linearni logiki so bila na nek način deterministična. Če smo imeli v sekventu določen veznik, smo lahko uporabili pravilo vpeljave tega veznika, če pa v sekvetnu ni nastopal, tega nismo mogli narediti. Pravilo reza pa je v tem smislu drugačno, saj lahko drevo izpeljave poljubno razvejamo z novimi „vrinjenimi" sekventi.

Preden smo v naš sekventni račun vpeljali pravilo reza, je bilo torej dokaj enostavno videti, če sekvent ne velja. Oglejmo si na primer iz podpoglavja 2.5.2, kjer trdimo, da pricip izključene tretje možnosti ne velja za veznik $\sqcup$, tudi pri klasični linearni logiki.

$$\frac{\Rightarrow A}{\Rightarrow A \sqcup (\sim A)}\,\mathrm{R}\sqcup \qquad \frac{\Rightarrow \sim A}{\Rightarrow A \sqcup (\sim A)}\,\mathrm{R}\sqcup$$

Ko dokazujemo sekvent $\Rightarrow A \sqcup (\sim A)$ brez uporabe pravila reza, imamo na voljo le desno pravilo vpeljave veznika $\sqcup$ in nič drugega. Edina dva možna koraka sta torej prikazana zgoraj, sekvent $\Rightarrow A$ ali $\Rightarrow \sim A$ pa ne bo veljal za poljubno formulo A, torej lahko trdimo, da sekvent, ki ga želimo dokazati, ne velja.

Če pa dopustimo uporabo pravila reza, lahko drevo neskončno razvejamo z vrivanjem poljubnih formul, na primer:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Rightarrow B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ B \Rightarrow A \sqcup (\sim A)\end{array}}{\Rightarrow A \sqcup (\sim A)}\,\mathrm{Rez}$$

Drevo izpeljave se lahko razvejuje v neskončnost, zato ne moremo nikoli z gotovostjo trditi, da sekventa ne moremo izpeljati. A če pravilo reza res interpretiramo kot dokaz z uporabo leme, bi bilo smiselno, da če sekventa ne moremo dokazati brez uporabe rezov, ga tudi z rezi ne moremo dokazati. Tu nastopi naslednji izrek.

Izrek 3.3 (Izrek o eliminaciji rezov)**.** *Vsak sekvent, dokazan z uporabo reza, lahko dokažemo tudi brez uporabe reza.*

Posledica 3.4. *Problem, opisan zgoraj, se torej ne pojavi. Ker sekventa brez reza ne moremo dokazati, ga tudi z rezom ne moremo, ne glede na to, kako razvejamo drevo izpeljave. Izrek nam torej zagotavlja konsistentnost sistema dokazovanja.*

3.1 Potrebne definicije

Dokaz zgornjega izreka poteka z dvojno indukcijo, zunanjo na velikosti dreves izpeljave nad rezom, notranjo pa na kompleksnosti formule, ki jo režemo. Eden izmed načinov kako to izvesti je, da drevesom izpeljave pripišemo „višino", formulam pa „rang", dokaz pa potem poteka z dvojno naravno indukcijo na dani višini ter rangu. Tak način je malce zamuden, saj potrebuje dve novi in nekoliko zahtevni definiciji, poleg tega pa je že sama definicija formule – in kot bomo videli definicija drevesa izpeljave – induktivna, kot navedeno v definiciji 1.4, kar se lepo ponuja *strukturni indukciji.*

Definicija 3.5. Kot pove že ime, *strukturna indukcija* temelji na strukturi objekta, na katerem delamo indukcijo. Če želimo torej dokazati, da trditev P velja za poljubno formulo, so baza indukcije $P(A)$, kjer je A neka *osnovna formula* ter $P(\mathbf{1}), P(\mathbf{0}), P(\top)$ in $P(\bot)$. Indukcijska predpostavka trdi, da za poljubni formuli B in C velja $P(B)$ in $P(C)$, korak indukcije pa nato pove, da velja $P(B \star C), P(B + C), P(B \sqcap C), P(B \sqcup C), P(B \multimap C), P({\sim}B), P(\forall x B), P(\exists x B), P(!B)$ ter $P(?B)$. Če so vezniki, ki jih uporabljamo drugačni, je seveda tudi korak indukcije drugačen.

Kot smo zgoraj omenili, je potrebna tudi strukturna indukcija na drevesu izpeljave nad rezom, zato bolj formalno definirajmo drevo izpeljave. Definicija je, tako kot definicija formule, induktivna.

Definicija 3.6. *Drevo izpeljave* je – kot katerokoli drevo – sestavljeno iz *vozlišča* in poljubnega števila poddreves, ki pa se končajo z *listi*. V tem primeru je list pravilo aksioma, vozlišče pa je katerokoli pravilo. Drevo izpeljave je torej lahko v naslednjih dveh oblikah, za poljubna poddrevesa $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ in sklep $\mathcal{S}$.

$$\frac{}{A \Rightarrow A}\,\text{Ax} \qquad\qquad \frac{\mathcal{D}_0 \quad \mathcal{D}_1 \quad \ldots \quad \mathcal{D}_n}{\mathcal{S}}\,\text{Pravilo}$$

Definicija 3.7. Strukturna indukcija na drevesih izpeljave bo potekala podobno kot strukturna indukcija na formulah, kjer tokrat za bazo indukcije vzamemo da trditev, ki jo želimo dokazati, velja za list drevesa, indukcijski korak pa pomeni, da če trditev velja za vsa poddrevesa, velja tudi za drevo, zgrajeno iz teh poddreves.

