TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FACHBEREICH MATHEMATIK

Automorphe Formen

Wintersemester 2018/2019

Vorlesung gehalten von Prof. Nils Scheithauer

Typeset in LaTeX by Jonas Lenz

Fehler können an `jlenz@mathematik.tu-darmstadt.de` gemeldet werden

Version vom 18. Dezember 2018

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Sei G eine Gruppe, die auf einem topologischen Raum X operiert. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ heißt *automorphe Form auf* X, wenn

$$f(gx) = \Psi(g, x) f(x)$$

für alle $g \in G$ und $x \in X$ für eine geeignete Funktion $\Psi\colon G \times X \to \mathbb{C}$ gilt. Häufig werden noch weitere Bedingungen zum Beispiel an das Wachstum gefordert. Einer automorphen Form kann man eine automorphe Darstellung zuordnen und dieser wiederum eine L-Reihe. Es wird vermutet, dass diese automorphen L-Reihen dieselben sind, die man in der arithmetischen algebraischen Geometrie findet (Langlands-Programm). Ein Spezialfall dieser Korrespondenz ist der Modularitätssatz:

Satz 0.1 (Breuil, Conrad, Diamond, Taylor (2001), Wiles (1995) vermutet von Taniyama und Shimura (1958))**.** *Sei E eine rationale elliptische Kurve mit Führer N. Dann gibt es eine Neuform $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ mit*

$$L_f = L_E.$$

In dieser Vorlesung betrachten wir automorphe Formen auf $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_\mathbb{Q})$ für $n = 1$ und wenn es die Zeit erlaubt auch für $n = 2$.

Literatur

Goldfeld, Hundley: Automorphic representations and L-functions for the general linear group, Cambridge University Press.
Skript von Herrn Brunier

1 Absolutbeträge

Definition 1.1. Sei K ein Körper. Ein *Absolutbetrag auf K* ist eine Abbildung $|\cdot| : K \to \mathbb{R}$ mit

i) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $|xy| = |x|\,|y|$,

iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$

für alle $x, y \in K$. Gilt zusätzlich die starke Dreiecksungleichung

$$|x+y| \leq \max(|x|\,, |y|),$$

so heißt $|\cdot|$ *nicht-archimedisch*. Ist $|\cdot|$ ein Betrag auf K, so definiert

$$d(x,y) \coloneqq |x-y|$$

eine Metrik auf K. Zwei Absolutbeträge heißen *äquivalent*, wenn sie die selbe Topologie auf K erzeugen.

Zunächst bemerken wir eine besonders einfache Charakterisierung äquivalenter Absolutbeträge. Danach geben wir Beispiel für stetige Abbildungen an. Die Beweise der nächsten beiden Sätze bleiben dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

Satz 1.2. *Seien $|\cdot|_1\,, |\cdot|_2$ zwei Absolutbeträge auf K. Dann sind äquivalent*

i) $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ erzeugen die selbe Topologie,

ii) es existiert $c > 0$ mit $|x|_1 = |x|_2^c$ für alle $x \in K$.

Satz 1.3. *Sei $|\cdot|$ ein Absolutbetrag auf K. Dann sind die folgenden Abbildungen stetig:*

i) $K \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$,

ii) $K \to K, x \mapsto -x$,

iii) $K \times K \to K, (x, y) \mapsto x + y$,

iv) $K^* \to K^*, x \mapsto x^{-1}$,

v) $K \times K \to K, (x, y) \mapsto xy$.

Satz 1.4. *Sei K ein Körper mit Absolutbetrag $|\cdot|$. Dann gibt es eine Körpererweiterung $\hat{K}/K$ und eine Fortsetzung von $|\cdot|$ auf $\hat{K}$, sodass K dicht in $\hat{K}$ und $\hat{K}$ vollständig bezüglich $|\cdot|$ ist. Ist $\tilde{K}$ ein weiterer Erweiterungskörper von K mit obigen Eigenschaften, so existiert genau ein Körperisomorphismus $\tilde{K} \to \hat{K}$, der auf K die Identität ist und die Absolutbeträge ineinander überführt.*

Beweis. Sei $K' := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folge bezüglich } |\cdot|\}$ die Menge aller Cauchy-Folgen in K. Dann ist K' ein kommutativer Ring mit 1 und man prüft leicht nach, dass $N := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Nullfolge}\}$ ein maximales Ideal ist. Somit ist $\hat{K} = {}^{K'}/{}_{N}$ ein Körper. Die Abbildung

$$\begin{aligned} K &\to \hat{K} \\ x &\mapsto (x) + N \end{aligned}$$

ist ein Körperhomomorphismus und somit injektiv. Der Absolutbetrag auf $\hat{K}$ wird definiert durch

$$|(x_n)| = \lim_{n\to\infty} |x_n|$$

wobei $|x_n|$ aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichung eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Dieser ist wohldefiniert, $\hat{K}$ ist vollständig und K ist dicht in $\hat{K}$. Die Einbettung $K \hookrightarrow \hat{K}$ ist auf einer dichten Teilmenge von $\tilde{K}$ definiert. Da die Einbettung die Absolutbeträge erhält, ist sie stetig und lässt sich somit eindeutig zu einer stetigen Abbildung $\tilde{K} \to \hat{K}$ fortsetzen. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus, der die Absolutbeträge erhält. Die Eindeutigkeit ist aus der Konstruktion klar. $\square$

Bemerkung 1.5. *Im Gegensatz ist der algebraische Abschluss nicht eindeutig bis auf* eindeutigen *Isomorphismus.*

2 Die p-adischen Zahlen

Für $x \in \mathbb{Q}$ definieren wir

$$|x|_\infty := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Dann ist $|\cdot|_\infty$ ein Absolutbetrag.

Sei $p > 0$ eine Primzahl. Wir schreiben $x \in \mathbb{Q}^*$ als $x = p^n \frac{a}{b}$ mit $p \nmid ab$ und definieren

$$|x|_p := p^{-n}.$$

Außerdem setzen wir $|0|_p = 0$. Dann ist der p-adische Betrag $|\cdot|_p$ ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$. Mit d_p bezeichnen wir die Metrik, die durch $|\cdot|_p$ induziert wird. Es gilt die verschärfte Dreiecksungleichung

$$|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p).$$

Ist $|x|_p \neq |y|_p$ so gilt Gleichheit.

Beispiel 2.1. i) Die Folge $1, p, p^2, \ldots$ konvergiert p-adisch gegen 0, da $d_p(0, p^n) = p^{-n} \to 0$.

ii) Die Folge $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \ldots$ ist keine Cauchy-Folge bezüglich $|\cdot|_p$.

Tatsächlich kann man die Absolutbeträge auf $\mathbb{Q}$ leicht charakterisieren.

Theorem 2.2 (Ostrowski)**.** *Ein Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ ist äquivalent zu $|\cdot|_\infty$ oder zu einem $|\cdot|_p$ für eine Primzahl p.*

Die folgende Formel wird an einigen Stellen nützlich sein.

Satz 2.3 (Produktformel)**.** *Sei $x \in \mathbb{Q}^*$. Dann gilt*

$$|x|_\infty \prod_p |x|_p = 1.$$

Bemerkung 2.4. *Die Primzahlen* $2, 3, \ldots$ *werden als* endliche *Primzahlen bezeichnet und* ∞ *als* unendliche *Primzahl. Wir bezeichnen endliche Primzahlen meist mit* p *und beliebige Primzahlen mit* ν*.*

Definition 2.5. Wir fixieren eine endliche Primzahl p und definieren

$$\begin{aligned} K(x,r) &:= \{y \in \mathbb{Q} \mid d_p(x,y) < r\}, \\ \overline{K}(x,r) &:= \{y \in \mathbb{Q} \mid d_p(x,y) \leq r\}, \end{aligned}$$

als *offener* beziehungsweise *abgeschlossener Ball* bezüglich $|\cdot|_p$ um x mit Radius r.

Im Unterschied zu den bekannten Bällen aus Analysis I besitzen die Bälle bezüglich der p-adischen Beträge einige überraschende Eigenschaften. Beispielsweise ist einem beliebigen Ball jeder innere Punkt ein Mittelpunkt.

Satz 2.6. *Sei* $x \in \mathbb{Q}$ *und* $r \in \mathbb{R}, r > 0$*.*

(i) Für $x' \in K(x,r)$ *gilt*

$$K(x',r) = K(x,r).$$

(ii) Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ *gilt*

$$\begin{aligned} K(x,r) &= \overline{K}(x, r-\varepsilon), \\ \overline{K}(x,r) &= K(x, r+\varepsilon). \end{aligned}$$

(iii) Für $r \in \mathbb{R} \setminus \{p^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *gilt*

$$K(x,r) = \overline{K}(x,r).$$

(iv) Sei $r = p^n$ *für ein* $n \in \mathbb{Z}$*. Dann gilt*

$$K(x,p^n) = \overline{K}(x,p^{n-1}).$$

Außerdem gibt es $x_1, \ldots, x_{p-1} \in \overline{K}(x,p^n)$ *mit*

$$\overline{K}(x,p^n) = \overline{K}(x,p^{n-1}) \cup \overline{K}(x_1,p^{n-1}) \cup \cdots \cup \overline{K}(x_{p-1},p^{n-1})$$

wobei die Vereinigungen disjunkt sind.

Beweis. (i) Sei $x' \in K(x,r)$ beliebig. Dann gilt für jedes $y \in K(x,r)$, dass

$$\begin{aligned}|x'-y|_p &= |(x'-x)+(x-y)|_p \\ &\leq \max(|x'-x|_p, |x-y|_p) < r.\end{aligned}$$

Also folgt $y \in K(x',r)$ und somit $K(x,r) \subseteq K(x',r)$. Die umgekehrte Inklusion folgt analog.

(ii) and (iii) Die Distanzfunktion $d_p(x,y) = |x-y|_p$ nimmt höchstens abzählbar viele Werte an, nämlich p^n für ein $n \in \mathbb{Z}$ oder 0. Also gilt für $r > 0$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, dass

$$\begin{aligned}|x-y|_p < r &\Leftrightarrow |x-y|_p \leq r - \varepsilon, \\ |x-y|_p \leq r &\Leftrightarrow |x-y|_p < r + \varepsilon.\end{aligned}$$

Falls r nicht von der Form p^n für ein $n \in \mathbb{Z}$ ist, dann gilt

$$|x-y|_p < r \Leftrightarrow |x-y|_p \leq r.$$

Dies beweist (ii) und (iii).

(iv) Nach Definition der Norm gilt

$$|x-y|_p < p^n \Leftrightarrow |x-y|_p \leq p^{n-1}.$$

Die restliche Aussage verbleibt als Übung. □

Satz 2.7. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ eine p-adische Cauchyfolge, die nicht p-adisch gegen 0 konvergiert. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n|_p$ konstant für alle $n > N$ ist.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich $|\cdot|_p$ also folgt, dass $(|x_n|_p)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist. Daher ist $(|x_n|_p)$ konvergent in $\mathbb{R}$. Da es keine Nullfolge ist, muss sie stationär werden. □

Definition 2.8. Wir definieren $\mathbb{Q}_p$ als die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_p$. Die obigen Eigenschaft von $|\cdot|_p$ setzen sich auf $\mathbb{Q}_p$ fort.

Beispiel 2.9. Sei $x \in \mathbb{Q}_p^*$. Dann gilt $|x|_p = p^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.

Als nächstes beweisen wir den Satz von Bolzano-Weierstraß für p-adische Zahlen.

Theorem 2.10. *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{Q}_\nu$ hat einen Häufungspunkt.*

Beweis. Für $\nu = \infty$ ist dies die Aussage des Satzes von Bolzano-Weierstraß. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}_p$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{Q}_p$. Nach Definition ist jedes x_n eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_p$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir $x'_n \in \mathbb{Q}$ sodass

$$|x_n - x'_n| < p^{-n}$$

gilt, dies geht aufgrund der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}_p$. Die Folge $(x'_n) \subseteq \mathbb{Q}$ ist beschränkt in $|\cdot|_p$. Wir werden zeigen, dass (x'_n) eine Teilfolge besitzt, die Cauchy ist. Diese Teilfolge definiert eine Zahl $x' \in \mathbb{Q}_p$. Die zugehörige Teilfolge von (x_n) wird ebenfalls gegen x konvergieren. Wir konstruieren die Cauchy Teilfolge von (x'_n) folgendermaßen. Da (x'_n) beschränkt ist, existieren $y \in \mathbb{Q}$ und $m \in \mathbb{Z}$ mit $(x'_n) \subseteq \overline{K}(y, p^m)$. Dieser zerfällt in endlich viele (p Stück) disjunkte abgeschlossene Bälle mit Radius p^{m-1}. Mindestens einer dieser Bälle muss unendlich viele Folgenglieder (x'_n) enthalten. Beginnend mit x_1 entfernen wir alle Elemente der Folge, die nicht in diesem Ball liegen. Dieser Ball zerfällt erneut und so weiter. Dadurch erhalten wir eine Teilfolge (x''_n) von (x'_n) mit der Eigenschaft, dass alle x''_i für alle $i \geq N$ in einem abgeschlossen Ball mit Radius p^{m-N} liegen. Damit folgt

$$\left|x''_i - x''_j\right|_p \leq p^{m-N}$$

für alle $i, j \geq N$. Somit wir haben unsere gewünschte Cauchyfolge konstruiert. □

Korollar 2.11. *Eine Menge ist genau dann in $\mathbb{Q}_p$ kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Definition 2.12. Wir definieren die *p-adischen ganzen Zahlen* durch

$$\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}.$$

Dies ist ein Unterring von $\mathbb{Q}_p$.

Satz 2.13. *Die p-adischen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ sind beschränkt, abgeschlossen und offen. Insbesondere ist $\mathbb{Z}_p$ kompakt.*

Satz 2.14. *Sei $x \in \mathbb{Z}_p$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann existiert ein eindeutiges $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq \alpha < p^n$ und*

$$|x - \alpha|_p \leq p^{-n}.$$

Beweis. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{Q}_p$ ist, existiert $t \in \mathbb{Q}$ mit $|t - x|_p \leq p^{-n}$. Dann gilt

$$|t|_p = |(t - x) + x|_p \leq \max(|t - x|_p, |x|_p) \leq 1,$$

das heißt $t \in \mathbb{Z}_p$ und $t = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}, (a, b) = 1$ und $(p, b) = 1$. Wähle $b' \in \mathbb{Z}$ mit $bb' = 1 \mod p^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |t - ab'|_p &= \left|\frac{a}{b} - ab'\right|_p \\ &= \left|\frac{a}{b}(1 - bb')\right|_p \\ &= \left|\frac{a}{b}\right|_p |1 - bb'|_p . \end{aligned}$$

Für $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha = ab' \mod p^n$ und $0 \leq \alpha < p^n$ gilt

$$|t - \alpha|_p \leq p^{-n},$$

sowie

$$\begin{aligned} |x - \alpha|_p &= |(x - t) + (t - \alpha)|_p \\ &\leq \max(|x - t|_p , |t - \alpha|_p) \leq p^{-n}. \end{aligned}$$

Sei β ein anderes solches Element. Dann gilt $|\alpha - \beta| \leq p^{-n}$, was $p^n \mid (\alpha - \beta)$ und somit $\alpha = \beta$ impliziert. $\square$

Korollar 2.15. *Es gilt $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_p$, insbesondere für jedes $x \in \mathbb{Z}_p$ existiert eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ mit $0 \leq \alpha_n < p^n$, $\alpha_n = \alpha_{n-1} \mod p^{n-1}$ und $|x - \alpha_n| \leq p^{-n}$. Darüber hinaus ist diese Folge eindeutig.*

Sei umgekehrt $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ eine Folge mit $0 \leq \alpha_n < p^n$ sowie $\alpha_n = \alpha_{n-1} \mod p^{n-1}$. Dann ist $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert gegen ein $x \in \mathbb{Z}_p$.

