

3 – Linguagens Livres de Contexto

Aula 13

Sumário

Capítulo 3 – Linguagens Livres de Contexto

3.1. Gramáticas Livres de Contexto

3.1.1. Árvore de Derivação

3.1.2. Ambiguidade

3.1.3. Simplificação de Gramáticas Livres de Contexto

3.1.4. Recursão à Esquerda

3.2. Autômato com pilha

3.3. Propriedades das Linguagens Livres de Contexto

Sumário

Capítulo 3 – Linguagens Livres de Contexto

3.1. Gramáticas Livres de Contexto

3.1.1. Árvore de Derivação

3.1.2. Ambiguidade

3.1.3. Simplificação de Gramáticas Livres de Contexto

3.1.4. Recursão à Esquerda

3.2. Autômato com pilha

3.3. Propriedades das Linguagens Livres de Contexto

Simplificação de Gram. Livre Contexto

- É possível simplificar alguns tipos de produções sem reduzir seu poder de geração de gramáticas livres de contexto
- A simplificação é usada para otimização do parsing
- Três passos básicos:

1º. Eliminar produções inúteis

2º. Eliminar produções vazias

3º. Eliminar produção Unidade

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

- Uma variável pode ser inútil por duas razões:
 - a.** Nunca ser alcançada

GLC

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \\ A &\rightarrow aA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow bA \end{aligned}$$

- b.** Não conseguir derivar uma sentença (cadeia de terminal). Pois cria-se um ciclo

GLC

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSb \mid \varepsilon \mid A \\ A &\rightarrow aA \end{aligned}$$

Se derivar em A, nunca alcançará uma sentença!

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

- Exemplo:

GLC

$S \rightarrow ABC \mid b$

$A \rightarrow a$

$B \rightarrow b$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

- Exemplo:

GLC

$S \rightarrow ABC \mid b$

$A \rightarrow a$

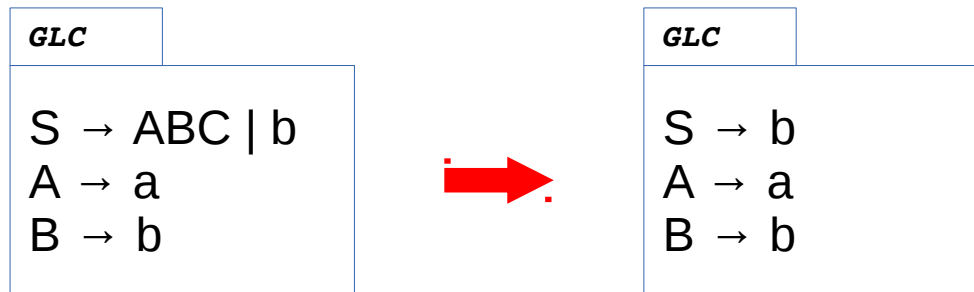
$B \rightarrow b$

- Se derivarmos S em ABC, NUNCA mais nos livraremos de C
- Logo C é INÚTIL
 - E pode-se retirar a produção que a contém

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

- Exemplo:

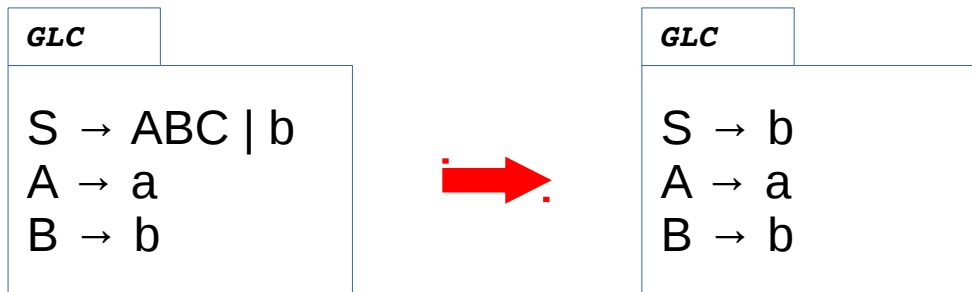


- Se derivarmos S em ABC, NUNCA mais nos livraremos de C
- Logo C é INÚTIL
 - E pode-se retirar a produção que a contém

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

- Exemplo:



Agora A e B se enquadram na condição de inalcançáveis.

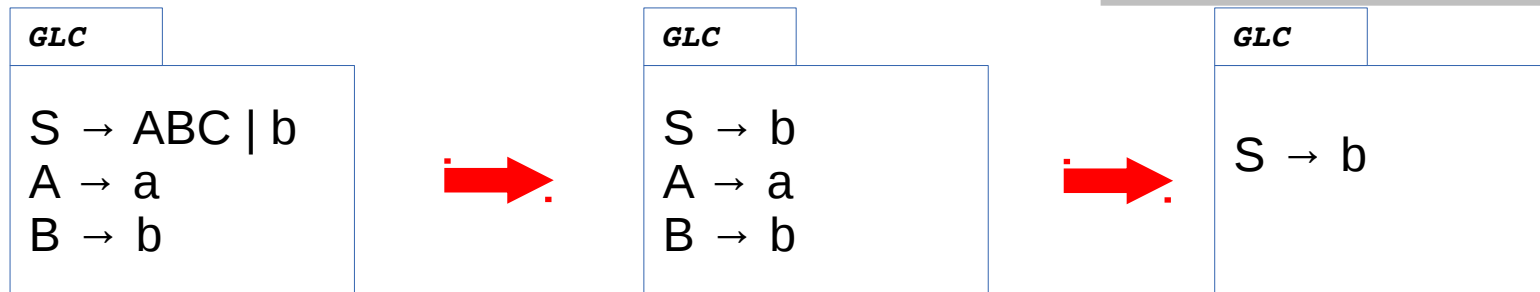
Portanto, podem ser retirados!

