

3 – Linguagens Livres de Contexto

Aula 14

Sumário

Capítulo 3 – Linguagens Livres de Contexto

3.1. Gramáticas Livres de Contexto

3.1.1. Árvore de Derivação

3.1.2. Ambiguidade

3.1.3. Simplificação de Gramáticas Livres de Contexto

3.1.4. Recursão à Esquerda

3.2. Forma Normal de Chomsky

3.3. Forma Normal de Greibach

3.4. Recursão à esquerda

3.5. Autômato com pilha

Formas Normais

- As formas normais estabelecem restrições rígidas na definição das produções
- Mas não reduz o poder de geração das Gramáticas Livres de Contexto
 - Assim facilita nossa implementação
- Muito usado:
 - Prova de teoremas matemáticos (normalmente estas provas estão em FN)
 - Reconhecedores de linguagens

Forma Normal de Chomsky

$$A \rightarrow BC \quad \text{ou} \quad A \rightarrow a$$

Forma Normal de Greibach

$$A \rightarrow a \alpha$$

α , palavra de variáveis

Forma Normal de Chomsky - FNC

- Uma Gramática Livre de Contexto é dita na Forma Normal de Chomsky (FNC), se todas as produções são da forma:

$$A \rightarrow BC \quad \text{ou} \quad A \rightarrow a$$

- O algoritmo a seguir transforma uma GLC em FNC se:
 - A linguagem não possuir produções vazias $A \rightarrow \varepsilon$

- Três Etapas:

1º. Simplificação da Gramática

2º. Transformação das produções que tem o lado direito maior ou igual a 2

3º. Transformação das produções que tem lado direito maior ou igual a três em produções que tenham exatamente duas variáveis

Forma Normal de Chomsky - FNC

1º. Simplificação da gramática

- Esta simplificação é a mesma que aprendemos anteriormente
- Tres etapas:
 - **a.** Eliminar produções inúteis
 - **b.** Eliminar produções vazias
 - **c.** Eliminar produção Unidade

Forma Normal de Chomsky - FNC

- Três Etapas:

1º. Simplificação da Gramática

2º. Transformação das produções que tem o lado direito maior ou igual a 2

3º. Transformação das produções que tem lado direito maior ou igual a três em produções que tenham exatamente duas variáveis

Forma Normal de Chomsky - FNC

2º. *Transformação das produções que tem o lado direito maior ou igual a 2*

- Garante que o lado direito, que tem comprimento maior ou igual a dois é composto exclusivamente por variáveis
- A exclusão de um terminal pode ser realizada, substituindo-o por uma variável auxiliar C_a e incluindo a produção $C_a \rightarrow a$

- Ex:

GLC

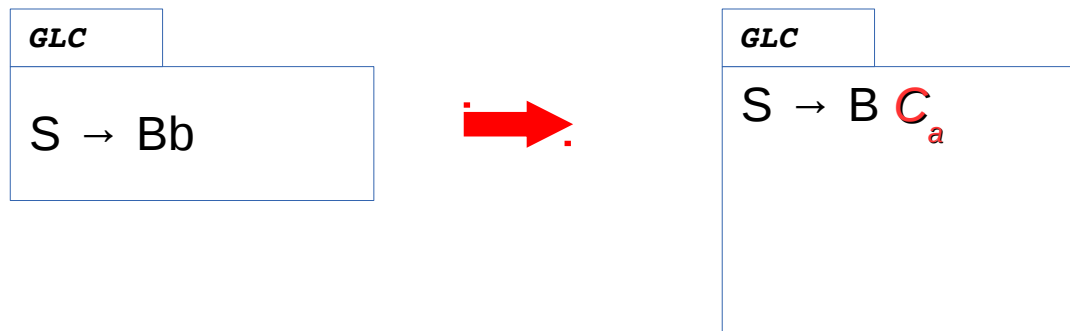
$S \rightarrow Bb$

Forma Normal de Chomsky - FNC

2º. *Transformação das produções que tem o lado direito maior ou igual a 2*

- Garante que o lado direito, que tem comprimento maior ou igual a dois é composto exclusivamente por variáveis
- A exclusão de um terminal pode ser realizada, substituindo-o por uma variável auxiliar C_a e incluindo a produção $C_a \rightarrow a$

• Ex:

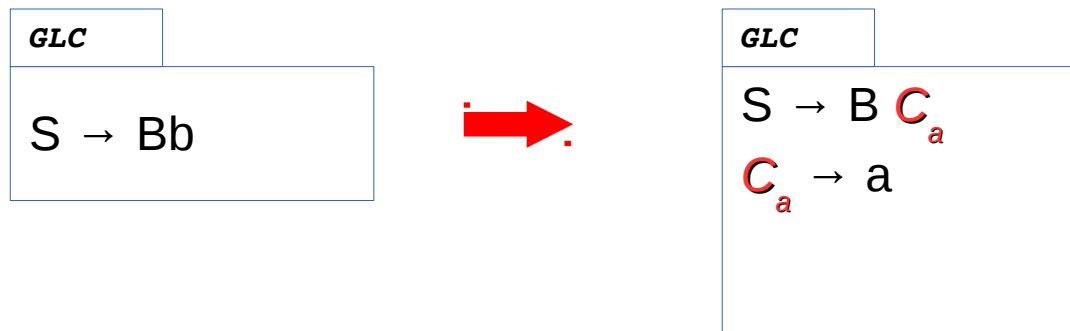


Forma Normal de Chomsky - FNC

2º. *Transformação das produções que tem o lado direito maior ou igual a 2*

- Garante que o lado direito, que tem comprimento maior ou igual a dois é composto exclusivamente por variáveis
- A exclusão de um terminal pode ser realizada, substituindo-o por uma variável auxiliar C_a e incluindo a produção $C_a \rightarrow a$

• Ex:



Forma Normal de Chomsky - FNC

2º. *Transformação das produções que tem o lado direito maior ou igual a 2*

- Garante que o lado direito, que tem comprimento maior ou igual a dois é composto exclusivamente por variáveis
- A exclusão de um terminal pode ser realizada, substituindo-o por uma variável auxiliar C_a e incluindo a produção $C_a \rightarrow a$

Algoritmo etapa 2

$$V_2 = V_1$$

$$P_2 = P_1$$

PARA TODA $A \rightarrow X_1 X_2 X_3 \dots X_n \in P_2$ **TAL QUE** $n \geq 2$ **FACA**

SE $r \in \{1, \dots, n\}$, logo X_r é um símbolo terminal **ENTÃO**

//Suponha $X_r = a$

$$V_2 = V_2 \cup \{C_a\}$$

Substituir a por C_a em $A \rightarrow X_1 X_2 X_3 \dots X_n \in P_2$

Forma Normal de Chomsky - FNC

2º. Transformação das produções que tem o lado direito maior ou igual a 2

Algoritmo etapa 2

$$V_2 = V_1$$

$$P_2 = P_1$$

→ **PARA TODA** $A \rightarrow X_1 X_2 X_3 \dots X_n \in P_2$ **TAL QUE** $n \geq 2$ **FACA**
 SE $r \in \{1, \dots, n\}$, logo X_r é um símbolo terminal **ENTÃO**
 //Suponha $X_r = a$
 $V_2 = V_2 \cup \{C_a\}$
 Substituir a por C_a em $A \rightarrow X_1 X_2 X_3 \dots X_n \in P_2$

Exemplo:

GLC

$S \rightarrow Bb \mid Ac$

Forma Normal de Chomsky - FNC

2º. Transformação das produções que tem o lado direito maior ou igual a 2

Algoritmo etapa 2

$$V_2 = V_1$$

$$P_2 = P_1$$

PARA TODA $A \rightarrow X_1 X_2 X_3 \dots X_n \in P_2$ **TAL QUE** $n \geq 2$ **FACA**

➡ **SE** $r \in \{1, \dots, n\}$, logo X_r é um símbolo terminal **ENTÃO**

//Suponha $X_r = a$

➡ $V_2 = V_2 \cup \{C_a\}$

Substituir a por C_a em $A \rightarrow X_1 X_2 X_3 \dots X_n \in P_2$

Exemplo:

GLC

$S \rightarrow Bb \mid Ac$

$S \rightarrow Bb$

$C_b \rightarrow b$

Forma Normal de Chomsky - FNC

2º. Transformação das produções que tem o lado direito maior ou igual a 2

Algoritmo etapa 2

$$V_2 = V_1$$

$$P_2 = P_1$$

PARA TODA $A \rightarrow X_1 X_2 X_3 \dots X_n \in P_2$ **TAL QUE** $n \geq 2$ **FACA**

SE $r \in \{1, \dots, n\}$, logo X_r é um símbolo terminal **ENTÃO**

//Suponha $X_r = a$

$$V_2 = V_2 \cup \{C_a\}$$

➡ Substituir a por C_a em $A \rightarrow X_1 X_2 X_3 \dots X_n \in P_2$

Exemplo:

GLC

$S \rightarrow Bb \mid Ac$

$S \rightarrow Bb$

$C_b \rightarrow b$

Logo a nova produção Bb será:

$S \rightarrow BC_b$

Forma Normal de Chomsky - FNC

2º. Transformação das produções que tem o lado direito maior ou igual a 2

Algoritmo etapa 2

$$V_2 = V_1$$

$$P_2 = P_1$$

PARA TODA $A \rightarrow X_1 X_2 X_3 \dots X_n \in P_2$ **TAL QUE** $n \geq 2$ **FACA**