Definition 2.16. Eine Folge von Restklassen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wobei $\alpha_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ist, die $\alpha_n = \alpha_{n-1} \mod p^{n-1}$ erfüllt, heißt *kompatibles System*. Die Menge aller kompatiblen System heißt *projektiver Limes* des Systems. Der projektive Limes $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ist ein Ring bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation.

Theorem 2.17. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p &\to \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\ x &\mapsto (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

ist ein Ringisomorphismus. Weiterhin ist die Abbildung

$$\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

$$x \mapsto \alpha_n$$

ist surjektiv und ihr Kern ist durch $p^n\mathbb{Z}_p$ gegeben. Also folgt

$$\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

aufgrund des Homomorphiesatzes.

Lemma 2.18. *Sei $x \in \mathbb{Q}_p$ mit $|x|_p = p^n$ für ein $n > 0$. Dann gilt $|p^n x|_p = 1$, sodass $p^n x \in \mathbb{Z}_p$ folgt. Dies impliziert*

$$\mathbb{Q}_p = \bigcup_{n=1}^{\infty} p^{-n}\mathbb{Z}_p$$

sodass $\mathbb{Q}_p$ der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}_p$ ist.

Für $x \in \mathbb{Q}_p^*$ gilt $|x^{-1}|_p = \frac{1}{|x|_p}$ und somit auch

$$\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Z}_p \mid |x|_p = 1\}.$$

Proposition 2.19. *Jedes $x \in \mathbb{Z}_p$ hat eine Darstellung der Form*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i$$

mit $b_i \in \{0, \ldots, p-1\}$. Weiterhin ist diese Darstellung eindeutig.

Beweis. Für $x \in \mathbb{Z}_p$ gibt es eine eindeutige Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ mit $0 \leq \alpha_n < p^n$, $\alpha_n = \alpha_{n-1} \mod p^{n-1}$ und $|x - \alpha_n| \leq p^{-n}$. Insbesondere lassen sich die α_n schreiben durch

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i$$

wobei $b_i \in \{0, \ldots, p-1\}$ gilt. □

Proposition 2.20. *Sei $x \in \mathbb{Q}_p$ mit $|x|_p = p^n$. Dann hat x eine eindeutige Darstellung der Form*

$$x = b_{-n}p^{-n} + b_{-n+1}p^{-n+1} + \ldots,$$

wobei $b_i \in \{0, \ldots, p-1\}$ und $b_{-n} \neq 0$.

Bemerkung 2.21. *Die Elemente in* $\mathbb{Z}_p^*$ *sind von der Form*

$$x = b_0 + b_1 p + \dots$$

mit $b_0 \neq 0$.

Definition 2.22. Ein Hausdorffraum heißt *lokal kompakt*, falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat.

Beispiel 2.23. (i) Ein kompakter Hausdorffraum ist lokal kompakt.

(ii) $(\mathbb{R} = \mathbb{Q}_\infty, |\cdot|_\infty)$ ist lokal kompakt.

Proposition 2.24. $\mathbb{Q}_p$ *ist lokal kompakt.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{Q}_p$ und wähle $r > 0$. Dann ist $\overline{K}(x, r)$ eine kompakte Umgebung von x. □

Proposition 2.25. $\mathbb{Q}_p^* = \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ *ist lokal kompakt.*

Wir haben bereits gesehen, dass $\mathbb{Z}_p$ offen, abgeschlossen und kompakt ist.

Proposition 2.26. $\mathbb{Z}_p^*$ *ist offen, abgeschlossen und kompakt.*

Beweis. Dies folgt aus der Stetigkeit von $|\cdot| : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}$. □

Proposition 2.27. $(\mathbb{Q}_p, +)$, $(\mathbb{Z}_p, +)$, $(Q_p^*, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ *sind lokal kompakte topologische Gruppen*

3 Integration

Definition 3.1. Sei X ein Hausdorffraum. Die *Borel σ-Algebra* $\sigma(X)$ von X ist die kleinste σ-Algebra, die die offenen Mengen von X enthält. Ein *Radonmaß* auf X ist ein Maß $\mu\colon \sigma(X) \to [0, \infty]$ sodass

i) μ ist lokal endlich, das heißt für jedes $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U von x die endliches Maß hat.

ii) μ ist *regulär von innen*, das heißt

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A \text{ kompakt }\}$$

gilt für alle $A \in \sigma(X)$.

Beispiel 3.2. Das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$ ist ein Radonmaß.

Theorem 3.3 (Riesz)**.** *Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum und*

$$I\colon C_c(X) \to \mathbb{C}$$

eine positive lineare Form*, das heißt $I(f) \geq 0$ für alle $0 \leq f \in \mathbb{C}_c(X)$. Dann existiert ein eindeutiges Radonmaß $\mu\colon \sigma(X) \to [0, \infty]$ mit $I(f) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. Außerdem gilt für kompakte Mengen K*

$$\mu(K) = \inf\{I(f) \mid f \in \mathbb{C}_c(X), f \geq \chi_K\}$$

sowie

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A \textit{ kompakt }\}$$

für alle $A \in \sigma(X)$.

Beweis. Elstrodt, Kapitel 8 von Maß- und Integrationstheorie. □

Theorem 3.4 (Haar)**.** *Sei G eine lokal kompakte Hausdorffgruppe. Dann gibt es ein linksinvariantes Radonmaß μ auf G. Dieses ist eindeutig bis auf positive Konstanten und heißt* Haarmaß *auf G.*

Beispiel 3.5.

i) Auf einer diskreten Gruppe ist das Zählmaß ein Haarmaß.

ii) Auf $(\mathbb{R}^n, +)$ ist das Lebesguemaß ein Haarmaß.

iii) Auf $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ist $\frac{\mathrm{d}x}{|x|}$, wobei $\mathrm{d}x$ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ ist, ein Haarmaß.

iv) Ein Haarmaß auf $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ ist durch

$$\frac{\mathrm{d}x_{11}\mathrm{d}x_{12}\mathrm{d}x_{21}\mathrm{d}x_{22}}{|\det(M)|^2}$$

gegeben. (M wie man es erwartet).

Theorem 3.6. *Sei G eine lokal kompakte Hausdorffgruppe und $K \subseteq G$ kompakt. Dann gibt es ein eindeutiges Haarmaß μ auf G, das $\mu(K) = 1$ erfüllt.*

Definition 3.7. Sei G eine lokal kompakte Hausdorffgruppe und μ ein Haarmaß auf G. Dann definiert für $x \in G$

$$\mu_x(A) = \mu(Ax)$$

ein links invariantes Maß auf G.

Definition 3.8. Die Eindeutigkeit impliziert $\mu_x = \delta(x)\mu$ für ein $\delta(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Insbesondere ist $\delta(x)$ unabhängig von der Wahl von μ. Die Funktion

$$\begin{aligned} \delta \colon G &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \delta(x) \end{aligned}$$

heißt *modulare Funktion* von G.

Proposition 3.9. *Die Abbildung δ ist ein Morphismus topologischer Gruppen.*

Beweis. Für $x, y \in G$ gilt

$$\begin{aligned} \delta(xy)\mu(A) &= \mu_{xy}(A) = \mu(Axy) \\ &= \mu_y(Ax) = \delta(y)\delta(x)\mu(A). \end{aligned}$$

Der Rest verbleibt als Übungsaufgabe. □

Beispiel 3.10. Man kann zeigen, dass jeder stetiger Gruppenhomomorphismus $h\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ konstant sein muss. Daraus folgt, dass jedes Haarmaß auf $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ auch rechts invariant ist.

Wir betrachten nun die lokal kompakten Hausdorffgruppen $\mathbb{Q}_p$ sowie $\mathbb{Q}_p^*$. Wir normieren das Haarmaß μ auf $\mathbb{Q}_p$ durch die Forderung $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$.

Proposition 3.11. *Für eine messbare Menge $A \subseteq \mathbb{Q}_p$ und $x \in \mathbb{Q}_p^*$ gilt*

$$\mu(xA) = |x|_p \, \mu(A).$$

Beweis. Für $x \in \mathbb{Q}_p^*$ definiert

$$\mu_x(A) = \mu(xA)$$

ein Radonmaß auf $\mathbb{Q}_p$. Dies ist links invariant, da

$$\mu_x(y + A) = \mu((y + A)x) = \mu(yx + Ax) = \mu_x(A)$$

gilt. Also folgt aus der Eindeutigkeit, dass $\mu_x(A) = c(x)\mu(A)$ mit $c(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ unabhängig von A gilt. Sei zunächst $|x|_p = p^{-n}$ für ein $n > 0$. Dann gilt $x\mathbb{Z}_p = p^n\mathbb{Z}_p$ sowie

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{j=0}^{p^n-1} (j + p^n\mathbb{Z}_p)$$

als disjunkte Vereinigung. Aus σ-Additivität folgt daher

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{Z}_p) &= \sum_{j=0}^{p^n-1} \mu(j + p^n\mathbb{Z}_p) \\ &= p^n\mu(p^n\mathbb{Z}_p),\end{aligned}$$

was $|x|_p \, \mu(\mathbb{Z}_p) = \mu(x\mathbb{Z}_p$ impliziert. Also ist in diesem Fall $c(x) = |x|_p$. Als nächstes betrachten wir den Fall $|x|_p = p^n$ mit $n > 0$. Dann gilt $\mu(A) = \mu(x^{-1}xA) = |x^{-1}|_p \, \mu(xA)$, also folgt $\mu(xA) = |x|_p \, \mu(A)$. □

Korollar 3.12. *Sei f integrierbar. Dann gilt für $a \in \mathbb{Q}_p^*$*

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(a^{-1}x) \; \mathrm{d}\mu(x) = |a|_p \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) \; \mathrm{d}\mu(x).$$

Beweis. Wir wollen die letzte Proposition verwenden Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Q}_p} f(a^{-1}x)\ \mathrm{d}\mu(x) &= \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\ \mathrm{d}\mu_a(x)\\ &= |a|_p \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\ \mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

Wir werden das normierte Haarmaß auf $\mathbb{Q}_p$ mit $\mathrm{d}x$ notieren. □

Beispiel 3.13. Wir können jetzt das Volumen von $\mathbb{Z}_p^* = \bigcup_{j=1}^{p-1}(j + p\mathbb{Z}_p)$ berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}\mu_{\mathrm{d}x}(\mathbb{Z}_p^*) &= \sum_{j=1}^{p-1} \mu_{\mathrm{d}x}(j + p\mathbb{Z}_p)\\ &= (p-1)\mu_{\mathrm{d}x}(p\mathbb{Z}_p)\\ &= \frac{p-1}{p}\mu_{\mathrm{d}x}(\mathbb{Z}_p)\\ &= \frac{p-1}{p}.\end{aligned}$$

Wir konstruieren nun ein Haarmaß auf $\mathbb{Q}_p^*$. Für $A \subseteq \mathbb{Q}_p^* \subseteq \mathbb{Q}_p$ definieren wir

$$\mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}}(A) := \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_A(x) \frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}.$$

Da dies in 0 nicht definiert ist, setzen wir den Integranden in diesem Punkt auf 0. Dann gilt für $y \in \mathbb{Q}_p^*$, dass

$$\begin{aligned}\mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}}(yA) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_{yA}(x) \frac{\mathrm{d}x}{|x|_p}\\ &= \left|y^{-1}\right|_p \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_A(y^{-1}x) \frac{\mathrm{d}x}{|y^{-1}x|_p}\\ &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_A(x) \frac{\mathrm{d}x}{|x|_p}\\ &= \mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}}(A).\end{aligned}$$

Also ist $\mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}}$ links invariant. Das Volumen von $\mathbb{Z}_p^*$ bezüglich $\mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}}$ ist

$$\begin{aligned}\mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}}(\mathbb{Z}_p^*) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(\mathbb{Z}_p^*) \frac{\mathrm{d}x}{|x|_p}\\ &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(\mathbb{Z}_p^*)\ \mathrm{d}x = \mu_{\mathrm{d}x}(\mathbb{Z}_p^*)\\ &= \frac{p-1}{p}.\end{aligned}$$

Theorem 3.14. $\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}$ *definiert ein Haarmaß auf* $\mathbb{Q}_p^*$. *Das normierte Haarmaß*

$$\mathrm{d}^*x = \frac{p}{p-1}\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}$$

erfüllt $\mu_{\mathrm{d}^*x}(\mathbb{Z}_p^*) = 1$.

Für $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $s \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$a^s = \mathrm{e}^{s\log(a)}.$$

Die Riemannsche ζ-Funktion ist durch

$$\zeta(s) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert. Die Reihe konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > 1$ und besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ mit einer Polstelle vom Grad 1 in $s = 1$. Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-2}}.$$

Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ werden wir

$$\int_{\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}} |x|_p^s \ \mathrm{d}^*x$$

berechnen. Wir können das Integrationsgebiet durch

$$\mathbb{Z}_p \setminus \{0\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} p^k\mathbb{Z}_p^*$$

in disjunkte Mengen zerlegen. Somit gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}} |x|_p^s \ \mathrm{d}^*x &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{p^k\mathbb{Z}_p^*} |x|_p^s \ \mathrm{d}^*x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(p^{-k}\right)^s \int_{p^k\mathbb{Z}_p^*} \mathrm{d}^*x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(p^{-k}\right)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \left(p^{-2}\right)^k \\ = \frac{1}{1-p^{-s}}.\end{aligned}$$

Dies scheint zunächst „zufällig“ zu sein, aber wir werden später sehen, dass es hier einen tieferen Zusammenhang gibt.

4 Adele

Wir wollen alle Vervollständigungen von $\mathbb{Q}$ gleichzeitig betrachten. Dafür betrachten wir den lokal kompakten Ring

$$\mathbb{A}_Q = \{(x_\infty, x_2, x_3, x_5 \ldots,) \mid x_\nu \in \mathbb{Q}_\nu \text{ und } x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ a.e.}\}$$

von Adelen.

Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die Produkttopologie auf $\prod_{i\in I} X_i$ ist die gröbste Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$, bezüglich der alle Projektionen stetig sind. Eine Basis für diese Topologie ist durch $\{\prod_{i\in I} O_i\}$ gegeben, wobei O_i für alle $i \in I$ offen ist und $O_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ gilt.

Mengen dieser Form heißen *offene Rechtecke*.

Wir benötigen folgenden klassischen Satz aus der Topologie.

Theorem 4.1 (Tychonoff)**.** *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Dann ist das Produkt der X_i genau dann kompakt, wenn alle X_i kompakt sind.*

Theorem 4.2. *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Hausdorffräumen. Dann ist $\prod_{i\in I} X_i$ lokal kompakt genau dann wenn alle X_i lokal kompakt und alle bis auf endlich viele sogar kompakt sind.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Da die Projektionen $p_j\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ stetig sind, folgt, dass alle X_i lokal kompakt sind. Sei $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ und $C = (C_i)_{i\in I}$ eine kompakte Umgebung von x. C enthält eine Vereinigung offener Rechtecke. Da alle bis auf endlich viele Komponenten eines offenen Rechtecks der ganze Raum sind, gilt das gleich auch für C, das heißt

$$\pi_i(C) = X_i$$

für alle bis auf endlich viele $i \in I$. „$\Leftarrow$": Da mit $J = \{i \in I \mid x_i \text{ compact }\}$, die Menge $I \setminus J$ endlich ist, folgt mit

$$X = \prod_{i \in J} X_i \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i,$$

dass X als Produkt einer kompakten und einer lokal kompakten Menge lokal kompakt ist. $\square$

Beispiel 4.3. $\prod_{p<\infty} \mathbb{Q}_p$ ist nicht lokal kompakt und deswegen wissen wir nicht, ob es ein Haarmaß gibt.

Definition 4.4. Sei $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie lokal kompakter Hausdorffräume und für jedes $i \in I$ sei $K_i \subseteq X_i$ eine kompakte offene Menge (Diese muss es nicht geben, betrachte dafür zum Beispiel $\mathbb{R}^n$). Dann definieren wir das eingeschränkte Produkt

$$X = \widehat{\prod_{i \in I}}^{K_i} X_i := \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \mid x_i \in K_i \text{ für fast alle } i \in I\}.$$

Falls K_i aus dem Kontext klar ist, lassen wir diese in der Schreibweise weg. Ein eingeschränktes offenes Rechteck ist eine Menge der Form

$$\prod_{i \in I} U_i$$

wobei $U_i \subseteq X_i$ offen ist und $K_i = U_i$ für alle bis auf endlich viele $i \in I$ gilt. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt offen, wenn es eine Vereinigung solcher Mengen ist. Die dazugehörige Topologie heißt die *eingeschränkte Produkttopologie*.

Proposition 4.5. *Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie lokal kompakter Hausdorffräume. Für jedes $i \in I$ sei $K_i \subseteq X_i$ eine kompakte offene Menge. Dann ist*

$$X = \hat{\prod}_{i \in I}^{K_i} X_i$$

ausgestattet mit der eingeschränkten Produkttopologie ein lokal kompakter Hausdorffraum.

Beweis. Sei $x = (x_i)_{i \in I} \in X$. Definiere $J = \{i \in I \mid x_i \in K_i\}$. Dann ist $I \setminus J$ endlich. Für jedes $i \in I \setminus J$ wählen wir eine kompakte Umgebung U_i von x_i. Dann ist

$$\prod_{i \in I \setminus J} U_i \times \prod_{i \in J} K_i$$

eine kompakte Umgebung von x. Die Hausdorffeigenschaft verbleibt als Übung. $\square$

Definition 4.6. Der Ring

$$\mathbb{A}_f := \prod_{p<\infty}^{\widehat{\mathbb{Z}_p}} \mathbb{Q}_p$$

heißt der Ring der *endlichen Adele*. Nach dem letzten Satz ist $\mathbb{A}_f$ ein lokal kompakter Hausdorffraum.

Proposition 4.7. *Der Ring $\mathbb{A}_f$ ist ein topologischer Raum, das heißt, die Ringverknüpfungen sind stetig.*

Proposition 4.8. *Die Menge*

$$\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{A}_f$$

ist kompakt und offen.

Sei $N \in \mathbb{Z}$ sowie $N > 0$. Dann gilt

$$N = \prod_{p<\infty} p^{\nu_p}$$

und $\nu_p = 0$ für alle bis auf endlich viele p. Weiterhin haben wir, dass

$$N\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p<\infty} p^{\nu_p}\mathbb{Z}_p$$

eine kompakte offene Umgebung der $0 \in \mathbb{A}_f$. Eine beliebige offene Umgebung der $0 \in \mathbb{A}_f$ ist eine Vereinigung von Mengen der Form

$$\prod_{i\in I\setminus J} U_i \times \prod_{j\in J} K_j$$

wobei $I \setminus J$ endlich ist und die U_i für $i \in I \setminus J$ offen sind. In $\mathbb{Q}_p$ gilt $K(0, p^m) = p^{-m}\mathbb{Z}_p$ für alle $m \in \mathbb{Z}$.

Proposition 4.9. *Jede offene Umgebung der $0 \in \mathbb{A}_f$ enthält eine Menge der Form $N\hat{Z}$ für ein $N \in \mathbb{Z}$ mit $N > 0$.*

Proposition 4.10. *Die Einbettung $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{A}_f$ hat dichtes Bild.*

Definition 4.11. Der Ring $\mathbb{A} := \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f$ heißt *Ring der Adele*.

Bemerkung 4.12. $\mathbb{A}$ *ist ein lokal kompakter Hausdorffraum.*

Proposition 4.13. $\mathbb{A}$ *ist ein topologischer Ring. Die Abbildung*

$$Q \to \mathbb{A}$$
$$a \mapsto (a, a, \dots)$$

liefert eine Einbettung von $\mathbb{Q}$ *nach* $\mathbb{A}$.

Proposition 4.14. $\mathbb{Q}$ *ist eine diskrete abgeschlossene Untergruppe von* $\mathbb{A}$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\mathbb{A}$ die diskrete Topologie auf $\mathbb{Q}$ erzeugt, das heißt für jedes $a \in \mathbb{Q}$ existiert eine offene Umgebung U mit $\mathbb{Q} \cap U = \{a\}$. Aufgrund der Stetigkeit der Addition können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a = 0$ annehmen. Wähle

$$U := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p.$$

Für $r \in \mathbb{Q} \cap U$ gilt

$$|r|_p \leq 1$$

für alle $p < \infty$. Also folgt $r \in \mathbb{Z}$ und somit $r = 0$.
Es bleibt zu zeigen,dass $\mathbb{Q}$ abgeschlossen in $\mathbb{A}$ ist. Sei dazu $a \in \overline{\mathbb{Q}}$. Wir nehmen $a \notin \mathbb{Q}$ an. Es existiert eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{A}$ mit $U \cap \mathbb{Q} = \{0\}$. Wähle eine offene Umgebung V von $0 \in \mathbb{A}$, die $V + V \subseteq U$ und $-V = V$ erfüllt. Die Stetigkeit der Addition impliziert, dass es eine offene Umgebung W von 0 gibt, die $W + W \subseteq U$ erfüllt. Wenn man $V = W \cap (-W)$ setzt, erhält man die gewünschte Menge. Dann gilt $(a + V) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Sei $x \in (a + V) \cap \mathbb{Q}$. Dann $x \neq a$. Da $\mathbb{A}$ Hausdorff ist, existiert eine offene Umgebung W von a mit $x \notin W$. Dann ist $(a + V) \cap W$ eine offene Umgebung von a. Wähle $y \in (a + V) \cap W \cap \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$x - y \in ((a + V) \cap \mathbb{Q}) - ((a + V) \cap W \cap Q.$$

Dies impliziert $x - y \in (V - V) \cap \mathbb{Q}$ also $x - y \in (U \cap \mathbb{Q}) = \{0\}$. Aber $x = y$ ist ein Widerspruch. □

Wir betrachten die kanonische Projektion

$$\pi \colon \mathbb{A} \to A/\mathbb{Q}$$

und statten $A/\mathbb{Q}$ mit der Quotiententopologie aus, das heißt $U \subseteq A/\mathbb{Q}$ ist genau dann offen wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{A}$ ist. Insbesondere ist π stetig.

Proposition 4.15. *Die kanonische Projektion ist offen.*

Beweis. Sei $U \subseteq \mathbb{A}$ offen. Wir müssen zeigen, dass $\pi^{-1}(\pi(U))$ offen ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(U)) &= \{a \in \mathbb{A} \mid \pi(a) \in \pi(U)\} \\ &= \bigcup_{a \in U} (a + \mathbb{Q}) \\ &= \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} (x + U), \end{aligned}$$

somit ist die Offenheit gezeigt. □

Proposition 4.16. *$A/\mathbb{Q}$ ist ein kompakter Hausdorffraum.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $A/\mathbb{Q}$ Hausdorff ist. Sei dafür $a + \mathbb{Q} \neq b + \mathbb{Q}$. Dann gilt $a - b \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$, welches eine offene Menge ist. Dann existiert eine offene symmetrische Umgebung der 0 mit

$$((a - b) + U + U) \cap \mathbb{Q} = \emptyset.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} ((a + U) - (b + U)) \cap \mathbb{Q} &= \emptyset \\ ((a - b) + U) \cap (Q + U) &= \emptyset \\ (a + U) \cap (b + U + \mathbb{Q}) &= \emptyset \\ (a + U + \mathbb{Q}) \cap (b + U + \mathbb{Q}) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Daher sind $(a + U)$ und $(b + U)$ disjunkt in $A/\mathbb{Q}$ sind. Es bleibt die Kompaktheit zu zeigen. Dafür zeigen wir, dass es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{A}$ mit $\pi(K) = \mathbb{A}$ gibt. Sei $K := [0, 1] \times \hat{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{A}$. Wir zeigen, dass jede Restklasse in $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ einen Repräsentanten in K besitzt. Sei $a = (a_\nu)_{\nu \leq \infty} \in \mathbb{A}$. Für $p < \infty$ schreiben wir

$$a_p = \sum_{n = n_p} a_p(n) p^n$$

Dann gilt $n_p = 0$ für fast alle p. Definiere

$$b := a - \sum_{p < \infty} \sum_{n = n_p}^{-1} a_p(n) p^n,$$

wobei der zweite Summand ein Element von $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}$ ist. Dann gilt $b \in \mathbb{R} \times \mathbb{A}$, da

$$\left| a_p - \sum_{q < \infty} \sum_{n = n_q}^{-1} a_q(n) q^n \right|_p$$

$$= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_p(n) p^n - \sum_{\infty > q \neq p} \sum_{n=n_q} a_q(n) q^n \right|_p$$

$$= \max \left(\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_p(n) p^n \right|_p, \left| \sum_{\infty > q \neq p} \sum_{n=n_q}^{-1} a_q(n) q^n \right|_p \right) \leq 1.$$

In dem wir b um eine geeignete ganze Zahlen verschieben, erhalten wir einen Repräsentanten in K. □

Da $\mathbb{A}$ eine lokal kompakte Hausdorffgruppe ist, können wir das Haarmaß auf A betrachten, sodass $[0,1] \times \hat{\mathbb{Z}}$ Maß 1 hat.

Definition 4.17. Eine *einfache Funktion auf* $\mathbb{A}$ ist eine Funktion der Form

$$f = \prod_{\nu \leq \infty} f_\nu,$$

wobei $f_\nu \in C_c(\mathbb{Q}_\nu)$ und $f_p = \chi_{\mathbb{Z}_p}$ für fast alle $p < \infty$.

Bemerkung 4.18. *Für $x = (x_\nu)_{\nu \leq \infty} \in \mathbb{A}$ gilt*

$$f(x) = \prod_{\nu \leq \infty} f_\nu(x),$$

wobei nur endlich viele Faktoren ungleich 1 sind. Die einfachen Funktionen auf $\mathbb{A}$ sind stetig und haben kompakten Träger (Notation $f \in C_c(\mathbb{A})$).

Proposition 4.19. *Sei $f = \prod_{\nu \leq \infty} f_\nu$ eine einfache Funktion auf $\mathbb{A}$. Dann gilt*

$$\int_A f(x)\ \mathrm{d}x = \prod_{\nu \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_p} f_\nu(x)\ \mathrm{d}x_\nu.$$

Beweis. Betrachte die endliche Menge $I := \{p < \infty \mid f_p \neq \chi_{\mathbb{Z}_p}\} \cup \{\infty\}$. Definiere $\mathbb{A}_I = \prod_{\nu \in I} \mathbb{Q}_\nu$. Dann gilt $\mathbb{A} = \mathbb{A}_I \times \mathbb{A}^I$, wobei

$$\mathbb{A}^I = \hat{\prod_{p \notin I}}^{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

ist. $\mathbb{A}_I$ ist als endliches Produkt lokal kompakter Hausdorffräume wieder ein lokal kompakter Hausdorffraum. Das Haarmaß auf $\mathbb{A}_I$ ist durch das Produkt der Haarmaße auf den Faktoren gegeben und der Satz von Fubini gilt. Wir schreiben

$$f = \prod_{\nu \in I} f_\nu \cdot \prod_{p \notin I} f_p.$$

Mit Fubini gilt somit

$$\begin{aligned}\int_A f(x)\ \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{A}_I} f_I(x)\ \mathrm{d}x \int_{\mathbb{A}^I} f^I(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \prod_{\nu\in I}\int_{\mathbb{Q}_\nu} f_\nu(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \prod_{\nu\leq\infty}\int_{\mathbb{Q}_\nu} f_\nu(x)\ \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

was zu zeigen war. $\square$

Sei $x \in \mathbb{Z}_p$. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{Z}, n > 0$ genau ein $\alpha_n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha_n < p^n$ mit

$$\begin{aligned} &|x-\alpha_n|_p \leq p^{n-} \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_n \in x + K(0, p^{-n}) \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_n \in x + p^n\mathbb{Z}_p.\end{aligned}$$

Theorem 4.20. *Sei nun $x \in \hat{Z}) = \prod_{\nu\leq\infty}\mathbb{Z}_p$. Dann existiert für jedes $N \in \mathbb{Z}$, $N > 0$ existiert ein eindeutiges $\alpha_N \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha < N$ mit*

$$\alpha_N \in x + N\hat{Z}.$$

Beweis. Sei $x = (x_p)_{p\leq\infty}$ mit $x_p = \sum_{n=0}^{\infty} x_p(n)p^n$ sowie $N = \prod_{p\leq\infty} p^{\nu_p}$. Dann gilt $\nu_p = 0$ für fast alle p und $N\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p<\infty} p^{\nu_p}\mathbb{Z}_p$. Der Chinesische Restsatz existiert ein eindeutiges $\alpha_N \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha < N$ mit

$$\alpha_N = \sum_{n=0}^{\nu_p-1} x_p(n)p^n \mod p^{\nu_p}$$

für alle $\nu_p \neq 0$. Für dieses α_N gilt $\alpha_N \in x + N\hat{Z}$. Diese Approximation werden für wachsendes N immer besser. Insbesondere gilt $\alpha_M = \alpha_N \mod N$ für alle Vielfachen M von N. Also definiert x eine Folge ganzer Zahlen $(\alpha_N)_{N>0}$ mit $0 \leq \alpha_N < N$ sowie $\alpha_M = \alpha_N \mod N$ falls $N \mid M$. $\square$

Umgekehrt definiert eine solche Folge ein Element in $\hat{Z}$.