- Se derivarmos S em ABC, NUNCA mais nos livraremos de C
- Logo C é INÚTIL
 - E pode-se retirar a produção que a contém

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

- Exemplo:



- Se derivarmos S em ABC, NUNCA mais nos livraremos de C
- Logo C é INÚTIL
 - E pode-se retirar a produção que a contém

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

- Exercício:

GLC

$S \rightarrow aS \mid A \mid C$

$A \rightarrow a$

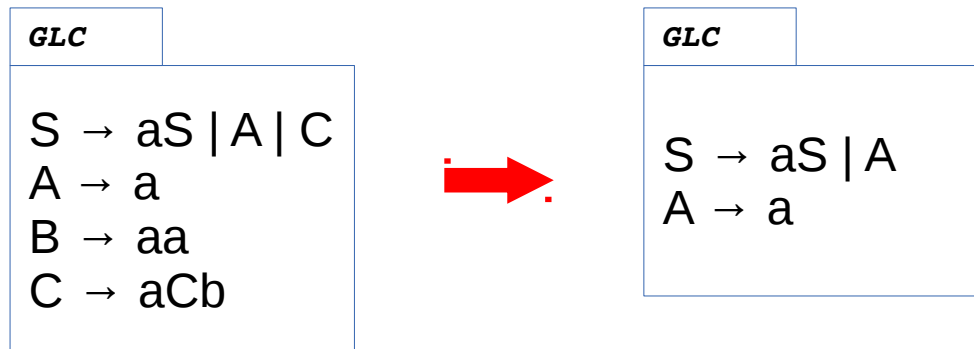
$B \rightarrow aa$

$C \rightarrow aCb$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

- Exercício:



- Neste exemplo fizemos visualmente
- E nos casos mais complexos?

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

- Algoritmos para exclusão de produções inúteis

Etapa 1:

- Criar um conjunto dos símbolos ÚTEIS

Etapa 2:

- Retirar os símbolos inalcançáveis

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

- Algoritmos para exclusão de produções inúteis

Etapa 1:

- Criar um conjunto dos símbolos ÚTEIS

Algoritmo etapa 1

Inicia o conjunto $V = \emptyset$

Se \underline{A} gera terminal diretamente **então**

Adiciona \underline{A} em \underline{V} ;

Se \underline{B} gera terminal indiretamente **então**

Adiciona \underline{B} em \underline{V} ;

Conjunto V

Ex: $A \rightarrow a$

Ex: $B \rightarrow bcA$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

- Algoritmos para exclusão de produções inúteis

Etapa 2:

- Eliminaremos os símbolos INALCANÇÁVEIS
- Para isso utiliza-se o grafo de dependencia

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

- Algoritmos para exclusão de produções inúteis

Etapa 2:

- Eliminaremos os símbolos INALCANÇÁVEIS
- Para isso utiliza-se o grafo de dependencia

Exemplo:

- Suponha que após aplicar a etapa 1 obtivemos o seguinte conjunto V

Conjunto V

$S \rightarrow C$
 $A \rightarrow a$
 $B \rightarrow bcA$
 $C \rightarrow c$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

- Algoritmos para exclusão de produções inúteis

Etapa 2:

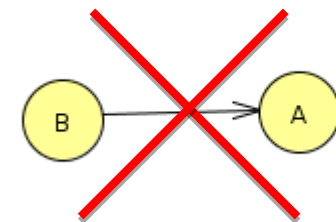
- Eliminaremos os símbolos INALCANÇÁVEIS
- Para isso utiliza-se o grafo de dependencia

Exemplo:

- Suponha que após aplicar a etapa 1 obtivemos o seguinte conjunto V
- O grafo de dependência é:

Conjunto V

$S \rightarrow C$
 $A \rightarrow a$
 $B \rightarrow bcA$
 $C \rightarrow c$



Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

- Algoritmos para exclusão de produções inúteis

Etapas 2:

- Eliminaremos os símbolos INALCANÇÁVEIS
- Para isso utiliza-se o grafo de dependencia

Exemplo:

- Suponha que após aplicar a etapa 1 obtivemos o seguinte conjunto V
- O grafo de dependência é:

Portanto, visivelmente B e A são inalcançáveis!

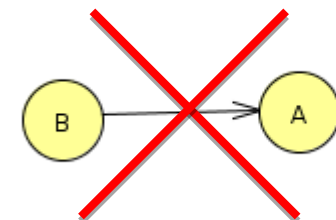
Conjunto V

$S \rightarrow C$
 $A \rightarrow a$
 $B \rightarrow bcA$
 $C \rightarrow c$



Nova Gram.

$S \rightarrow C$
 $C \rightarrow c$



Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

Exemplo:

GLC

$S \rightarrow aS \mid A \mid C$

$A \rightarrow a$

$B \rightarrow aaD$


$C \rightarrow aCD$

$D \rightarrow bD \mid \varepsilon$

Conjunto V

Algoritmo etapa 1

Inicia o conjunto $V = \emptyset$

 **Se** A gera terminal diretamente **então**

Adiciona A em V;

Se B gera terminal indiretamente **então**

Adiciona B em V;

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

Exemplo:

GLC

$S \rightarrow aS \mid A \mid C$
 $A \rightarrow a$
 $B \rightarrow aaD$
 $C \rightarrow aCD$
 $D \rightarrow bD \mid \varepsilon$

1ª iteração:


Adiciona A em V, pois $A \rightarrow a$
 Adiciona D em V, pois $D \rightarrow \varepsilon$

Conjunto V

$A \rightarrow a$
 $D \rightarrow bD \mid \varepsilon$

Algoritmo etapa 1

Inicia o conjunto $V = \emptyset$

 **Se** A gera terminal diretamente **então**

Adiciona A em V;

Se B gera terminal indiretamente **então**

Adiciona B em V;

Simplificação de Gram.

