

2 – Linguagens Regulares

Aula 03

Sumário

Capítulo 2 – Linguagens Regulares

2.1. Definição

2.1.1. Linguagem Tipo 3

2.1.2. Sistema de estados finitos

2.2. Formalismos

2.2.1. Autômatos

- a. Autômato Finito Determinístico (AFD)
- b. Autômato Finito Não-Determinístico
- c. Autômato Finito com Movimentos Vazios
- d. Equivalência entre autômatos
- e. Minimização de autômatos

2.2.2. Expressão Regular

2.2.3. Gramática Regular

Sumário

Capítulo 2 – Linguagens Regulares

2.1. Definição

2.1.1. Linguagem Tipo 3

2.1.2. Sistema de estados finitos

2.2. Formalismos

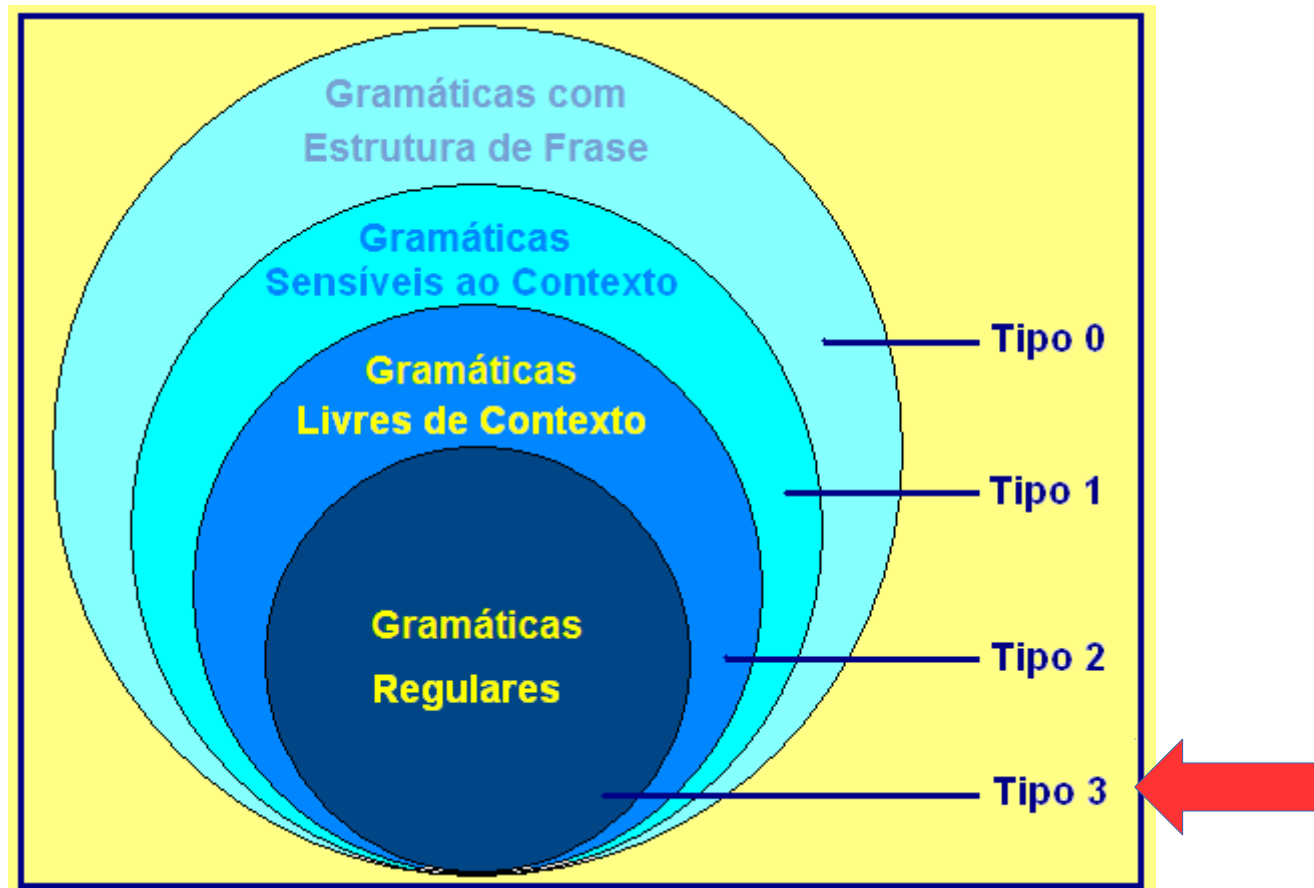
2.2.1. Autômatos

a. Autômato Finito Determinístico (AFD)

- Estrutura
- Função de transição
- Definição matemática
- Construção de um AFD
- Tabela de transição
- Funcionamento de um autômato (AFD)
- Condições de parada
- Função Programa estendida
- Autômatos equivalentes

Hieraquia Chomsky

- Retomando



Linguagens regulares – Tipo 3

- Além das restrições da linguagem tipo 2, 1, 0
- Deve ser **Linear à direita** ou **à esquerda**
 - $A \rightarrow aB \mid a$
 - $B \rightarrow Ba \mid a$
 - $A \rightarrow ABa$, **Não pode**
- Um facilitador nessa classificação da linguagem tipo 3 é o Autômato
- DEFINIÇÃO: L é uma linguagem regular, se e somente se, existe pelo menos um autômato finito determinístico que aceita L

Linguagens regulares – Tipo 3

- Estudaremos três abordagens (Formalismos):
 1. Autômato finito
 2. Expressão regular
 3. Gramática regular

Linguagens regulares – Tipo 3

- Estudaremos três abordagens (Formalismos):
 1. Autômato finito
 - Formalismo operacional ou reconhecedor
 - Basicamente um sistema de estados finitos
 2. Expressão regular
 - Formalismo denotacional (funcional) ou gerador
 - Defindas a partir de três elementos:
 - Conjuntos básicos, Concatenação, União
 3. Gramática regular
 - Formalismo axiomático ou gerador
 - Gramática com restrições da forma das regras de produção

Linguagens regulares – Tipo 3

- Característica
 - Classe de linguagem mais simples (hierarquia Chmosky)
 - Utilizado principalmente na Análise Léxica
 - Algoritmos de reconhecimento (**autômato**), geração e conversão tem:
 - pouca complexidade
 - facil implementação
 - grande eficiencia

Linguagens regulares – Tipo 3

- Característica
 - Classe de linguagem mais simples (hierarquia Chmosky)
 - Utilizado principalmente na Análise Léxica
 - Algoritmos de reconhecimento (**autômato**), geração e conversão tem:
 - pouca complexidade
 - facil implementação
 - grande eficiencia
 - Qualquer autômato finito é igualmente eficiente
 - Qualquer solução é ótima
 - A menos que haja redundância de estados