Definition 4.21. Eine Folge von Restklassen $(\alpha_N)_{N>0}$ mit $\alpha_N)\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, die die Kompatibilitätsbedingung $\alpha_M = \alpha_N \mod N$ für $N \mid M$ erfüllt, heißt *kompatibles System.* Der projektive Limes

$$\varprojlim \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{(\alpha_N) \in \prod_{N>0}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \mid (\alpha_N) \text{ ist kompatibel}\}$$

ist auf natürliche Art und Weise ein Ring. Wir können diesen mit der Topologie des projektiven Limes ausstatten.

Theorem 4.22. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \hat{Z} &\mapsto \varprojlim \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ x &\mapsto (\alpha_N \mod N) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus topologischer Ringe.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{Z}} &\to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ x &\mapsto \alpha_N \mod N \end{aligned}$$

ist surjektiv mit Kern $N\hat{Z}$. Also folgt

$$\hat{\mathbb{Z}}/N\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.$$

5 Idele

Definition 5.1. Die Einheitengruppe $\mathbb{A}^*$ von $\mathbb{A}$ heißt Gruppe der *Idele*. Es gilt

$$\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f, \mathbb{A}_f = \hat{\prod}_{p<\infty}^{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$
$$\mathbb{A}^* = \mathbb{R}^* \times \mathbb{A}_f^*, \mathbb{A}_f^* = \{(a_p)_{p<\infty} \mid a_p \in \mathbb{Q}_p^* \forall p, a_p \in \mathbb{Z}_p^* \text{ a.e. } p\} = \hat{\prod}^{\mathbb{Z}_p^*} \mathbb{Q}_p^*.$$

Wir statten $\mathbb{A}_f^*$ mit der eingeschränkten Produkttopologie aus. $\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p$ ist offen und kompakt in $\mathbb{A}_f$, $\hat{\mathbb{Z}}^* = \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p^*$ ist offen und kompakt in $\mathbb{A}_f^*$ bezüglich der eingeschränkten Produkttopologie. $\hat{Z}^*$ ist nicht offen bezüglich der Topologie von $\mathbb{A}_f^*$, die von $\mathbb{A}_f$ induziert wird. Die eingeschränkte Produkttopologie auf $\mathbb{A}_f^*$ ist echt feiner als die Topologie, die von $\mathbb{A}_f$ induziert wird. Wir statten $\mathbb{A}^* = \mathbb{R}^* \times \mathbb{A}_f^*$ mit der Produkttopologie aus.

Theorem 5.2. *Dann sind $(A_f^*, \cdot)$ und $(\mathbb{A}^*, \cdot)$ lokal kompakte Hausdorffgruppen.*

Wir normieren das Haarmaß auf $\mathbb{A}_f^*$ sodass $\hat{\mathbb{Z}}^*$ Maß 1 hat und schreiben $\mathrm{d}^* x_f$ für dieses Maß. Auf $\mathbb{R}^*$ ist $\frac{\mathrm{d}t}{|t|}$ ein Haarmaß. Wir statten $\mathbb{A}^*$ mit dem Produktmaß aus, also mit dem Haarmaß

$$\mathrm{d}^* x = \frac{\mathrm{d}t}{|t|} \cdot \mathrm{d}^* x_f.$$

Definition 5.3. Eine *einfache Funktion auf* $\mathbb{A}^*$ ist eine Funktion der Form

$$f = \prod_{\nu \leq \infty} f_\nu$$

mit $f_\nu \in C_c(\mathbb{Q}_\nu^*)$ für alle $\nu \leq \infty$ und $f_p = \chi_{\mathbb{Z}_p^*}$ für fast alle $p < \infty$. Für eine solche Funktion definieren wir das Integral über

$$\int_{\mathbb{A}^*} f(x) \, \mathrm{d}^* x = \prod_{\nu \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_\nu^*} f_\nu(x) \, \mathrm{d}x.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^* &\to \mathbb{A}^* \\ x &\mapsto (x, x, \dots) \end{aligned}$$

ist eine Einbettung von $\mathbb{Q}^*$ nach $\mathbb{A}^*$.

Proposition 5.4. *$\mathbb{Q}^*$ ist eine diskrete und abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{A}^*$.*

Beweis. Für $a = (a_\nu)_{\nu \leq \infty} \in \mathbb{A}^*$ definieren wir die Norm

$$|a| \coloneqq \prod_{\nu \leq \infty} |a_\nu|_\nu \,,$$

wobei nur endlich viele Faktoren ungleich 1 sind. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^* &\to \mathbb{R}^*_{>0} \\ a &\mapsto |x| \end{aligned}$$

ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Der Kern

$$A' \coloneqq \{a \in \mathbb{A}^* \mid |a| = 1\}$$

ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{A}^*$. Für $x \in \mathbb{Q}^*$ gilt

$$\prod_{\nu \leq \infty} |x|_\nu = 1.$$

Also ist $\mathbb{Q}^*$ eine diskrete abgeschlossene Untergruppe von A'. □

Der Quotient $A'/\mathbb{Q}^*$ ausgestattet mit der Quotiententopologie ist eine lokal kompakte Hausdorffgruppe. Wir definieren

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{Z}}^* &\to \mathbb{A}' \\ (x_p)_{p<\infty} &\mapsto (1, x_2, x_3, \dots). \end{aligned}$$

Proposition 5.5. *Die kanonische Abbildung $f \colon \hat{\mathbb{Z}}^* \to \mathbb{A}'/\mathbb{Q}^*$ ist ein Isomorphismus topologischer Gruppen.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass f injektiv ist. Sei dafür $f((x_p)_{p<\infty}) = f((y_p)_{p<\infty})$. Dann gilt

$$(1, x_2, x_3, \dots) = (r(1, y_2, y_3, \dots)$$

für ein $r \in \mathbb{Q}^*$. Die erste Komponente impliziert aber $r = 1$. Also folgt die Injektivität. Für die Surjektivität betrachten wir $a = (a_\infty, a_2, a_3, \dots) \in \mathbb{A}'$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 &= |a_\infty|_\infty \prod_{p<\infty} |a_p|_p \\ &= a_\infty \frac{|a_\infty|_\infty}{a_\infty} \prod_{p<\infty} |a_p|_p \\ &=: a_\infty \cdot r. \end{aligned}$$

Definiere $b = (r, a_2, a_3, \dots)$. Dann gilt $b \in \hat{\mathbb{Z}}^*$, da

$$\begin{aligned} |ra_p|_p &= \left| \frac{|a_\infty|_\infty}{a_\infty} \prod_{q<\infty} |a_q|_q \, a_p \right|_p \\ &= \left| |a_p|_p \, a_p \right|_p \left| \prod_{p \neq q < \infty} |a_q|_q \right|_p = 1 \end{aligned}$$

sowie $f(b) = ra$. Die Stetigkeit verbleibt als Übungsaufgabe. $\square$

Korollar 5.6. $\mathbb{A}'/\mathbb{Q}^*$ *ist kompakt.*

Der Isomorphismus $\hat{\mathbb{Z}} = \lim_{\Leftarrow}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ impliziert

$$\hat{\mathbb{Z}}^* = \lim_{\Leftarrow} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* = A'/\mathbb{Q}^*.$$

6 Charaktere

An dieser Stelle vergessen wir die Notation ^ aus Kapitel 4.

Definition 6.1. Sei G eine topologische Gruppe. Ein *Quasicharakter* von G ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus $G \to \mathbb{C}^*$. Ein *Charakter* von G ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus $G \to T \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Proposition 6.2. *Sei G eine kompakte Gruppe und $f\colon G \to \mathbb{C}^*$ ein Quasicharakter. Dann ist f ein Charakter.*

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{aligned} G &\to \mathbb{R}^*_{>0} \\ x &\mapsto |f(x)| \end{aligned}$$

ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Daher ist das Bild eine kompakte Untergruppe von $\mathbb{R}^*_{>0}$, nämlich $\{1\}$. □

Definition 6.3. Eine lokal kompakte Hausdorffgruppe heißt *total umzusammenhängend*, falls jede offene Umgebung der 1 eine offene Untergruppe enthält.

Beispiel 6.4. Zum Beispiel sind

i) $(\mathbb{Q}_p, +)$, $(\mathbb{Q}_p^*, \cdot)$

ii) $(\mathbb{Z}_p, +)$, $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$

iii) $(\mathbb{A}_f, +)$, $(\mathbb{A}_f^*, \cdot)$

iv) $(\hat{Z}, +)$, $(\hat{Z}^*, \cdot)$

solche Gruppen.

Proposition 6.5. *Sei G eine total unzusammenhängende lokal kompakte Hausdorffgruppe und $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ ein Quasicharakter. Dann ist* $\ker(\chi)$ *offen.*

Beweis. Sei $0 < \varepsilon < 1$. Dann ist $V_\varepsilon \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > \varepsilon\}$ eine offene Umgebung von $1 \in \mathbb{C}^*$. Also ist $\chi^{-1}(V_\varepsilon)$ offen in G und enthält somit eine offene Untergruppe $H \subseteq G$. Das Bild $\chi(H)$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{C}^*$ in V_ε. Für $z \in \mathbb{C}$ ungleich 1 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ sodass die Potenz z^n außerhalb von V_ε liegt. Also folgt $\chi(H) = 1$. Sei nun $x \in \ker(\chi)$. Dann ist xH eine offene Umgebung von x in $\ker(\chi)$. □

Definition 6.6. Sei G eine topologische Gruppe. Dann ist die Menge der Charaktere auf G eine Gruppe bezüglich punktweiser Multiplikation. Dieser Gruppe heißt die *duale Gruppe von G*, wir bezeichnen sie mit $\hat{G}$. Wir statten $\hat{G}$ mit kompakt-offenen Topologie aus. Eine Subbasis dieser Topologie bilden die Mengen der Form

$$S(K,U) \coloneqq \{\chi \in C(G,T) \mid \chi(K) \subseteq U\}$$

wobei $K \subseteq G$ kompakt und $U \subseteq T$ offen ist. Endliche Schnitte dieser Mengen bilden eine Basis der Topologie von $\hat{G}$.

Proposition 6.7. *Die duale Gruppe $\hat{G}$ ist eine abelsche Hausdorffgruppe.*

Beweis. Sei $f \in \hat{G}, \varepsilon \neq f$. Dann existiert ein $x \in G$ mit

$$f(x) \neq 1\varepsilon(x).$$

Da T Hausdorff ist, können wir offene Mengen $U, W \subseteq T$ mit $f(x) \in U, 1 \in W$ sowie $U \cap W = \emptyset$ wählen. Definiere $K = \{x\}$. Dann gilt $f \in S(K,U)$, $\varepsilon \in S(K,W)$ sowie $S(K,U) \cap S(K,W) = \emptyset$. □

Proposition 6.8. *Sei G eine topologische Gruppe.*

i) Falls G endlich ist, so ist $\hat{G}$ ebenfalls endlich,

ii) Falls G diskret ist, so ist $\hat{G}$ kompakt.

Proposition 6.9. *Sei G eine Hausdorffgruppe.*

i) Falls G lokal kompakt ist, so ist $\hat{G}$ ebenfalls lokal kompakt.

ii) Falls G kompakt ist, so ist $\hat{G}$ diskret.

Beispiel 6.10. Wir betrachten einige Beispiele von Charakteren.

i) Die Abbildung

$$\mathrm{e}_\infty \colon \mathbb{R} \to T$$

$$x \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x} =: \mathrm{e}(x)$$

ist ein Charakter von $\mathbb{R}$.

Nun werden wir die Charaktere einiger Gruppen bestimmen, die in der Vorlesung eine Rolle spielen, z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{A}$.

Proposition 6.11. *Es gilt $\chi(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a x}$. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}} \\ &a \mapsto (x \mapsto \mathrm{e}_\infty(ax)) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus topologischer Gruppen.

Beweis. Wir zeigen, dass jeder Charakter von $\mathbb{R}$ von der angegebenen Form ist. Sei $\gamma\colon \mathbb{R} \to T$ ein Charakter. Dann gilt $\gamma(0) = 1$ und wegen der Stetigkeit von γ existiert $a > 0$ mit

$$\int_0^a \gamma(t)\ \mathrm{d}t = c \neq 0.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_x^{x+a} \gamma(t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^a \gamma(x+t)\ \mathrm{d}t \\ &= \gamma(x) \int_0^a \gamma(t)\ \mathrm{d}t = \gamma(x)c \end{aligned}$$

und somit folgt $\gamma(x) = \frac{1}{c} \int_x^{x+a} \gamma(t)\ \mathrm{d}t$. Dies impliziert aber, dass γ differenzierbar ist mit

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \frac{1}{c}\left(\gamma(x+a) - \gamma(x)\right) \\ &= \frac{1}{c}(\gamma(a) - 1)\gamma(x). \end{aligned}$$

Aus der Differentialgleichung folgt, dass γ von der gewünschten Gestalt ist. □

Proposition 6.12. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z} \to \widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \\ &n \mapsto (x \to \mathrm{e}(nx)) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Proposition 6.13. *Die dualen Gruppen der zyklischen Gruppen sind*

$$\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$
$$\hat{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq T.$$

Sei nun $p < \infty$. Wie wir wissen, ist ein Element $a \in \mathbb{Q}_p$ von der Form

$$a = \sum_{n=n_p}^{\infty} a_p(n) p^n$$

mit $a_p(n) \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a_p(n) < p$. Der *Hauptteil* von a ist definiert als

$$a^- = \sum_{n=n_p}^{-1} a_p(n) p^n.$$

In der folgenden Definition ist eine gute Konvention $-a^-$ zu wählen, dies wird später klar werden. Wir definieren also

$$e_p(a) \coloneqq \mathrm{e}(-a^-) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(-a^-)}.$$

Dann ist

$$e_p \colon \mathbb{Q}_p \to T$$

ein Charakter. Die Stetigkeit folgt, daraus, dass e_p auf $\mathbb{Z}_p$ konstant 1, also lokal konstant ist.

Proposition 6.14. *Die Abbildung*

$$\mathbb{Q}_p \to \hat{\mathbb{Q}}_p$$
$$a \mapsto (x \mapsto e_p(ax))$$

ist ein Isomorphismus topologischer Gruppen.

