UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Jona Koltaj

ELIMINACIJA REZOV V LINEARNI LOGIKI

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Andrej Bauer

Ljubljana, 2025

Kazalo

Eliminacija rezov v linearni logiki

Povzetek

Vpeljemo sekventni račun, njegova strukturna pravila ter pravili vpeljave za veznik $\wedge$, nato pa se omejimo na linearno logiko ter veznik $\wedge$ razdelimo na dva. Vpeljemo še vse ostale veznike v linearni logiki ter razložimo njihov pomen, nato vpeljemo pravilo reza. Formuliramo izrek o eliminaciji reza ter ga dokažemo z dvojno strukturno indukcijo, zunanjo na strukturi drevesa izpeljave, notranjo na strukturi rezane formule. Definiramo glavni rez in ga eliminiramo za vsak veznik posebej, pri eksponentih pa definiramo in nato eliminiramo še posplošeni rez. Rez (in posplošeni rez) eliminiramo tudi ko ni glaven, nato pa opravimo še korak baze indukcije. Po končanem dokazu izreka, dokažemo še Grishinovo vložitev nelinearnega sekventnega računa v linearni sekventni račun.

Cut elimination in linear logic

Abstract

We introduce sequent calculus, its structural rules and the introduction rules for the logical connective $\wedge$. We then limit the sequent calculus to linear logic nad split $\wedge$ into two connectives. We further introduce all other connectives in linear logic and explain their interpretations, then we introduce the cut rule. We formulate the cut elimination theorem and prove it with double structural induction, the outer induction on the structure of the proof tree and the inner induction on the structure of the cut formula. We define the principal cut and eliminate it for each connective seperately. We define and eliminate the generalised cut rule for the exponentials. We eliminate the cut rule (and the generalised cut rule) when it is not principal as well and then proceed to the induction base. After the proof of the cut eliminaiton theorem we also prove the Grishin embedding of the non-linear sequent calculus into the linear one.

Math. Subj. Class. (2020): 03B47,03F05

Ključne besede: sekventni račun, linearna logika, eliminacija rezov, Grishinova vložitev

Keywords: sequent calculus, linear logic, cut elimination, Grishin embedding

1 Uvod

Ko preučujemo trditve in izreke, nas velikokrat bolj od izrekov samih zanimajo njihovi dokazi, saj ti držijo bistvo izreka samega. Ker bi torej želeli bolje preučiti strukturo teh dokazov, bi pomagalo, če bi lahko kako formalizirali to dokazovanje. Tu nastopijo formalni sistemi dokazovanja, ki – kot pove že ime – formalizirajo dokaze. Takih sistemov je več, najbolj poznani izmed njih pa so Hilbertov sistem, naravna dedukcija ter sekventni račun. Prvi Hilbertov sistem dokazovanja je bil predstavljen v letu 1879 s strani Gottloba Frege, nemškega filozofa in matematika. V tem sistemu je vsak korak dokaza ali aksiom, ali pa je dobljen iz aksioma z enim izmed dveh pravil sklepanja. Karakteriziran je tudi s tem, da uporablja le dva veznika, namreč implikacijo in negacijo, kar ga sicer naredi minimalističnega in neodvečnega, a je velikokrat bistvo dokaza težko izluščiti. Sekventni račun in naravna dedukcija pa sta bila vpeljana v istem članku, leta 1934, ki ga je objavil nemški matematik Gerhard Gentzen. Te dva sistema vključujeta več veznikov in tudi več pravil sklepanja. Sekventni račun temelji na levih in desnih pravilih vpeljave veznikov, naravna dedukcija pa ima pravila vpeljave ter pravila eliminacije. Oba sistema sta torej veliko manj minimalistična od Hilbertovega sistema, a sta v nekaterih pogledih bolj berljiva. V tem delu bomo preučevali sekventni račun, ki ga bomo bolj natančno vpeljali v poglavju 2.

V članku, kjer sta bila sekventni račun in naravna dedukcija vpeljana, je poleg tega Gentzen dokazal enega izmed pomembnejših izrekov, kar se tiče sistemov dokazovanja, namreč izrek o eliminaciji rezov. Ta sistemu dokazovanja na formalen način zagotavlja konsistentnost. V poglavju 4 bomo tudi mi ta izrek formulirali ter dokazali, le da bomo to naredili za podzvrst sekventnega računa, imenovano linearna logika. Slednjo je prvič v članku iz leta 1987 opisal Jean-Yves Girard, francoski matematik, ki je ugotovil, da z omejitvijo določenih strukturnih pravil v formalnem sistemu dokazovanja lahko bolj natančno preučujemo *koliko* predpostavk smo porabili v dokazu. Linearno logiko je možno obravnavati tako v naravni dedukciji kot sekventnem računu, a se bomo v tem delu omejili na sekventni račun.

Glavna motivacija za linearno logiko je zavedanje, koliko „surovin" smo porabili in pridelali, torej kolikokrat smo tekom dokaza predpostavko uporabili, katere predpostavke smo zavrgli ter katere sklepe smo dokazali večkrat. Omejitev podvajanja in odvečnih predpostavk pomembno vpliva tudi na veznike, ki jih uporabljamo. Več o tem bomo povedali v poglavju 3. Želimo pa tudi vedeti, kako linearna logika modelira nelinarno logiko in kako se ti dve primerjata med seboj, kar pa bomo nazadnje obravnavali v poglavju 5.

2 Sekventni račun

Sekventni račun je formalni sistem dokazovanja, ki sestoji iz t. i. sekventov in vnaprej določenih pravil, kako jih smemo preoblikovati. Vsak korak dokaza torej uporabi enega izmed teh pravil, dokler začetnega sekventa ali sekventov ne preoblikujemo v tistega, ki smo ga želeli dokazati.

Korake ločimo s horizontalno črto, nad katero so vsi sekventi, ki jih pravilo uporabljeno na tem koraku sprejme, velikokrat pomimenovani *hipoteze*, pod njo pa je novo dobljeni sekvent, navadno imenovan *sklep*. Označimo hipoteze s $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$, sklep pa s $\mathcal{C}$. Korak izpeljave bo torej izgledal takole:

$$\frac{\mathcal{H}_0 \qquad \mathcal{H}_1 \qquad \ldots \qquad \mathcal{H}_n}{\mathcal{C}}\ \text{Pravilo}$$

Na desni ponavadi označimo, katero pravilo smo uporabili na tem koraku, zavoljo preglednosti.

2.1 Sekvent in formula

Definicija 2.1. Naj bosta $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ter $B_0, B_1, \ldots, B_n$ končni zaporedji logičnih formul. *Sekvent* je izraz oblike $A_0, \ldots, A_n \Rightarrow B_0, \ldots, B_m$.

Formulam na levi strani sekventa navadno pravimo *predpostavke*, formulam na desni pa *sklepi*. Celotno zaporedje predpostavk bomo označevali z Γ, zaporedje sklepov pa z Δ.

Pomembno je omeniti še, da simbol $\Rightarrow$ v sekventu ne predstavlja običajne implikacije in ga raje beremo kot „dokaže”. Vejice na levi strani sekventa se bere kot „in”, vejice na desni strani pa kot „ali”. Sekvent $A, B \Rightarrow C, D$ bi se torej razumel kot „formuli A in B dokažeta formulo C ali formulo D”.

V zgornji definiciji smo uporabili besedo *formula*, ki jo je potrebno bolj formalno definirati. Definicija je induktivna, kar pomeni, da se formule gradijo iz podformul, te iz svojih podformul in tako dalje, na dnu pa so t. i. osnovne formule. Te pa so zgrajene iz termov, ki so prav tako induktivno definirani.

Definicija 2.2. *Term* je izraz, ki je lahko v treh različnih oblikah.

1. To je lahko neka spremenljivka.
2. Lahko je konstanta.
3. Lahko pa je rezultat funkcije, ki sprejme določeno število termov.

Primer 2.3. Na voljo imamo denimo naravna števila, na katerih je definirana funkcija $+$, ki sprejme dva terma. Možni termi, ki jih lahko tvorimo, so torej lahko npr. spremenljivka x, konstanta 3 ali pa izraz $x + 3$.

Definicija 2.4. *Formula* je izraz v dveh oblikah.

1. *Osnovna formula* je predikatni simbol ali relacija, ki sprejme določeno število termov.
2. *Sestavljena formula* je – kot pove ime – sestavljena iz ene ali več podformul, med seboj povezanih z veznikom.

Primer 2.5. Imamo denimo terma t_1 in t_2 in relacijo $=$, ki sprejme dva terma. Tvorimo torej lahko osnovno formulo $t_1 = t_2$.

Primer 2.6. Če imamo dve formuli A in B, so npr. $A \wedge B$, $\neg A$, $A \vee B$ tudi formule.

Katere sestavljene formule lahko tvorimo je odvisno od tega, s kakšnimi vezniki želimo delati. Če naša logika na primer ne uporablja veznika $\wedge$, formula $A \wedge B$ ne pomeni ničesar. Specifične veznike, ki jih bomo uporabljali pri linearni logiki, bomo natančneje definirali v poglavju 3.

2.2 Pravila pri sekventnem računu

Pravila pri sekventnem računu delimo na *strukturna pravila*, ki nam povedo kako ravnati s poljubnimi zaporedji formul, *logična pravila* ali *pravila vpeljave*, ki nam povedo kako z različnimi vezniki tvorimo nove formule, in pa pravilo aksioma.

Definicija 2.7. *Aksiom* je vsak sekvent oblike $A \Rightarrow A$, kar lahko interpretiramo kot „formula dokaže sama sebe”. To je seveda vedno res, zato pravilo aksioma, skrajšano Ax, pravi, da aksiome lahko vedno tvorimo, t. j. zanje ne potrebujemo predhodnih sekventov. Zapisano v sekventnem računu torej:

$$\frac{}{A \Rightarrow A}\,\mathrm{Ax}$$

2.2.1 Pravila vpeljave

Pravila vpeljave pri sekventnem računu načeloma sestojijo iz *levega pravila vpeljave* ter *desnega pravila vpeljave.* Prvo nam pove kako veznik uporabiti med predpostavkami, drugo pa kako dani veznik dokazati. Oglejmo si kot primer pravilo vpeljave za veznik $\wedge$.

Definicija 2.8. *Levo pravilo vpeljave veznika* $\wedge$, krajše $L\wedge$, pravi, da če znamo nekaj dokazati iz formule A, znamo isto dokazati iz $A \wedge B$ za poljubno formulo B. Ker je veznik $\wedge$ simetričen, je tudi to pravilo simetrično.

