LISTA DE EXERCÍCIOS 21 – CÁLCULO II

01. Encontre o limite. Use a Regra de l'Hôspital quando for apropriado. Se houver um método mais elementar, considere utilizá-lo. Se a Regra de l'Hôspital não se aplicar, explique o porquê.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{cotg} 2x \operatorname{sen} 6x$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ g) $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos x \sec 5x$

i) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$ j) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x)$ k) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

l) $\lim\limits_{x\to\infty}(x - \ln x)$ m) $\lim\limits_{x\to 1^+}[\ln(x^7-1) - \ln(x^5-1)]$ n) $\lim\limits_{t\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

o) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{tg} 2x)^x$ p) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$ q) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}$

r) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}}$ s) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ t) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}$

u) $\lim\limits_{x\to 0^+}(4x+1)^{\operatorname{cotg} x}$ v) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ w) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

x) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$

02. Demonstre que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para qualquer inteiro positivo n. Isso mostra que a função exponencial tende mais rapidamente ao infinito que qualquer potência de x.

03. Demonstre que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^p} = 0$$

para todo número $p > 0$. Isso mostra que a função logaritmo tende a infinito mais vagarosamente que qualquer potência de x.

04. Se um objeto de massa m é solto a partir do repouso, um modelo para sua velocidade v após t segundos, levando-se em conta a resistência do ar, é

$$v = \frac{mg}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right)$$

Onde g é a aceleração da gravidade e c é uma constante positivaque representa a resistência do ar.

a) Calcule $\lim_{t\to\infty} v$. Qual o significado desse limite?

b) Para um valor fixo de t, use a Regra de l'Hôspital para calcular $\lim_{c\to 0^+} v$. O que você pode concluir sobre a velocidade de um objeto caindo no vácuo?

05. Se um montante inicial de dinheiro A_0 for investido a uma taxa de juros r capitalizada n vezes ao ano, o valor do investimento após t anos será

$$A = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Se $n \to \infty$, nos referimos à *capitalização contínua* de juros. Use a Regra de l'Hôspital para mostrar que se os juros foram capitalizados continuamente, então o montante após t anos será

$$A = A_0 e^{rt}$$

06. Se uma bola de metal de massa m for lançada na água e a força de resistência for proporcional ao quadrado da velocidade, então a distância que a bola percorreu até o instante t é dada por

$$s(t) = \frac{m}{c}\ln\left(\cosh\sqrt{\frac{gc}{mt}}\right)$$

onde c é uma constante positiva. Encontre $\lim_{c\to 0^+} s(t)$.

07. Se um campo eletrostático E agir em um dielétrico polar líquido ou gasoso, o momento de dipolo resultante P por unidade de volume é

$$P(E) = \frac{e^E + e^{-E}}{e^E - e^{-E}} - \frac{1}{E}$$

Mostre que $\lim_{E\to 0^+} P(E) = 0$.

08. Um cabo de metal tem raio r e é coberto por isolante, de modo que a distância do centro do cabo ao exterior do isolante é R. A velocidade de um impulso elétrico do cabo é

$$v = -c\left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

onde c é uma constante positiva. Encontre os seguintes limites e interprete suas respostas.

a) $\lim_{R \to r^+} v$ b) $\lim_{r \to 0^+} v$