Beweis. Wie so oft, ist die Surjektivität der schwierigste Teil. Es ist klar, dass diese Abbildung ein Homomorphismus ist. Für die Injektivität betrachten wir $a \in \mathbb{Q}_p$ mit $e_p(ax) = 1$ für alle $x \in \mathbb{Q}_p$. Dann gilt $ax \in \mathbb{Z}_p$ für alle $x \in \mathbb{Q}_p$. Dies impliziert aber $a = 0$. Für die Surjektivität sei $\chi \colon \mathbb{Q}_p \to T$ ein Charakter.

i) Wir nehmen zunächst $\mathbb{Z}_p \subseteq \ker(\chi)$ an. Für $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ gilt dann $p^m \frac{1}{p^m} = 1$ und somit $\chi(\frac{1}{p^m})^{p^m} = 1$. Also muss $\chi(\frac{1}{p^m})$ eine Einheitswurzel sein, im Besonderen gilt

$$\chi(\frac{1}{p^m}) = \mathrm{e}(\frac{a_m}{p^m})$$

für ein eindeutiges $a_m \in \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$. Wir erhalten so eine Folge $(a_m)_{m>0} \in \prod_{m>0}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ und behaupten, dass diese kompatibel ist. Dies gilt, da

$$\begin{aligned} \mathrm{e}(\frac{a_m}{p^m}) &= \chi(\frac{1}{p^m}) = \chi(\frac{p}{p^{m+1}}) \\ &= \chi(\frac{1}{p^{m+1}})^p = \mathrm{e}(\frac{a_{m+1}}{p^{m+1}})^p = \mathrm{e}(\frac{a_{m+1}}{p^m})^p, \end{aligned}$$

sodass $\frac{a_{m+1}}{p^m} = \frac{a_m}{p^m} \mod 1$. Also definiert $(a_m)_{m>0}$ eine p-adische Zahl $a \in \mathbb{Z}_p$. Es gilt $\chi(x) = e_p(-ax)$ für alle $x \in \mathbb{Q}_p$. Dies ist wahr für $x \in \mathbb{Z}_p$. Als nächstes beweisen wir dies für $x = \frac{1}{p^m}$ mit $\mathbb{Z} \ni m > 0$. Dazu schreiben wir $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_p(n)p^n$ modulo p^m gilt

$$\begin{aligned} a &= \sum_{n=0}^{m-1} a_p(n)p^n \mod p^m \\ &= a_m \mod p^m. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{a_m}{p^m} = \frac{1}{p^m}\sum_{n=0}^{m-1} a_p(n)p^n \mod 1$$

und

$$\begin{aligned} e_p(-\frac{a}{p^m}) &= \mathrm{e}((\frac{a}{p^m})^-) \\ &= \mathrm{e}(\frac{1}{p^m}\sum_{n=0}^{\infty} a_p(n)p^n) \\ &= \mathrm{e}(\frac{a^m}{p^m}) = \chi(\frac{1}{p^m}). \end{aligned}$$

Da $\mathbb{Q}_p$ als Gruppe von $\mathbb{Z}_p$ und den Elementen der Form $\frac{1}{p^m}$ mit $\mathbb{Z} \ni m > 0$ erzeugt wird, folgt die Gleichheit der Charaktere.

ii) Wir reduzieren den allgemeinen Fall auf Fall 1. Da $\mathbb{Q}_p$ total unzusammenhängend ist, enthält der Kern von χ einen Ball $K(0, p^{-m}) = p^m\mathbb{Z}_p$ für $\mathbb{Z} \ni m > 0$. Wir definieren nun einen neuen Charakter, auf denen wir i) anwenden können. Für $\psi(x) \coloneqq \chi(p^m x)$ gilt $\mathbb{Z}_p \subseteq \ker(\psi)$ und somit $\psi(x) = e_p(ax)$ für ein $a \in \mathbb{Z}_p$. Damit folgt $\chi(x) = e_p(\frac{a_p}{p^m}x)$. □

Sei $a = (a_\nu)_{\nu \leq \infty}$. Dann gilt $a_p \in \mathbb{Z}_p$ für fast alle p. Dies impliziert, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{e}\colon \mathbb{A} &\to T \\ a &\mapsto \prod_{\nu \leq \infty} \mathrm{e}_\nu(a_\nu) \end{aligned}$$

wohldefiniert ist. Außerdem ist e ein Charakter.

Proposition 6.15. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} A &\to \hat{A} \\ a &\mapsto (x \mapsto \mathrm{e}(ax)) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus topologischer Gruppen.

Beweis. Es ist klar, dass die Abbildung ein Homomorphismus ist. Um die Surjektivität zu zeigen, betrachten wir einen beliebigen Charakter $\chi\colon \mathbb{A} \to T$. Dies induziert einen Charakter χ_ν auf $\mathbb{Q}_\nu$ via

$$\mathbb{Q}_\nu \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\chi} T.$$

Wir wissen, dass dann ein eindeutiges $a_\nu \in \mathbb{Q}_\nu$ mit $\chi_\nu(x_\nu) = \mathrm{e}_\nu = (a_\nu x_\nu)$ für alle $x_\nu \in \mathbb{Q}_\nu$ existiert. Es gilt $a = (a_\nu)_{\nu \leq \infty} \in \mathbb{A}$, das heißt $a_p \in \mathbb{Z}_p$ für fast alle $p < \infty$. Die natürliche Abbildung $\chi_f\colon \mathbb{A}_f \to T$ ist ein Charakter von $\mathbb{A}_f$. Da $\mathbb{A}_f$ total unzusammenhängend ist, existiert $\mathbb{Z} \ni m > 0$ mit $m\hat{Z} \subseteq \ker(\chi_f) = \prod_{p<\infty} p^{\nu_p}\mathbb{Z}_p$ (hier ist $\hat{\mathbb{Z}}$ *nicht* die duale Gruppe) mit $m = \prod p^{\nu_p}$. Also gilt für alle $p \not| m$, dass $\mathbb{Z}_p \subseteq \ker(\chi_p)$ und somit $a_p \in \mathbb{Z}_p$. Da ein beliebiges Element $x \in \mathbb{A}$ die Summe von endlich vielen Elementen in $\mathbb{Q}_\nu$ und etwas $m\hat{Z}$ ist, erhalten wir, dass $\chi(x) = \mathrm{e}(ax)$ für alle $x \in \mathbb{A}$ gilt. □

Als nächstes bestimmen wir die Charaktere der kompakten Gruppe $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$. Sei $r \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$r = \sum_{n=n_p}^{\infty} r_p(n) n^p$$

mit $n_p = 0$ für fast alle $p < \infty$ und

$$r - \sum_{p<\infty} \sum_{n=n_p}^{-1} r_p(n) \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$$

for all p. Also folgt $r - \sum_{p<\infty} \sum_{n=n_p}^{-1} r_p(n) \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt dass für alle $a \in \mathbb{Q}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &\to T \\ x &\mapsto \mathrm{e}(ax) \end{aligned}$$

trivial auf $\mathbb{Q}$ ist, das heißt ein Charakter von $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$.

Theorem 6.16. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\to \widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \\ a &\mapsto (x \mapsto \mathrm{e}(ax)) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus topologischer Gruppen.

Bemerkung 6.17. *Wenn man dieser Isomorphie dualisiert, bekommt man eine Motiviation für die Einführung der Adele; nämlich um die Charaktere von $\mathbb{Q}$ beschreiben zu können. Dies verwendet den Dualitätssatz von Pontryagin.*

Beweis des Theorems. Wir zeigen lediglich die Surjektivität. Sei $\chi\colon \mathbb{A} \to T$ ein Charakter, der trivial auf $\mathbb{Q}$ ist. Da es ein Charakter auf $\mathbb{A}$ ist, gilt

$$\chi(x) = \mathrm{e}(ax)$$

für ein $a \in \mathbb{A}$. Wir müssen zeigen, dass $a \in \mathbb{Q}$ ist. Dazu schreiben wir $a = (a_\infty, a_f)$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{A}_f$ ist, gilt

$$(a_f + \hat{\mathbb{Z}}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

Also ist a_f von der Form $r + b_f$, wobei $r \in \mathbb{Q}$ und $b_f \in \hat{Z}$ ist. Wir schreiben $a = r + b$ mit $b = (b_\infty, b_f) = (a_\infty - r, b_f)$. Da χ trivial auf $\mathbb{Q}$ ist, gilt

$$1 = \mathrm{e}(ax) = \mathrm{e}(rx)\mathrm{e}(bx)$$

und somit

$$\mathrm{e}(b_\infty x) = \prod_{p<\infty} \mathrm{e}((b_p x)^-)$$

für alle $x \in \mathbb{Q}$. Wählen wir $x = 1$, so erhalten wir $b_\infty \in \mathbb{Z}$. Für $x = \frac{1}{p^m}$ mit $\mathbb{Z} \ni m > 0$ und mit $b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(p)p^n$ erhalten wir

$$\mathrm{e}(b_\infty \frac{1}{p^m}) = \mathrm{e}\left(\frac{1}{p^m}\sum_{n=0}^{m-1} b_n(p)p^n\right),$$

woraus

$$b_\infty = \sum_{n=0}^{m-1} b_n(p)p^n \mod p^m$$

folgt. Dies impliziert, dass $b = b_\infty \mod p^m$ für alle $m > 0$ gilt. Also folgt $b \in \mathbb{Z}$ und somit $a = r + b \in \mathbb{Q}$. Der Rest verbleibt als Übung. □

Definition 6.18. Sei $p < \infty$. Ein quasicharakter $\chi_p\colon \mathbb{Q}_p^* \to \mathbb{C}^*$ heißt *unverzweigt*, falls $\mathbb{Z}_p^* \subseteq \ker(\chi_p)$ gilt.

Proposition 6.19. *Für $s \in \mathbb{C}$ ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \lambda\colon \mathbb{Q}_p^* &\to \mathbb{C}^* \\ a &\mapsto |a|_p^s \end{aligned}$$

ein unverzweigter Quasicharakter. Außerdem ist jeder unverzweigte Quasicharakter von dieser Form für ein eindeutiges $s \in \mathbb{C}/\frac{2\pi \mathrm{i}}{\log|a|_p}\mathbb{Z}$. Die Abbildung λ ist ein genau dann ein Charakter, wenn $s = \mathrm{i}t$ für ein $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweis. Die erste Aussage ist klar. Sei nun $\chi\colon \mathbb{Q}_p^* \to \mathbb{C}^*$ ein unverzweigter Quasicharakter. Wähle $s \in \mathbb{C}$ so, dass $\chi(p) = p^{-s}$. Schreibe nun $a \in \mathbb{Q}_p^*$ als $a = p^m n$ mit $n \in \mathbb{Z}_p^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \chi(a) &= \chi(p^m n) = \chi(p)^m = p^{-sm} \\ &= |a|_p^s \,. \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit folgt aus $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{e}^z = 1\} = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$. Die letzte Aussage ist klar. $\square$

Sei nun $\chi\colon \mathbb{A}^* \to T$ ein Charakter. Dann definieren die Einbettung $\mathbb{Q}_\nu^* \to \mathbb{A}^*$ Charaktere $\chi_\nu\colon \mathbb{Q}_\nu^* \to T$.

Proposition 6.20. *Die Abbildung*

$$x \mapsto (x_\nu)_{\nu \le \infty}$$

ist eine Bijektion zwischen den Charakteren von $\mathbb{A}^*$ und den Systemen von Charakteren $\chi_\nu\colon \mathbb{Q}_\nu^* \to T$ sodass χ_p für fast alle p unverzweigt.

Beweis. Ist nun $(\chi_\nu)_{\nu \le \infty}$ ein solches System, so ist

$$\begin{aligned} \chi\colon A^* &\to T \\ a &\mapsto \prod_{\nu \le \infty} \chi_\nu(a_\nu) \end{aligned}$$

ein Charakter.

Sei nun $\chi\colon \mathbb{A}^* \to T$ ein Charakter und $(\chi_\nu)_{\nu \le \infty}$ das zugehörige System lokaler Charaktere. Wir müssen zeigen, dass fast alle dieser χ_p unverzweigt sind. Wegen $\mathbb{A}^* =$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{A}_f^*$ reicht es die Aussage für χ_f zu zeigen. Da $\mathbb{A}_f^*$ total unzusammenhängend ist, enthält der Kern $\ker(\chi_f)$ eine offene Untergruppe. Also enthält es eine offene Menge der Form $\prod_{p\in I} U_p \times \prod_{p\notin I} \mathbb{Z}_p^*$ für eine endliche Menge I und $U_p \subseteq \mathbb{Q}_p^*$ offen. Dann ist χ_p für alle $p \notin I$ unverzweigt. □

Definition 6.21. Ein Charakter $\chi\colon G \to T$ heißt *endlich*, falls $\chi(G)$ endlich ist oder äquivalent, falls χ endliche Ordnung in $\hat{G}$ hat.

Proposition 6.22. *Sei G eine kompakte, total unzusammenhängende Hausdorffgruppe. Dann ist jeder Charakter auf G endlich.*

Beweis. Sei $x \in \hat{G}$ und $H = \ker(\chi)$. Dann ist H offen und

$$G = \bigcup_{a\in G/H} aH$$

ist eine offene Überdeckung von G. Da G kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung und H ist konstant auf jedem $a_i H$. Somit $\chi(G) = \{\chi(a_i), \dots, \chi(a_n)\}$. □

Da die Gruppe $A'/\mathbb{Q}^* \simeq \hat{\mathbb{Z}}^*$ kompakt und total unzusammenhängend ist, ist jeder Charakter dieser Gruppe endlich.

Wir zeigen zunächst folgendes Lemma, um den nächsten Satz leichter beweisen zu können.

Lemma 6.23. *Sei $\chi\colon \mathbb{R}_0^* \to T$ ein endlicher Charakter. Dann ist χ trivial.*

Beweis. Die Exponentialfunktion liefert einen Isomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R}_{>0}^*, \cdot)$. Wir wissen bereits, dass die Charaktere von $(\mathbb{R}, +)$ von der der Form □

Der Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} A^* &\to \mathbb{A}' \times \mathbb{R}_{>0}^* \\ (a_\infty, a_f) &\mapsto \left(\left(\frac{a_\infty}{|a|}, a_f \right), |a| \right) \end{aligned}$$

induziert einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* &\to \mathbb{A}'/\mathbb{Q}^* \times \mathbb{R}_{>0}^* \\ (a_\infty, a_f)\mathbb{Q}^* &\mapsto \left(\left(\frac{a_\infty}{|a|}, a_f \right) \mathbb{Q}^*, |a| \right) \end{aligned}$$

Proposition 6.24. *Es gibt eine Bijektion zwischen*

i) den Charakteren von $\mathbb{A}'/\mathbb{Q}^*$,

ii) den Charakteren von $\mathbb{A}'/\mathbb{Q} \times \mathbb{R}^*_{>0}$, *die trivial auf* $\mathbb{R}^*_{>0}$ *sind,*

iii) den endlichen Charakteren von $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$.