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\wedge \qquad \text{in} \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\wedge$$

Definicija 2.9. *Desno pravilo vpeljave veznika* $\wedge$, krajše $R\wedge$, pa pravi, da če znamo iz nekih predpostavk dobiti formulo A ter iz istih predpostavk dobiti formulo B, znamo iz teh predpostavk dobiti tudi formulo $A \wedge B$.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta}\,\mathrm{R}\wedge$$

2.2.2 Strukturna pravila

Običajno je sekventni račun opremljen s tremi strukturnimi pravili.

Definicija 2.10. *Pravilo menjave*, krajše Ex, nam pove, da lahko vrstni red predpostavk in sklepov med seboj poljubno menjamo.

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Ex} \qquad \text{in} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A, \Delta'}\,\mathrm{Ex}$$

Opomba 2.11. Do sedaj smo na Γ in Δ gledali kot zaporedji formul. Če ju namesto tega definiramo kot *multimnožici*, torej množici, kjer je vsakemu elementu prirejeno število pojavitev, lahko pravilo menjave zavržemo, saj sledi že iz same strukture predpostavk in sklepov. Zavoljo enostavnosti bomo torej na Γ in Δ v nadaljevanju gledali kot multimnožici.

Tu je pomembno, da to ni le množica, saj nas še vedno zanima koliko formul, četudi istih, nastopa v sekventu.

Definicija 2.12. *Ošibitev*, krajše W, nam pove, da lahko tako predpostavke kot sklepe „ošibimo" z dodatno formulo.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{W} \qquad \text{in} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\,\mathrm{W}$$

Kar to pomeni na levi je, da če znamo že iz Γ dokazati Δ, potem lahko med predpostavke dodamo kakršnokoli odvečno formulo in bomo Δ še vedno znali dokazati. Odvečne predpostavke nam torej ne škodujejo.

Na desni pa, ker tam vejico beremo kot „ali" velja podobno. Če znamo iz Γ dokazati Δ, potem znamo iz Γ dokazati tudi Δ ali A.

Definicija 2.13. *Skrčitev*, krajše C, nam pove, da število ponovitev formule tako med predpostavkami kot sklepi ni pomembno.

$$\frac{\Gamma, A, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{C} \qquad \text{in} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\,\mathrm{C}$$

Če torej znamo dokazati Δ iz dveh ponovitev formule A, znamo isto dokazati iz le ene kopije. Prav tako, če znamo dvakrat dokazati A, znamo to seveda narediti tudi enkrat.

Preden preidemo specifično na linearno logiko je potrebno še omeniti, da pri sekventnem računu dokazujemo „od spodaj navzgor". Začnemo torej s sekventom, ki bi ga želeli dokazati in poiščemo katera pravila, strukturna ali logična, so nam na voljo. Analogija pri dokazovanju v vsakdanji matematiki je, da začnemo s problemom, ki ga želimo dokazati, in ga razčlenimo na manjše podprobleme, dokler ne dobimo nečesa, za kar gotovo vemo da je res. Prav tako poskušamo pri sekventnem računu sekvente postopoma prevesti na aksiom, ki pa bo vedno veljal.

Tudi pravila si zato lahko interpretiramo drugače. Levo pravilo za veznik $\wedge$ iz definicije 2.8 lahko sedaj razumemo kot; če želimo iz $A \wedge B$ dokazati neke sklepe Δ je dovolj da Δ dokažemo iz formule A ali iz formule B. Desno pravilo za $\wedge$ iz definicije 2.9 pa razumemo kot; če želimo iz predpostavk Γ dokazati $A \wedge B$, je dovolj da iz Γ dokažemo A ter da iz Γ dokažemo B.

Za primer dokaza v sekventnem računu si oglejmo skoraj trivialen dokaz komutativnosti veznika $\wedge$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \Rightarrow B}\,\mathrm{Ax}}{A \wedge B \Rightarrow B}\,\mathrm{L}\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow A}\,\mathrm{Ax}}{A \wedge B \Rightarrow A}\,\mathrm{L}\wedge}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A}\,\mathrm{R}\wedge$$

V besedah lahko ta dokaz razumemo sledeče. Želimo izpeljati, da $A \wedge B$ dokaže $B \wedge A$. Dovolj je, da dokažemo, da $A \wedge B$ dokaže A ter da dokaže B. Na levi je potem dovolj pokazati, da že B dokaže B, kar pa je vedno res. Na desni se zgodi podobno.

Od sedaj naprej bomo vsa pravila in dokaze interpretirali od spodaj navzgor.

3 Linearna logika

Linearna logika je podzvrst logike sekventnega računa, kjer zavržemo pravili ošibitve in skrčitve iz definicij 2.12 in 2.13. To pomeni, da moramo vsako predpostavko uporabiti natanko enkrat ter da ne smemo imeti odvečnih predpostavk. Prav tako moramo vsak sklep dokazati natanko enkrat, brez odvečnih sklepov.

Za primer si oglejmo še eno možno definicijo veznika $\wedge$, poleg 2.8 ter 2.9 , označimo ga v tem primeru z $\wedge'$.

Definicija 3.1. *Levo pravilo vpeljave veznika* $\wedge'$ pravi, če želimo iz $A \wedge' B$ dokazati Δ, lahko veznik na levi enostavno prevedemo nazaj v vejico in iz A ter B dokazujemo Δ.

$$\frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge' B \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{L}\wedge'$$

Definicija 3.2. *Desno pravilo vpeljave veznika* $\wedge'$ pa pravi, da če želimo $A \wedge' B$ dokazati, lahko predpostavke (in preostale sklepe, ki niso povezani z A in B) ločimo na dva dela ter z enim delom dokažemo A, z drugim pa B. Obratno gledano, če znamo iz Γ dokazati A ter iz Γ' dokazati B, lahko predpostavke združimo in dokažemo $A \wedge' B$.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \wedge' B, \Delta, \Delta'}\ \mathrm{R}\wedge'$$

Lema 3.3. *Če dopustimo uporabo ošibitve in skrčitve, sta si levi in desni pravili vpeljave za* $\wedge$ *ter* $\wedge'$ *ekvivalentni.*

Dokaz. Začnimo z dokazom ekvivalence levih pravil za veznika $\wedge$ ter $\wedge'$. Dokaz ekvivalence v tem kontekstu pomeni, da sta pravili medsebojno izpeljivi. Izpeljava levega pravila za $\wedge'$ iz definicije 3.1 na podlagi levega pravila za $\wedge$ iz definicije 2.8 poteka s pomočjo skrčitve.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B, B \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{L}\wedge}{\Gamma, A \wedge B, A \wedge B \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{L}\wedge}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{C}$$

Najprej torej predpostavko $A \wedge B$ „podvojimo”, nato pa dvakrat uporabimo levo pravilo za $\wedge$, vsakič ne eni izmed podvojenih predpostavk.

Obratna izpeljava pa poteka s pomočjo ošibitve. Tu najprej uporabimo levo pravilo za $\wedge'$, nato pa odvečno izmed predpostavk odstranimo s pomočjo ošibitve.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{W}}{\Gamma, A \wedge' B \Rightarrow \Delta}\ \mathrm{L}\wedge'$$

Podobno dokažemo ekvivalenco desnega pravila za $\wedge$ iz definicije 2.9 ter desnega pravila za $\wedge'$ iz definicije 3.2.

$$\dfrac{\mathrm{W}\times|\Gamma' \cup \Delta'|\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta, \Delta'} \qquad \dfrac{\Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow B, \Delta, \Delta'}\ \mathrm{W}\times|\Gamma \cup \Delta|}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \wedge B, \Delta, \Delta'}\ \mathrm{R}\wedge$$

Ko zgoraj iz desnega pravila za $\wedge$ izpeljujemo desno pravilo za $\wedge'$, najprej uporabimo desno pravilo za $\wedge$, torej predpostavk (in sklepov) ne razdelimo na dva dela, zato se s pomočjo ošibitve na levi „znebimo” (saj pravila beremo od spodaj navzgor) predpostavk Γ' in sklepov Δ'. To naredimo tako, da ošibitev iteriramo tolikokrat, kolikor je velikost multimnožice $\Gamma' \cup \Delta'$. Podobno naredimo na desni strani.

Ko pa iz desnega pravila za $\wedge'$ izpeljujemo desno pravilo za $\wedge$, najprej „podvojimo” vse predpostavke v Γ in vse sklepe v Δ, nato pa uporabimo desno pravilo za $\wedge'$ in podvojene predpostavke spet razpolovimo.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma, \Gamma \Rightarrow A \wedge' B, \Delta, \Delta}\,\mathrm{R}\wedge'}{\Gamma \Rightarrow A \wedge' B, \Delta}\,\mathrm{C}\times|\Gamma \cup \Delta|$$

□

Opomba 3.4. V zgornjem dokazu smo se malce podrobneje spustili v intuicijo posameznega dela dokaza, saj je to prvi formalen dokaz v sekventnem računu v tem delu. V nadaljnem je intuicija za posamezne vrstice dokaza načeloma prepuščena bralcu.

Kot smo v zgornjem dokazu lahko videli, se za dokaz ekvivalence $\wedge$ ter $\wedge'$ na bistven način uporabi tako skrčitev kot ošibitev. Slutimo lahko, da brez teh dveh pravil veznika pravzaprav nista ekvivalentna, kar se tudi izkaže za resnično ??cite??. Zato sta v linearni logiki to dva ločena veznika.

3.1 Propozicijski vezniki

Definicija 3.5. Veznik $\wedge$, s pravili iz definicij 2.8 in 2.9, se še vedno glasi *in*, zapišemo pa ga s simbolom $\sqcap$. Zapišimo še enkrat njegovo levo in desno pravilo, tokrat s pravilnim pojmovanjem.

$$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \sqcap B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\sqcap \qquad \dfrac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \sqcap B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\sqcap \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \sqcap B, \Delta}\,\mathrm{R}\sqcap$$

Definicija 3.6. Veznik $\wedge'$, s pravili iz definicij 3.1 in 3.2 pa preimenujemo v *tenzor* ter ga zapišemo s simbolom $\star$.

$$\dfrac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \star B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\star \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \star B, \Delta, \Delta'}\,\mathrm{R}\star$$

Zakaj te dva veznika v kontekstu linearne logike nista enaka je razvidno že če primerjamo njuni levi in desni pravili. Kot smo omenili na začetku tega poglavja je pomembno, da vsako predpostavko uporabimo natanko enkrat. Veznik $\sqcap$ med predpostavkami na nek način vsebuje le eno izmed predpostavk, ki ju združuje, medtem ko veznik $\star$ vsebuje obe. Ko torej uporabimo $A \sqcap B_{\lrcorner}$ da dokažemo neki Δ, uporabimo le A ali B, medtem ko pri $A \star B$ uporabimo tako A kot B. Če pa želimo dokazati, da velja $A \sqcap B$, pa je dovolj, da iz istih predpostavk dokažemo A ter B, prav tako ostale sklepe na desni strani sekventa pustimo pri miru. To spet implicira, da vsebuje $A \sqcap B$ enako število informacij kot le A ali B. Če pa dokazujemo $A \star B$, pa moramo posebej dokazati A, nato pa iz ločenega sklopa predpostavk dokazati B.