Linguagens regulares – Tipo 3

- Característica
 - Classe de linguagem mais simples (hierarquia Chomsky)
 - Utilizado principalmente na Análise Léxica
 - Algoritmos de reconhecimento (**autômato**), geração e conversão tem:
 - pouca complexidade
 - fácil implementação
 - grande eficiência
 - Qualquer autômato finito é igualmente eficiente
 - Qualquer solução é ótima
 - A menos que haja redundância de estados
 - Caso exista, elimina-se com o: **Autômato finito mínimo**

Linguagens regulares – Tipo 3

- Característica
 - Limitações de expressividade

Por exemplo:

- Não contempla palavras de duplo balanceamento
 - $\{ w^n w^n \mid w \text{ é toda palavra em } \{a,b\} \}$
 - $((()))$

Linguagens regulares – Tipo 3

- Característica
 - Limitações de expressividade

Por exemplo:

- Não contempla palavras de duplo balanceamento
 - $\{ w^n w^n \mid w \text{ é toda palavra em } \{a,b\} \}$
 - $((()))$
 - Linguagens de programação em geral são **não-regulares**

Linguagens regulares – Tipo 3

- Característica

- Limitações de expressividade

Por exemplo:

- Não contempla palavras de duplo balanceamento
 - $\{ w^n w^n \mid w \text{ é toda palavra em } \{a,b\} \}$
 - $((()))$
 - Linguagens de programação em geral são **não-regulares**
- Se um problema é não-regular mas tem uma solução regular
- Pode-se considerar para este problema
 - As propriedades da classe regular
 - Eficiência e simplicidade dos algoritmos regulares

Sumário

Capítulo 2 – Linguagens Regulares

2.1. Definição

2.1.1. Linguagem Tipo 3

2.1.2. Sistema de estados finitos

2.2. Formalismos

2.2.1. Autômatos

a. Autômato Finito Determinístico (AFD)

- Estrutura
- Função de transição
- Definição matemática
- Construção de um AFD
- Tabela de transição
- Funcionamento de um autômato (AFD)
- Condições de parada
- Função Programa estendida
- Autômatos equivalentes

Sistema de estados finitos

- Modelo matemático de sistema com entradas e saídas discretas
- Composto por entrada e estados
- Não tem memória

Sistema de estados finitos

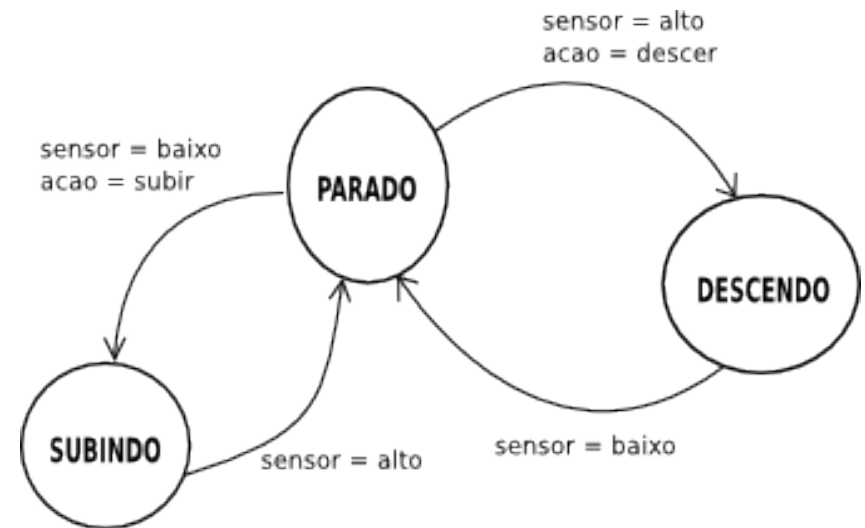
- Modelo matemático de sistema com entradas e saídas discretas
- Composto por entrada e estados
- Não tem memória
- Número finito e predefinido de estados
- A máquina só pode estar em um estado por vez

Sistema de estados finitos

- Modelo matemático de sistema com entradas e saídas discretas
- Composto por entrada e estados
- Não tem memória
- Número finito e predefinido de estados
- A máquina só pode estar em um estado por vez

Exemplos:

- Elevador
 - Estados:
 - guarda o “andar corrente”
 - e “direção de movimento”
 - Entrada:
 - lista de requisições pendentes



Sumário

Capítulo 2 – Linguagens Regulares

2.1. Definição

2.1.1. Linguagem Tipo 3

2.1.2. Sistema de estados finitos

2.2. Formalismos

2.2.1. Autômatos

a. Autômato Finito Determinístico (AFD)

- Estrutura
- Função de transição
- Definição matemática
- Construção de um AFD
- Tabela de transição
- Funcionamento de um autômato (AFD)
- Condições de parada
- Função Programa estendida
- Autômatos equivalentes

Autômato Finito

- É um sistema de estados finitos
 - Estados: Numero finito e predefinido
 - Entrada: bem definida

Autômato Finito

- É um sistema de estados finitos
 - Estados: Numero finito e predefinido
 - Entrada: bem definida
- Tipos: *(são todos equivalentes)*
 - Determinístico
 - Não determinístico
 - Com movimentos vazios

Autômato Finito

- É um sistema de estados finitos
 - Estados: Numero finito e predefinido
 - Entrada: bem definida
- Tipos: *(são todos equivalentes)*
 - Determinístico
 - A partir de um determinado estado e do simbolo lido
 - Pode assumir um **único** estado
 - Não determinístico
 - A partir de um determinado estado e do simbolo lido
 - Pode assumir um **conjunto** de estado
 - Com movimentos vazios
 - A partir de um determinado estado e **sem ler** um simbolo
 - Pode assumir um **conjunto** de estado

Autômato Finito Determinístico

- É composto por:
 - Fita
 - Unidade de controle
 - Programa, função programa ou transição

Autômato Finito Determinístico

- É composto por:
 - Fita
 - Dispositivo de entrada
 - Contém a informação a ser processada
 - Unidade de controle
 - Programa, função programa ou transição

Autômato Finito Determinístico

- É composto por:
 - Fita:
 - Dispositivo de entrada
 - Contém a informação a ser processada
 - Unidade de controle
 - Reflete o estado corrente da máquina
 - Possui unidade leitura, cabeça da fita
 - Acessa uma célula da fita de cada vez
 - Movimenta-se exclusivamente para direita
 - Programa, função programa ou transição