Beweis. Es ist klar, dass die beiden ersten Mengen identisch sind. Der Rest ist klar. □

Definition 6.25. Ein *Dirichlet-Charakter von „Level“* N ist ein Charakter $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to T$.

Ist ψ ein Dirichlet-Charakter von Grad $d \mid N$. Dann induziert ψ einen Dirichlet-Charakter von Grad N durch

Definition 6.26. Ein Dirichlet-Charakter χ heißt *primitiv von Grad* N, falls χ nicht durch einen Dirichlet-Charakter kleineren Grads induziert wird. In diesem Fall heißt N der *Führer* von χ.

Proposition 6.27. *Sei* $\chi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to T$ *ein Dirichlet-Charakter* $\mod N$. *Dann induziert* χ *einen Charakter* ω *von* $\mathbb{A}'/\mathbb{Q}^*$ *durch*

$$\mathbb{A}'/\mathbb{Q}^* \simeq \hat{Z}^* \simeq \varprojlim (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$$

sowie einen endlichen Charakter von $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ *durch*

$$\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* \simeq \mathbb{A}'/\mathbb{Q}^* \times \mathbb{R}^*_{>0} \to \mathbb{A}'/\mathbb{Q}^* \simeq \hat{Z}^* \simeq \varprojlim (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$$

Dieser Charakter erzeugt einen Charakter $\mathbb{A}^* \to T$, *der trivial auf* $\mathbb{Q}^*$ *ist. Das zugehörige System von Charakteren* $\omega_\nu\colon \mathbb{Q}_\nu^* \to T$ *erfüllt*

i) ω_p *ist für fast alle* p *unverzweigt, nämlich für* $p \nmid N$ *und* ω_p *ist durch* $\omega_p(p) = \chi(p)^{-1}$ *eindeutig bestimmt,*

ii) Für $p \mid N$ *sei* $N = p^{m_p} q$ *mit* $(p, q) = 1$. *In diesem Fall ist* ω_p *verzweigt und*

$$K(1, p^{-m_p}) = 1 + p^{m_p}\mathbb{Z}_p \subseteq \ker(\omega_p).$$

Wir zerlegen $\mathbb{Z}_p^*$ *in*

$$\mathbb{Z}_p^* = \bigcup_{j \in (\mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z})^*} j(1 + p^{m_p}\mathbb{Z}_p = \bigcup_{j \in (\mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z})^*} j + p^{m_p}\mathbb{Z}_p$$

(Die natürliche Abbildung $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$ induziert eine surjektive Abbildung $\mathbb{Z}_p^* \to (\mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z})^*$ mit Kern $1 + p^{m_p}\mathbb{Z}_p$) und schreiben $x \in \mathbb{Q}_p^*$ als $x = p^m u$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $u \in \mathbb{Z}_p^*$. Falls $u \in j + p^{m_p}\mathbb{Z}_p$ liegt, gilt

$$\begin{aligned}\omega_p(x) &= \omega_p(p)^m \omega_p(u) \\ &= \omega_p(p)^m \omega_p(j).\end{aligned}$$

Wir können χ durch $\chi = \chi_{p^{m_p}}\chi_q$ faktorisieren. Dann gilt $\omega_p(p) = \chi_q(p)^{-1}$ und $\omega_p(j) = \chi_{p^{m_p}}(j)$.

iii) χ_∞ ist entweder trivial oder der Signums-Charakter.

Beweis. Wir beweisen iii). Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\chi_\infty(x) &= \chi((x, 1, 1, 1, \dots)\mathbb{Q}) \\ &= \chi((\frac{x}{|x|}, (1, 1, 1, \dots))\mathbb{Q}, |x|).\end{aligned}$$

Somit folgt $\chi_\infty(x^2) = 1$ und die Behauptung folgt. □

Wir stellen uns nun die Frage, welche endlichen Charaktere man durch Liften erreichen kann. Sei dazu $\omega\colon \mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* \to T$ ein Charakter endlicher Ordnung. Wir betrachten $\omega\colon \mathbb{A}^* \to T$ als Charakter auf $\mathbb{A}^*$. Dann sind fast alle ω_p unverzweigt. Betrachte ein verzweigtes ω_p. Dann ist $\ker(\omega_p)$ offen und enthält daher einen größten Ball

$$K(1, p^{-m_p}) = 1 + K(0, p^{-m_p}) = 1 + p^{m_p}\mathbb{Z}_p$$

mit $0 < m_p \in \mathbb{Z}$. Definiere $N \coloneqq \prod_{\omega_p \text{ verzweigt}} p^{m_p}$ und $\chi(p) = \omega_p(p)$ für alle $p \not| N$. Wir setzen χ zu einer multiplikativen Funktion auf $\{m \in \mathbb{Z} \mid (m, N) = 1\}$ fort. Dann ist ω auf dem Kern von $\hat{\mathbb{Z}}^* \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ trivial, sodass

$$\chi_(m + N) = \chi(m)$$

gilt. Also definiert χ einen Charakter

$$\chi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to T.$$

Da wir m_p minimal gewählt haben, ist der Charakter χ primitiv. Wenn wir χ zu einem Charakter auf $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ liften, erhalten wir ω.

Somit erhalten wir folgendes Resultat.

Theorem 6.28. *Jeder endliche Charakter*

$$\omega\colon \mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* \to T$$

ist der idelische Lift eines eindeutigen primitiven Dirichlet-Charakters $\chi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to T$.

7 Fourieranalysis

Sei G eine abelsche, lokal kompakte Hausdorffgruppe, dx ein Haarmaß auf G sowie $\hat{G}$ die duale Gruppe.

Definition 7.1. Die *Fouriertransformierte* von $f \in L^1(G)$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} \hat{f}\colon \hat{G} &\to \mathbb{C} \\ \chi &\mapsto \hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Beispiel 7.2. Für $G = (\mathbb{R}, +)$ erhalten wir die bekannte Fouriertransformation aus der Integrationstheorie. Wir wissen bereits, dass $\hat{G} \cong G$ und somit können wir die Fouriertransformation als Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ auffassen. Wir erhalten so die klassische Formel für die Fouriertransformation.

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\mathrm{e}_\infty(yx)}\,\mathrm{d}x.$$

Im Folgenden werden wir Schwartzfunktionen betrachten.

Definition 7.3. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *Schwartzfunktion*, wenn $f \in \mathrm{C}^\infty$ und $Pf^{(n)}$ für alle Polynome P und alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist.

Beispiel 7.4. Die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ ist eine Schwartzfunktion, außerdem alle C^∞ Funktionen, die kompakten Träger haben.

Wir erweitern diese Definition auf $\mathbb{Q}_p$.

Definition 7.5. Sei $p < \infty$. Eine Funktion $f\colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ heißt *Schwartzfunktion*, falls sie lokal konstant ist und kompakten Träger hat. Wir definieren $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ als die Menge aller Schwartzfunktionen auf $\mathbb{Q}_p$. Dies ist ein komplexer Vektorraum.

Beispiel 7.6. Für $a \in \mathbb{Q}_p$ und $m \in \mathbb{Z}$ ist $\chi_{a+p^m\mathbb{Z}_p}$ eine Schwartzfunktion.

Tatsächlich sind alle Schwartzfunktionen quasi von dieser Form.

Proposition 7.7. *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$. Dann ist f eine endliche Linearkombination von Funktionen der Form $\chi_{a+p^m\mathbb{Z}_p}$.*

Beweis. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$. Da f lokal konstant ist, ist $f^{-1}(0)$ offen. Insbesondere ist somit $\mathbb{Q}_p \setminus f^{-1}(0)$ abgeschlossen. Also ist $\mathbb{Q}_p \setminus f^{-1}(0) = \operatorname{supp}(f)$ kompakt. Wir können es durch die offenen Mengen $f^{-1}(z)$ für $z \neq 0$ überdecken. Aufgrund der Komapktheit reichen endlich viele dieser Mengen $f^{-1}(z)$ und f hat endliches Bild. Jede der offene Mengen $f^{-1}(z)$ ist eine Vereinigung offener Bälle. Also ist $\operatorname{supp}(f)$ die Vereinigung von endlich vielen Bällen auf denen f konstant ist. □

Definition 7.8. Für $f \in L^1(\mathbb{Q}_p)$ definieren wir die Fouriertransformation durch

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\mathrm{e}_p(-xy)\, \mathrm{d}x.$$

Ziel ist es die Riemannsche Zeta-Funktion meromorph fortzusetzen. Für die analytische Fortsetzung benötigen wir die Maschinerie, die wir bisher aufgebaut haben.

Wir sammeln nun einige Eigenschaften der Fouriertransformation, die wir für $\mathbb{Q}_\infty$ bereits aus der Integrationstheorie kennen.

Proposition 7.9. *Sei $\nu \leq \infty$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_\nu)$.*

i) Für $a \in \mathbb{Q}_\nu$ und $g(x) = \mathrm{e}_\nu(ax)f(x)$ gilt

$$\hat{g}(x) = \hat{f}(x-a).$$

ii) Für $a \in \mathbb{Q}_\nu$ und $g(x) = f(x+a)$ gilt

$$\hat{g}(x) = \mathrm{e}_\nu(ax)\hat{f}(x).$$

iii) Für $a \in \mathbb{Q}_\nu^*$ und $g(x) = f(ax)$ gilt

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{|a|_\nu}\hat{f}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Beweis. Die Beweise funktionieren analog zum bereits Bekannten, für iii) verwendet man Korollar 3.12. □

Wir zeigen nun die lokale Inversionformel für die Fouriertransformation.

Proposition 7.10. *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_\nu)$. Dann gilt $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_\nu)$ sowie*

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x).$$

Beweis. Für $\nu = \infty$ ist dies aus Integrationstheorie bekannt. Sei nun $p < \infty$. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten. Zunächst zeigen wir, dass $f = \chi_{\mathbb{Z}_p}$ ein Fixpunkt der Fouriertransformation ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\hat{f}(y) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_{\mathbb{Z}_p}(x)\mathrm{e}_p(-xy)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{e}_p(-xy)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p} \psi(x)\ \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

wobei $\psi = \mathrm{e}_p(-xy)\colon \mathbb{Z}_p \to T$ ein Charakter ist. Dieser ist genau dann trivial, wenn $y \in \mathbb{Z}_p$. In diesem Fall gilt $\hat{f}(y) = 1$. Sei nun $y \notin \mathbb{Z}_p$. Dann existiert $t \in \mathbb{Z}_p$ mit $\psi(t) \neq 1$ und

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \psi_(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{Z}_p} \psi(x+t)\ \mathrm{d}x = \psi(t) \int_{\mathbb{Z}_p} \psi(x)\ \mathrm{d}x.$$

Da $\psi(t) \neq 1$, ist dies nur für $\hat{f}(y) = 0$ möglich. Also ist $\chi_{\mathbb{Z}_p}$ ein Fixpunkt der Fouriertransformation.

Als nächstes betrachten die Fouriertransformation von $f = \chi_{p^n\mathbb{Z}_p}$ und zeigen, dass diese $p^{-n}\chi_{p^{-n}\mathbb{Z}_p}$ ist. Es gilt $f(x) = \chi_{p^n\mathbb{Z}_p}(x) = \chi_{\mathbb{Z}_p}(\frac{x}{p^n})$. Mit Proposition 7.9 iii) angewendet mit $a = \frac{1}{p^n}$ folgt

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{p^n}\chi_{\mathbb{Z}_p}(p^n x) = \frac{1}{p^n}\chi_{p^{-n}\mathbb{Z}_p}(x).$$

Nun betrachten $f(x) = \chi_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(x)$ und zeigen, dass

$$\hat{f}(y) = p^{-n}\mathrm{e}_p(-ay)\chi_{p^{-n}\mathbb{Z}_p}(y)$$

gilt. Wir wollen 7.9 i) verwenden und bemerken, dass $f(x) = \chi_{p^n\mathbb{Z}_p}(x-a)$ gilt. Somit folgt die Behauptung. Da $\mathrm{e}_p(-ay)$ lokal konstant ist, folgt $\mathrm{e}_p(-ay)\chi_{p^{-n}\mathbb{Z}_p}(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$. Also bildet die Fouriertransformation $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ ab. Es bleibt lediglich die Inversionsformel zu zeigen. Sei dafür $f(x) = p^{-n}\mathrm{e}_p(-ax)\chi_{p^{-n}\mathbb{Z}_p}(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\hat{f}(y) &= p^{-n}\hat{\chi}_{p^{-n}\mathbb{Z}_p}(y+a) \\ &= p^{-n}p^n\chi_{p^n\mathbb{Z}_p}(y+a) \\ &= \chi_{-a+p^n\mathbb{Z}_p}(y)\end{aligned}$$

$$= \chi_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(-y).$$

Da für $f = \chi_{a+p^n\mathbb{Z}_p}$ die behauptete Formel gilt und jede Schwartzfunktion eine endliche Summe solcher Funktionen ist, folgt die Behauptung. $\square$

Nach der lokalen Fourieranalysis machen wir nun globale Fourieranalysis auf den Adelen. Zunächst betrachten wir die endlichen Adele.

Definition 7.11. Eine Funktion $f\colon \mathbb{A}_f \to \mathbb{C}$ heißt *Schwartzfunktion* falls f lokal konstant ist und kompakten Träger hat. Wir bezeichnen den komplexen Vektorraum aller Schwartzfunktionen auf $\mathbb{A}_f$ mit $\mathcal{S}(\mathbb{A}_f)$.

Beispiel 7.12. Für $a \in \mathbb{A}_f$ und $\mathbb{Z} \ni m > 0$ ist die Funktion $\chi_{a+m\hat{Z}}$ eine Schwartzfunktion.

Proposition 7.13. *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_f)$. Dann ist f eine endliche Linearkombination von Funktionen der Form $\chi_{a+m\hat{Z}}$.*

Definition 7.14. Sei $f \in L^1(\mathbb{A})$. Dann ist die Fouriertransformation von f definiert durch

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{A}} f(x)\overline{\mathrm{e}(xy)}\,\mathrm{d}x.$$

Definition 7.15. Eine Funktion $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ heißt *Schwartzfunktion*, falls f eine endliche Linearkombination von Funktionen der Form $t(x) = g(x_\infty)h(x_f)$ für $x = (x_\infty, x_f)$ ist.

Definition 7.16. Seien $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $h \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_f)$. Eine Funktion der Form

$$\begin{aligned} f\colon A &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \prod_{\nu \le \infty} f_\nu(x_\nu) \end{aligned}$$

mit $f_\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_\nu)$ für alle $\nu \le \infty$ sowie $f_p = \chi_{\mathbb{Z}_p}$ für fast alle p heißt *einfache Schwartzfunktion.*

Lemma 7.17. *Jede Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ ist eine endliche Linearkombination einfacher Schwartzfunktionen.*

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ ist f integrierbar und die lokale Inversionformel impliziert das folgende Theorem.