Še ena potrebna definicija, preden začnemo z dokazom izreka o eliminaciji rezov, je pojem glavnega reza.

Definicija 3.8. Če je bila rezana formula ravnokar vpeljana v obeh poddrevesih nad pravilom reza, to imenujemo *glavni rez*.

Primer 3.9. Glavni rez za formulo $A \sqcap B$.

$$\frac{\text{L}\sqcap\,\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \sqcap B \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\Gamma' \Rightarrow A, \Delta' \quad \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma' \Rightarrow A \sqcap B, \Delta'}\,\text{R}\sqcap}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}$$

◊

3.2 Dokaz izreka o eliminaciji rezov

Razlog, da izrek 3.3 imenujemo izrek o *eliminaciji rezov*, leži v tem, da dokaz poteka s postopno eliminacijo rezov iz poljubnega drevesa izpeljave, dokler na koncu ne dobimo drevesa izpeljave brez kakeršnegakoli pravila reza. Kot smo omenili na začetku podpoglavja 3.1, dokaz poteka z dvojno indukcijo. Zunanja indukcija, je strukturna indukcija na drevesoma izpeljave nad rezom, notranja pa je strukturna indukcija na rezani formuli. Označimo z $\mathcal{D}_0$ ter $\mathcal{D}_1$ drevesi izpeljave nad rezom, torej:

$$\frac{\mathcal{D}_0 \quad \mathcal{D}_1}{\mathcal{S}}\,\text{Rez}$$

Začnimo z indukcijskim korakom. Predpostavljamo torej, da iz poddreves $\mathcal{D}_0$ in $\mathcal{D}_1$ znamo eliminirati reze. Da se izognemo problemu, kjer je bilo na primer zadnje pravilo v $\mathcal{D}_0$ ali $\mathcal{D}_1$ rez, predpostavimo, da smo reze tudi že eliminirali iz poddreves. Sedaj dokazujemo, da lahko zgornje drevo izpeljave preobrazimo v drevo izpeljave, kjer se rez pojavi višje v drevesu, torej v poddrevesu tega drevesa. To ustreza indukcijski predpostavki, zato je korak indukcije opravljen.

Znotraj tega koraka, pa seveda delamo tudi indukcijo na strukturi formule. Če torej zgornjega drevesa izpeljave ne uspemo prevesti na drevo, kjer se pravilo reza sedaj pojavi višje, ga lahko prevedemo na rez, ki reže podformulo prvotne formule. Baza notranje indukcije je, da pravilo reza, ki reže osnovno formulo, res prestavimo višje.

Opomba 3.10. Zgoraj opisano indukcijo si lahko predstavljamo kot algoritem, ki sproti eliminira reze iz drevesa izpeljave. Začnemo z poddrevesom, ki kot zadnje pravilo uporabi rez, v nobenem izmed poddreves pa reza ne uporablja več, torej začnemo z „najvišjim" rezom. Če je takih poddreves več, si arbitrarno izberemo enega izmed njih. V tem poddrevesu postopoma potiskamo rez višje ali pa vsaj znižujemo njegovo kompleksnost, dokler reza ne eliminiramo iz poddrevesa. To ponovimo za vsak rez v drevesu izpeljave. Ker je slednje končno, se proces ustavi in drevo izpeljave ne vključuje več rezov.

Vrnimo se h koraku indukcije. Pri obravnavi eliminacije reza je potrebno ločiti, ali je rez, ki ga eliminiramo *glaven*, kot ga opiše definicija 3.8, ali pa ni.

3.2.1 Eliminacija glavnega reza

Kaj pomeni, da je rez glaven, je odvisno od vsake rezane formule posebej. Eliminacijo glavnega reza je torej potrebno ločiti na vse možne veznike. Začnimo kar z veznikom $\sqcap$, ki smo ga že uporabili v primeru 3.9.

$$\dfrac{\mathrm{L}\sqcap\,\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \sqcap B \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\Gamma' \Rightarrow A, \Delta' \qquad \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma' \Rightarrow A \sqcap B, \Delta'}\,\mathrm{R}\sqcap}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow A, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

Izpeljava pred puščico in po njej je enaka, saj iz istih poddreves dokažemo isti sekvent. Tako smo lahko pravilo, ki reže $A \sqcap B$ zamenjali s pravilom, ki reže le A, zato je korak indukcije opravljen. Podobno lahko naredimo za glavni rez $A \star B$.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \star B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\star \qquad \dfrac{\Gamma' \Rightarrow A, \Delta' \qquad \Gamma'' \Rightarrow B, \Delta''}{\Gamma', \Gamma'' \Rightarrow A \star B, \Delta', \Delta''}\,\mathrm{R}\star}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow A, \Delta'}{\Gamma, \Gamma', B \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez} \qquad \Gamma'' \Rightarrow B, \Delta''}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''}\,\text{Rez}$$

Tokrat smo sicer prvotni rez prevedli na dva, a oba novonastala reza režeta podformuli, zato zopet zadostimo indukcijski predpostavki.