Autômato Finito Determinístico

- É composto por:
 - Fita:
 - Dispositivo de entrada
 - Contém a informação a ser processada
 - Unidade de controle
 - Reflete o estado corrente da máquina
 - Possui unidade leitura, cabeça da fita
 - Acessa uma célula da fita de cada vez
 - Movimenta-se exclusivamente para direita
 - Programa, função programa ou transição
 - Comanda as leituras
 - Define o estado da máquina

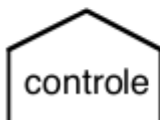
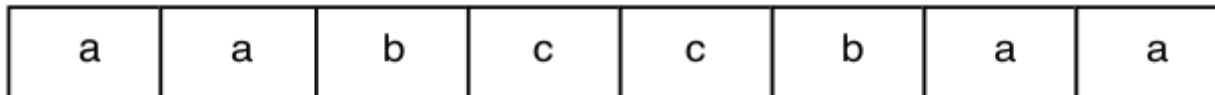
Autômato Finito Determinístico

- Fita
 - Dividida em células
 - Cada célula armazena um símbolo
 - Os símbolos pertencem a um alfabeto
 - **NÃO** é possível gravar na fita
 - A palavra a ser processada ocupa toda a fita

a	a	b	c	c	b	a	a
---	---	---	---	---	---	---	---

Autômato Finito Determinístico

- Unidade de controle
 - Número finito de estados
 - Leitura
 - Lê o simbolo de cada célula
 - Lê apenas um por vez
 - Move a cabeça sempre pra direita
 - Posição inicial da cabeça: é a célula mais a esquerda



Autômato Finito Determinístico

- Função de transição
 - A partir do estado corrente e do simbolo lido
 - Ela define o novo estado do autômato
 - Ex:
 $\delta(q1, b) = q4$

Autômato Finito Determinístico

- Função de transição
 - A partir do estado corrente e do simbolo lido
 - Ela define o novo estado do autômato
 - Ex:
 $\delta(q1, b) = q4$
 - Lê-se:
 - Se o estado atual é o $q1$ e o simbolo lido foi “***b***” vá para o estado $q4$

Autômato Finito Determinístico

- Função de transição

- A partir do estado corrente e do simbolo lido
- Ela define o novo estado do autômato

- Ex:

$$\delta(q1, b) = q4$$

- Lê-se:
- Se o estado atual é o $q1$ e o simbolo lido foi “***b***” vá para o estado $q4$

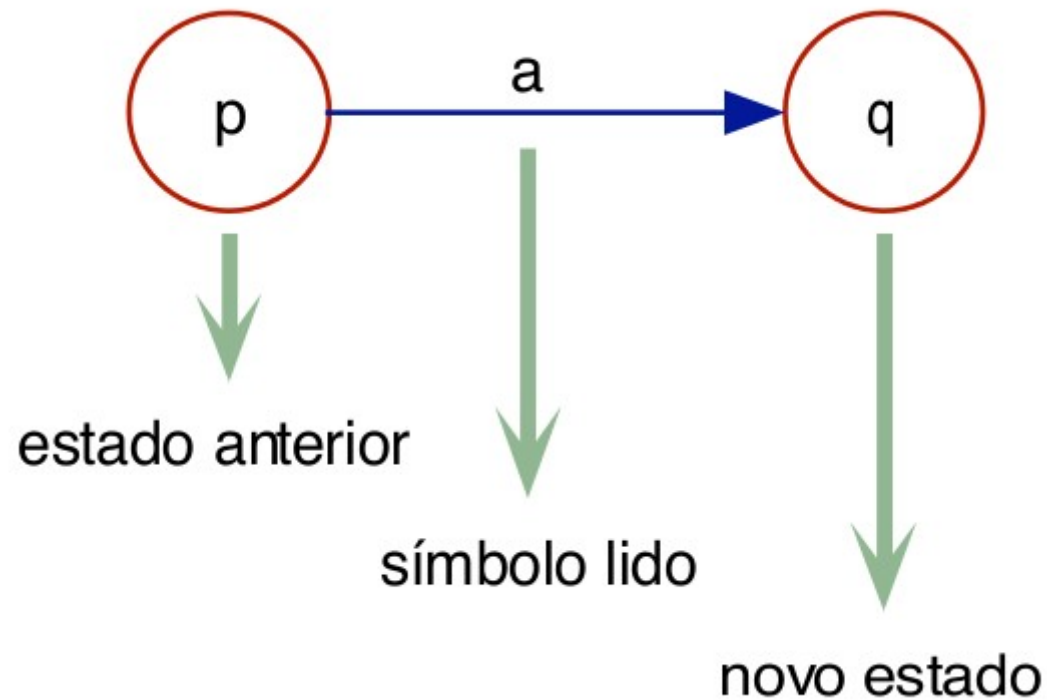
$$\delta(p, a) = q$$

- Se o estado atual é o p e o simbolo lido foi “***b***” vá para o estado q

Autômato Finito Determinístico

- Exemplo de Automato finito em diagrama
- Este automato tem apenas uma função de transição

$$\delta(p, a) = q$$



Autômato Finito Determinístico

- Definição Matemática:

$$M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$$

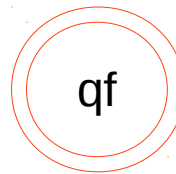
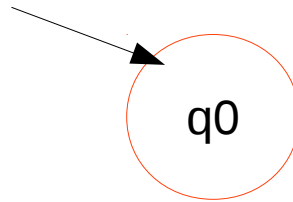
- Σ , é um alfabeto
- Q , é o conjunto de estados possíveis do automato (finito)
- δ , é uma função de transição

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$$

- q_0 , estado inicial
- F , subconjunto de Q , conjunto dos estados finais

Autômato Finito Determinístico

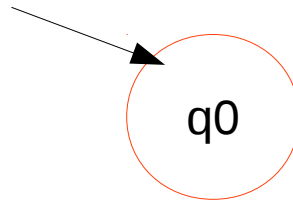
- Por convenção
 - O estado inicial
 - Os estados finais



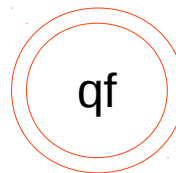
Autômato Finito Determinístico

- Por convenção

- O estado inicial



- Os estados finais



- Função de transição por tabela

- Ex: $\delta(p, a) = q$

δ	a	...
p	q	...
q

Autômato Finito Determinístico

- Exemplo: Construa um autômato finito determinístico que aceite qualquer palavra do no alfabeto $\{a, b\}$ que possua como subpalavra **aa** ou **bb**

Autômato Finito Determinístico

- Exemplo: Construa um autômato finito determinístico que aceite qualquer palavra do no alfabeto $\{a, b\}$ que possua como subpalavra **aa** ou **bb**
- Ou seja, queremos:

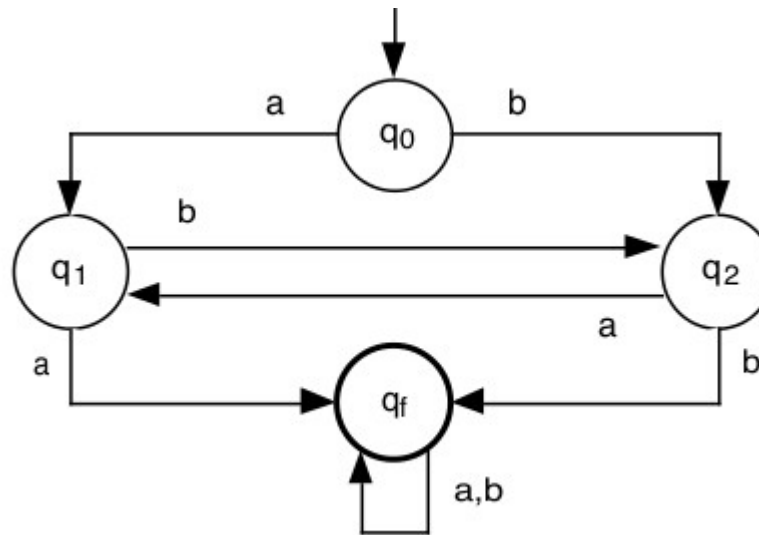
$$L = \{ w \mid w \text{ possui } \mathbf{aa} \text{ ou } \mathbf{bb} \text{ como subpalavra} \}$$

Autômato Finito Determinístico

- Exemplo: Construa um autômato finito determinístico que aceite qualquer palavra do no alfabeto {a, b} que possua como subpalavra **aa** ou **bb**
- Ou seja, queremos:

$$L = \{ w \mid w \text{ possui } \mathbf{aa} \text{ ou } \mathbf{bb} \text{ como subpalavra} \}$$

- Autômato finito



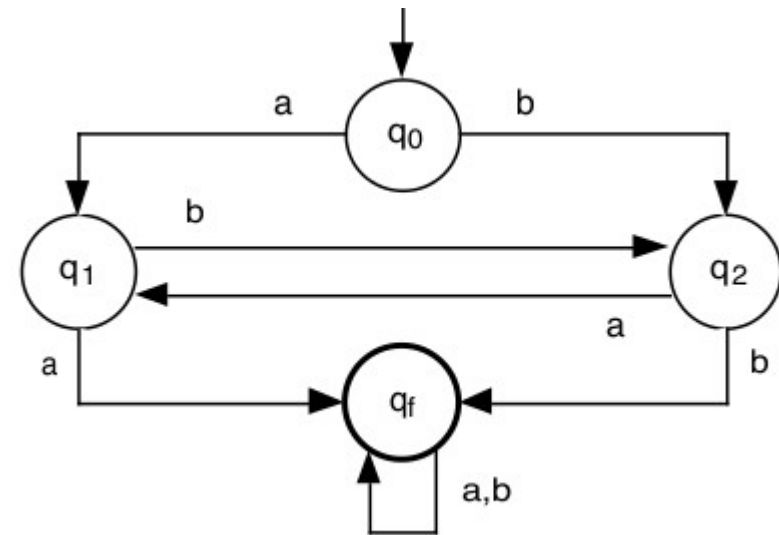
Autômato Finito Determinístico

- Autômato finito, definição:

$$M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$$

- $M1 = (\{a,b\}, \{q_0,q_1,q_2,q_f\}, \delta, q_0, \{q_f\})$

δ	a	b
q_0	q_1	q_2
q_1	q_f	q_2
q_2	q_1	q_f
q_f	q_f	q_f



Sumário

Capítulo 2 – Linguagens Regulares

2.1. Definição

2.1.1. Linguagem Tipo 3

2.1.2. Sistema de estados finitos

2.2. Formalismos

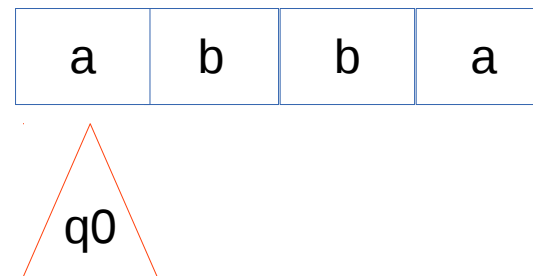
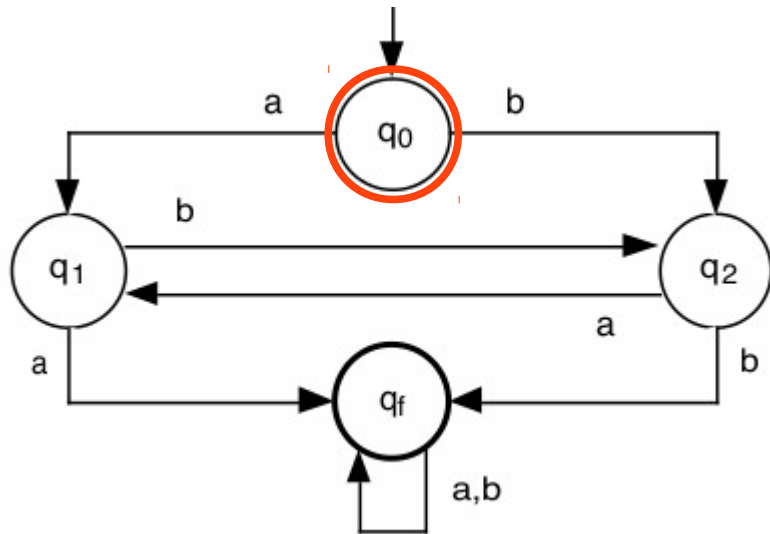
2.2.1. Autômatos

a. Autômato Finito Determinístico (AFD)

- Estrutura
- Função de transição
- Definição matemática
- Construção de um AFD
- Tabela de transição
- **Funcionamento de um autômato (AFD)**
- **Condições de parada**
- Função Programa estendida
- Autômatos equivalentes