Theorem 7.18. *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$. Dann gilt $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ und*

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x).$$

Theorem 7.19 (Poissonsche Summenformel)**.** *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$. Dann gilt*

$$\sum_{t \in \mathbb{Q}} f(t) = \sum_{t \in \mathbb{Q}} \hat{f}(t)$$

und insbesondere sind beide Summen absolut konvergent.

Beweis. Es genügt, die Behauptung für $f(x) = f_\infty(x_\infty)\chi_{a+N\hat{Z}}(x_f)$ zu zeigen. Da $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}_f$ dicht ist, existiert $t \in \mathbb{Q}$ mit $t \in a + N\hat{Z}$. Dann gilt auch $t + N\hat{Z} = a + N\hat{Z}$ sowie

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathbb{Q}} f(x) &= \sum_{x \in \mathbb{Q}} f_\infty(x_\infty)\chi_{a+N\hat{Z}}(x_f) \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Q}} f_\infty(x_\infty)\chi_{t+N\hat{Z}}(x_f) \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Q} \cap (t+N\hat{Z})} f_\infty(x_\infty) \\
&= \sum_{y \in \mathbb{Z}} f_\infty(Ny + t).
\end{aligned}$$

Dies impliziert die absolute Konvergenz beider Reihen. Die Gleichheit kann aus der klassischen Poissonsche Summationsformel gefolgert werden. Sie kann ebenfalls folgendermaßen bewiesen werden. Die Funktion

$$\begin{aligned}
F \colon \mathbb{A} &\to \mathbb{C} \\
x &\mapsto \sum_{t \in \mathbb{Q}} f(x + t)
\end{aligned}$$

ist unter $\mathbb{Q}$ invariant und kann daher als Funktion auf $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ aufgefasst werden. Sie hat eine Fourierentwicklung durch die Charaktere der dualen Gruppe $\widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$, d.h.

$$F(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Q}} a_\nu \mathrm{e}(\nu x)$$

mit

$$a_\nu = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} F(x)\mathrm{e}(-\nu x)\, \mathrm{d}x.$$

Es gilt

$$a_\nu = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \sum_{t \in \mathbb{Q}} f(x + t)\mathrm{e}(-\nu x)\, \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{t\in\mathbb{Q}} \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} f(x+t)\mathrm{e}(-\nu x)\ \mathrm{d}x \\
&= \sum_{t\in\mathbb{Q}} \int_{A/\mathbb{Q}} f(x+t)\mathrm{e}(-\nu(x+t))\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{A} f(x)\mathrm{e}(-\nu x)\ \mathrm{d}x \\
&= \hat{f}(\nu).
\end{aligned}
$$

Also folgt

$$\sum_{t\in\mathbb{Q}} f(x+t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Q}} \hat{f}(\nu)\mathrm{e}(\nu x).$$

Für $x = 0$ folgt die Behauptung. $\square$

8 Die Riemannsche ζ-Funktion

Wir werden die analytischen Eigenschaften der Riemannschen ζ-Funktion mit Hilfe adelischer Methoden zeigen. Natürlich geht dies auch mit klassischen Methoden aus der Funktionentheorie, aber unsere Methode wird alles in einen größeren Kontext stellen und auch auf andere Situationen anwendbar sein.

Definition 8.1. Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ ist die Riemannsche ζ-Funktion durch

$$\zeta(s) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert.

Lemma 8.2. *Die Reihe konvergiert lokal gleichmäßig und absolut.*

Wir betrachten nun die Poisson-Summation für Schwartzfunktionen.

Definition 8.3. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ definieren wir

$$E(f)(x) = \sum_{t \in \mathbb{Q}^*} f(tx)$$

für $x \in \mathbb{A}^*$.

Proposition 8.4. *$E(f)$ konvergiert lokal gleichmäßig und absolut und definiert eine stetige Funktion auf $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$. Weiterhin ist $E(f)$ schnell fallend, das heißt für alle $\mathbb{Z} \ni N > 0$ existiert ein $C_N > 0$ mit*

$$|E(f)(x)| \leq \frac{C_N}{|x|^N}$$

für $|x| \geq 1$. Außerdem gilt

$$E(f)(x) = \frac{1}{|x|}\left(E(\hat{f})(\frac{1}{x}) + \hat{f}(0)\right) - f(0).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Konvergenz der Reihe. Es reicht diese für Funktionen der Form

$$f(x) = f_\infty(x_\infty)\chi_{a+N\hat{Z}}(x_f)$$

mit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{A}_f$, $\mathbb{Z} \ni N > 0$. Da f_∞ eine Schwartzfunktion ist, existiert ein $C > 0$, sodass

$$|f_\infty(x_\infty)| \leq \frac{C}{1 + x_\infty^2}$$

für alle $x_\infty \in \mathbb{R}$ gilt. Sei $x_f \in \mathbb{A}_f^*$. Dann ist x_f von der Form

$$x_f = ru$$

für eindeutige $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^*$, $u \in \hat{Z}^*$. Insbesondere ist dann $r\hat{Z}^*$ eine kompakte offene Teilmenge von $\mathbb{A}_f^*$. Für $t \in \mathbb{Q}^*$ gilt

$$\begin{aligned} &tx_f \in a + N\hat{Z} \\ \Rightarrow\ &tru \in a + N\hat{Z} \\ &\Rightarrow t \in r^{-1}\left(u^{-1}a + N\hat{Z}\right) \\ &\Rightarrow t \in r^{-1}s(\hat{Z} \cap \mathbb{Q}^*) \\ &\Rightarrow t \in \frac{1}{n}\hat{Z} \end{aligned}$$

für ein $Z \ni n > 0$. Somit gilt nun

$$\begin{aligned} |E(f)(x)| &\leq \sum_{t\in\mathbb{Q}^*} |f(tx)| \\ &\leq \sum_{t\in\mathbb{Q}^*} |f_\infty(tx_\infty)|\, \chi_{a+N\hat{Z}}(tx_f) \\ &\leq \sum_{t\in\mathbb{Q}^*, tx_f\in a+N\hat{Z}} |f_\infty(tx_\infty)| \\ &\leq c\sum_{t\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}} \frac{1}{1+(tx_\infty)^2} \\ &\leq c\sum_{t\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+t^2x_\infty^2/n^2}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite verhält sich wie $\zeta(2)$. Daher konvergiert $E(f)$ gleichmäßig auf Mengen der Form $I \times r\hat{Z}^*$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}^*$ kompakt ist.

Ebenso kann man zeigen, dass $E(f)$ schnell fallend ist. Die Darstellung über die Fouriertransformation folgt aus der Poissonschen Summationsformel. Für $x \in \mathbb{A}^*$ definieren wir

$$f_x(y)\colon f(xy) \in \mathcal{S}(\mathbb{A}).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\hat{f}_x(y) &= \int_{\mathbb{A}} f_x(z)\overline{\mathrm{e}(zy)}\ \mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{A}} f(xz)\mathrm{e}(-xzy/x)\ \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{|x|}\hat{f}(y/x).
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned}
E(f)(x) &= \sum_{t\in\mathbb{Q}} f(tx) - f(0) \\
&= \sum_{t\in\mathbb{Q}} f_x(t) - f(0) \\
&= \sum_{t\in\mathbb{Q}} \hat{f}_x(t) - f(0) \\
&= \frac{1}{|x|}\sum_{t\in Q} \hat{f}(t/x) - f(0) \\
&= \frac{1}{|x|}\left(\sum_{t\in\mathbb{Q}^*} \hat{f}(t/x) + \hat{f}(0)\right) - f(0) \\
&= \frac{1}{|x|}\left(E(\hat{f})(1/x) + \hat{f}(0)\right) - f(0),
\end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. □

Definition 8.5. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ definieren wir das ζ-Integral von f durch

$$\zeta(f,s) = \int_{\mathbb{A}^*} f(x)\,|x|^s\ \mathrm{d}^*x,$$

wobei d^*x das normalisierte Haarmaß auf $\mathbb{A}^*$ ist.

Wenn man die richtige Funktion einsetzt erhält man die Riemannsche ζ-Funktion. Allerdings kann man mit dieser Methode auch Funktionalgleichungen für andere holomorphe Funktionen zeigen.

Proposition 8.6. *Sei $g = g_\infty g_f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ mit*

$$\begin{aligned}
g_\infty(x_\infty) &= \mathrm{e}^{-\pi x_\infty^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \\
g_f(x_f) &= \chi_{\hat{Z}}(x_f) \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_f).
\end{aligned}$$

Dann gilt für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\zeta(g,s) = \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s),$$

das heißt $\zeta(g,s)$ ist die vervollständigte Riemannsche ζ-Funktion.

Beweis. Es gilt

$$\zeta(g,s) = \int_{\mathbb{R}^*} g_\infty(x_\infty)\,|x_\infty|^s \;\mathrm{d}^*x_\infty \cdot \int_{\mathbb{A}_f^*} g_f(x_f)\,|x_f|^s \;\mathrm{d}_f^*x_f.$$

Das erste Integral ergibt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^*} g_\infty(t)\,|t|^s \frac{\mathrm{d}t}{|t|} &= 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\pi t^2} t^{s-1}\;\mathrm{d}t\\ &= \pi^{-s/2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{s/2-1}\;\mathrm{d}x\\ &= \pi^{-s/2}\Gamma(s/2).\end{aligned}$$

Das zweite Integral ergibt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}_f^*} g_f(x_f)\,|x_f|^s \;\mathrm{d}_f^*x_f &= \prod_{p<\infty}\int_{\mathbb{Q}_p^*} g_p(x_p)\,|(|\,x_p)_p^s \;\mathrm{d}^*x_p\\ &= \prod_{p<\infty}\int_{\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}} |x_p|_p^s \;\mathrm{d}^*x_p\\ &= \prod_{p<\infty}\frac{1}{1+p^{-s}} = \zeta(s).\end{aligned}$$

Wenn wir die beiden Rechnung kombinieren, folgt die Behauptung. □

Wir zeigen nun folgende allgemeine Aussage. Als Spezialfall wird daraus die Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion folgen.

Theorem 8.7. *Es gilt*

$$\zeta(f,s) = \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*} E(f)(x)\,|x|^s \;\mathrm{d}^*x.$$

Das Integral konvergiert lokal gleichmäßig für $\mathrm{Re}(s) > 1$ *und definiert eine holomorphe Funktion. Weiterhin hat es eine meromorphe Fortsetzung nach* $\mathbb{C}$ *und ist holomorph auf* $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$. *In* $s = 0, 1$ *liegt ein Pol der Ordnung* ≤ 1 *mit Residuum* $-f(0)$ *bzw.* $\hat{f}(0)$ *vor. Außerdem erfüllt das* ζ*-Integral die Funktionalgleichung*

$$\zeta(f,s) = \zeta(\hat{f}, 1-s).$$

Beweis. Zunächst zeigen wir die Konvergenz für $\mathrm{Re}(s) > 1$. Es gilt

$$|f(x)| \leq \frac{c}{1+|x_\infty|^N}\chi_{\frac{1}{n}\hat{Z}}(x_f)$$

für geeignetes $c > 0$, $\mathbb{Z} \ni N, n > 0$ und $N > \mathrm{Re}(s)$. Damit können wir nun leicht die Konvergenz zeigen, denn es gilt

$$\begin{aligned}\zeta(|f|, s) &= \int_{\mathbb{A}^*} |f(x)| \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x \\ &= \int_{\mathbb{R}^*} |f_\infty(t)| \, |t|^s \frac{\mathrm{d}t}{|t|} \int_{\mathbb{A}_f} |f(x_f)| \, |x_f|^s \ \mathrm{d}^*_f x_f \\ &\leq 2C \int_{\mathbb{R}^*_{\geq 0}} \frac{t^{s-1}}{1+t^N} \ \mathrm{d}t \int_{\frac{1}{n}\hat{Z} \cap \mathbb{A}^*_f} |x_f|^s \ \mathrm{d}^*_f x_f.\end{aligned}$$

Der erste Faktor ist endlich, da wir N groß genug gewählt haben. Der zweite Faktor konvergiert wie $\zeta(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$. Diese Abschätzungen gelten lokal gleichmäßig in s und dies zeigt die Konvergenz.

Als nächstes zeigen wir, dass wir $\zeta(f, s)$ auch durch obiges Integral darstellen können. Dazu verwenden wir, dass die Isomorphie

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^* &\to \mathbb{A}^1 \times \mathbb{R}^*_{>0} \\ (a_\infty, a_f) &\mapsto ((\frac{a_\infty}{|a|}, a_f), |a|)\end{aligned}$$

einen Isomorphismus

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}* &\to \mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^* \times \mathbb{R}^*_{>0} \\ (a_\infty, a_f)\mathbb{Q}^* &\mapsto ((\frac{a_\infty}{|a|}, a_f)\mathbb{Q}^*, |a|)\end{aligned}$$

induziert. In Kombination mit dem Isomorphismus

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^* &\to \hat{Z}^* \\ (1, a_f)\mathbb{Q}^* &\mapsto a_f\end{aligned}$$

erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* \to \hat{Z}^* \times \mathbb{R}^*_{>0} =: \mathcal{F}.$$

Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt (da $\mathrm{d}^* x$ ein invariantes Maß ist)

$$\begin{aligned}\zeta(f, s) &= \int_{\mathbb{A}^*} f(x) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x \\ &= \sum_{t \in \mathbb{Q}^*} \int_{t\mathcal{F}} f(x) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x \\ &= \sum_{t \in \mathbb{Q}^*} \int_{\mathcal{F}} f(tx) \, |tx|^s \ \mathrm{d}^* x \\ &= \sum_{t \in \mathbb{Q}^*} \int_{\mathcal{F}} f(tx) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathcal{F}} \sum_{t \in \mathbb{Q}^*} f(tx) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x$$
$$= \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*} E(f)(x) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x,$$

wobei wir verwendet haben, dass das Integral absolut konvergiert, damit wir Integral und Summe (Integral bzgl. Zählmaß) vertauschen dürfen. Da $\{1\} \subseteq \mathbb{R}_{>0}*$ eine Nullmenge ist und $A^1/\mathbb{Q}^*$ kompakt ist, hat auch

$$\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^* \times \{1\} \subseteq \mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$$

Maß 0. Damit folgt (da Nullmengen für das Integral unwichtig sind)

$$\zeta(f,s) = \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* |x|>1} E(f)(x) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x + \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* |x|<1} E(f)(x) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x$$

Da $E(f)$ schnell fallend ist, konvergiert das erste Integral für $s \in \mathbb{C}$, da

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* |x|>1} E(f)(x) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x \right| &\le \int_{|x|>1} |E(f)(X)| \, ||x|^s| \ \mathrm{d}^* x \\ &\le \int_{|y|>1} \frac{C_n}{|x|^N} |x|^{\mathrm{Re}(s)} \ \mathrm{d}^* x \\ &\le C_N \int_{A^1/\mathbb{Q}^*} \int_1^\infty t^{\mathrm{Re}(s)-N} \frac{\mathrm{d}t}{t} \ \mathrm{d}^* x \\ &\le C_N \int_1^\infty t^{\mathrm{Re}(s)-N-1} \ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

mit Fubini folgt. Wenn wir N groß genug wählen ($\mathrm{Re}(s) < N$), konvergiert das letzte Integral und die Konvergenz ist lokal gleichmäßig. Daraus folgt, dass $\int_{|x|>1} E(f)(x) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x$ eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ definiert.

