SEIS

Aplicações da Integral Definida

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$W=9810\pi\int_{0,5}^{1,5}[f(x)]^2 x\,dx$$

As possibilidades de aplicação do Cálculo Integral em Geometria, Física e Engenharia são demonstradas neste Capítulo.

Nas Secções 6.1 e 6.2 aplicamos a integral definida para calcular os volumes de vários tipos de sólidos. Usamos *cortes*, *discos* e *anéis circulares* na Secção 6.1 e *invólucros cilíndricos* na Secção 6.2. Mostramos na Secção 6.3 como a integral definida pode ser usada para calcular o *comprimento de arco* do gráfico de uma função entre dois pontos.

As aplicações físicas de integração aparecem nas outras quatro secções. Determinamos *centros de massa de barras* na Secção 6.4 e *centros de massa de regiões planas* na Secção 6.5. O *trabalho* realizado por uma força variável atuando sobre um objeto é calculado na Secção 6.6. A Secção Suplementar 6.7 trata da aplicação de integrais definidas para determinar a força causada pela *pressão líquida*, tal como a pressão da água contra o lado de um recipiente.

6.1 VOLUMES DE SÓLIDOS POR CORTES, DISCOS E ANÉIS CIRCULARES

A definição de área de uma região plana nos levou à definição da integral definida. No desenvolvimento, usamos a fórmula para a área de um retângulo, da Geometria Plana. Usamos um processo similar para obter volumes de determinados tipos de sólidos. Um deles é um *cilindro reto*. Note que neste capítulo um cilindro é considerado sólido, enquanto que mais adiante, no Capítulo 15, definimos um cilindro como uma superfície.

Um sólido será um **cilindro reto** se for limitado por duas regiões planas congruentes R_1 e R_2, situadas em planos paralelos e por uma superfície lateral gerada por um segmento de reta, tendo seus extremos sobre os limites de R_1 e R_2, que se move de modo que seja sempre perpendicular aos planos de R_1 e R_2. A Figura 1 mostra um cilindro reto. A altura do cilindro é a distância perpendicular entre os planos de R_1 e R_2 e a base é R_1 ou R_2. Se a base do cilindro reto for uma região encerrada por um retângulo, teremos um **paralelepípedo retangular**, que aparece na Figura 2, e se a base for uma região encerrada por um círculo, temos um **cilindro circular reto**, como mostra a Figura 3.

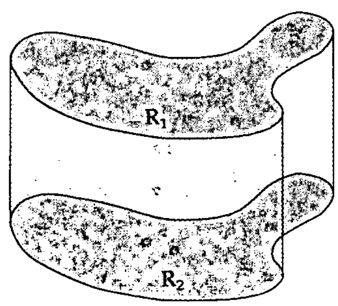


FIGURA 1

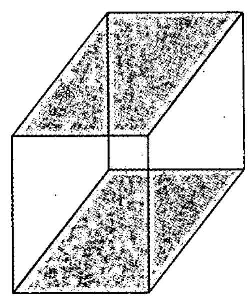


FIGURA 2

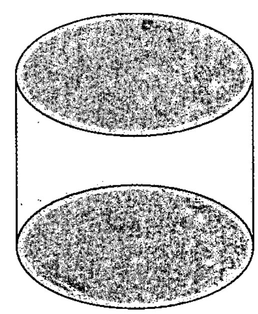


FIGURA 3

Se a área da base de um cilindro reto for A unidades quadradas e a altura for h unidades, então, da geometria dos sólidos, se V unidades cúbicas for o volume

$$V = Ah$$

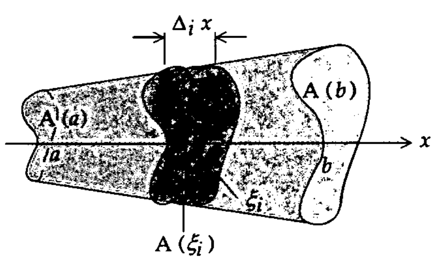


FIGURA 4

Usaremos essa fórmula para obter um método de calcular a medida do volume de um sólido para o qual a área de qualquer secção plana (uma região plana formada pela intersecção de um plano com o sólido) que é perpendicular a um eixo, seja uma função da distância perpendicular da secção plana de um ponto fixo sobre o eixo. A Figura 4 mostra tal sólido S que se situa entre planos perpendiculares ao eixo x em a e b. Seja $A(x)$ unidades quadradas a área da secção plana de S que é perpendicular ao eixo x em x. Exigimos que A seja contínua em $[a, b]$.