SE $r \in \{1, \dots, n\}$, logo X_r é um símbolo terminal **ENTÃO**

//Suponha $X_r = a$

$$V_2 = V_2 \cup \{C_a\}$$

➡ Substituir a por C_a em $A \rightarrow X_1 X_2 X_3 \dots X_n \in P_2$

Exemplo:

GLC

$$S \rightarrow BC_b \mid Ac$$

$$C_b \rightarrow b$$

$$S \rightarrow Bb$$

$$C_b \rightarrow b$$

Logo a nova produção Bb será:

$$S \rightarrow BC_b$$

Forma Normal de Chomsky - FNC

2º. Transformação das produções que tem o lado direito maior ou igual a 2

Algoritmo etapa 2

$$V_2 = V_1$$

$$P_2 = P_1$$

➔ **PARA TODA** $A \rightarrow X_1 X_2 X_3 \dots X_n \in P_2$ **TAL QUE** $n \geq 2$ **FACA**
SE $r \in \{1, \dots, n\}$, logo X_r é um símbolo terminal **ENTÃO**
//Suponha $X_r = a$
 $V_2 = V_2 \cup \{C_a\}$
 Substituir a por C_a em $A \rightarrow X_1 X_2 X_3 \dots X_n \in P_2$

Exemplo:

GLC

$$S \rightarrow BC_b | AC_c$$

$$C_b \rightarrow b$$

$$C_c \rightarrow c$$

$$S \rightarrow Ac$$

$$C_c \rightarrow c$$

Logo a nova produção Ac será:

$$S \rightarrow AC_c$$

Forma Normal de Chomsky - FNC

- Três Etapas:

1º. Simplificação da Gramática

2º. Transformação das produções que tem o lado direito maior ou igual a 2

3º. Transformação das produções que tem lado direito maior ou igual a três em produções que tenham exatamente duas variáveis

Forma Normal de Chomsky - FNC

3º. Transformação das produções que tem lado direito maior ou igual a três em produções que tenham exatamente duas variáveis

- Garante que o lado direito, que tem comprimento maior ou igual a dois é composto de exatamente duas variáveis
- A ideia básica é criar variáveis auxiliares sempre que o lado direito apresentar mais de duas variáveis
- Ex:

GLC

$S \rightarrow BACD$

Forma Normal de Chomsky - FNC

3º. Transformação das produções que tem lado direito maior ou igual a três em produções que tenham exatamente duas variáveis

- Garante que o lado direito, que tem comprimento maior ou igual a dois é composto de exatamente duas variáveis
- A ideia básica é criar variáveis auxiliares sempre que o lado direito apresentar mais de duas variáveis
- Ex:

GLC

$S \rightarrow BACD$

Troca **ACD** por **E**

Forma Normal de Chomsky - FNC

3º. Transformação das produções que tem lado direito maior ou igual a três em produções que tenham exatamente duas variáveis

- Garante que o lado direito, que tem comprimento maior ou igual a dois é composto de exatamente duas variáveis
- A ideia básica é criar variáveis auxiliares sempre que o lado direito apresentar mais de duas variáveis
- Ex:

GLC

$S \rightarrow B\textcolor{red}{E}$
 $E \rightarrow ACD$

Troca $\textcolor{red}{ACD}$ por $\textcolor{red}{E}$

Cria uma nova produção com $E \rightarrow ACD$

Forma Normal de Chomsky - FNC

3º. Transformação das produções que tem lado direito maior ou igual a três em produções que tenham exatamente duas variáveis

- Garante que o lado direito, que tem comprimento maior ou igual a dois é composto de exatamente duas variáveis
- A ideia básica é criar variáveis auxiliares sempre que o lado direito apresentar mais de duas variáveis
- Ex:

GLC

$S \rightarrow B\textcolor{red}{E}$
 $E \rightarrow ACD$

Refaz o processo! Agora para a produção $E \rightarrow ACD$

Forma Normal de Chomsky - FNC

3º. Transformação das produções que tem lado direito maior ou igual a três em produções que tenham exatamente duas variáveis

- Garante que o lado direito, que tem comprimento maior ou igual a dois é composto de exatamente duas variáveis
- A ideia básica é criar variáveis auxiliares sempre que o lado direito apresentar mais de duas variáveis
- Ex:

GLC

$S \rightarrow BE$

$E \rightarrow ACD$

Troca **CD** por **F**

Cria uma nova produção com $F \rightarrow CD$

Forma Normal de Chomsky - FNC

3º. Transformação das produções que tem lado direito maior ou igual a três em produções que tenham exatamente duas variáveis

- Garante que o lado direito, que tem comprimento maior ou igual a dois é composto de exatamente duas variáveis
- A ideia básica é criar variáveis auxiliares sempre que o lado direito apresentar mais de duas variáveis
- Ex:

GLC

$S \rightarrow BE$

$E \rightarrow AF$

$F \rightarrow CD$

Troca **CD** por **F**

Cria uma nova produção com $F \rightarrow CD$

Pronto!