Ostale sklepe poleg $A \star B$ je tudi potrebno posebej dokazati. Vse to spet implicira, da vsebuje tenzor informacij tako za A kot B.

Oglejmo si sedaj še preostale veznike, začenši z veznikom $\vee$. V linearni logiki se ta spet razdeli na dvoje, intuicija za to pa je simetična intuiciji za veznik $\wedge$, zato jo prepustimo bralcu.

Definicija 3.7. Veznik *ali*, označen z $\sqcup$, ima sledeče levo in desno pravilo vpeljave.

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \sqcup B \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\sqcup \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \sqcup B, \Delta}\,\mathrm{R}\sqcup \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \sqcup B, \Delta}\,\mathrm{R}\sqcup$$

Kot vidimo sta obe pravili popolnoma simetrični praviloma za veznik $\sqcap$.

Definicija 3.8. Veznik *plus*, označen z $+$ pa je analogno simetričen vezniku $\star$.

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A + B \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{L}+ \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A + B, \Delta}\,\mathrm{R}+$$

Vsi nadaljni vezniki imajo v linearni logiki enaka pravila vpeljave kot v navadnem sekventnem računu in se ne delijo na dva dela, še vseeno pa so to *linearni* vezniki, že samo zaradi pogojev pod katerimi so vpeljani. Če na primer A linearno implicira B to pomeni, da natanko en A implicira natanko en B, linearna negacija formule A pa negira natanko en A.

Za vpeljavo implikacije zopet potrebujemo drugačen simbol kot smo ga vajeni, saj se $\Rightarrow$ že uporablja v strukturi sekventa samega. Običajni sekventni račun v ta namen uporablja $\to$, linearna implikacija pa, da se loči od nelinearne, spet uporabi svoj simbol.

Definicija 3.9. *Implikacija*, označena s simbolom $\multimap$, je vpeljana z naslednjimi pravili.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{L}\multimap \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B, \Delta}\,\mathrm{R}\multimap$$

Kot lahko vidimo je desno pravilo vpeljave dokaj jasno za interpretacijo. Če dokazujemo $A \multimap B$, je dovolj da pod predpostavko A dokažemo B. Levo pravilo pa je morda lažje brati od zgoraj navzdol. Če torej z Γ dokažemo A ter neke druge sklepe Δ, iz Γ' in B pa dokažemo Δ', lahko iz združenih predpostavk Γ, Γ' ter dejstva, da iz A sledi B dokažemo združene sklepe Δ, Δ'.

Definicija 3.10. *Negacija*, označena s simbolom $\sim$, ima naslednji pravili vpeljave.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, {\sim}A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}{\sim} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow {\sim}A, \Delta}\,\mathrm{R}{\sim}$$

Tudi interpretacija veznika $\sim$ je lažja od zgoraj navzdol, pomembno pa je tudi dejstvo, da vejice na desni interpretiramo kot „ali”, vejice na levi pa kot „in”. Levo pravilo vpeljave nam pove, da če znamo iz predpostavk Γ dokazati A *ali* Δ, lahko preprosto predpostavimo, da ne velja A in dokažemo Δ. Desno pravilo pa pravi, da če znamo iz Γ *in* A dokazati Δ, lahko iz Γ dokažemo ali da A ne velja, ali pa da velja Δ.

3.2 Propozicijske konstante

V običajnem sekventnem računu imamo dvoje konstant; resnico in neresnico, ki pa se v linearni logiki spet vsaka razdelita na dvoje. Resnici se delita na enoto za $\star$ ter enoto za $\sqcap$, neresnici pa na enoto za $+$ ter enoto za $\sqcup$.

Definicija 3.11. *Enota*, označena z $\mathbf{1}$, ima levo in desno pravilo vpeljave:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{1} \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\mathbf{1} \qquad \dfrac{}{\Rightarrow \mathbf{1}}\,\mathrm{R}\mathbf{1}$$

Enoto torej lahko brez predpostavk vedno dokažemo, kar nam pove desno pravilo, če pa vemo da enota velja je to trivialna informacija, kar nam pove levo pravilo.

Definicija 3.12. *Resnica*, označena z $\top$, ima le desno pravilo vpeljave. Ne moremo je torej uporabiti kot sklep.

$$\dfrac{}{\Gamma \Rightarrow \top, \Delta}\,\mathrm{R}\top$$

Kar nam to pove je, da resnica vedno velja.

Lema 3.13. *Enota* $\mathbf{1}$ *je enota za za* $\star$*, resnica* $\top$ *pa je enota za* $\sqcap$*.*

Dokaz. Za dokaz leme potrebujemo izpeljati sekvente $A \star \mathbf{1} \Rightarrow A$, $A \Rightarrow A \star \mathbf{1}$, $A \sqcap \top \Rightarrow A$ ter $A \Rightarrow A \sqcap \top$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow A}\,\mathrm{Ax}}{A, \mathbf{1} \Rightarrow A}\,\mathrm{L}\mathbf{1}}{A \star \mathbf{1} \Rightarrow A}\,\mathrm{L}\star \qquad \dfrac{\mathrm{Ax}\,\dfrac{}{A \Rightarrow A} \quad \dfrac{}{\Rightarrow \mathbf{1}}\,\mathrm{R}\mathbf{1}}{A \Rightarrow A \star \mathbf{1}}\,\mathrm{R}\star$$

$$\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow A}\,\mathrm{Ax}}{A \sqcap \top \Rightarrow A}\,\mathrm{L}\sqcap \qquad \dfrac{\mathrm{Ax}\,\dfrac{}{A \Rightarrow A} \quad \dfrac{}{A \Rightarrow \top}\,\mathrm{R}\top}{A \Rightarrow A \sqcap \top}\,\mathrm{R}\sqcap$$

$\square$

Pri neresnici je razlog za razdvojitev enak, pravila vpeljave pa so simetrična, zato interpretacijo prepustimo bralcu.

Definicija 3.14. *Ničla*, označena z $\mathbf{0}$ ima levo in desno pravilo vpeljave:

$$\dfrac{}{\mathbf{0} \Rightarrow}\,\mathrm{L}\mathbf{0} \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \mathbf{0}, \Delta}\,\mathrm{R}\mathbf{0}$$

Definicija 3.15. *Neresnica*, označena z $\perp$, ima le levo pravilo vpeljave. Ne moremo je torej uporabiti kot predpostavko.

$$\dfrac{}{\Gamma, \perp \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\perp$$

Dokaz naslednje leme bomo opustili, saj je simetričen dokazu leme 3.13.

Lema 3.16. *Ničla* $\mathbf{0}$ *je enota za* $+$*, neresnica* $\perp$ *pa je enota za* $\sqcup$*.*

3.3 Kvantifikatorja

Definicija 3.17. *Univerzalni kvantifikator*, označen kot navadno s simbolom $\forall$, je definiran z naslednjima praviloma vpeljave. Tu y ne sme biti prost v Γ in Δ.

$$\frac{\Gamma, A[t/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[y/x], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x A, \Delta}\,\mathrm{R}\forall$$

Notacija $A[y/x]$ pomeni, da vsako instanco spremenljivke x zamenjamo s spremenljivko y. Spremenljivka t v definiciji označuje nek specifičen term t, ki si ga izberemo. Levo pravilo vpeljave torej pomeni, da če želimo iz dejstva, da za vsak x velja formula A dokazati Δ, je dovolj, da spremenljivko x v A zamenjamo z nekim specifičnim termom in z njim dokažemo Δ. Spremenljivka y v definiciji pa označuje prosto spremenljivko. Desno pravilo vpeljave je ekvivalentno temu, da pri dokazovanju, da za vsak x velja A, fiksiramo poljuben y in dokazujemo A.

Definicija 3.18. *Eksistenčni kvantifikator* je spet brez sprememb označen s simbolom $\exists$. Spremenljivka y spet ne sme biti prosta v Γ ter Δ.

$$\frac{\Gamma, A[y/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[t/x], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x A, \Delta}\,\mathrm{R}\exists$$

Tokrat levo pravilo vsebuje prosto spremenljivko y, desno pa specifičen term t. Če torej želimo uporabiti dejstvo, da obstaja x, da velja A, fiksiramo poljuben y in dokazujemo A, če pa želimo dokazati, da obstaja x, da velja A, le poščemo nek specifičen term t, da A velja.

3.4 Eksponenta

Včasih si želimo v linearni logiki emulirati tudi običajen sekventni račun, vključno torej z ošibitvijo ter skrčitvijo, a želimo to nelinearnost omejiti na specifične formule. Namen teh „nelinearnih" formul je, da nam dovolijo v linearni logiki dokazati vse, kar je možno dokazati tudi v običajnem sekventnem računu, a da je iz dokaza takoj razvidno, kateri deli sekventa so bili dokazani linearno in kateri ne. Ker želimo označiti formulo kot nelinearno, jo modificiramo v novo formulo z veznikom. Imamo dva takšna veznika, ki ju imenujemo *eksponenta*.

Definicija 3.19. Veznik *seveda* je označen s simbolom !, poleg levega in desnega pravila vpeljave pa zanj veljata še ošibitev in skrčitev na levi strani sekventa. Veznik *zakaj ne* pa je označen s simbolom ?, zanj pa prav tako veljajo štiri pravila; levo in desno pravilo vpeljave ter skrčitev in ošibitev na desni strani sekventa.

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L!} \qquad \frac{!\Gamma \Rightarrow A, ?\Delta}{!\Gamma \Rightarrow !A, ?\Delta}\,\mathrm{R!} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{W!} \qquad \frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{C!}$$

$$\frac{!\Gamma, A \Rightarrow ?\Delta}{!\Gamma, ?A \Rightarrow ?\Delta}\,\mathrm{L?} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow !A, \Delta}\,\mathrm{R?} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta}\,\mathrm{W?} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow ?A, ?A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta}\,\mathrm{C?}$$

Notacija $!\Gamma$ (ali $?\Delta$) označuje, da je vsaka formula v Γ (ali Δ) predznačena z veznikom ! (ali ?).