Seja Δ uma partição do intervalo fechado $[a, b]$, dada por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

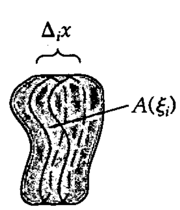


FIGURA 5

Existem, então, n subintervalos da forma $[x_{i-1}, x_i]$, onde $i = 1, 2, \ldots, n$, sendo $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do i-ésimo subintervalo. Escolhemos qualquer número ξ_i com $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, em cada subintervalo, e construímos os cilindros retos com $\Delta_i x$ unidades de altura e a área das secções planas igual a $A(\xi_i)$ unidades quadradas. A Figura 5 mostra o i-ésimo cilindro reto, que chamaremos de elemento de volume. Se $\Delta_i V$ unidades cúbicas for o volume do i-ésimo elemento, então

$$\Delta_i V = A(\xi_i)\,\Delta_i x$$

A soma das medidas dos volumes de n elementos é

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\,\Delta_i x \tag{1}$$

que é a soma de Riemann. Essa soma é uma aproximação do que intuitivamente pensamos ser o número de unidades cúbicas no volume do sólido. Quanto menor tomarmos a norma $\|\Delta\|$ da partição, maior será n e mais perto estaremos da aproximação do número V que queremos designar para a medida do volume. Portanto, definimos V como o limite da soma de Riemann em (1) quando $\|\Delta\|$ aproxima-se de zero. Esse limite existe, pois A é contínua em $[a, b]$. Temos, então, a definição a seguir.

6.1.1 DEFINIÇÃO Seja S um sólido tal que S esteja entre planos perpendiculares ao eixo x em a e b. Se a medida da área da secção plana de S no plano perpendicular ao eixo x em x for dada por $A(x)$, onde A é contínua em $[a, b]$, então a medida do volume de S será dada por

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\,\Delta_i x$$

$$= \int_a^b A(x)\,dx$$

A terminologia **corte** é usada quando aplicamos a Definição 6.1.1 para encontrar o volume de um sólido. O processo é similar a cortar um pão em fatias bem finas, de modo que todas elas juntas componham um pão inteiro. Na ilustração a seguir mostramos que a Definição 6.1.1 é consistente com a fórmula da geometria dos sólidos para o volume de um cilindro circular reto.

▶ **ILUSTRAÇÃO 1** Na Figura 6 há um cilindro circular reto que tem h unidades de altura e r unidades de raio da base, sendo os eixos coordenados escolhidos de modo que a origem esteja no centro de uma base e a altura seja medida ao longo do eixo positivo x. Uma secção plana a uma distância de x unidades a partir da origem tem uma área de $A(x)$ unidades quadradas, onde

$$A(x) = \pi r^2$$

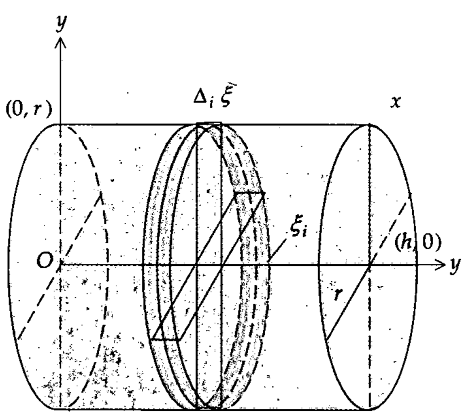


FIGURA 6

Um elemento de volume, mostrado na Figura 6, é um cilindro reto cuja área da base é $A(\xi_i)$ unidades quadradas e uma espessura de $\Delta_i x$ unidades. Assim, se V unidades cúbicas for o volume do cilindro circular reto.

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\,\Delta_i x$$

$$= \int_0^h A(x)\,dx$$

$$= \int_0^h \pi r^2\,dx$$

$$= \pi r^2 x \Big]_0^h$$

$$= \pi r^2 h$$

◀

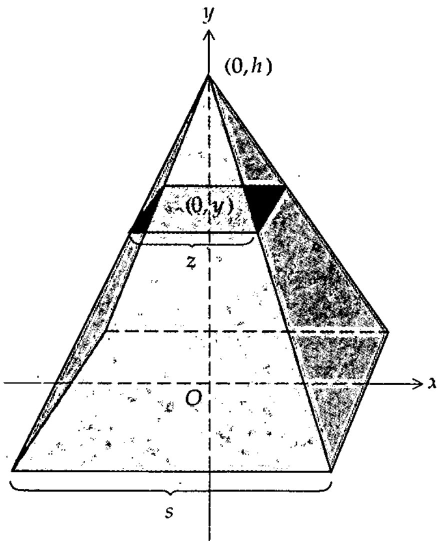


FIGURA 7

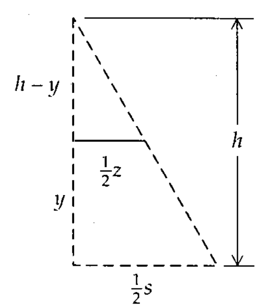


FIGURA 8

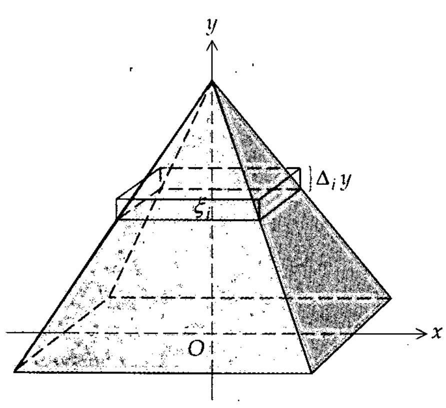


FIGURA 9

Na Definição 6.1.1 substituímos x por y. Em tal situação, S é um sólido situado entre planos desenhados perpendicularmente ao eixo y em c e d, e a medida da área da secção plana de S, traçada perpendicularmente ao eixo y em y é dada por $A(y)$, onde A é contínua em $[c, d]$. Então, a medida do volume de S é dada por

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\, \Delta_i y$$
$$= \int_c^d A(y)\, dy$$

EXEMPLO 1 Use um corte para achar o volume de uma pirâmide reta cuja altura é h unidades e cuja base é um quadrado com s unidades de lado.