AFD - Funcionamento

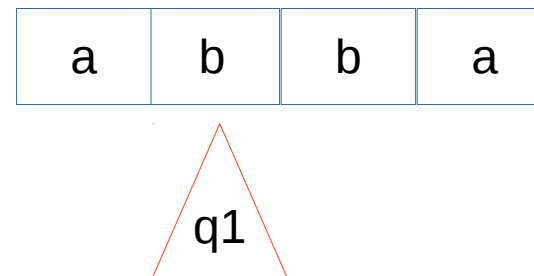
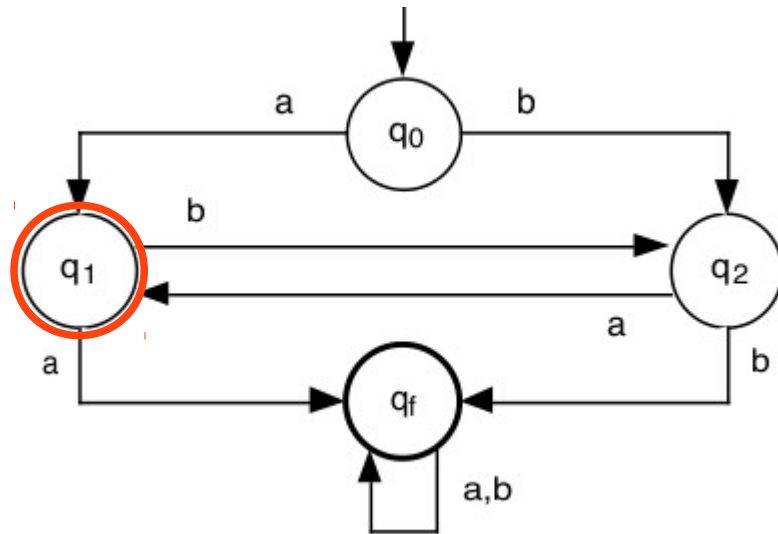
- Vamos analisar se entrada **abba** é aceita pela linguagem



- Estado q_0 , leu **a**, para onde vai?
- $\delta(q_0, a) = ?$

AFD - Funcionamento

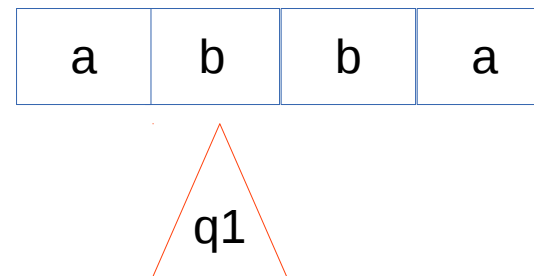
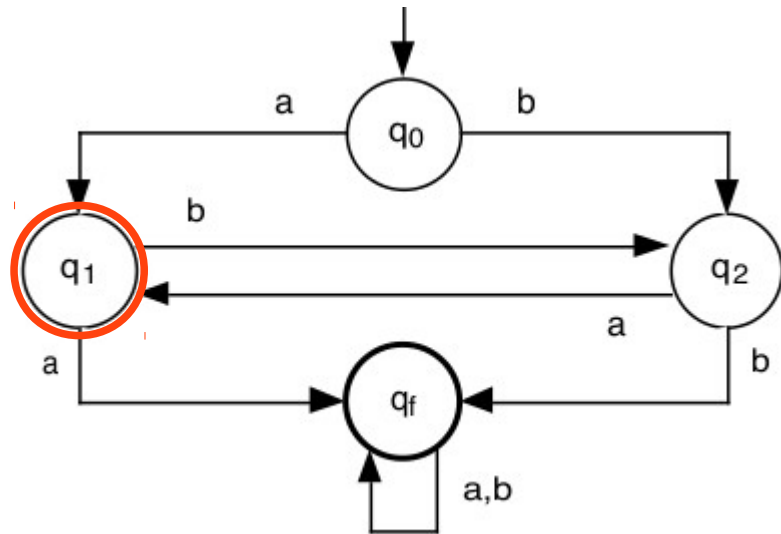
- Vamos analisar se entrada **abba** é aceita pela linguagem



- Estado q_0 , leu **a**, para onde vai? **R: Para estado q_1**
- $\delta(q_0, a) = q_1$

AFD - Funcionamento

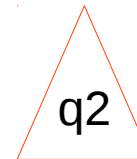
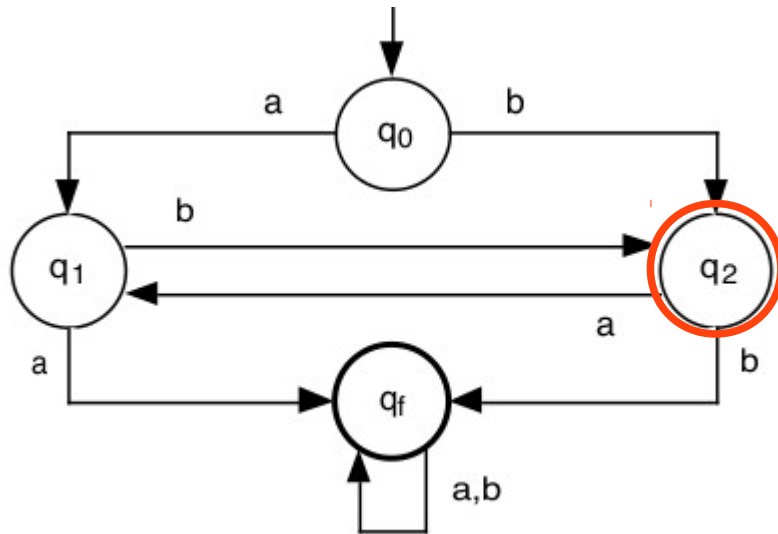
- Vamos analisar se entrada **abba** é aceita pela linguagem



- Estado q1, leu **b**, para onde vai?
- $\delta(q1, b) = ?$

AFD - Funcionamento

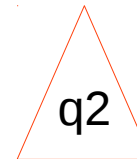
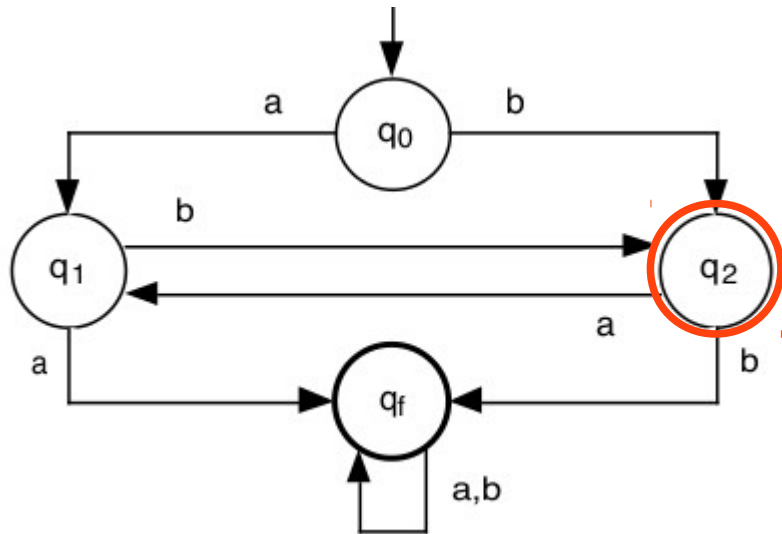
- Vamos analisar se entrada **abba** é aceita pela linguagem