Forma Normal de Chomsky - FNC

3º. Transformação das produções que tem lado direito maior ou igual a três em produções que tenham exatamente duas variáveis

- Garante que o lado direito, que tem comprimento maior ou igual a dois é composto de exatamente duas variáveis

Algoritmo etapa 3

$$V_3 = V_2$$

$$P_3 = P_2$$

PARA TODA $A \rightarrow B_1 B_2 B_3 \dots B_n \in P_3$ **TAL QUE** $n \geq 3$ **FACA**

SE $r \in \{1, \dots, n\}$, logo X_r é um símbolo terminal **ENTÃO**

$$P_3 = P_3 - \{A \rightarrow B_1 B_2 B_3 \dots B_n\}$$

$$V_3 = V_3 \cup \{D_1, D_{n-2}\}$$

$$P_3 = P_3 \cup \{A \rightarrow B_1 D_1, D_1 \rightarrow B_2 D_2 \dots D_{n-3} \rightarrow B_{n-2} D_{n-2}, D_{n-2} \rightarrow B_{n-1} B_n\}$$

Forma Normal de Chomsky - FNC

Exercício:

$$G = (\{ E \}, \{ +, *, [,], x \}, P, E)$$

- Expressões aritméticas

GLC

$E \rightarrow E + E$
 $E \rightarrow E * E$
 $E \rightarrow [E]$
 $E \rightarrow x$

Algoritmo to FNC

1º. Simplificação da Gramática

2º. Transformação das produções que tem o lado direito maior ou igual a dois

3º. Transformação das produções que tem lado direito maior ou igual a três em produções que tenham exatamente duas variáveis

Forma Normal de Chomsky - FNC

Exercício:

$$G = (\{ E \}, \{ +, *, [,], x \}, P, E)$$

- Expressões aritméticas

GLC

$E \rightarrow E + E$
 $E \rightarrow E * E$
 $E \rightarrow [E]$
 $E \rightarrow x$

Algoritmo to FNC

1º. Simplificação da Gramática

2º. Transformação das produções que tem o lado direito maior ou igual a dois

3º. Transformação das produções que tem lado direito maior ou igual a três em produções que tenham exatamente duas variáveis

GLC

$E \rightarrow E C_+ E \mid E C_* E \mid C_{[} E C_{]}$
 $E \rightarrow x$
 $C_+ \rightarrow +$
 $C_* \rightarrow *$
 $C_{[} \rightarrow [$
 $C_{]} \rightarrow]$

GLC

$E \rightarrow E D_1 \mid E D_2 \mid C_{[} D_3$
 $D_1 \rightarrow C_+ E$
 $D_2 \rightarrow C_* E$
 $D_3 \rightarrow E C_{]}$
 $E \rightarrow x$
 $C_+ \rightarrow +$
 $C_* \rightarrow *$
 $C_{[} \rightarrow [$
 $C_{]} \rightarrow]$

Forma Normal de Chomsky - FNC

Exercício:

GLC

$S \rightarrow AbB \mid CAE$

$A \rightarrow a$

$B \rightarrow BCc$

$C \rightarrow AB \mid \varepsilon$

$E \rightarrow x$

$F \rightarrow D$

$D \rightarrow ab$

a. Esta gramática é ambigua?

b. Coloque-a na FNC

Forma Normal de Chomsky - FNC

- Exercício 3.5, livro. Seja a gramática **G** abaixo:
- $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$

GLC
$S \rightarrow SS \mid aSa \mid bSb \mid \epsilon$

- Qual a linguagem gerada?
- Esta gramática é ambígua?
- Para a palavra aabbaaaa
 - Construa uma árvore de derivação
 - Para a árvore construída, determine a derivação mais à esquerda e mais à direita

Forma Normal de Chomsky - FNC

- Seja a gramática **G** abaixo:

GLC

$\text{expr_list} \rightarrow \text{expr_list expr_ptv} \mid \text{expr_ptv};$

$\text{expr_ptv} \rightarrow \text{expr PTVIRG};$

$\text{expr} \rightarrow \text{expr MAIS expr} \mid \text{expr MENOS expr} \mid \text{INTEIRO};$

- Faça algumas derivações;
- Esta gramática é ambígua?
- Passe para forma normal de chomsky