Solução A Figura 7 mostra uma pirâmide reta e os eixos coordenados escolhidos, de modo que o centro da base esteja na origem e a altura seja medida ao longo do lado positivo do eixo y. A secção plana da pirâmide traçada perpendicularmente ao eixo y em $(0, y)$ é um quadrado. Se o comprimento de um lado desse quadrado for z unidades, então, pelos triângulos similares (veja a Figura 8)

$$\frac{\frac{1}{2}z}{h - y} = \frac{\frac{1}{2}s}{h}$$

$$z = \frac{s}{h}(h - y)$$

Portanto, se $A(y)$ unidades quadradas for a área da secção plana

$$A(y) = \frac{s^2}{h^2}(h - y)^2$$

A Figura 9 mostra um elemento de volume que é um cilindro reto de área $A(\xi_i)$ unidades quadradas e uma espessura de $\Delta_i y$ unidades. Assim, se V unidades cúbicas for o volume da pirâmide reta

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\, \Delta_i y$$
$$= \int_0^h A(y)\, dy$$
$$= \int_0^h \frac{s^2}{h^2}(h - y)^2\, dy$$
$$= \frac{s^2}{h^2}\left[-\frac{(h - y)^3}{3}\right]_0^h$$
$$= \frac{s^2}{h^2}\left[0 + \frac{h^3}{3}\right]$$
$$= \tfrac{1}{3}s^2 h$$

Agora mostramos como a Definição 6.1.1 pode ser aplicada para encontrarmos o volume de um **sólido de revolução** que é um sólido obtido com a rotação de uma região num plano em torno de uma reta no plano, chamada de **eixo de revolução**, o qual pode ou não interceptar a região. Por exemplo, se a região

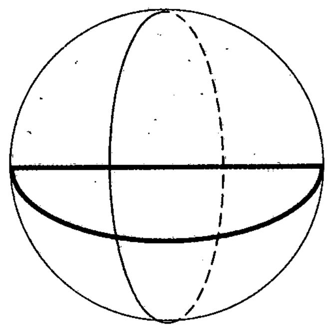


FIGURA 10

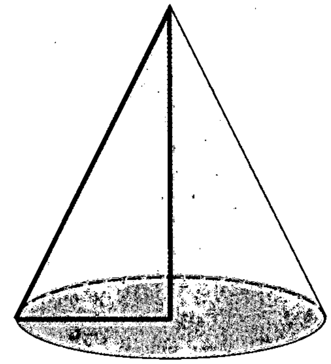


FIGURA 11

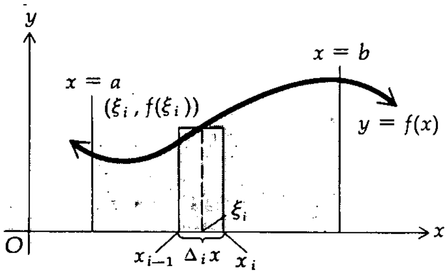


FIGURA 12

limitada por um semi-círculo e seu diâmetro for girada em torno do diâmetro, uma esfera será descrita (veja a Figura 10). Um cone circular reto é gerado se a região limitada por um triângulo retângulo for girada em torno de um de seus catetos (veja a Figura 11).

Consideremos, em primeiro lugar, o caso em que o eixo de revolução é uma fronteira da região que gira. Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. A Figura 12 mostra a região R e o i-ésimo retângulo. Quando o i-ésimo retângulo é girado em torno do eixo x, obtemos um elemento de volume que é um disco cuja base é um círculo de raio $f(\xi_i)$ unidades e cuja altura é $\Delta_i x$ unidades, como é mostrado na Figura 13. Se $\Delta_i V$ unidades cúbicas for o volume desse disco,

$$\Delta_i V = \pi[f(\xi_i)]^2 \, \Delta_i x$$

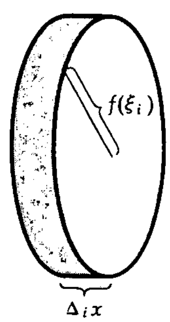


FIGURA 13

Como temos n retângulos, iremos obter n discos circulares dessa forma, e a soma das medidas dos volumes desses n discos circulares será

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(\xi_i)]^2 \, \Delta_i x$$

Essa é uma soma de Riemann da forma (1) onde $A(\xi_i) = \pi[f(\xi_i)]^2$. Portanto, se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução, segue da Definição 6.1.1 que V será o limite dessa soma de Riemann quando $\|\Delta\|$ aproximar-se de zero. Esse limite existe, pois f^2 é contínua em $[a, b]$, já que supusemos que f seja contínua nesse número. Temos então o teorema a seguir.