Kar želimo z eksponenti označiti je, da imamo „poljubno mnogo" označene formule na voljo. Ker vejice na levi beremo kot „in", vejice na desni pa kot „ali", je treba podati dva različna veznika. Formula $!A$ torej označuje „A in A in ... A", kolikor kopij pač potrebujemo, formula $?A$ pa označuje „A ali A ali ... A".

Interpretacija levega pravila vpeljave za ! je dokaj enostavna. Pove le, da se kadarkoli v procesu dokazovanja lahko odločimo formulo označiti kot nelinearno. Desno pravilo pa je malce bolj komplicirano, saj veznika ! ni tako lahko razumeti na desni strani sekventa. Rabimo, da je že celoten sekvent nelinearen, da lahko ! vpeljemo na desni. Interpretacija levega in desnega pravila za ? je simetrična.

3.5 Notacija in druge formalnosti

Na koncu tega poglavja je potrebnih še nekaj opomb glede zapisa veznikov ter strukture sekventov.

3.5.1 Poimenovanje veznikov

Notacija, uporabljena v tem diplomskem delu, je črpana iz vira ??daj vir??, ni pa najbolj standardna. Jean-Yves Girard, ki se je prvi ukvarjal z linearno logiko je veznike in konstante označil drugače, ta notacija pa se je tudi ohranila. Razlog za spremembo notacije v mojem delu je bolj slogoven kot zgodovinski. Načini kako je notacija spremenjena ter standardna imena veznikov v angleščini so prikazana v spodnji tabeli. ??Daj also vir??

Simbol veznika	Simbol v standardni notaciji	Ime
$\sqcap$	$\&$	with
$\star$	$\otimes$	tensor
$\sqcup$	$\oplus$	plus
$+$	$⅋$	par
$\top$	$\top$	top
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	one
$\bot$	$\mathbf{0}$	zero
$\mathbf{0}$	$\bot$	bottom

??tudi tukej navedi troelstra vir kjer razlozi notacijo?? Kot lahko vidimo so v standardni notaciji parni drugačni vezniki kot v naši notaciji. Razlog za to je, da veznik $+$ distribuira čez veznik $\sqcap$, veznik $\star$ pa distribuira čez $\sqcup$. Velja torej:

$$A + (B \sqcap C) \equiv (A + B) \sqcap (A + C)$$
$$A \star (B \sqcup C) \equiv (A \star B) \sqcup (A \star C)$$

Toda če veznik $+$ negiramo, ne dobimo veznika $\sqcap$, ampak $\star$, če negiramo veznik $\sqcap$ pa dobimo $\sqcup$ in seveda obratno. Dualna para sta torej $(\star, +)$ ter $(\sqcap, \sqcup)$, kar je veliko bolj razvidno pri naših oznakah. Poleg tega sta si že sami pravili za veznika $\star$ ter $+$, iz definicij 3.6 in 3.8, simetrični, kot sta si pravili za $\sqcap$ ter $\sqcup$, iz definicij 3.5 in 3.7. Zdi se mi, da sta ta dva razloga dokaj pomembna za razumevanje veznikov, zato sem se odločila za takšno notacijo, kot jo imam.

3.5.2 Intuicionistična linearna logika

Ker je pogosto, da članki, ki govorijo o linearni logiki, govorijo specifično o intuicionistični linearni logiki, se mi zdi pomembno predstaviti slednje tudi v mojem delu.

Intuicionistična logika je logika brez principa izključene tretje možnosti. To je aksiom, ki pravi, da za poljubno trditev P velja $P \vee \neg P$. V sekventnem računu kot smo ga predstavili do sedaj, se da to pravilo izpeljati iz pravila aksioma. V linearni logiki ta princip velja le za veznik $+$, ne pa za veznik $\sqcup$.??citiraj??

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow A}\,\text{Ax}}{\Rightarrow A, \sim A}\,\text{R}\sim}{\Rightarrow A + (\sim A)}\,\text{R}+$$

V običajnem sekventnem računu je pravilo za negacijo enako, linearnost je ne spremeni, veznika $+$ in $\sqcap$ pa sta si ekvivalnetna in sta oba reprezentaciji veznika $\vee$. To pomeni, da izpeljava principa izključene tretje možnosti poteka enako kot zgoraj.

Če torej želimo delati z intuicionistično linearno logiko, moramo strukturo sekventnega računa nekoliko spremeniti. Izkaže se, ??citiraj?? da je dovolj, da na desni strani sekventov ne dopustimo več kot ene formule. Kot lahko hitro vidimo, zgornja izpeljava ne deluje več, saj sekvent $\Rightarrow \sim A, A$ ne more obstajati.

Bistvo intuicionistične logike je poudarek na tem *kako* dokazujemo izreke in trditve, ne le da jih dokažemo. A ker je linearna logika že zelo strukturirana, poleg tega pa bi dopuščanje le ene formule na desni strani sekventa uničilo simetrijo pravil, saj na primer ne bi smeli imeti desnega pravila za $+$, sem se odločila v tem delu uporabljati klasično – torej neintuicionistično – logiko.

4 Izrek o eliminaciji rezov

Poslednje pravilo, ki ga je potrebno vpeljati, je *pravilo reza.* To pravilo obstaja tudi v običajnem sekventnem računu in formalizira koncept dokazovanja s pomočjo leme.

Definicija 4.1. *Pravilo reza* pravi, da če znamo pod določenimi predpostavkami dokazati formulo A, potem pa iz te formule dokažemo nekaj drugega, lahko A enostavno režemo iz procesa.

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma', A \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}$$

Opomba 4.2. Vsa dosedanja pravila v linearni logiki so bila na nek način deterministična. Če smo imeli v sekventu določen veznik, smo lahko uporabili pravilo vpeljave tega veznika, če pa v sekvetnu ni nastopal, tega nismo mogli narediti. Pravilo reza pa je v tem smislu drugačno, saj lahko drevo izpeljave poljubno razvejamo z novimi „vrinjenimi” sekventi.

Preden smo v naš sekventni račun vpeljali pravilo reza, je bilo torej dokaj enostavno videti, če sekvent ne velja. Oglejmo si na primer iz podpoglavja 3.5.2, kjer trdimo, da pricip izključene tretje možnosti ne velja za veznik $\sqcup$, tudi pri klasični linearni logiki.

$$\frac{\Rightarrow A}{\Rightarrow A \sqcup (\sim A)}\,\mathrm{R}\sqcup \qquad \frac{\Rightarrow \sim A}{\Rightarrow A \sqcup (\sim A)}\,\mathrm{R}\sqcup$$

Ko dokazujemo sekvent $\Rightarrow A \sqcup (\sim A)$ brez uporabe pravila reza, imamo na voljo le desno pravilo vpeljave veznika $\sqcup$ in nič drugega. Edina dva možna koraka sta torej prikazana zgoraj, sekvent $\Rightarrow A$ ali $\Rightarrow \sim A$ pa ne bo veljal za poljubno formulo A, torej lahko trdimo, da sekvent, ki ga želimo dokazati, ne velja.

Če pa dopustimo uporabo pravila reza, lahko drevo neskončno razvejamo z vrivanjem poljubnih formul, na primer:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Rightarrow B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ B \Rightarrow A \sqcup (\sim A)\end{array}}{\Rightarrow A \sqcup (\sim A)}\,\mathrm{Rez}$$

Drevo izpeljave se lahko razvejuje v neskončnost, zato ne moremo nikoli z gotovostjo trditi, da sekventa ne moremo izpeljati. A če pravilo reza res interpretiramo kot dokaz z uporabo leme, bi bilo smiselno, da če sekventa ne moremo dokazati brez uporabe rezov, ga tudi z rezi ne moremo dokazati. Tu nastopi naslednji izrek.

Izrek 4.3 (Izrek o eliminaciji rezov)**.** *Vsak sekvent, dokazan z uporabo reza, lahko dokažemo tudi brez uporabe reza.*

Posledica 4.4. *Problem, opisan zgoraj, se torej ne pojavi. Ker sekventa brez reza ne moremo dokazati, ga tudi z rezom ne moremo, ne glede na to, kako razvejamo drevo izpeljave. Izrek nam torej zagotavlja konsistentnost sistema dokazovanja.*

4.1 Potrebne definicije

Dokaz zgornjega izreka poteka z dvojno indukcijo, zunanjo na velikosti dreves izpeljave nad rezom, notranjo pa na kompleksnosti formule, ki jo režemo. Eden izmed načinov kako to izvesti je, da drevesom izpeljave pripišemo „višino", formulam pa „rang", dokaz pa potem poteka z dvojno naravno indukcijo na dani višini ter rangu. Tak način je malce zamuden, saj potrebuje dve novi in nekoliko zahtevni definiciji, poleg tega pa je že sama definicija formule – in kot bomo videli definicija drevesa izpeljave – induktivna, kot navedeno v definiciji 2.4, kar se lepo ponuja *strukturni indukciji.*

Definicija 4.5. Kot pove že ime, *strukturna indukcija* temelji na strukturi objekta, na katerem delamo indukcijo. Če želimo torej dokazati, da trditev P velja za poljubno formulo, so baza indukcije $P(A)$, kjer je A neka *osnovna formula* ter $P(\mathbf{1}), P(\mathbf{0}), P(\top)$ in $P(\bot)$. Indukcijska predpostavka trdi, da za poljubni formuli B in C velja $P(B)$ in $P(C)$, korak indukcije pa nato pove, da velja $P(B \star C), P(B + C), P(B \sqcap C), P(B \sqcup C), P(B \multimap C), P(\sim B), P(\forall x B), P(\exists x B), P(!B)$ ter $P(?B)$. Če so vezniki, ki jih uporabljamo drugačni, je seveda tudi korak indukcije drugačen.

Kot smo zgoraj omenili, je potrebna tudi strukturna indukcija na drevesu izpeljave nad rezom, zato bolj formalno definirajmo drevo izpeljave. Definicija je, tako kot definicija formule, induktivna.

Definicija 4.6. *Drevo izpeljave* je – kot katerokoli drevo – sestavljeno iz *vozlišča* in poljubnega števila poddreves, ki pa se končajo z *listi*. V tem primeru je list pravilo aksioma, vozlišče pa je katerokoli pravilo. Drevo izpeljave je torej lahko v naslednjih dveh oblikah, za poljubna poddrevesa $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ in sklep $\mathcal{S}$.

$$\frac{}{A \Rightarrow A}\,\text{Ax} \qquad\qquad \frac{\mathcal{D}_0 \quad \mathcal{D}_1 \quad \ldots \quad \mathcal{D}_n}{\mathcal{S}}\,\text{Pravilo}$$

Definicija 4.7. Strukturna indukcija na drevesih izpeljave bo potekala podobno kot strukturna indukcija na formulah, kjer tokrat za bazo indukcije vzamemo da trditev, ki jo želimo dokazati, velja za list drevesa, indukcijski korak pa pomeni, da če trditev velja za vsa poddrevesa, velja tudi za drevo, zgrajeno iz teh poddreves.