- Estado q1, leu **b**, para onde vai? **R: Para estado q2**
- $\delta(q1, b) = q2$

AFD - Funcionamento

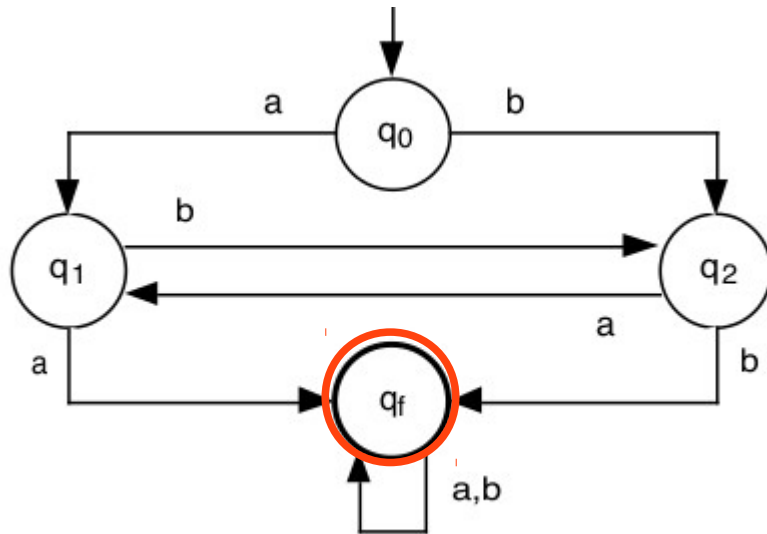
- Vamos analisar se entrada **abba** é aceita pela linguagem



- Estado q2, leu **b**, para onde vai?
- $\delta(q2, b) = ?$

AFD - Funcionamento

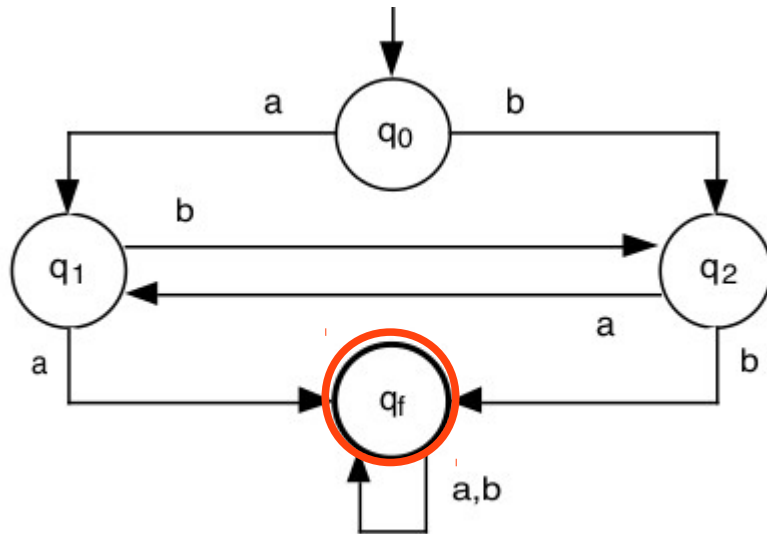
- Vamos analisar se entrada **abba** é aceita pela linguagem



- Estado q2, leu **b**, para onde vai? **R: Para estado qf**
- $\delta(q2, b) = qf$

AFD - Funcionamento

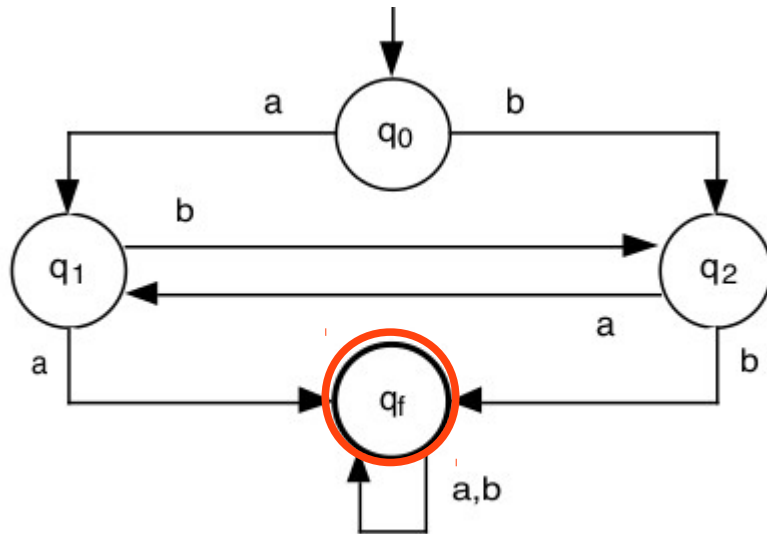
- Vamos analisar se entrada **abba** é aceita pela linguagem



- Estado q2, leu **b**, para onde vai? **R: Para estado qf**
- $\delta(q2, b) = qf$ **ACABOU?**

AFD - Funcionamento

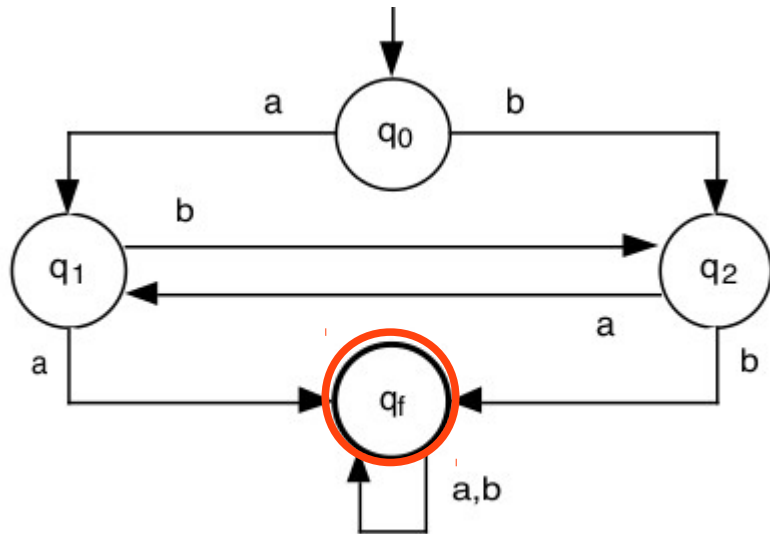
- Vamos analisar se entrada **abba** é aceita pela linguagem