6.1.2 TEOREMA Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Se S for o sólido de revolução obtido pela rotação efetuada, em torno do eixo x, da região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, e se V for o número de unidades cúbicas no volume de S, então

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(\xi_i)]^2 \, \Delta_i x$$

$$= \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

▶ **ILUSTRAÇÃO 2** Vamos encontrar o volume do sólido de revolução gerado quando a região limitada pela curva $y = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$

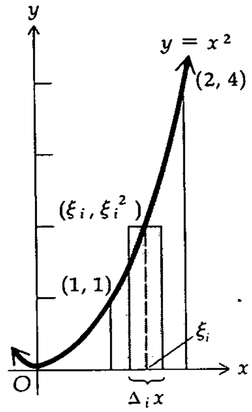


FIGURA 14

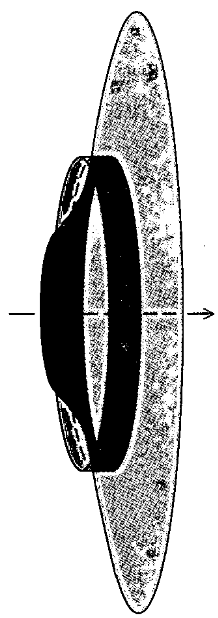


FIGURA 15

e $x = 2$ for rotacionada em torno do eixo x. Consulte a Figura 14, que mostra a região e um elemento retangular de área. A Figura 15 mostra um elemento de volume e o sólido de revolução. A medida do volume do disco circular é dada por

$$\Delta_i V = \pi(\xi_i^2)^2 \, \Delta_i x$$
$$= \pi\xi_i^4 \, \Delta_i x$$

Então,

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\xi_i^4 \, \Delta_i x$$
$$= \pi \int_1^2 x^4 \, dx$$
$$= \pi(\tfrac{1}{5}x^5)\Big]_1^2$$
$$= \tfrac{31}{5}\pi$$

Logo, o volume do sólido de revolução é $\frac{31}{5}\pi$ unidades cúbicas. ◄

Um teorema analógo ao Teorema 6.1.2 aplica-se quando tanto o eixo de revolução quanto o limite de uma região rotacionada forem o eixo y ou qualquer reta paralela ao eixo x ou ao eixo y.

EXEMPLO 2 Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $x = 1$, da região limitada pela curva

$$(x - 1)^2 = 20 - 4y$$

e pelas retas $x = 1$, $y = 1$ e $y = 3$ e à direita de $x = 1$.

Solução A região, bem como um elemento retangular de área, estão na Figura 16. Um elemento de volume e o sólido de revolução aparecem na Figura 17.

Vamos resolver em x a equação da curva, obtendo

$$x = \sqrt{20 - 4y} + 1$$

Seja $g(y) = \sqrt{20 - 4y} + 1$. Tomamos uma partição do intervalo [1, 3] no eixo y.

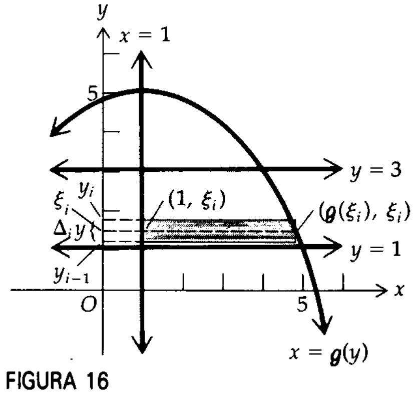


FIGURA 16

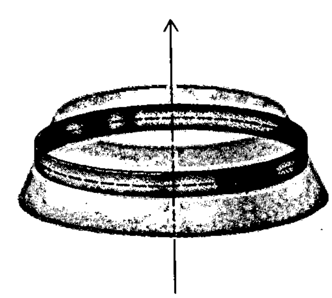


FIGURA 17

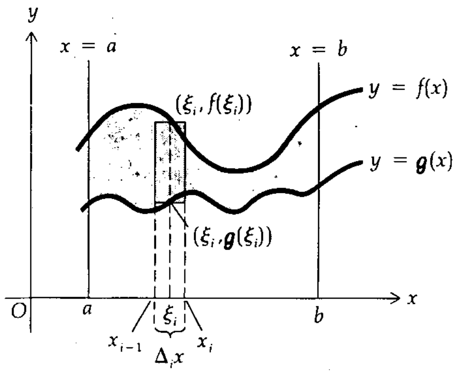


FIGURA 18

Então, se $\Delta_i V$ unidades cúbicas for o volume do i-ésimo disco circular,

$$\begin{aligned}\Delta_i V &= \pi[g(\xi_i) - 1]^2\,\Delta_i y\\ &= \pi[(\sqrt{20 - 4\xi_1} + 1) - 1]^2\,\Delta_i y\\ &= \pi(20 - 4\xi_i)\,\Delta_i y\end{aligned}$$

Se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução,

$$\begin{aligned}V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(20 - 4\xi_i)\,\Delta_i y\\ &= \pi \int_1^3 (20 - 4y)\,dy\\ &= \pi\Big[20y - 2y^2\Big]_1^3\\ &= \pi[(60 - 18) - (20 - 2)]\\ &= 24\pi\end{aligned}$$

O volume do sólido de revolução é, portanto, 24π unidades cúbicas.