ATENÇÃO

Estamos adicionando a Variável, logo todas as suas produções são inseridas

1º. Eliminar produções inúteis

Exemplo:

GLC

$S \rightarrow aS \mid A \mid C$
 $A \rightarrow a$
 $B \rightarrow aaD$
 $C \rightarrow aCD$
 $D \rightarrow bD \mid \varepsilon$

1ª iteração:

Adiciona A em V, pois $A \rightarrow a$
 Adiciona D em V, pois $D \rightarrow \varepsilon$

Conjunto V

$A \rightarrow a$
 $D \rightarrow bD \mid \varepsilon$

Algoritmo etapa 1

Inicia o conjunto $V = \emptyset$

➔ **Se** A gera terminal diretamente **então**

Adiciona A em V;

Se B gera terminal indiretamente **então**

Adiciona B em V;

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

Exemplo:

GLC

$S \rightarrow aS \mid A \mid C$
 $A \rightarrow a$
 $B \rightarrow aaD$
 $C \rightarrow aCD$
 $D \rightarrow bD \mid \varepsilon$

2ª iteração:

Como $S \rightarrow A$, e A já está em V , *ok!*
 Como $B \rightarrow aaD$, e D já está em V , *ok!*

Conjunto V


$S \rightarrow aS \mid A \mid C$
 $A \rightarrow a$
 $B \rightarrow aaD$
 $D \rightarrow bD \mid \varepsilon$

Algoritmo etapa 1

Inicia o conjunto $V = \emptyset$

Se \underline{A} gera terminal diretamente **então**

Adiciona \underline{A} em \underline{V} ;

 **Se** \underline{B} gera terminal indiretamente **então**

Adiciona \underline{B} em \underline{V} ;

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

Exemplo:

GLC

$S \rightarrow aS \mid A \mid C$
 $A \rightarrow a$
 $B \rightarrow aaD$
 $C \rightarrow aCD$
 $D \rightarrow bD \mid \varepsilon$

Pronto!

Não tem mais ninguém para inserir

Conjunto V


$S \rightarrow aS \mid A \mid C$
 $A \rightarrow a$
 $B \rightarrow aaD$
 $D \rightarrow bD \mid \varepsilon$

Algoritmo etapa 1

Inicia o conjunto $V = \emptyset$

Se A gera terminal diretamente **então**

Adiciona A em V;

 **Se** B gera terminal indiretamente **então**

Adiciona B em V;

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

Exemplo:

GLC

$S \rightarrow aS \mid A \mid C$
 $A \rightarrow a$
 $B \rightarrow aaD$
 $C \rightarrow aCD$
 $D \rightarrow bD \mid \varepsilon$



Conjunto V

$S \rightarrow aS \mid A \mid C$
 $A \rightarrow a$
 $B \rightarrow aaD$
 $D \rightarrow bD \mid \varepsilon$

Etapa 2

- Eliminar inalcançáveis
- Criar grafo de dependências

Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

Exemplo:

GLC

$S \rightarrow aS \mid A \mid C$
 $A \rightarrow a$
 $B \rightarrow aaD$
 $C \rightarrow aCD$
 $D \rightarrow bD \mid \varepsilon$

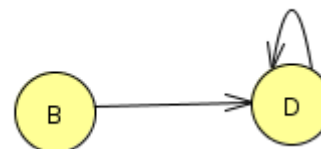
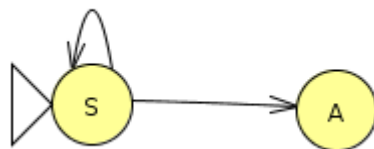


Conjunto V

$S \rightarrow aS \mid A \mid C$
 $A \rightarrow a$
 $B \rightarrow aaD$
 $D \rightarrow bD \mid \varepsilon$

Etapa 2

- Eliminar inalcançáveis
- Criar grafo de dependências

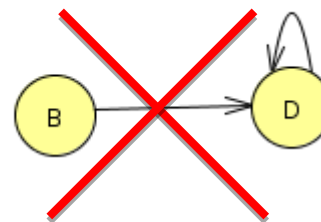
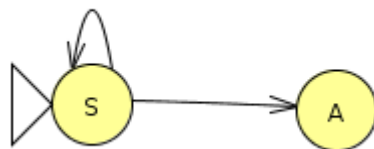
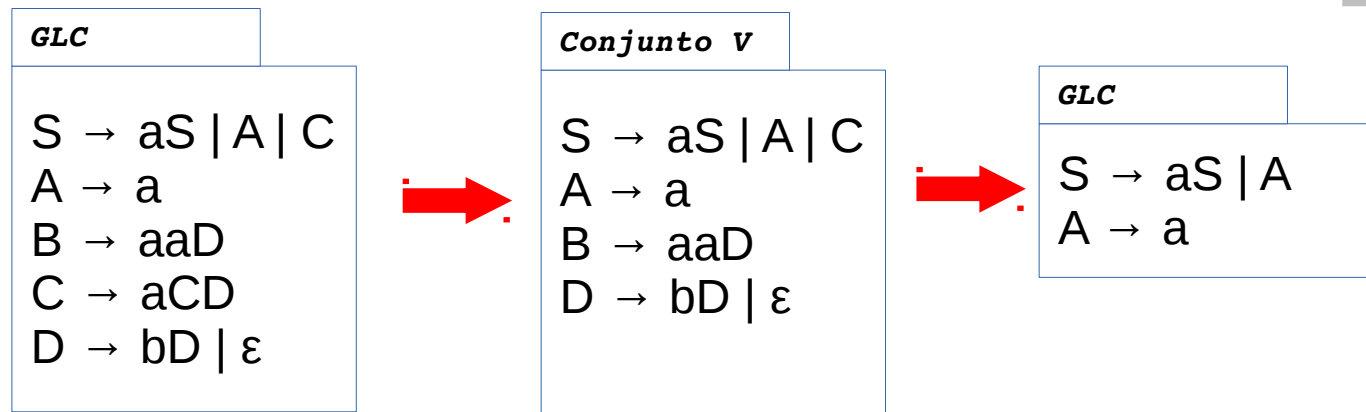


Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

Exemplo:

Etapa 2: Concluída!