- Estado q2, leu **b**, para onde vai? **R: Para estado qf**
- $\delta(q2, b) = qf$ **ACABOU?**
- NÃO. Só aceita quando:
 - Está num estado final
 - A entrada foi toda processada

AFD - Funcionamento

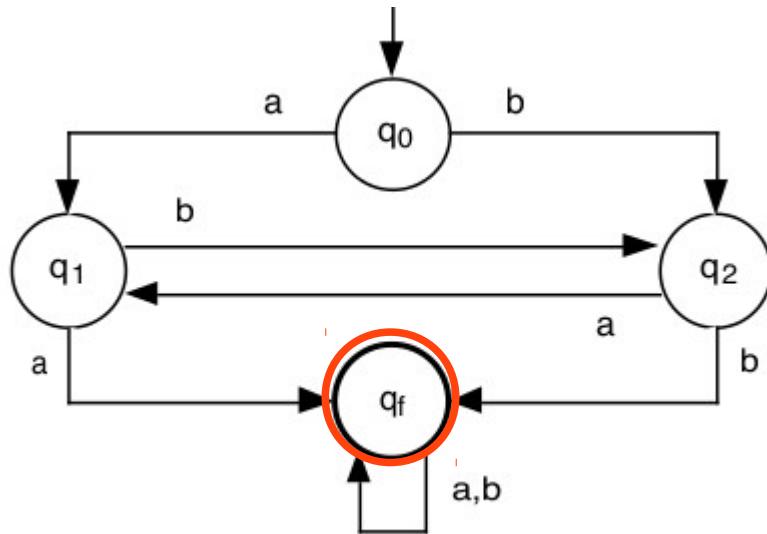
- Vamos analisar se entrada **abba** é aceita pela linguagem



- Estado qf, leu **a**, para onde vai?
- $\delta(qf, a) = ?$

AFD - Funcionamento

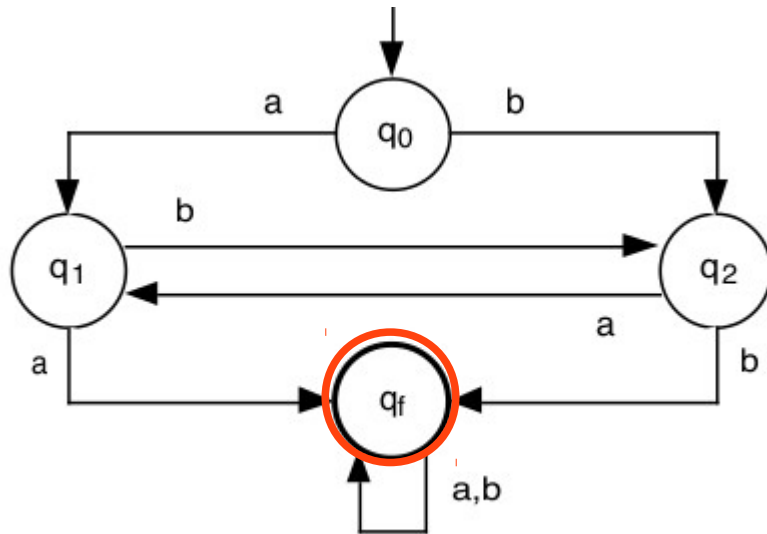
- Vamos analisar se entrada **abba** é aceita pela linguagem



- Estado qf, leu **a**, para onde vai? **R: Para estado qf**
- $\delta(qf, a) = qf$

AFD - Funcionamento

- Vamos analisar se entrada **abba** é aceita pela linguagem



- Estado qf, leu **a**, para onde vai? **R: Para estado qf**
- $\delta(qf, a) = qf$
- FIM!
- A palavra **abba** foi aceita.
- Logo pode-se dizer que ela pertence a Linguagem **L**

AFD - Funcionamento

- Condições de parada
 - Um autômato recebe uma entrada ***w***, ***ela*** pode ser:
 - Aceita
 - Rejeitada

AFD - Funcionamento

- Condições de parada
 - Um autômato recebe uma entrada ***w***, ***ela*** pode ser:
 - Aceita
 - Após processar o **último** símbolo, assume um **estado final**

a	b	b	a
---	---	---	---

qf

AFD - Funcionamento

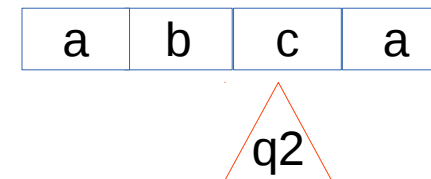
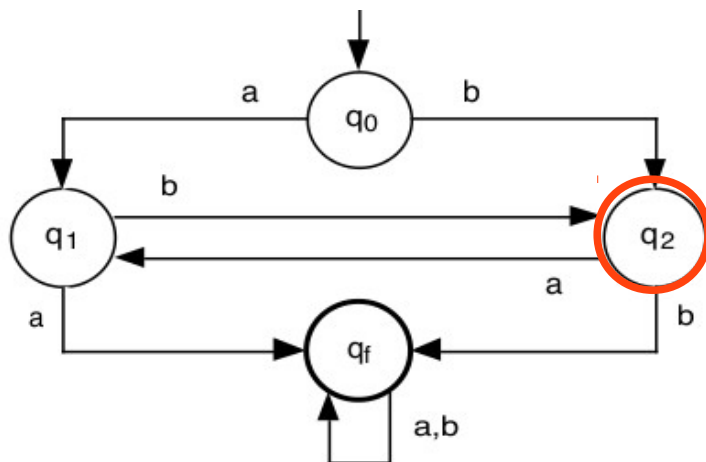
- Condições de parada
 - Um autômato recebe uma entrada **w**, **ela** pode ser:
 - Aceita
 - Após processar o último símbolo, assume um estado final
 - Rejeitada
 - Após processar o **último** símbolo, assume um estado **não final**

a	b	b	a
---	---	---	---

q1

AFD - Funcionamento

- Condições de parada
 - Um autômato recebe uma entrada **w**, **ela** pode ser:
 - Aceita
 - Após processar o último símbolo, assume um estado final
 - Rejeitada
 - Após processar o **último** símbolo, assume um estado **não final**
 - Função de transição indefinida para algum parametro (estado e simbolo)



Não sabe o que fazer ao ler o símbolo **"c"**

Autômato Finito Determinístico

- E agora, como fazer um autômato?