Še ena potrebna definicija, preden začnemo z dokazom izreka o eliminaciji rezov, je pojem glavnega reza.

Definicija 4.8. Če je bila rezana formula ravnokar vpeljana v obeh poddrevesih nad pravilom reza, to imenujemo *glavni rez*.

Primer 4.9. Glavni rez za formulo $A \sqcap B$.

$$\frac{\text{L}\sqcap\,\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \sqcap B \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\Gamma' \Rightarrow A, \Delta' \qquad \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma' \Rightarrow A \sqcap B, \Delta'}\,\text{R}\sqcap}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}$$

$\diamondsuit$

4.2 Dokaz izreka o eliminaciji rezov

Razlog, da izrek 4.3 imenujemo izrek o *eliminaciji rezov*, leži v tem, da dokaz poteka s postopno eliminacijo rezov iz poljubnega drevesa izpeljave, dokler na koncu ne dobimo drevesa izpeljave brez kakeršnegakoli pravila reza. Kot smo omenili na začetku podpoglavja 4.1, dokaz poteka z dvojno indukcijo. Zunanja indukcija, je strukturna indukcija na drevesoma izpeljave nad rezom, notranja pa je strukturna indukcija na rezani formuli. Označimo z $\mathcal{D}_0$ ter $\mathcal{D}_1$ drevesi izpeljave nad rezom, torej:

$$\frac{\mathcal{D}_0 \qquad \mathcal{D}_1}{\mathcal{S}}\,\text{Rez}$$

Začnimo z indukcijskim korakom. Predpostavljamo torej, da iz poddreves $\mathcal{D}_0$ in $\mathcal{D}_1$ znamo eliminirati reze. Da se izognemo problemu, kjer je bilo na primer zadnje pravilo v $\mathcal{D}_0$ ali $\mathcal{D}_1$ rez, predpostavimo, da smo reze tudi že eliminirali iz poddreves. Sedaj dokazujemo, da lahko zgornje drevo izpeljave preobrazimo v drevo izpeljave, kjer se rez pojavi višje v drevesu, torej da je vsaj eno izmed dreves nad novim rezom poddrevo $\mathcal{D}_0$ ali poddrevo $\mathcal{D}_1$. To ustreza indukcijski predpostavki, zato je korak indukcije opravljen.

Znotraj tega koraka, pa seveda delamo tudi indukcijo na strukturi formule. Če torej zgornjega drevesa izpeljave ne uspemo prevesti na drevo, kjer se pravilo reza sedaj pojavi višje, ga lahko prevedemo na rez, ki reže podformulo prvotne formule. Baza notranje indukcije je, da pravilo reza, ki reže osnovno formulo, res prestavimo višje.

Opomba 4.10. Zgoraj opisano indukcijo si lahko predstavljamo kot algoritem, ki sproti eliminira reze iz drevesa izpeljave. Začnemo z poddrevesom, ki kot zadnje pravilo uporabi rez, v nobenem izmed poddreves pa reza ne uporablja več, torej začnemo z „najvišjim” rezom. Če je takih poddreves več, si arbitrarno izberemo enega izmed njih. V tem poddrevesu postopoma potiskamo rez višje ali pa vsaj znižujemo njegovo kompleksnost, dokler reza ne eliminiramo iz poddrevesa. To ponovimo za vsak rez v drevesu izpeljave. Ker je slednje končno, se proces ustavi in drevo izpeljave ne vključuje več rezov.

Vrnimo se h koraku indukcije. Pri obravnavi eliminacije reza je potrebno ločiti, ali je rez, ki ga eliminiramo *glaven*, kot ga opiše definicija 4.8, ali pa ni.

4.2.1 Eliminacija glavnega reza

Kaj pomeni, da je rez glaven, je odvisno od vsake rezane formule posebej. Eliminacijo glavnega reza je torej potrebno ločiti na vse možne veznike. Začnimo kar z veznikom $\sqcap$, ki smo ga že uporabili v primeru 4.9.

$$\dfrac{\mathrm{L}\sqcap\,\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \sqcap B \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\Gamma' \Rightarrow A, \Delta' \qquad \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma' \Rightarrow A \sqcap B, \Delta'}\,\mathrm{R}\sqcap}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow A, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

Izpeljava pred puščico in po njej je enaka, saj iz istih poddreves dokažemo isti sekvent. Tako smo lahko pravilo, ki reže $A \sqcap B$ zamenjali s pravilom, ki reže le A, zato je korak indukcije opravljen. Podobno lahko naredimo za glavni rez $A \star B$.

$$\dfrac{\mathrm{L}\star\,\dfrac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \star B \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\Gamma' \Rightarrow A, \Delta' \qquad \Gamma'' \Rightarrow B, \Delta''}{\Gamma', \Gamma'' \Rightarrow A \star B, \Delta', \Delta''}\,\mathrm{R}\star}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\mathrm{Rez}\,\dfrac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow A, \Delta'}{\Gamma, \Gamma', B \Rightarrow \Delta, \Delta'} \qquad \Gamma'' \Rightarrow B, \Delta''}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''}\,\mathrm{Rez}$$

Tokrat smo sicer prvotni rez prevedli na dva, a oba novonastala reza režeta podformuli, zato zopet zadostimo indukcijski predpostavki. Zelo podobno kot zgornje dva primera izvedemo korak indukcije za $A \sqcup B$ ter $A + B$.

$$\dfrac{\mathrm{L}\sqcup\,\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \sqcup B \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\Gamma' \Rightarrow A, \Delta'}{\Gamma' \Rightarrow A \sqcup B, \Delta'}\,\mathrm{R}\sqcup}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow A, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ \text{Rez}$$

Kot vidimo je zgornji korak indukcije popolnoma simetričen koraku indukcije za $A \sqcap B$, saj sta tudi veznika sama popolnoma simetrična. Prav tako je korak indukcije za $A + B$ popolnoma simetričen koraku indukcije za $A \star B$.

$$\dfrac{\text{L+}\ \dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A + B \Rightarrow \Delta, \Delta'} \qquad \dfrac{\Gamma'' \Rightarrow A, B, \Delta''}{\Gamma'' \Rightarrow A + B, \Delta''}\ \text{R+}}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''}\ \text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\text{Rez}\ \dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma'' \Rightarrow A, B, \Delta''}{\Gamma, \Gamma'' \Rightarrow B, \Delta, \Delta''} \qquad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''}\ \text{Rez}$$

Naslednja eliminacija glavnega reza, ki jo je potrebno obravnavati je eliminacija glavnega reza implikacije. Zopet se rez prevede na dva manj kompleksna reza.

$$\dfrac{\text{L}\multimap\ \dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \Rightarrow \Delta, \Delta'} \qquad \dfrac{\Gamma'', A \Rightarrow B, \Delta''}{\Gamma'' \Rightarrow A \multimap B, \Delta''}\ \text{R}\multimap}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''}\ \text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\text{Rez}\ \dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma'', A \Rightarrow B, \Delta''}{\Gamma, \Gamma'' \Rightarrow B, \Delta, \Delta''} \qquad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''}\ \text{Rez}$$

Poslednji izmed veznikov, ki ga potrebujemo obravnavati je negacija.

$$\dfrac{\text{L}{\sim}\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, {\sim}A \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\Gamma', A \Rightarrow \Delta'}{\Gamma' \Rightarrow {\sim}A, \Delta'}\ \text{R}{\sim}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ \text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma', A \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ \text{Rez}$$

Pri eliminaciji glavnega reza, kjer režemo propozicijsko konstanto, lahko obravnavamo le konstati **1** ter **0**, saj za $\top$ levo pravilo vpeljave ne obstaja, za $\bot$ pa ni desnega. Glavni rez, kjer režemo $\top$ ali $\bot$ se torej ne more zgoditi.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{1} \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\mathbf{1} \qquad \dfrac{}{\Rightarrow \mathbf{1}}\,\mathrm{R}\mathbf{1}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Rez} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathbf{0} \Rightarrow}\,\mathrm{L}\mathbf{0} \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \mathbf{0}, \Delta}\,\mathrm{R}\mathbf{0}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad\qquad\qquad\qquad \Gamma \Rightarrow \Delta$$

Kot lahko vidimo sta te dva primera dokaj trivialna, saj sam rez ničesar ne naredi. Sedaj si oglejmo eliminacijo glavnega reza obeh kvantifikatorjev. Zopet s t označimo specifičen term¸ z y pa poljubno spremenljivko.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A[t/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\forall \qquad \dfrac{\Gamma' \Rightarrow A[y/x], \Delta'}{\Gamma' \Rightarrow \forall x A, \Delta'}\,\mathrm{R}\forall}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\Gamma, A[t/x] \Rightarrow \Delta \qquad \dfrac{\Gamma' \Rightarrow A[y/x], \Delta'}{\Gamma' \Rightarrow A[t/x], \Delta'}\,y := t}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

Kar naredimo v desnem poddrevesu novonastalega drevesa izpeljave je, da spremenljivko y nadomestimo s specifičnim termom t. Ker je bil y res poljuben, to lahko naredimo in tako res dobimo enako formulo kot na koncu levega poddrevesa, to pa nato režemo. Formula $A[t/x]$ je pravzaprav le formula A, kjer je x substituiran za nek bolj specifičen term, zato podformula formule $\forall x A$. Tako je indukcijski predpostavki zopet zadoščeno in korak indukcije je opravljen. Podobno naredimo za eksistenčni kvantifikator. Postopek je popolnoma simetričen postopku za univerzalni kvantifikator.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A[y/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\exists \qquad \dfrac{\Gamma' \Rightarrow A[t/x], \Delta'}{\Gamma' \Rightarrow \exists x A, \Delta'}\,\mathrm{R}\exists}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A[y/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A[t/x] \Rightarrow \Delta}\,y := t \qquad \Gamma' \Rightarrow A[t/x], \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

4.2.2 Glavni rez eksponentov ter posplošeno pravilo reza

Lotimo se sedaj eksponentov. Ker imata oba eksponenta štiri pravila, moramo ločiti glavni rez na več primerov. Pri vezniku ! imamo tri pravila, ki veznik vpeljejo na levi ter eno pravilo, ki veznik vpelje na desni. Zato moramo ločiti glavni rez formule $!A$ na tri primere, po en primer za vsako levo pravilo. Ogljemo si naprej glavni rez, kjer je $!A$ na levi vpeljan s skrčitvijo, na desni pa z desnim pravilom vpeljave.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{C!} \qquad \dfrac{!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\mathrm{R!}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

Mikalo nas bi zgornje drevo izpeljave zamenjati s sledečim.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta \qquad \dfrac{!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\mathrm{R!}}{\Gamma, !\Gamma', !A \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\,\mathrm{Rez} \qquad \dfrac{!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\mathrm{R!}}{\Gamma, !\Gamma', !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta', ?\Delta'}\,\mathrm{Rez}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta', ?\Delta'}\,\mathrm{C!}\times|\Gamma'|}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\,\mathrm{C?}\times|\Delta'|$$

Vendar s tem ne zadostimo indukcijski predpostavki, saj nobeno izmed dreves nad spodnjim izmed novo pridelanih rezov ni poddrevo prvotnih dveh dreves nad rezom, poleg tega pa se je ohranila tudi kompleskonst rezane formule, saj še vedno režemo $!A$. Zavoljo tega, da lahko ta korak indukcije vseeno opravimo, potrebujemo pomožno razširjeno pravilo reza.