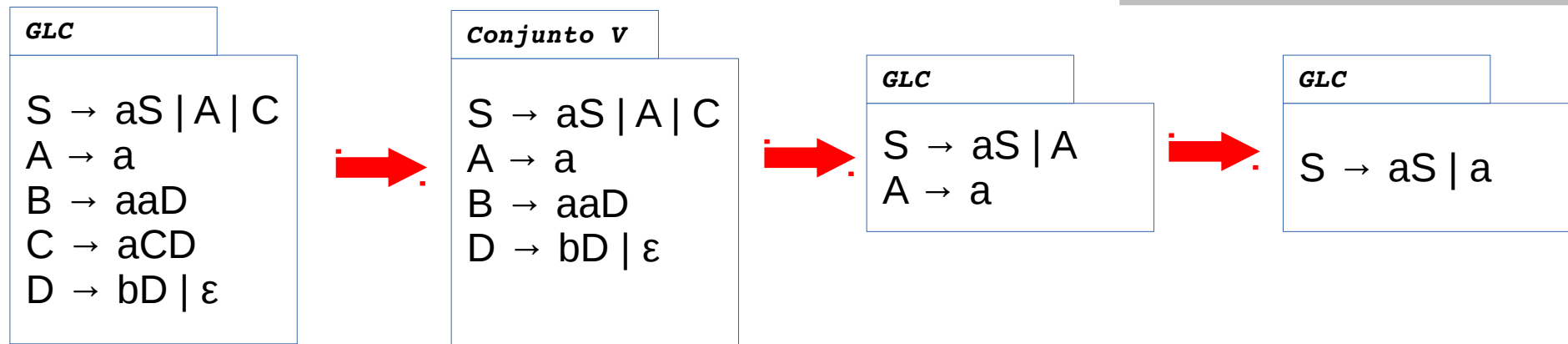


Simplificação de Gram. Livre Contexto

1º. Eliminar produções inúteis

Exemplo:

Ou ainda!



Que gera a linguagem $L(G) = \{ a^n, n > 0 \}$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

- É possível simplificar alguns tipos de produções sem reduzir seu poder de geração de gramáticas livres de contexto
- A simplificação é usada para otimização do parsing
- Três passos básicos:

1º. Eliminar produções inúteis

2º. Eliminar produções vazias

3º. Eliminar produção Unidade

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. *Eliminar produções vazias*

- O algoritmo é dividido em três etapas
 - a.** Criar um conjunto das *Variáveis que constituem produções vazias*
 - b.** Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em “**a.**”
 - c.** Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

- O algoritmo é dividido em três etapas
 - a.** Criar um conjunto das *Variáveis que constituem produções vazias*
 - Diretamente ou
 - Indiretamente
 - Variáveis com esta característica são chamadas de *ANULÁVEIS*

$$A \rightarrow \varepsilon$$

ou

$$\begin{array}{l} A \rightarrow \varepsilon \\ B \rightarrow A \end{array}$$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

- O algoritmo é dividido em três etapas
- b.** Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em “**a.**”

Suponha C Anulável

$$\begin{aligned} C &\rightarrow AB \mid Aa \mid c \\ A &\rightarrow a \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow b \mid \varepsilon \end{aligned}$$

- Criaremos uma nova produção C
- De tal forma que, após o processo, ela não seja mais anulável
 - O método
 - Troque cada variável ANULÁVEL da direita de C por ε , faça todas as combinações
 - Essas novas produções serão incluídas em C (vide exemplo)

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

- O algoritmo é dividido em três etapas

b. Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em “a.”

Suponha C Anulável

$$\begin{aligned} C &\rightarrow AB \mid Aa \mid c \\ A &\rightarrow a \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow b \mid \varepsilon \end{aligned}$$

$$C \rightarrow AB \mid Aa \mid c$$

$$C \rightarrow A\varepsilon \dots\dots\dots \text{para } B = \varepsilon$$

$$C \rightarrow \varepsilon B \dots\dots\dots \text{para } A = \varepsilon$$

$$C \rightarrow \varepsilon\varepsilon \dots\dots\dots \text{para } A = \varepsilon \text{ e } B = \varepsilon \text{ (não pode)}$$

$$C \rightarrow \varepsilon a \dots\dots\dots \text{para } A = \varepsilon$$

Logo a nova produção C será:

$$C \rightarrow AB \mid Aa \mid c \mid A \mid B \mid a$$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

- O algoritmo é dividido em três etapas
 - c.** Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem
 - Aqui devemos verifica se a gramática aceita a palavra vazia
 - Caso ela aceite, acrescentamos ϵ na variável inicial

Ex1

$$\begin{aligned}C &\rightarrow AB \mid Aa \mid c \\A &\rightarrow a \\B &\rightarrow b \mid \epsilon\end{aligned}$$

Ex2

$$\begin{aligned}C &\rightarrow AB \mid Aa \mid D \\A &\rightarrow a \mid \epsilon \\B &\rightarrow b \mid \epsilon \\D &\rightarrow d \mid \epsilon\end{aligned}$$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

- O algoritmo é dividido em três etapas
 - c.** Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem
 - Aqui devemos verifica se a gramática aceita a palavra vazia
 - Caso ela aceite, acrescentamos ϵ na variável inicial