Autômato Finito Determinístico

- E agora, como fazer um autômato?
- Não tem regra
- Força bruta, tentativa e erro

Autômato Finito Determinístico

- E agora, como fazer um autômato?
- Não tem regra
- Força bruta, tentativa e erro
- Lembrando que:
 - Não tem memória
- Dicas:
 - o estado atual pode te ajudar e funcionar como memória
 - Escreva algumas sentenças que serão aceitas

Autômato Finito Determinístico

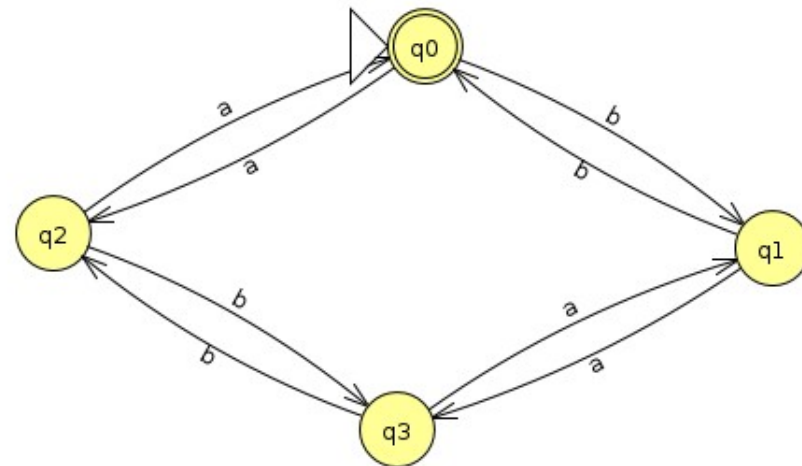
- Exercício:
 - $L = \{ w \mid w \text{ possui um número par de } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{b} \}$

Autômato Finito Determinístico

- Exercício:
 - $L = \{ w \mid w \text{ possui um número par de } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{b} \}$
 - Algumas sentenças
 - aa <aceita>
 - abba <aceita>
 - abab <aceita>
 - abbaa <rejeitada>

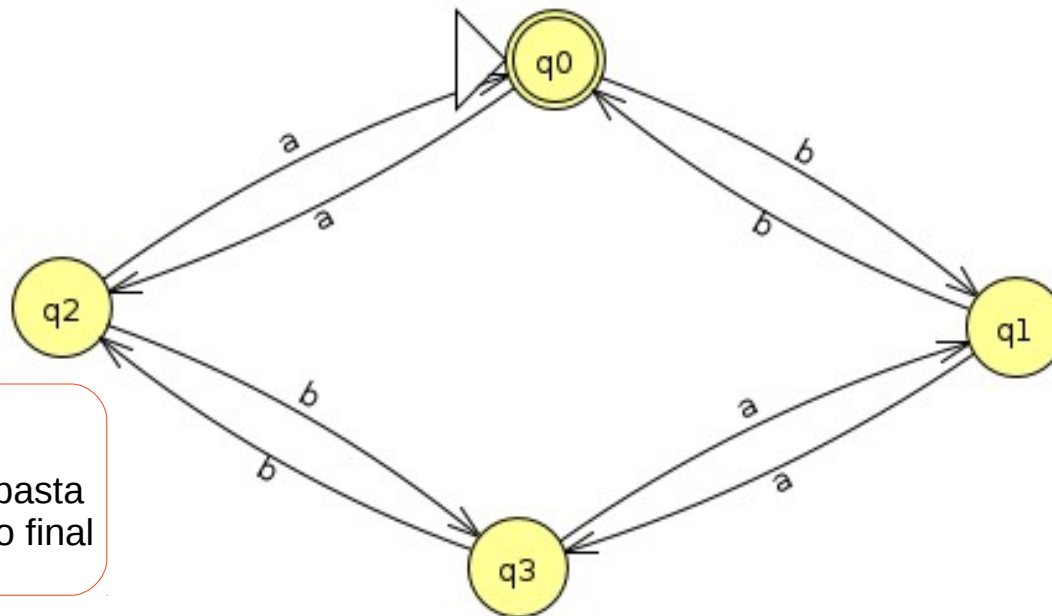
Autômato Finito Determinístico

- Exercício:
 - $L = \{ w \mid w \text{ possui um número par de } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{b} \}$
 - Algumas sentenças
 - aa <aceita>
 - abba <aceita>
 - abab <aceita>
 - abbaa <rejeitada>



Autômato Finito Determinístico

- Exercício:
 - $L = \{ w \mid w \text{ possui um número par de } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{b} \}$



- Tem um **a**
- Se chegar outro **a** basta voltar para o estado final

- Tem um **b**
- Se chegar outro **b** basta voltar para o estado final

- Se chegou aqui é porque tem
- Número ímpar de **a** e **b**
- Logo, pra voltar ao estado final terá que passar por outros 2 **a** e **b**

Automato Finito Determinístico

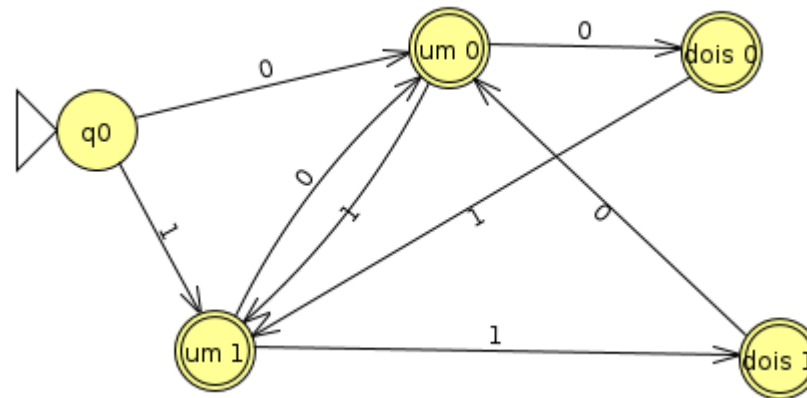
Exercícios

- a) $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ tem tamanho } 3\}$
- b) $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ tem tamanho maior que } 3\}$
- c) $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ tem tamanho múltiplo de } 3\}$
- d) $\{w \in \{0,1\}^* \mid \text{cada } 0 \text{ de } w \text{ é imediatamente seguido de, no mínimo dois } 1\text{'s}\}$
- e) $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ NÃO contém } 000 \text{ nem } 111\}$
- f) $\{w \in \{0,1\}^* \mid \text{os últimos três símbolos de } w \text{ NÃO são } 000\}$
- g) $\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ não contém } ab\}$
- h) $\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ tem tamanho múltiplo de } 3 \text{ não contém } ab\}$

Automato Finito Determinístico

Exercícios

e) $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ NÃO contém } 000 \text{ nem } 111\}$



f) $\{w \in \{0,1\}^* \mid \text{os últimos três símbolos de } w \text{ NÃO são } 000\}$