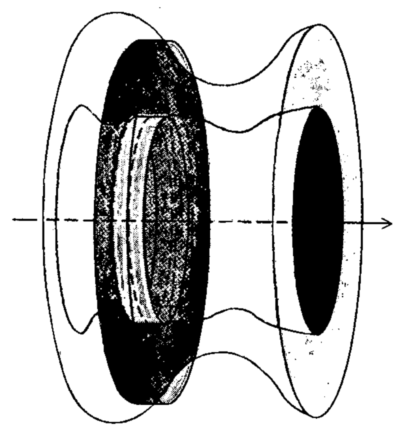


FIGURA 19

Suponha, agora, que o eixo de revolução não esteja na fronteira da região a ser rotacionada. Sejam f e g duas funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Seja R a região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$. A região R e o i-ésimo retângulo são mostrados na Figura 18, e o sólido de revolução aparece na Figura 19. Quando o i-ésimo retângulo gira em torno do eixo x, um anel circular (ou arruela) é obtido, conforme mostra a Figura 20. O número que dá a diferença das medidas das áreas das duas regiões circulares é $\pi[f(\xi_i)]^2 - \pi[g(\xi_i)]^2$ e a espessura é $\Delta_i x$ unidades. Logo, a medida do volume do anel circular é dada por:

$$\Delta_i V = \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\,\Delta_i x$$

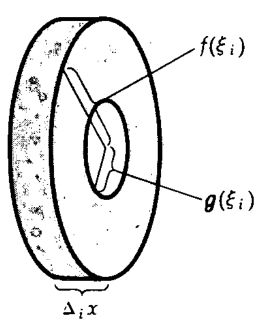


FIGURA 20

A soma das medidas dos volumes dos n anéis circulares formados pela rotação dos n elementos retangulares de área em torno do eixo x é

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i V = \sum_{i=1}^{n} \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\,\Delta_i x$$

Essa é a soma de Riemann da forma (1) onde $A(\xi_i) = \pi[f(\xi_i)]^2 - \pi[g(\xi_i)]^2$. Da Definição 6.1.1, o número de unidades cúbicas no volume do sólido de revolução é definido como sendo o limite dessa soma de Riemann, quando $\|\Delta\|$ tende a zero. O limite existe desde que $f^2 - g^2$ seja contínua em $[a, b]$, pois f e g são contínuas nesse intervalo. Temos, então, o teorema a seguir.

6.1.3 TEOREMA Sejam f e g funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para todo x em $[a, b]$. Então, se V unidades cúbicas for o volume do sólido de revolução gerado com a rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$,

$$\begin{aligned}V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\,\Delta_i x\\ &= \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2\,dx\end{aligned}$$

Como antes, uma definição similar aplica-se quando o eixo de revolução for o eixo y ou qualquer reta paralela aos eixos x ou y.

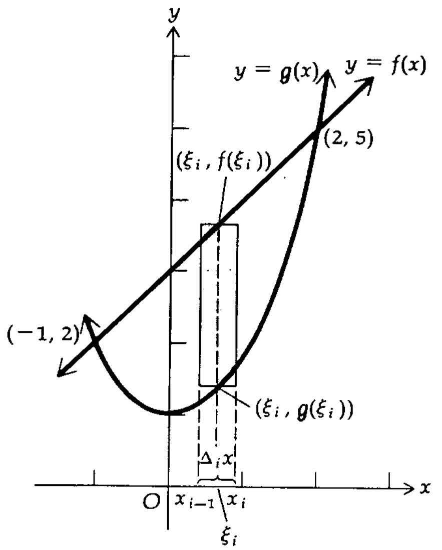


FIGURA 21

EXEMPLO 3 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela parábola $y = x^2 + 1$ e pela reta $y = x + 3$.

Solução Os pontos de intersecção são $(-1, 2)$ e $(2, 5)$. A Figura 21 mostra a região e um elemento de área retangular. Um elemento de volume e o sólido de revolução estão na Figura 22.

Se $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x^2 + 1$, a medida do volume do anel circular é

$$\Delta_i V = \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\,\Delta_i x$$

Se V unidades cúbicas for o volume do sólido, então

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2)\,\Delta_i x \\
&= \pi \int_{-1}^{2} ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\,dx \\
&= \pi \int_{-1}^{2} [(x+3)^2 - (x^2+1)^2]\,dx \\
&= \pi \int_{-1}^{2} [-x^4 - x^2 + 6x + 8]\,dx \\
&= \pi\Big[-\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x\Big]_{-1}^{2} \\
&= [(-\tfrac{32}{5} - \tfrac{8}{3} + 12 + 16) - (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3} + 3 - 8)] \\
&= \tfrac{117}{5}\pi
\end{aligned}$$

Logo, o volume do sólido de revolução é $\frac{117}{5}\pi$ unidades cúbicas.