Ex1

$$\begin{aligned}C &\rightarrow AB \mid Aa \mid c \\A &\rightarrow a \\B &\rightarrow b \mid \epsilon\end{aligned}$$

Ex2

$$\begin{aligned}C &\rightarrow AB \mid Aa \mid D \mid \epsilon \\A &\rightarrow a \mid \epsilon \\B &\rightarrow b \mid \epsilon \\D &\rightarrow d \mid \epsilon\end{aligned}$$

Note que o Ex2 aceita
A palavra vazia.
Logo devemos acrescentar ϵ em C

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

- Exemplo

Ex1

$S \rightarrow AB$

$A \rightarrow aAA \mid \varepsilon$

$B \rightarrow bBB \mid \varepsilon$

Conjunto das variáveis anuláveis

Algoritmo

- Três etapas:

- ➔ **a.** Criar um conjunto das *Variáveis que constituem produções vazias*
- b.** Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em "**a.**"
- c.** Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem

- Anuláveis diretas
 - A
 - B
- Anuláveis indiretas
 - S

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

- Exemplo

Ex1

$S \rightarrow AB$

$A \rightarrow aAA \mid \varepsilon$

$B \rightarrow bBB \mid \varepsilon$

Conjunto das variáveis anuláveis

A, B, S

Algoritmo

- Três etapas:
- ➔ **a.** Criar um conjunto das *Variáveis que constituem produções vazias*
- b.** Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em "**a.**"
- c.** Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem

- Anuláveis diretas
 - A
 - B
- Anuláveis indiretas
 - S

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

- Exemplo


Ex1

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aAA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow bBB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Conjunto das variáveis anuláveis

A, B, S

Algoritmo

- Três etapas:
 - a.** Criar um conjunto das *Variáveis que constituem produções vazias*
 -  **b.** Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em "**a.**"
 - c.** Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem

A \rightarrow **aAA** $\mid \varepsilon$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

Exemplo

Ex1

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aAA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow bBB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Conjunto das variáveis anuláveis

A, B, S

Algoritmo

- Três etapas:
 - Criar um conjunto das *Variáveis que constituem produções vazias*
 - Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em "a."
 - Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem

A \rightarrow **aAA** $\mid \varepsilon$

$A \rightarrow aA\varepsilon$ para $A = \varepsilon$

$A \rightarrow a\varepsilon A$ para $A = \varepsilon$

$A \rightarrow a\varepsilon\varepsilon$ para $A = \varepsilon$ e $A = \varepsilon$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

Exemplo

Ex1

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aAA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow bBB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Conjunto das variáveis anuláveis

A, B, S

Algoritmo

- Três etapas:
 - criar um conjunto das *Variáveis que constituem produções vazias*
 - Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em "a."
 - Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem

A \rightarrow **aAA** $\mid \varepsilon$

$A \rightarrow aA\varepsilon$ para $A = \varepsilon$

$A \rightarrow a\varepsilon A$ para $A = \varepsilon$

$A \rightarrow a\varepsilon\varepsilon$ para $A = \varepsilon$ e $A = \varepsilon$

Logo a nova produção A será:

A \rightarrow **aAA** \mid **aA** \mid **a**

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

- Exemplo


Ex1

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aAA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow bBB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Conjunto das variáveis anuláveis

A, **B**, S

Algoritmo

- Três etapas:
 - a.** Criar um conjunto das *Variáveis que constituem produções vazias*
 -  **b.** Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em "**a.**"
 - c.** Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem

B \rightarrow **bBB** $\mid \varepsilon$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

Exemplo

Ex1

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aAA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow bBB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Conjunto das variáveis anuláveis

A, **B**, S

Algoritmo

- Três etapas:
 - criar um conjunto das *Variáveis que constituem produções vazias*
 - Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em "a."
 - Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem

B \rightarrow **bBB** $\mid \varepsilon$

$B \rightarrow bB\varepsilon$ para $B = \varepsilon$

$B \rightarrow b\varepsilon B$ para $B = \varepsilon$

$B \rightarrow b\varepsilon\varepsilon$ para $B = \varepsilon$ e $B = \varepsilon$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

Exemplo

Ex1

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aAA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow bBB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Conjunto das variáveis anuláveis

A, **B**, S

Algoritmo

- Três etapas:
 - Criar um conjunto das *Variáveis que constituem produções vazias*
 - Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em "a."
 - Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem

B \rightarrow **bBB** \mid ε

$B \rightarrow bB\varepsilon$ para $B = \varepsilon$

$B \rightarrow b\varepsilon B$ para $B = \varepsilon$

$B \rightarrow b\varepsilon\varepsilon$ para $B = \varepsilon$ e $B = \varepsilon$

Logo a nova produção B será:

B \rightarrow **bBB** \mid **bB** \mid **b**

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

- Exemplo

Ex1

$S \rightarrow AB$


$A \rightarrow aAA \mid \varepsilon$

$B \rightarrow bBB \mid \varepsilon$

Conjunto das variáveis anuláveis

A, B, **S**

Algoritmo

- Três etapas:
 - a.** Criar um conjunto das *Variáveis que constituem produções vazias*
 -  **b.** Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em "**a.**"
 - c.** Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem

S \rightarrow **AB**

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

Exemplo

Ex1

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aAA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow bBB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Conjunto das variáveis anuláveis

A, B, **S**

Algoritmo

- Três etapas:
 - Criar um conjunto das *Variáveis que constituem produções vazias*
 - Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em "a."
 - Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem

S \rightarrow **AB**

$S \rightarrow \varepsilon B$ para $A = \varepsilon$

$S \rightarrow A\varepsilon$ para $B = \varepsilon$

$S \rightarrow \varepsilon\varepsilon$ para $A = \varepsilon$ e $B = \varepsilon$ (não pode)