Definicija 4.11. *Posplošeni pravili reza*, označeni z $\mathrm{Rez!}_n$ ter $\mathrm{Rez?}_n$, sta definirani za vsak $n \in \mathbb{N}$.

$$\dfrac{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow !A, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez!}_n$$

$$\dfrac{\Gamma, ?A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow (?A)^n, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez?}_n$$

Opomba 4.12. Formula $(!A)^n$ v definiciji predstavjla n formul $!A$, ločenih z vejico. Pravili $\mathrm{Rez!}_1$ ter $\mathrm{Rez?}_1$ sta torej le pravilo Rez, kjer režemo ali formulo $!A$, ali pa formulo $?A$.

Lema 4.13. *Pravili $\mathrm{Rez!}_n$ ter $\mathrm{Rez?}_n$ sta dopustni, kar pomeni, da ju lahko izpeljemo iz že definiranih pravil linearne logike.*

Dokaz. Lemo dokažemo z indukcijo na številu n. Primer ko je $n = 1$ je seveda le običajno pravilo reza, kot omenjeno že v zgornji opombi. Če predpostavimo, da pravilo $\mathrm{Rez!}_n$ že znamo izpeljati, lahko izpeljemo $\mathrm{Rez!}_{n+1}$ na naslednji način.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma, (!A)^{n+1} \Rightarrow \Delta$}
\UnaryInfC{$\Gamma, (!A)^{n-1}, !A, !A \Rightarrow \Delta$}
\LeftLabel{C!}
\UnaryInfC{$\Gamma, (!A)^{n-1}, !A \Rightarrow \Delta$}
\UnaryInfC{$\Gamma, (!A)^{n} \Rightarrow \Delta$}
\AxiomC{$\Gamma' \Rightarrow !A, \Delta'$}
\RightLabel{Rez$!_n$}
\BinaryInfC{$\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$}
\end{prooftree}
$$

Pri indukcijskem koraku iz $n = 1$ na $n = 2$ moramo paziti, saj se v drugi vrstici dokaza pojavi izraz $(!A)^0$. To enostavno interpretiramo kot prazen nabor formul. Indukcijski korak za Rez$?_n$ je simetričen. □

Sedaj izrek 4.3, ki ga dokazujemo, preoblikujmo, tako da bo namesto le navadnega pravila reza vseboval tudi posplošeno pravilo reza.

Izrek 4.14. *Vsak sekvent, dokazan z uporabo pravila reza ali posplošenega pravila reza, lahko dokažemo tudi brez uporabe pravila reza ali posplošenega pravila reza.*

Ker je posplošeno pravilo reza dopustno, je novo formulirani izrek ekvivalenten izreku 4.3. Vendar si sedaj v dokazu lahko pomagamo s posplošenim pravilom reza. Med indukcijskim korakom torej lahko drevo izpeljave preobrazimo tako, da bo zadoščalo indukcijski predpostavki za kateregakoli izmed rezov, navadnega ali posplošenega. A sedaj je potrebno znati eliminirati tudi slednjega. To pomeni, da je potrebno obravnavati korak indukcije tako za pravilo Rez, kot za pravili Rez$!_n$ in Rez$?_n$, vsakič ko obravnavamo rez veznika ! ali ?. V določenih primerih lahko obravnavamo tako posplošeno pravilo reza kot navadno hkrati, saj korak indukcije za Rez$!_n$ lahko izgleda enako tudi pri $n = 1$.

Lotimo se še enkrat drevesa izpeljave, kjer na levi $!A$ vpeljemo s skrčitvijo, tokrat s posplošenim pravilom reza v žepu.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma, (!A)^{n+1} \Rightarrow \Delta$}
\LeftLabel{C!}
\UnaryInfC{$\Gamma, (!A)^{n} \Rightarrow \Delta$}
\AxiomC{$!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'$}
\RightLabel{R!}
\UnaryInfC{$!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'$}
\RightLabel{Rez$!_n$}
\BinaryInfC{$\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'$}
\end{prooftree}
$$

$$\downarrow$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma, (!A)^{n+1} \Rightarrow \Delta$}
\AxiomC{$!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'$}
\RightLabel{R!}
\UnaryInfC{$!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'$}
\RightLabel{Rez$!_{n+1}$}
\BinaryInfC{$\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'$}
\end{prooftree}
$$

Zgornje seveda velja tudi za $n = 1$, torej za navadno pravilo reza. Pri novem drevesu izpeljave je sedaj levo drevo nad rezom poddrevo levega drevesa nad prejšnjim rezom in korak indukcije je opravljen. Oglejmo si sedaj še glavni rez¸ kjer je formula $!A$ na levi vpeljana z ošibitvijo. Tu korak indukcije za posplošeni rez, kjer $n \neq 1$, ter navadni rez ni združljiv, zato primera ločimo.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \Rightarrow \Delta$}
\LeftLabel{W!}
\UnaryInfC{$\Gamma, !A \Rightarrow \Delta$}
\AxiomC{$!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'$}
\RightLabel{R!}
\UnaryInfC{$!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'$}
\RightLabel{Rez}
\BinaryInfC{$\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'$}
\end{prooftree}
$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\mathrm{W!}\times|\Gamma'|\;\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\;\mathrm{W?}\times|\Delta'|$$

Tako smo v tem primeru korak indukcije opravili za navadni rez, za Rez$!_n$, kjer je $n \geq 2$ pa je postopek sledeč.

$$\dfrac{\mathrm{W!}\;\dfrac{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (!A)^{n+1} \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\;\mathrm{R!}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\;\mathrm{Rez!}_{n+1}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta \qquad \dfrac{!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\;\mathrm{R!}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\;\mathrm{Rez!}_n$$

Pri obravnavi glavnega reza formule $!A$ z levim pravilom vpeljave na levi je zopet potrebno ločiti Rez$!_n$ na primer ko je $n = 1$ ter ko $n \neq 1$. Ogljemo si zopet najprej navadno pravilo reza.

$$\dfrac{\mathrm{L!}\;\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\;\mathrm{R!}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\;\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad !\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\;\mathrm{Rez}$$

Za eliminacijo pravila Rez$!_n$, ko je $n \geq 2$, pa bo korak indukcije spet malce bolj zahteven.

$$\dfrac{\mathrm{L!}\;\dfrac{\Gamma, (!A)^{n-1}, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\;\mathrm{R!}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\;\mathrm{Rez!}_n$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathrm{Rez!}_{n-1}\;\dfrac{\Gamma, (!A)^{n-1}, A \Rightarrow \Delta \qquad \dfrac{!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\;\mathrm{R!}}{\Gamma, !\Gamma', A \Rightarrow \Delta, ?\Delta'} \qquad !\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}{\Gamma, !\Gamma', !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta', ?\Delta'}\;\mathrm{Rez}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta', ?\Delta'}\;\mathrm{C!}\times|\Gamma'|}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow \Delta, ?\Delta'}\;\mathrm{C?}\times|\Delta'|$$

Novonastalo drevo izpeljave bi nas lahko spominjalo na problem iz začetka tega podpoglavja, a smo tu za spremembo res zadostili indukcijski predpostavki, saj je desno poddrevo nad najnižjim izmed rezov res poddrevo desnega izmed dreves nad prvotnim rezom.

Eliminacija glavnega reza, ki reže formulo $?A$, je popolnoma simetrična in sledi natanko vsem korakom, opisanim v procesu eliminacije glavnega reza, ki reže formulo $!A$, zato je v tem delu ne bomo posebej obravnavali.

4.2.3 Eliminacija reza, ki ni glaven

Če rez ni bil glaven, se je moralo na levi ali desni strani tik pred rezom zgoditi pravilo, ki ni vpeljalo ravnokar rezane formule. Denimo, da je bil na levi ravnokar vpeljan veznik $\sqcap$, nato pa smo rezali z veznikom nepovezano formulo C.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, C \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \sqcap B, C \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{L}\sqcap \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \sqcap B \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

To lahko, ne glede na to kakšna je formula C in ne glede na to ali je bila na desni vpeljana kakšna druga formula ali ne, preobrazimo tako, da bo zadoščalo indukcijski predpostavki.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, C \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}}{\Gamma, \Gamma', A \sqcap B \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\mathrm{L}\sqcap$$

Rez smo res premaknili višje v drevesu izpeljave in kot lahko vidimo sama formula C za indukcijski korak ni bila pomembna. Zato namesto glede na rezano formulo, ločimo primere glede na ravnokar vpeljano formulo, ki ni C. Seveda tudi ni pomembno, ali se ta vpeljava zgodi v levem ali desnem poddrevesu nad rezom, saj je to asimetrično le če obravnavamo rezano formulo. Pomembno pa je, ali je bil veznik vpeljan z levim pravilom vpeljave ali je bil vpeljan z desnim, zato si oglejmo še drugi primer, ko je vpeljana formula $A \sqcap B$.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, C \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma, C \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma, C \Rightarrow A \sqcap B, \Delta}\,\mathrm{R}\sqcap \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \sqcap B, \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, C \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez} \qquad \dfrac{\Gamma, C \Rightarrow B, \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow B, \Delta, \Delta'}\,\mathrm{Rez}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \sqcap B, \Delta, \Delta'}\,\mathrm{R}\sqcap$$