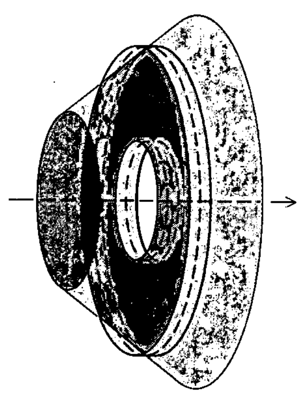


FIGURA 22

EXEMPLO 4 Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = -4$, da região limitada pelas parábolas $x = y - y^2$ e $x = y^2 - 3$.

Solução As curvas interceptam-se nos pontos $(-2, -1)$ e $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$. A região, bem como um elemento de área retangular, estão na Figura 23. A Figura 24 mostra o sólido de revolução, e também um elemento de volume, que é um anel circular.

Seja $F(y) = y - y^2$ e $G(y) = y^2 - 3$. O número de unidades cúbicas no volume do anel circular é

$$\Delta_i V = \pi([4 + F(\xi_i)]^2 - [4 + G(\xi_i)]^2)\,\Delta_i y$$

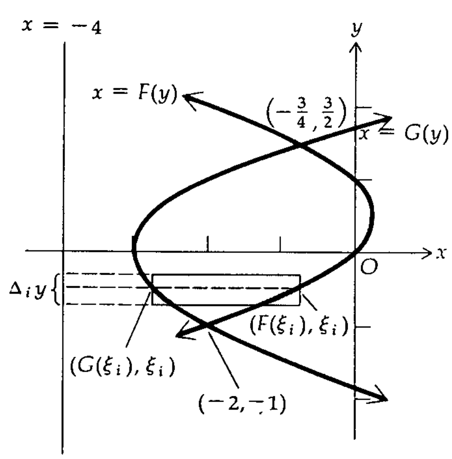


FIGURA 23

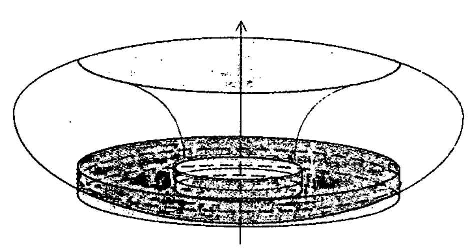


FIGURA 24

Assim,

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi([4 + F(\xi_i)]^2 - [4 + G(\xi_i)]^2)\, \Delta_i y \\
&= \pi \int_{-1}^{3/2} [(4 + y - y^2)^2 - (4 + y^2 - 3)^2]\, dy \\
&= \pi \int_{-1}^{3/2} (-2y^3 - 9y^2 + 8y + 15)\, dy \\
&= \pi \Big[-\tfrac{1}{2}y^4 - 3y^3 + 4y^2 + 15y \Big]_{-1}^{3/2} \\
&= \tfrac{875}{32}\pi
\end{aligned}
$$

O volume do sólido de revolução é, então, $\frac{875}{32}\pi$ unidades cúbicas.

Como vimos, o cálculo de volumes por discos e anéis circulares constitui um caso particular do cálculo de volumes por corte. Agora daremos outro exemplo para achar um volume, através de um corte.

EXEMPLO 5 Uma cunha é tirada de um cilindro circular reto com um raio de r cm por dois planos, um perpendicular ao eixo x do cilindro e o outro interceptando o primeiro ao longo de um diâmetro da secção plana circular, a um ângulo cuja medida é 60°. Ache o volume da cunha.

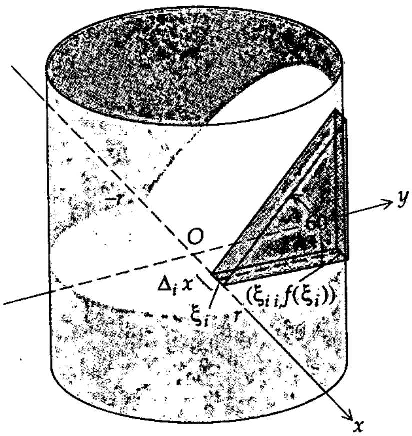


FIGURA 25

Solução A cunha está na Figura 25. O plano xy é tomado como o plano perpendicular ao eixo do cilindro, e a origem está no ponto de perpendicularidade. Uma equação da secção plana circular é, então, $x^2 + y^2 = r^2$. Toda secção plana da cunha perpendicular ao eixo x é um triângulo retângulo. Um elemento de volume é um cilindro reto, com $\Delta_i x$ cm de altura e a área da base dada por $\frac{1}{2}\sqrt{3}[f(\xi_i)]^2$ cm², onde $f(x)$ é obtido ao resolvermos a equação do círculo em y, tomando $y = f(x)$. Logo, temos $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Assim, se V cm³ for o volume da cunha,

$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}\sqrt{3}(r^2 - \xi_i^2)\, \Delta_i x \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \Big[r^2 x - \tfrac{1}{3}x^3 \Big]_{-r}^{r} \\
&= \tfrac{2}{3}\sqrt{3} r^3
\end{aligned}
$$

Logo, o volume da cunha é $\frac{2}{3}\sqrt{3}r^3$ cm³.