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

Exemplo

Ex1

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aAA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow bBB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Conjunto das variáveis anuláveis

A, B, **S**

Algoritmo

- Três etapas:
 - Criar um conjunto das *Variáveis que constituem produções vazias*
 - Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em "a."
 - Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem

S \rightarrow **AB**

$S \rightarrow \varepsilon B$ para $A = \varepsilon$

$S \rightarrow A\varepsilon$ para $B = \varepsilon$

$S \rightarrow \varepsilon\varepsilon$ para $A = \varepsilon$ e $B = \varepsilon$ (não pode)

Logo a nova produção B será:

S \rightarrow **AB** | **B** | **A**

Simplificação de Gram. Livre Contexto


2º. Eliminar produções vazias

- Exemplo

Ex1

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aAA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow bBB \mid \varepsilon \end{aligned}$$


Algoritmo

- Três etapas:
 - a.** Criar um conjunto das *Variáveis que constituem produções vazias*
 -  **b.** Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em "**a.**"
 - c.** Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem

Ex1'

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid A \mid B \\ A &\rightarrow aAA \mid aA \mid a \\ B &\rightarrow bBB \mid bB \mid b \end{aligned}$$

Assim a nova gramática, sem as produções vazias, será!



Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

- Exemplo

Ex1

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aAA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow bBB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Ex1'

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid A \mid B \\ A &\rightarrow aAA \mid aA \mid a \\ B &\rightarrow bBB \mid bB \mid b \end{aligned}$$

Algoritmo

- Três etapas:
 - a.** Criar um conjunto das *Variáveis que constituem produções vazias*
 - b.** Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em "**a.**"
 - c.** Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem

- Anteriormente a palavra ε era aceita?

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

- Exemplo

Ex1

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aAA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow bBB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Ex1'

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid A \mid B \mid \varepsilon \\ A &\rightarrow aAA \mid aA \mid a \\ B &\rightarrow bBB \mid bB \mid b \end{aligned}$$

Algoritmo

- Três etapas:
 - a.** Criar um conjunto das *Variáveis que constituem produções vazias*
 - b.** Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em "**a.**"
 - c.** Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem

- Anteriormente a palavra ε era aceita?
- R:** caso sim, adiciona ε na produção inicial!

Pronto!

Simplificação de Gram. Livre Contexto

2º. Eliminar produções vazias

- Exercício

GLC

$S \rightarrow aAbBc$
 $A \rightarrow BC$
 $B \rightarrow bB \mid b \mid \varepsilon$
 $C \rightarrow D \mid \varepsilon$
 $D \rightarrow c$

Algoritmo

- 1º. Eliminar inúteis
- Três etapas:
 - a.** Criar um conjunto das *Variáveis que constituem produções vazias*
 - b.** Aplicar o método de retirada da produção vazia para o conjunto de variáveis anuláveis, criado em "**a.**"
 - c.** Verificar se é necessário incluir a palavra vazia na linguagem

Simplificação de Gram. Livre Contexto

- É possível simplificar alguns tipos de produções sem reduzir seu poder de geração de gramáticas livres de contexto
- A simplificação é usada para otimização do parsing
- Três passos básicos:

1º. Eliminar produções inúteis

2º. Eliminar produções vazias

3º. Eliminar produção Unidade

Simplificação de Gram. Livre Contexto

3º. Eliminar produções unidades

- O nome vem do fato da produção não alterar o comprimento
- Apenas o nome é modificado
- São produções do tipo:
 - $A \rightarrow B$
- Notação
 - (A,B)
- Lê-se:
 - (A,B) é par unidade
- Propriedade
 - (A,B) e $B \rightarrow C \Rightarrow (A,C)$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

3º. Eliminar produções unidades

- O algoritmo é dividido em quatro etapas
 - a.** Eliminar qualquer produção da forma $A \rightarrow A$ (evidente)
 - b.** Criar um conjunto P' com as produções *não-unidade*. Isto é as produções que estão corretas.
 - c.** Procurar os pares unidade
 - d.** Para todo par unidade (A,B) em P , tais que:
$$B \rightarrow y_1 | y_2 | y_3 \dots, \text{ onde } \{y_1, y_2, y_3 \dots\} \text{ e terminais}$$
 - Adiciona-se a P'
$$A \rightarrow y_1 | y_2 | y_3 \dots$$

Simplificação de Gram. Livre Contexto


3º. Eliminar produções unidades

- O algoritmo é dividido em quatro etapas
 - a.** Eliminar qualquer produção da forma $A \rightarrow A$ (evidente)
 - b.** Criar um conjunto P' com as produções *não-unidade*. Isto é as produções que estão corretas.
 - c.** Procurar os pares unidade
 - d.** Para todo par unidade (A,B) em P , tais que:

$B \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$, onde $\{y_1, y_2, y_3 \dots\}$ é terminais

- Adiciona-se a P'

$A \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$



Os terminais que se alcançavam por meio de B , agora pode ser alcançados diretamente por A

Simplificação de Gram. Livre Contexto

3º. Eliminar produções unidades

- Exemplo

GLC

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Aa \mid B \\ B &\rightarrow A \mid bb \\ A &\rightarrow a \mid bc \mid B \end{aligned}$$

Algoritmo

- ➔ **a.** Eliminar qualquer produção da forma $A \rightarrow A$ (evidente)
- b.** Criar um conjunto P' com as produções *não-unidade*.
- c.** Procurar os pares unidade
- d.** Para todo par unidade (A,B) em P , tais que:
$$B \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots \quad , \text{ onde } \{y_1, y_2, y_3 \dots\} \text{ é terminais}$$
 - Adiciona-se a P'
$$A \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

3º. Eliminar produções unidades

- Exemplo

GLC

$S \rightarrow Aa$
 $S \rightarrow B$
 $B \rightarrow A$
 $B \rightarrow bb$
 $A \rightarrow a$
 $A \rightarrow bc$
 $A \rightarrow B$

Algoritmo

- ➔ **a.** Eliminar qualquer produção da forma $A \rightarrow A$ (evidente)
- b.** Criar um conjunto P' com as produções *não-unidade*.
- c.** Procurar os pares unidade
- d.** Para todo par unidade (A,B) em P , tais que:
 $B \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$, onde $\{y_1, y_2, y_3 \dots\}$ é terminais
 - Adiciona-se a P'
 $A \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$

- Para ficar mais fácil podemos escrever da forma extensa.