Tu smo sicer pridelali dva reza, a sta oba višje v drevesu izpeljave, zato zadostimo indukcijski predpostavki. Poglejmo si še, kaj se zgodi če na levi vpeljemo veznik $\star$.

$$\dfrac{\text{L}\star\,\dfrac{\Gamma, A, B, C \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \star B, C \Rightarrow \Delta} \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \star B \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B, C \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A, B \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}}{\Gamma, \Gamma', A \star B \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{L}\star$$

Kot pri primeru levega pravila vpeljave za veznik $\sqcap$, pravilo reza ter pravilo vpeljave le zamenjamo, zato enostavno zadostimo indukcijski predpostavki.

$$\dfrac{\text{R}\star\,\dfrac{\Gamma, C \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma', C \Rightarrow A \star B, \Delta, \Delta'} \qquad \Gamma'' \Rightarrow C, \Delta''}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow A \star B, \Delta, \Delta', \Delta''}\,\text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\text{Rez}\,\dfrac{\Gamma, C \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma'' \Rightarrow C, \Delta''}{\Gamma, \Gamma'' \Rightarrow A, \Delta, \Delta''} \qquad \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \Rightarrow A \star B, \Delta, \Delta', \Delta''}\,\text{R}\star$$

Pri zgornjem koraku indukcije je pomembno, da se formula C, ki jo režemo, kot predpostavka dodatno pojavi le v enem izmed skventov $\Gamma \Rightarrow A, \Delta$ ter $\Gamma' \Rightarrow B, \Delta'$, ne v obeh, saj desno pravilo vpeljave veznika $\star$ združi konteksta in bi morali drugače C iz sekventa rezati dvakrat. To pa nam tudi omogoči zelo enostaven korak indukcije, kot je izveden zgoraj. Primeri za veznika $\sqcup$ ter $+$ so popolnoma simetrični prejšnjim štirim primerom, zato jih prepustimo bralcu. Oglejmo si sedaj primer, ko na levi tik pred rezom vpeljemo implikacijo.

$$\dfrac{\text{L}\multimap\,\dfrac{\Gamma, C \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', C, A \multimap B \Rightarrow \Delta, \Delta'} \qquad \Gamma'' \Rightarrow C, \Delta''}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'', A \multimap B \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''}\,\text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\text{Rez}\,\dfrac{\Gamma, C \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma'' \Rightarrow C, \Delta''}{\Gamma, \Gamma'' \Rightarrow A, \Delta, \Delta''} \qquad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'', A \multimap B \Rightarrow \Delta, \Delta', \Delta''}\,\text{L}\multimap$$

Kot lahko vidimo, je ta primer zelo podoben primeru, ko tik nad rezom vpeljemo $\star$ z desnim pravilom vpeljave. Prav tako je primer, ko je $\multimap$ vpeljan na desni, zelo podoben primeru, ko je $\star$ vpeljan na levi.

$$\dfrac{\text{R}\multimap\dfrac{\Gamma, C, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma, C \Rightarrow A \multimap B, \Delta} \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \multimap B, \Delta, \Delta'}\text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, C, A \Rightarrow B, \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B, \Delta, \Delta'}\text{Rez}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A \multimap B, \Delta, \Delta'}\text{R}\multimap$$

Zadnji izmed propozicijskih veznikov je zopet negacija. Obravnavali bomo le levo pravilo vpeljave, saj je desno popolnoma simetrično in je zato tudi postopek eliminacije take vrste reza simetričen.

$$\dfrac{\text{L}\sim\dfrac{\Gamma, C \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, C, \sim A \Rightarrow \Delta} \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \sim A \Rightarrow \Delta, \Delta'}\text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, C \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, \Delta, \Delta'}\text{Rez}}{\Gamma, \Gamma', \sim A \Rightarrow \Delta, \Delta'}\text{L}\sim$$

Oglejmo si še konstante. Tokrat seveda obravnavamo tudi konstanti $\top$ ter $\bot$, saj rez ni glaven in nimamo več težave z dejstvom, da imata vsaka le po eno pravilo vpeljave.

$$\dfrac{\text{R}\top\dfrac{}{\Gamma, C \Rightarrow \top, \Delta} \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \top, \Delta, \Delta'}\text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\text{R}\top\dfrac{}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \top, \Delta, \Delta'}$$

Ker lahko $\top$ med sklepi vedno dokažemo, lahko končni sekvent dobimo tudi ne da bi rezali formulo C, saj je ta že od začetka med predpostavkami nastala „umetno". Korak indukcije za konstanto $\bot$ izvedemo popolnoma simetrično, saj zanjo velja ista lastnost, le da velja med predpostavkami. Pri obravnavi konstante $\mathbf{1}$ desnega pravila vpeljave ne moremo obravnavati, saj ob formuli $\mathbf{1}$ v sekventu ni nobene druge formule, ki bi jo lahko rezali. Zato obravnavamo le levo pravilo vpeljave.

$$\dfrac{\text{L}\mathbf{1}\dfrac{\Gamma, C \Rightarrow \Delta}{\Gamma, C, \mathbf{1} \Rightarrow \Delta} \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \mathbf{1} \Rightarrow \Delta, \Delta'}\text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, C \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}}{\Gamma, \Gamma', \mathbf{1} \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{L}\mathbf{1}$$

Korak indukcije pri konstanti **0** je simetričen, obravnavamo pa le njeno desno pravilo vpeljave, iz enakih razlogov. Pri kvantifikatorjih je ta korak spet precej enostaven in simetričen za vse štiri primere, zato bomo prikazali le enega, namreč primer, ko na levi tik pred rezom vpeljemo formulo $\forall x A$.

$$\dfrac{\text{L}\forall\,\dfrac{\Gamma, C, A[t/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, C, \forall x A \Rightarrow \Delta} \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \forall x A \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, C, A[t/x] \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A[t/x] \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}}{\Gamma, \Gamma', \forall x A \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{L}\forall$$

Lotimo se sedaj eksponentov. Začnimo s primerom, kjer je bila nad rezom ravnokar vpeljana formula $!A$, s skrčitvijo, ošibitvijo ali levim pravilom vpeljave. Vsi ti primeri so si enaki, zato obravnavajmo le skrčitev.

$$\dfrac{\text{C!}\,\dfrac{\Gamma, C, !A, !A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, C, !A \Rightarrow \Delta} \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma', !A \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, C, !A, !A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma', !A, !A \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez}}{\Gamma, \Gamma', !A \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{C!}$$

Primeri, ko je bila vpeljana formula $?A$ s skrčitvijo, ošibitvijo ali desnim pravilom vpeljave, so prav tako enaki, zato jih ne bomo obravnavali. Pri desnem pravilu vpeljave fomrule $!A$ ter pri levem pravilu vpeljave formule $?A$ pa se je treba malce bolj potruditi. Primera sta zopet simetrična, zato si oglejmo le desno pravilo vpeljave formule $!A$. Da smo lahko kot sklep sploh vpeljali formulo $!A$, je morala biti formula C, ki jo režemo, oblike $!C$.

$$\dfrac{\text{R!}\,\dfrac{!\Gamma, !C \Rightarrow A, ?\Delta}{!\Gamma, !C \Rightarrow !A, ?\Delta} \qquad \Gamma' \Rightarrow !C, \Delta'}{!\Gamma, \Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta, \Delta'}\,\text{Rez}$$

Tu pa nastopi težava, saj drevesa izpeljave ne moremo preoblikovati, ne da bi vedeli kaj več o desnem poddrevesu nad rezom.

$$\dfrac{\dfrac{!\Gamma, !C \Rightarrow A, ?\Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow !C, \Delta'}{!\Gamma, \Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta, \Delta'}\text{Rez}}{?}$$

Če namreč Γ' ni oblike $!\Gamma'$ in Δ' ni oblike $?\Delta'$, desnega pravila vpeljave za veznik ! ne moremo več uporabiti. Ločiti je treba primera, ko je bila formula $!C$ na desni ravnokar vpeljana z desnim pravilom vpeljave veznika ! in ko ni bila. Če formula $!C$ ni bila ravnokar vpeljana, je moral biti vpeljan nek drug veznik, vse take primere, razen seveda R!, pa smo že obravnavali, ne da bi nam bilo pomembno, kaj se dogaja v drugem poddrevesu. Vendar pa se primer, ko na desni uporabimo pravilo R!, a z njim ne upeljemo formule $!C$, ne more zgoditi. Drevo izpeljave bi namreč želelo izgledati tako:

$$\dfrac{\text{R!}\dfrac{!\Gamma, !C \Rightarrow A, ?\Delta}{!\Gamma, !C \Rightarrow !A, ?\Delta} \qquad \dfrac{!\Gamma' \Rightarrow !C, B, ?\Delta'}{!\Gamma' \Rightarrow !C, ?B, ?\Delta'}\textcolor{red}{\text{R!}}}{!\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow !A, ?B, ?\Delta, ?\Delta'}\text{Rez}$$

Toda se rdeče obarvano pravilo R! ni moglo zgoditi, saj kontekst na desni ni bil v celoti predznačen z veznikom ?. Tako je v resnici treba obravnavati le primer, ko je na desni vpeljana prav formula $!C$.

$$\dfrac{\text{R!}\dfrac{!\Gamma, !C \Rightarrow A, ?\Delta}{!\Gamma, !C \Rightarrow !A, ?\Delta} \qquad \dfrac{!\Gamma' \Rightarrow C, ?\Delta'}{!\Gamma' \Rightarrow !C, ?\Delta'}\text{R!}}{!\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta, ?\Delta'}\text{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{!\Gamma, !C \Rightarrow A, ?\Delta \qquad \dfrac{!\Gamma' \Rightarrow C, ?\Delta'}{!\Gamma' \Rightarrow !C, ?\Delta'}\text{R!}}{!\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta, ?\Delta'}\text{Rez}}{!\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta, ?\Delta'}\text{R!}$$

Enak problem nastane, če je formula $!A$ vpeljana z desnim pravilom vpeljave v desnem poddrevesu nad rezom. V tem primeru je morala formula C biti oblike $?C$ in je bila v levem poddrevesu vpeljana kot predpostavka. To ima seveda enako rešitev kot primer zgoraj.