EXERCÍCIOS 6.1

1. Deduza a fórmula para o volume de uma esfera de raio r unidades por meio de um corte.

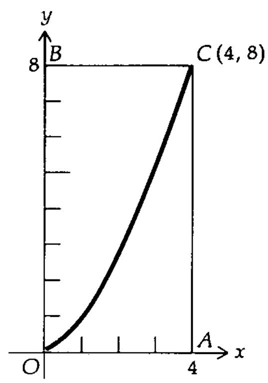
2. Deduza a fórmula para o volume de um cone circular reto com h unidades de altura e a unidades de raio da base, usando um corte.

3. Ache o volume do sólido de revolução gerado quando a região limitada pela curva $y = x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 2$ é rotacionada em torno do eixo x.

4. Ache o volume do sólido de revolução gerado quando a região limitada pela curva $y = x^2 + 1$, pelo eixo x e pelas retas $x = 2$ e $x = 3$ for rotacionada em torno do eixo x.

Nos Exercícios de 5 a 12, ache o volume do sólido de revolução descrito quando a região dada da figura for rotacionada em torno da reta indicada. Uma equação da curva na figura é $y^2 = x^3$.

5. OAC em torno do eixo x.
6. OAC em torno da reta AC.
7. OAC em torno da reta BC.
8. OAC em torno do eixo y.
9. OBC em torno do eixo y.
10. OBC em torno da reta BC.
11. OBC em torno da reta AC.
12. OBC em torno do eixo x.



Nos Exercícios de 13 a 16, ache o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno da reta indicada, da região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$, pelo eixo x e pela reta $x = 4$.

13. a reta $x = 4$
14. o eixo x
15. o eixo y
16. a reta $y = 2$

17. Deduza a fórmula para o volume de uma esfera, rotacionando a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ e pelo eixo x em torno do eixo x.
18. Deduza a fórmula para o volume de um cone circular reto com h unidades de altura e a unidades de raio da base, rotacionando a região limitada pelo triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.
19. Deduza a fórmula para o volume do tronco de um cone circular reto, rotacionando o segmento de reta de $(0, b)$ a (h, a) em torno do eixo x.
20. Ache, por meio de um corte, o volume do tetraedro com três faces mutuamente perpendiculares e três arestas mutuamente perpendiculares, cujos comprimentos são 3, 4 e 7 cm.
21. A região limitada pela curva $y = \sec x$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta $x = \frac{\pi}{4}$ gira em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.
22. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pela curva $y = \operatorname{cosec} x$, pelo eixo x, e pelas retas $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{\pi}{3}$ em torno do eixo x.
23. Ache o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada por um arco da curva do seno em torno do eixo x. (*Sugestão*: use a identidade $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.)
24. A região limitada pelo eixo y e pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ é girada em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado. (*Sugestão*: use as seguintes identidades: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ e $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.)
25. Ache o volume do sólido gerado se a região do Exercício 23 girar em torno da reta $y = 1$.
26. Ache o volume do sólido gerado se a região do Exercício 24 girar em torno da reta $y = 1$.
27. A região limitada pela curva $y = \operatorname{cotg} x$, pela reta $x = \frac{1}{6}\pi$, e pelo eixo x é girada em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.
28. A região limitada pela curva $y = \operatorname{tg} x$, a reta $x = \frac{1}{3}\pi$ e o eixo x é rotacionada em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.
29. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = -4$, da região limitada por aquela reta e pela parábola $x = 4 + 6y + 2y^2$.
30. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela parábola $y^2 = 4x$ e pela reta $y = x$.
31. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = 4$, da região do Exercício 30.
32. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pela reta que passa por $(1, 3)$ e $(3, 7)$ e pelas retas $y = 3$, $y = 7$ e $x = 0$.
33. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = -3$, da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 1 + x - x^2$.
34. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelo laço da curva cuja equação é $2y^2 = x(x^2 - 4)$.
35. Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelo laço da curva cuja equação é $x^2y^2 = (x^2 - 9)(1 - x^2)$.
36. Um tanque de óleo na forma de uma esfera tem um diâmetro de 18 m. Quanto óleo o tanque contém se a profundidade do óleo é de 7 m?
37. Um parabolóide de revolução é obtido fazendo girar a parábola $y^2 = 4px$ em torno do eixo x. Ache o volume limitado por um parabolóide de revolução e um plano perpendicular a seu eixo, se o plano estiver a 10 cm do vértice e se a secção plana de intersecção for um círculo com um raio de 6 cm.
38. A região do primeiro quadrante, limitada pela curva $y = \sec x$, pelo eixo y e pela reta $y = 2$ faz uma rotação em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.
39. A região limitada pela curva $y = \operatorname{cosec} x$ e pelas retas $y = 2$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$ é girada em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.
40. A região no primeiro quadrante, limitada pelos eixos coordenados, pela reta $y = 1$ e pela curva $y = \operatorname{cotg} x$, faz uma rotação em torno do eixo x. Ache o volume do sólido gerado.
41. Um sólido de revolução é formado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela curva $y = \sqrt{2x + 4}$, pelo eixo x, pelo eixo y, e pela reta $x = c$ $(c > 0)$. Para que valor de c o volume será de 12π unidades cúbicas?
42. A base de um sólido é a região encerrada por um círculo com 2 unidades de raio. Ache o volume do sólido se todas as secções planas perpendiculares a um diâmetro fixo da base forem quadrados.
43. A base de um sólido é a região encerrada por um círculo com 7 cm de raio. Ache o volume do sólido, se todas as secções planas perpendiculares a um diâmetro fixo da base forem triângulos eqüiláteros.