Simplificação de Gram. Livre Contexto

3º. Eliminar produções unidades

- Exemplo

GLC

$S \rightarrow Aa$
 $S \rightarrow B$
 $B \rightarrow A$
 $B \rightarrow bb$
 $A \rightarrow a$
 $A \rightarrow bc$
 $A \rightarrow B$

Algoritmo

- ➔ **a.** Eliminar qualquer produção da forma $A \rightarrow A$ (evidente)
- b.** Criar um conjunto P' com as produções *não-unidade*.
- c.** Procurar os pares unidade
- d.** Para todo par unidade (A,B) em P , tais que:
 $B \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$, onde $\{y_1, y_2, y_3 \dots\}$ é terminais
 - Adiciona-se a P'
 $A \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$

- Não tem ninguém evidente!

Simplificação de Gram. Livre Contexto

3º. Eliminar produções unidades

- Exemplo

GLC

$S \rightarrow Aa$
 $S \rightarrow B$
 $B \rightarrow A$
 $B \rightarrow bb$
 $A \rightarrow a$
 $A \rightarrow bc$
 $A \rightarrow B$

Conjunto P'

$S \rightarrow Aa$
 $B \rightarrow bb$
 $A \rightarrow a$
 $A \rightarrow bc$

Algoritmo

- a.** Eliminar qualquer produção da forma $A \rightarrow A$ (evidente)
- ➔ **b.** Criar um conjunto P' com as produções *não-unidade*.
- c.** Procurar os pares unidade
- d.** Para todo par unidade (A,B) em P , tais que:
 - $B \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$, onde $\{y_1, y_2, y_3 \dots\}$ é terminais
 - Adiciona-se a P'

$$A \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$$

- Adicionar todos que não são do tipo $A \rightarrow B$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

3º. Eliminar produções unidades

- Exemplo


GLC

$S \rightarrow Aa$
 $S \rightarrow B$
 $B \rightarrow A$
 $B \rightarrow bb$
 $A \rightarrow a$
 $A \rightarrow bc$
 $A \rightarrow B$

Conjunto P'

$S \rightarrow Aa$
 $B \rightarrow bb$
 $A \rightarrow a$
 $A \rightarrow bc$

Algoritmo

- a.** Eliminar qualquer produção da forma $A \rightarrow A$ (evidente)
- b.** Criar um conjunto P' com as produções *não-unidade*.
-  **c.** Procurar os pares unidade
- d.** Para todo par unidade (A,B) em P , tais que:
 - $B \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$, onde $\{y_1, y_2, y_3 \dots\}$ é terminais
 - Adiciona-se a P'

$$A \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$$

- Adicionar todos que não são do tipo $A \rightarrow B$
- Os demais são par unidade
 - $(S,B); (B,A); (A,B);$
- Por transitividade
 - (S,A)

Simplificação de Gram. Livre Contexto

3º. Eliminar produções unidades

- Exemplo

GLC

$S \rightarrow Aa$
 $S \rightarrow B$
 $B \rightarrow A$
 $B \rightarrow bb$
 $A \rightarrow a$
 $A \rightarrow bc$
 $A \rightarrow B$

Conjunto P'

$S \rightarrow Aa$
 $B \rightarrow bb$
 $A \rightarrow a$
 $A \rightarrow bc$

Algoritmo

a. Eliminar qualquer produção da forma $A \rightarrow A$ (evidente)

b. Criar um conjunto P' com as produções *não-unidade*.

c. Procurar os pares unidade

d. Para todo par unidade (A,B) em P , tais que:

$B \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$, onde $\{y_1, y_2, y_3 \dots\}$ é terminais

– Adiciona-se a P'

$A \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$

Para:

$S \rightarrow B$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

3º. Eliminar produções unidades

- Exemplo

GLC

$S \rightarrow Aa$
 $S \rightarrow B$
 $B \rightarrow A$
 $B \rightarrow bb$
 $A \rightarrow a$
 $A \rightarrow bc$
 $A \rightarrow B$

Conjunto P'

$S \rightarrow Aa$
 $B \rightarrow bb$
 $A \rightarrow a$
 $A \rightarrow bc$

Algoritmo

a. Eliminar qualquer produção da forma $A \rightarrow A$ (evidente)

b. Criar um conjunto P' com as produções *não-unidade*.

c. Procurar os pares unidade

d. Para todo par unidade (A,B) em P , tais que:

$B \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$, onde $\{y_1, y_2, y_3 \dots\}$ é terminais

- Adiciona-se a P'

$A \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$

Para:

$S \rightarrow B$ e $B \rightarrow bb$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

3º. Eliminar produções unidades

- Exemplo

GLC

$S \rightarrow Aa$
 $S \rightarrow B$
 $B \rightarrow A$
 $B \rightarrow bb$
 $A \rightarrow a$
 $A \rightarrow bc$
 $A \rightarrow B$

Conjunto P'

$S \rightarrow Aa$
 $B \rightarrow bb$
 $A \rightarrow a$
 $A \rightarrow bc$

Algoritmo

a. Eliminar qualquer produção da forma $A \rightarrow A$ (evidente)

b. Criar um conjunto P' com as produções *não-unidade*.