4.2.4 Eliminacija posplošenega reza, ki ni glaven

Kot smo že omenili, ko smo vpeljali posplošeni pravili reza, je potrebno vse korake indukcije opraviti tudi zanju. Pravili $\text{Rez}!_n$ ter $\text{Rez}?_n$ sta si simetrični, zato bomo zopet obravnavali le pravilo $\text{Rez}!_n$. Drevo izpeljave, ki ga torej obravnavamo v tem poglavju je sledeče.

$$\frac{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow !A, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,\text{Rez!}_n$$

Posplošeni glavni rez smo že obravnavali, zato nam zopet preostane primer, ko smo v enem izmed poddreves tik nad rezom ravnokar vpeljali neko drugo formulo. Za razliko od prejšnjega poglavja, je tokrat pomembno, ali se je to zgodilo na levem ali desnem poddrevesu, saj ti nista več simetrični. Če je bila nova formula vpeljana na desni strani nad rezom, je to ne glede na veznik, ki je bil vpeljan, popolnoma enako primerom iz prejšnjega poglavja. Tam smo namreč rezali le eno formulo C, za katero nam ni bilo pomembno, ali je oblike $!C$ ali ne, prav tako pa ni bilo pomembno, kakšne oblike ali kako je bil vpeljan C v drugem poddrevesu nad rezom. Edino pravilo vpeljave, ki je bilo na to pozorno, je bilo pravilo R! (ter seveda L?), ki pa se zopet ne moreta pojaviti kot zadnji pravili v desnem poddrevesu, saj nabor sklepov v sekventu $\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'$ ni oblike $?\Delta''$.

Preostane nam torej preveriti, kaj se zgodi, ko je formula $!A$ na v desnem poddrevesu ravnokar vpeljana. Obravnavamo torej naslednje drevo izpeljave.

$$\frac{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta \qquad \dfrac{!\Gamma' \Rightarrow A, ?\Delta'}{!\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}\,\text{R!}}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow ?\Delta, \Delta'}\,\text{Rez!}_n$$

Sedaj moramo ločiti primere glede na to, kaj je bilo zadnje pravilo uporabljeno v levem poddrevesu nad rezom. Obravnavali bomo le nekaj nazornih primerov, začenši z desnim pravilom za veznik $\sqcap$. Desnega pravila vpeljave formule $!A$ ne bomo pisali vsakič posebej, saj ni relevantno za korak indukcije. Kar je pomembno pri tem, da je bilo to pravilo ravnokar uporabljeno, sta le konteksta $!\Gamma$ ter $?\Delta$, kot bomo videli pri nekaterih izmed obravnavanih primerov.

$$\frac{\text{R}\sqcap\,\dfrac{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow B, \Delta \qquad \Gamma, (!A)^n \Rightarrow C, \Delta}{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow B \sqcap C, \Delta} \qquad !\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow B \sqcap C, \Delta, ?\Delta'}\,\text{Rez!}_n$$

$$\downarrow$$

$$\text{R}\sqcap\,\frac{\text{Rez!}_n\,\dfrac{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow B, \Delta \qquad !\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow B, \Delta, ?\Delta'} \qquad \dfrac{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow C, \Delta \qquad !\Gamma' \Rightarrow !A, ?\Delta'}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow C, \Delta, ?\Delta'}\,\text{Rez!}_n}{\Gamma, !\Gamma' \Rightarrow B \sqcap C, \Delta, ?\Delta'}$$

Kot lahko vidimo je korak indukcije, kjer formule $(!A)^n$ ostanejo nespremenjene, čisto enak primerom, kjer obravnavamo navadni rez, saj dejstvo, da je bilo rezanih več formul naenkrat ne pride v poštev. Zato bomo obravnavali le še primer, kjer se predpostavke v pravilu vpeljave razdelijo na dva dela. Dober primer takega pravila je R$\star$.

$$\frac{\text{R}\star\,\dfrac{\Gamma, (!A)^p \Rightarrow B, \Delta \qquad \Gamma', (!A)^q \Rightarrow C, \Delta'}{\Gamma, \Gamma', (!A)^{p+q} \Rightarrow B \star C, \Delta, \Delta'} \qquad !\Gamma'' \Rightarrow !A, ?\Delta''}{\Gamma, \Gamma', !\Gamma'' \Rightarrow B \star C, \Delta, \Delta', ?\Delta''}\,\text{Rez!}_{p+q}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, (!A)^p \Rightarrow B, \Delta \qquad !\Gamma'' \Rightarrow !A, ?\Delta''}{\Gamma, !\Gamma'' \Rightarrow B, \Delta, ?\Delta''}\,\mathrm{Rez}!_p \qquad \dfrac{\Gamma', (!A)^q \Rightarrow C, \Delta' \qquad !\Gamma'' \Rightarrow !A, ?\Delta''}{\Gamma', !\Gamma'' \Rightarrow C, \Delta', ?\Delta''}\,\mathrm{Rez}!_q}{\dfrac{\Gamma, \Gamma', !\Gamma'', !\Gamma'' \Rightarrow B \star C, \Delta, \Delta', ?\Delta'', ?\Delta''}{\dfrac{\Gamma, \Gamma', !\Gamma'' \Rightarrow B \star C, \Delta, \Delta', ?\Delta'', ?\Delta''}{\Gamma, \Gamma', !\Gamma'' \Rightarrow B \star C, \Delta, \Delta', ?\Delta''}\,\mathrm{C}?\times|\Delta''|}\,\mathrm{C}!\times|\Gamma''|}\,\mathrm{R}\star$$

Tu je bilo res pomembno, da so bile predpostavke v desnem poddrevesu oblike $!\Gamma''$, sklepi pa oblike $?\Delta''$, saj smo jih tako lahko dvakrat uporabili.

Z zgornjim poddrevesom smo prikazali, kako bi korak indukcije potekal za vsa pravila, kjer je število formul, ki jih režemo naenkrat, pomembno, torej pravila, kjer se predpostavke delijo na dva. S tem pa smo tudi obdelali vse možne korake indukcije tega dokaza.

4.2.5 Baza indukcije

Začnimo z bazo indukcije na navadnem rezu. Vrnimo se k opisu indukcije, kot je definirana na začetku tega podpoglavja, torej 4.2 in se zopet nanašajmo na poddrevesi nad rezom s simboloma $\mathcal{D}_0$ in $\mathcal{D}_1$. Baza zunanje indukcije v tem kontekstu pomeni, da je vsaj eden izmed $\mathcal{D}_0$ ter $\mathcal{D}_1$ list, torej pravilo aksioma, ter da tisto pravilo, ki ni list, že ne vsebuje pravila rez. Potrebno je dokazati, da lahko take vrste drevo izpeljave preobrazimo v drevo izpeljave brez rezov. Oglejmo si torej primer, ko je $\mathcal{D}_0$ list, $\mathcal{D}_1$ pa ni. Obratno je seveda simetrično.

$$\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow A}\,\mathrm{Ax} \qquad \Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Rez}$$

$$\downarrow$$

$$\Gamma, A \Rightarrow \Delta$$

Kot lahko vidimo je to precej trivialen korak, saj rezanje formule, ki je bila ravnokar vpeljana z aksiomom, ne spremeni ničesar.

Opomba 4.15. Baze notranje indukcije nam ni treba posebej obravnavati, saj je bila pravzaprav obravnavana že v podpoglavju 4.2.3. Če je namreč rezana formula osnovna formula, ni bila vpeljana v nobenem poddrevesu nad rezom, saj lahko vpeljemo le sestavljene formule. Pokazali smo, da lahko vsak tak rez premaknemo višje in s tem zadostimu koraku zunanje indukcije, kar pa je ravno baza notranje indukcije.

Oglejmo si še bazo indukcije pri posplošenem rezu, zopet le pri pravilu $\mathrm{Rez}!_n$. Tokrat se je aksiom kot zadnje pravilo lahko seveda pojavil le v desnem poddrevesu nad rezom, saj je na levi nujno več kot ena predpostavka v sekventu, drugače bi to bil le navadni rez.

$$\dfrac{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta \qquad \dfrac{}{!A \Rightarrow !A}\,\mathrm{Ax}}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{Rez!}_n$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\Gamma, (!A)^n \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\,\mathrm{C!}\times(n-1)$$

Tudi ta korak dokaza je dokaj enostaven, saj je bistvo veznika ! ravno to, da je število formul $!A$ – na levi strani sekventa – nepomembno.

S tem smo dokaz izreka o eliminaciji rezov zaključili, saj smo obdelali vse primere koraka indukcije ter bazni primer za obe vrsti rezov.

5 Povezava med linearno in nelinearno logiko

Dokazali smo, da je linearna logika konsistenten sistem dokazovanja. Kot smo lahko videli, smo imeli največ težav z dokazom pri eliminaciji eksponentov. To nam da misliti, da je dokaz eliminacije rezov v nelinearnem sekventnem računu težji, saj lahko na vsakem koraku uporabimo ošibitev ter skrčitev. Koristno bi torej bilo, če bi lahko že z dokazom eliminacije rezov v linearni logiki poskrbeli za eliminacijo rezov v nelinearni logiki. Zato si oglejmo vložitev običajnega sekventnega računa v linearni sekventni račun.

Vsak sekvent oblike $\Gamma \Rightarrow \Delta$, dokazan v običajnem sekventnem računu bomo torej želeli preobraziti v nek sekvent $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$, dokazan linearno. Možnih načinov, kako dobiti ta sekvent je več. Lahko bi enostavno vse predznačili z eksponenti in nato dokazali, da je sekvent $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ res izpeljiv v linearni logiki, a mi se bomo lotili bolj varčne vložitve, ki poudari kater deli dokaza so bili linearni in kateri ne. Za začetek bomo induktivno definirali operaciji $^+$ ter $^-$, ki nam bosta pri vložitvi pomagali.

Definicija 5.1. Operacija $^+$ je funkcija, ki slika iz običajnega sekventnega računa v linearnega. Njen predpis je definiran induktivno, glede na strukturo formule.

1. Če je P neka osnovna formula, je $P^+ := \mathbf{0} \sqcup P$.

Primer 5.2. - def poz plus neg vezniki (pomoje ni treba obrnljivosti ampak lahko k se itak rabi v dokazu) <- actually pomoje sploh ne rabis, samo uporabi notacijo +-

- def A+ in A- in formuliraj izrek gamma -> delta sledi gamma+ -> delta-
- dokazi weakening + contraction na levi, pa use veznike na levi, to je simetricno
- quantifiers also! ♢

Vse kar torej lahko dokažemo nelinearno, lahko dokažemo tudi linearno. To nam po eni strani olajša dokaz eliminacije reza, kot že omenjeno na začetku tega poglavja, po drugi strani pa nam tudi omeji nelinearnost le na del dokaza. To je lahko zelo uporabno pri razumevanju strukture dokaza samega, še posebej če želimo biti pozorni na to, koliko predpostavk uporabimo in kolikokrat dokažemo sklepe.