44. A base de um sólido é a região encerrada por um círculo com um raio de 4 cm, e cada secção plana perpendicular a um diâmetro fixo da base é um triângulo isósceles com 10 cm de altura e uma corda do círculo como base. Ache o volume do sólido.

45. A base de um sólido é a região do Exercício 43. Ache o volume do sólido se todas as secções planas perpendiculares a um diâmetro fixo da base forem triângulos isósceles de altura igual à distância da secção plana do centro do círculo. O lado do triângulo situado na base do sólido não é um dos lados de igual comprimento.

46. A base de um sólido é a região encerrada por um círculo com um raio de r unidades, e todas as secções planas perpendiculares a um diâmetro fixo da base são triângulos retângulos isósceles, com a hipotenusa no plano da base. Ache o volume do sólido.

47. Resolva o Exercício 46, se os triângulos retângulos isósceles tiverem um dos catetos no plano da base.

48. Dois cilindros circulares retos, cada um tendo um raio de r unidades, têm seus eixos interceptando-se em ângulos retos. Ache o volume do sólido comum aos dois cilindros.

49. Uma cunha é cortada de um sólido com a forma e um cilindro circular reto, o qual tem um raio de r cm, por um plano através de um diâmetro da base e inclinado em relação ao plano da base segundo um ângulo cuja medida é 45°. Ache o volume da cunha.

50. Uma cunha é cortada de um sólido com a forma de um cone circular reto tendo um raio da base com 5 cm e uma altura de 20 cm, por dois planos contendo o eixo do cone. O ângulo entre os planos tem uma medida de 30°. Ache o volume da cunha.

6.2 VOLUMES DE SÓLIDOS POR INVÓLUCROS CILÍNDRICOS

Na secção precedente encontramos o volume de um sólido de revolução, tomando elementos retangulares de área perpendiculares ao eixo de revolução e o elemento de volume era um disco circular ou um anel circular. Para alguns sólidos de revolução esse método pode não ser viável. Por exemplo, suponha que desejemos encontrar o volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pelo gráfico de $y = 3x - x^3$, pelo eixo y e pela reta $y = 2$. A Figura 1 mostra a região. Se um elemento de área for perpendicular ao eixo y, como mostra a figura, o elemento de volume será um disco circular e para determinar o volume do sólido de revolução usamos uma integral da forma $\int_0^2 A(y)\, dy$. Mas para obter uma fórmula para $A(y)$ é necessário resolver a equação cúbica $y = 3x - x^3$ para x em termos de y, a qual é muito trabalhosa. Logo, discutiremos agora um procedimento alternativo para calcular o volume de um sólido de revolução, que é mais fácil de aplicar nesta e em outras situações.

O método envolve tomar elementos retangulares de área, paralelos ao eixo de revolução. Então, quando um elemento de área for rotacionado em torno do eixo de revolução, obteremos um **invólucro cilíndrico**, ou seja, um sólido contido entre dois cilindros, com o mesmo centro e eixo. Tal invólucro cilíndrico está na Figura 2.

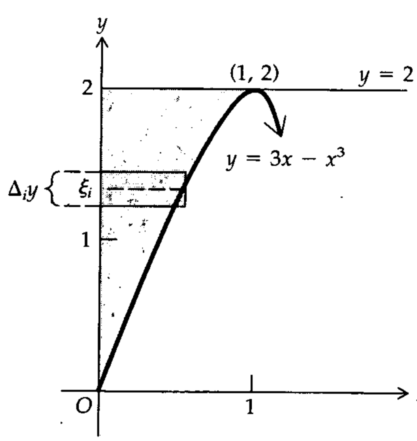


FIGURA 1

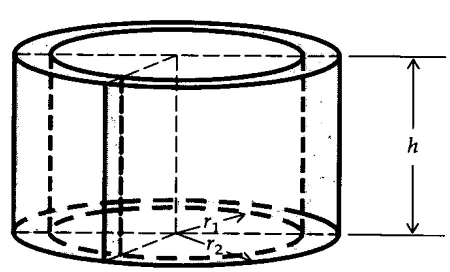


FIGURA 2