c. Procurar os pares unidade

d. Para todo par unidade (A,B) em P , tais que:

$B \rightarrow y_1 | y_2 | y_3 \dots$, onde $\{y_1, y_2, y_3 \dots\}$ é terminais

- Adiciona-se a P'

$A \rightarrow y_1 | y_2 | y_3 \dots$

Para:

$S \rightarrow B$ e $B \rightarrow bb \Rightarrow S \rightarrow bb$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

3º. Eliminar produções unidades

- Exemplo

GLC

$S \rightarrow Aa$
 $S \rightarrow B$
 $B \rightarrow A$
 $B \rightarrow bb$
 $A \rightarrow a$
 $A \rightarrow bc$
 $A \rightarrow B$

Conjunto P'

$S \rightarrow Aa \mid bb$
 $B \rightarrow bb$
 $A \rightarrow a$
 $A \rightarrow bc$

Algoritmo

a. Eliminar qualquer produção da forma $A \rightarrow A$ (evidente)

b. Criar um conjunto P' com as produções *não-unidade*.

c. Procurar os pares unidade

d. Para todo par unidade (A,B) em P , tais que:

$B \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$, onde $\{y_1, y_2, y_3 \dots\}$ é terminais

- Adiciona-se a P'

$A \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$

Para:

$S \rightarrow B$ e $B \rightarrow bb \Rightarrow S \rightarrow bb$

Portanto bb será adicionado às produções de S

Simplificação de Gram. Livre Contexto

3º. Eliminar produções unidades

- Exemplo

GLC

$S \rightarrow Aa$
 $S \rightarrow B$
 $B \rightarrow A$
 $B \rightarrow bb$
 $A \rightarrow a$
 $A \rightarrow bc$
 $A \rightarrow B$

Conjunto P'

$S \rightarrow Aa \mid bb$
 $B \rightarrow bb$
 $A \rightarrow a$
 $A \rightarrow bc$

Algoritmo

a. Eliminar qualquer produção da forma $A \rightarrow A$ (evidente)

b. Criar um conjunto P' com as produções *não-unidade*.

c. Procurar os pares unidade

➔ **d.** Para todo par unidade (A,B) em P , tais que:

$B \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$, onde $\{y_1, y_2, y_3 \dots\}$ é terminais

– Adiciona-se a P'

$A \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$

Para:

$S \rightarrow B$ e $B \rightarrow bb \Rightarrow S \rightarrow bb$

$A \rightarrow B$ e $B \rightarrow bb \Rightarrow A \rightarrow bb$

$B \rightarrow A$ e $A \rightarrow a \mid bc \Rightarrow B \rightarrow a \mid bc$

$S \rightarrow A$ e $A \rightarrow a \mid bc \Rightarrow S \rightarrow a \mid bc$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

3º. Eliminar produções unidades

- Exemplo

GLC

$S \rightarrow Aa$
 $S \rightarrow B$
 $B \rightarrow A$
 $B \rightarrow bb$
 $A \rightarrow a$
 $A \rightarrow bc$
 $A \rightarrow B$

Conjunto P'

$S \rightarrow Aa \mid bb \mid a \mid bc$
 $B \rightarrow bb \mid a \mid bc$
 $A \rightarrow a \mid bc \mid bb$

Pronto!

Algoritmo

- Eliminar qualquer produção da forma $A \rightarrow A$ (evidente)
- Criar um conjunto P' com as produções *não-unidade*.
- Procurar os pares unidade
- Para todo par unidade (A,B) em P , tais que:

$$B \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots, \text{ onde } \{y_1, y_2, y_3 \dots\} \text{ e terminais}$$
 - Adiciona-se a P'

$$A \rightarrow y_1 \mid y_2 \mid y_3 \dots$$

Para:

$S \rightarrow B$ e $B \rightarrow bb \Rightarrow S \rightarrow bb$

$A \rightarrow B$ e $B \rightarrow bb \Rightarrow A \rightarrow bb$

$B \rightarrow A$ e $A \rightarrow a \mid bc \Rightarrow B \rightarrow a \mid bc$

$S \rightarrow A$ e $A \rightarrow a \mid bc \Rightarrow S \rightarrow a \mid bc$

Simplificação de Gram. Livre Contexto

Exercicio 3.11, livro:

$G = (\{S, X, Y, Z, A, B\}, \{a, b, u, v\}, P, S)$

GLC

$S \rightarrow XYZ$
 $X \rightarrow AXA \mid BXB \mid Z \mid \varepsilon$
 $Y \rightarrow AYB \mid BXB \mid Z \mid \varepsilon$
 $A \rightarrow a$
 $B \rightarrow b$
 $Z \rightarrow Zu \mid Zv \mid \varepsilon$

Algoritmo

- 1º.** Eliminar produções inúteis
- 2º.** Eliminar produções vazias
- 3º.** Eliminar produções unidade

a) Qual a linguagem gerada?

b) Simplifique a GLC.

Simplificação de Gram. Livre Contexto

$G = (\{S, A, B, C, Z\}, \{a, b, c\}, P, S)$

GLC

$S \rightarrow AB \mid AaB \mid ACZ$
 $B \rightarrow ACA \mid bB \mid Z \mid \varepsilon$
 $A \rightarrow a \mid Aa \mid aAB$
 $C \rightarrow b \mid bCZ \mid A \mid c \mid \varepsilon$
 $Z \rightarrow Za \mid bZ \mid \varepsilon$

Algoritmo

- 1º.** Eliminar produções inúteis
- 2º.** Eliminar produções vazias
- 3º.** Eliminar produções unidade

a) Qual a linguagem gerada?

b) Simplifique a GLC.