Für das zweite Integral verwenden wir die Darstellung von $E(f)$ aus Proposition 8.4. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{|x|<1} E(f)(x) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x = &\int_{|x|<1} E(\hat{f})(\frac{1}{x}) \, |x|^{s-1} \ \mathrm{d}^* x \\ &+ \hat{f}(0) \int_{|x|<1} |x|^{s-1} \ \mathrm{d}^* x - f(0) \int_{|x|<1} |x|^s \ \mathrm{d}^* x. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun jedes Integral einzeln und beginnen mit dem zweiten. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{|x|<1} |x|^{s-1} \ \mathrm{d}^* x &= \int_{\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^*} \int_0^1 t^{s-1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \ \mathrm{d}^* x \\ &= \int_0^1 t^{s-2} \ \mathrm{d}t = \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Analog folgt

$$\int_{|x|<1} |x|^s \ \mathrm{d}^* x = \frac{1}{s}.$$

Für das erste Integral verwenden wir die Substitution $y = \frac{1}{x}$ und erhalten

$$\int_{|x|<1} E(\hat{f})(\frac{1}{x}) \, |x|^{s-1} \ \mathrm{d}^* x = \int_{|y|>1} E(\hat{f})(y) \, |y|^{1-s} \ \mathrm{d}^* y.$$

Das schwierige bei dieser Substitution ist, wie sich das Maß verhält. Für $\nu = \infty$ gilt für die Substitution $y = \frac{1}{x}$ mit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x^2}$ und somit

$$\int_0^\infty f(\frac{1}{x}) \ \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int_\infty^0 f(y) \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Der Fall $\nu < \infty$ verbleibt als Übung. Insgesamt erhalten wir

$$\zeta(f, s) = \int_{|x|>1} E(f)(x) \, |x|^s + E(\hat{f})(x) \, |x|^{1-s} \ \mathrm{d}^* x + \frac{\hat{f}(0)}{s-1} - \frac{f(0)}{s}.$$

Dies zeigt die meromorphe Fortsetzung sowie die Aussage über die Residuen. $\square$

Dieses Theorem ist eines der Hauptresultate der Vorlesung und liefert eine schöne Beschreibung der Eigenschaften des ζ-Integrals. Für $g \in \mathcal{S}(A)$ aus Proposition 8.6 gilt $g = \hat{g}$, sodass $\zeta(g, s) = \zeta(g, 1-s)$ folgt.

Proposition 8.8. *Sei* $\zeta^*(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ *für* $\mathrm{Re}(s) > 1$. *Dann definiert* ζ^* *ist eine meromorphe Funktion auf* $\mathbb{C}$ *mit einfachen Polen in* 0 *und* 1. *Weiterhin gilt* $\zeta^*(s) = \zeta^*(1-s)$.

9 Dirichletsche L-Reihe

Sei $\chi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to T$ ein Dirichletcharakter modulo N. Wir setzen χ zu einer Funktion auf $\mathbb{Z}$ durch

$$\chi(a) = \begin{cases} \chi(a \mod N), & (a,N) = 1, \\ 0, & (a,N) > 1. \end{cases}$$

fort und definieren die *L-Reihe* von χ durch

$$L(\chi, s) \coloneqq \sum_{n=1} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Diese Reihe konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > 1$ und definiert dort eine holomorphe Funktion. Es gilt

$$L(\chi, s) = \prod_{p>0} \frac{1}{1 - \chi(p) p^{-s}}.$$

Erinnerung: Sei ω ein endlicher Charakter von $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$. Wir betrachten ω als Charakter auf $\mathbb{A}^*$. Dann sind fast alle ω_p unverzweigt, das heißt $\mathbb{Z}_p^* \subseteq \ker(\omega_p)$. Falls ω_p verzweigt, so existiert ein minimales $\mathbb{Z} \ni m_p > 0$ mit

$$1 + K(0, p^{-m_p}) \subseteq \ker(\omega_p).$$

Der Führer von ω ist durch $N = \prod_{p \text{verzweigt}} p^{m_p}$ definiert. Dann definiert ω durch $\chi(p) = \overline{\omega_p(p)}$ für $p \nmid N$ einen primitiven Dirichletcharakter modulo N. Wenn wir χ zu einem Charakter auf $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ liften, erhalten wir ω zurück.

Definition 9.1. Sei ω ein endlicher Charakter auf $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ und $f \in \mathcal{S}(A)$. Wir definieren die twisted ζ-Funktion

$$\zeta(f, \omega, s) \coloneqq \int_{\mathbb{A}^*} f(x)\omega(x)\,|x|^s \;\mathrm{d}^* x.$$

Wie im letzten Kapitel kann man zeigen, dass das Integral lokal gleichmäßig für $\mathrm{Re}(s) > 1$ konvergiert und dort eine holomorphe Funktion definiert. Ebenso gilt

$$\zeta(f, \omega, s) = \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*} E(f)(x)\omega(x) |x|^s \ \mathrm{d}^*x,$$

wobei $E(f)$ wie im letzten Kapitel definiert ist (siehe Definition 8.3).

Als Vorbereitungen benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 9.2. *Sei K eine kompakte Hausdorffgruppe mit Haarmaß $\mathrm{d}x$ und $\chi\colon K \to T$ ein Charakter. Dann gilt*

$$\int_K \chi(x) \ \mathrm{d}x = \begin{cases} \mathrm{vol}(K), & \textit{falls } \chi \textit{ trivial ist,} \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Nun können wir unseren Satz formulieren.

Theorem 9.3. *Sei $\omega \neq 1$ ein endlicher Charakter von $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$. Dann hat $\zeta(f, \omega, s)$ eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ und erfüllt die Funktionalgleichung*

$$\zeta(f, \omega, s) = \zeta(\hat{f}, \overline{\omega}, 1-s).$$

Beweis. Wie im Fall $\omega = 1$ erhält man

$$\begin{aligned} \zeta(f, \omega, s) &= \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*} E(f)(x)\omega(x) |x|^s \ \mathrm{d}^*x \\ &= \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* |x|<1} E(f)(x)\omega(x) |x|^s \ \mathrm{d}^*x + \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* |x|>1} E(f)(x)\omega(x) |x|^s \ \mathrm{d}^*x. \end{aligned}$$

Der zweite Summand konvergiert für alle $s \in \mathbb{C}$ und ist holomorph. Für das Integral erhalten wir zuvor mit der Funktionalgleichung für $E(f)$

$$\int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* |x|<1} E(f)(x)\omega(x) |x|^s \ \mathrm{d}^*x$$

$$= \int_{|x|<1} E(\hat{f})(\frac{1}{x})\omega(x) |x|^{s-1} \ \mathrm{d}^*x + \hat{f}(0) \int_{|x|<1} \omega(x) |x|^{s-1} \ \mathrm{d}^*x - f(0) \int_{|x|<1} \omega(x) |x|^s \ \mathrm{d}^*x.$$

Mit der Substitution $y = \frac{1}{x}$ wird das Integral zu

$$\int_{|y|>1} E(\hat{f})(y)\overline{\omega}(y) |y|^{1-s} \ \mathrm{d}^*y.$$

Als nächstes zeigen wir, dass die beiden anderen Integrale verschwinden. Es gilt

$$\int_{|x|<1} \omega(x) |x|^{s-1} \ \mathrm{d}^*x = \int_{A^1/\mathbb{Q}^*} \int_0^1 \omega(x) t^{s-1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \ \mathrm{d}^*x$$

$$= \int_0^1 t^{s-2} \, \mathrm{d}t \int_{A^1/\mathbb{Q}^*} \omega(x) \, \mathrm{d}x.$$

Da wir ω als nicht trivial vorausgesetzt haben, folgt mit Lemma 9.2, dass das zweite Integral verschwindet. Das dritte Integral lässt sich genauso behandeln. Daraus folgt nun

$$\zeta(f, \omega, s) = \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* |x|>1} E(f)(x)\omega(x) \, |x|^s + E(\hat{f})(x)\overline{\omega}(x) \, |x|^{1-s} \, \mathrm{d}^*x.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Theorem 9.4. *Sei $\omega \neq 1$ ein endlicher Charakter von $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ mit Führer N und sei χ der zugehörige primitive Dirichletcharakter modulo N. Dann gibt es $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ mit*

$$\zeta(f, \omega, s) = L_\infty(\overline{\chi}, s) L(\overline{\chi}, s),$$

wobei $L_\infty(\overline{\chi}, s) = \Gamma(\frac{s+\delta}{2})\pi^{-\frac{s+\delta}{2}}$ für $\delta \in \{0, 1\}$, sodass $\omega_\infty(-1) = (-1)^\delta = \overline{\chi}(-1)$ gilt. Für $L^*(\overline{\chi}, s) = L_\infty(\overline{\chi}, s)L(\overline{\chi}, s)$ gilt

$$L^*(\overline{\chi}, s) = (-1)^\delta N^{-s}\overline{\tau(\omega, \mathrm{e})} L^*(\overline{\chi}, 1-s),$$

mit

$$\tau(\omega, \mathrm{e}) = \varphi(N) \int_{1/N\hat{Z}^*} \omega(x)\mathrm{e}(x) \, \mathrm{d}^*x.$$

Beweis. Wir schreiben $N = \prod_{p<\infty} p^{n_p}$. Wir definieren $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ durch $f_p = \chi_{\mathbb{Z}_p}$ für $p \nmid N$, $f_p = p^{n_p}(1 - \frac{1}{p})\chi_{1+p^{n_p}\mathbb{Z}_p}$ für $p \mid N$ und $f_\infty(t) = t^s \mathrm{e}^{-\pi t^2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\zeta(f, \omega, s) &= \int_{\mathbb{A}^*} f(x)\omega(x) \, |x|^s \, \mathrm{d}^*x \\
&= \prod_{\nu \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_\nu^*} f_\nu(x_\nu)\omega_\nu(x_\nu) \, |x_\nu|_\nu^s \, \mathrm{d}^*x_\nu.
\end{aligned}$$

Also reicht es die einzelne Faktoren $\zeta_\nu(f_\nu, \omega_\nu, s)$ zu berechnen.

Sei $p \nmid N$, also unverzweigt. Dann gilt, da $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\} = \bigcup_{j=0}^\infty p^j \mathbb{Z}_p^*$

$$\begin{aligned}
\zeta_p &= \int_{\mathbb{Q}_p^* \cap \mathbb{Z}_p} \omega_p(x_p) \, |x|_p^s \, \mathrm{d}^*x_p \\
&= \sum_{j=0}^\infty \int_{p^j \mathbb{Z}_p^*} \omega_p(x_p) \, |x_p|_p^s \, \mathrm{d}^*x_p \\
&= \sum_{j=0}^\infty \int_{\mathbb{Z}_p^*} \omega_p(p^j y_p) \left| p^j y_p \right|_p^s \, \mathrm{d}^*y_p.
\end{aligned}$$

Da das Maß invariant unter Multiplikation ist folgt, dass sich obiges Integral zu folgendem Ausdruck vereinfacht

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{\infty} \omega_p(p^j) p^{-js} \int_{\mathbb{Z}_p^*} \mathrm{d}^* y_p \\ = &\sum_{j=0}^{\infty} \overline{\chi}(p)^j p^{-js} = \frac{1}{1-\overline{\chi}(p)p^{-s}}. \end{aligned}$$

Sei $p \mid N$, also p verzweigt. In diesem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} \zeta_p &= p^{n_p}(1-\frac{1}{p}) \int_{1+p^{n_p}\mathbb{Z}_p} \omega_p(x_p) \left|x_p\right|_p^s \ \mathrm{d}^* x_p \\ &= \varphi(p^{n_p}) \int_{1+p^{n_p}\mathbb{Z}_p} \mathrm{d}^* x_p = 1, \end{aligned}$$

da $\mathbb{Z}_p^*$ die disjunkte Zerlegung

$$\mathbb{Z}_p^* = \bigcup_{j \in (\mathbb{Z}/p^{n_p}\mathbb{Z})^*} (j + p^{n_p}\mathbb{Z}_p)$$

besitzt. Für $\nu = \infty$ und $\delta = 0$ ist ω_∞ trivial. Es gilt

$$\zeta_\infty = \int_{\mathbb{R}^*} \mathrm{e}^{-\pi x^2} \left|x\right| \frac{\mathrm{d}x}{\left|x\right|} = \Gamma(\frac{s}{2}) \pi^{-\frac{s}{2}}.$$

Für $\delta = 1$ ist ω_∞ der Signumscharakter und es gilt

$$\begin{aligned} \zeta_\infty &= \int_{\mathbb{R}^*} \mathrm{e}^{-\pi x^2} x \omega_\infty(x) \left|x\right|^s \frac{\mathrm{d}x}{\left|x\right|} \\ &= \Gamma(\frac{s+1}{2}) \pi^{-\frac{s+1}{2}}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\zeta(f, \omega, s) = L_\infty(\overline{\chi}, s) L(\overline{\chi}, s).$$

Die Funktionalgleichung von L^* folgt aus

$$\zeta(f, \omega, s) = \zeta(\hat{f}, \overline{\omega}, 1-s).$$

Dazu berechnen wir die Fouriertransformierte von f. Für $p \nmid N$ gilt $\hat{f}_p = f_p$.

Für $p \mid N$ gilt mit der Substitution $y = 1 + t$

$$\begin{aligned} \hat{f}_p(x) &= \int_{\mathbb{Q}_p} f_p(y) \mathrm{e}_p(-xy) \ \mathrm{d}y \\ &= \varphi(p^{n_p}) \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_{1+p^{n_p}\mathbb{Z}_p}(y) \mathrm{e}_p(-xy) \ \mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi(p^{n_p}) \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_{p^{n_p}\mathbb{Z}_p}(t) \mathrm{e}_p(-x(1+t)) \ \mathrm{d}t \\
&= \varphi(p^{n_p}) \mathrm{e}_p(-x) \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_{\mathbb{Z}_p}(p^{-n_p}t) \mathrm{e}_p(-xp^{n_p}p^{-n_p}t) \ \mathrm{d}t \quad = \varphi(p^{n_p}) \overline{\mathrm{e}_p(x)} \left|p^{n_p}\right|_p \int_{\mathbb{Q}_p} g(t) \ \mathrm{d}t \\
&= (1-\frac{1}{p}) \overline{\mathrm{e}_p(x)} \int_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{e}_p(-xp^{n_p}t) \ \mathrm{d}t \\
&= (1-\frac{1}{p}) \overline{\mathrm{e}_p(x)} \chi_{p^{-n_p}\mathbb{Z}_p}(x).
\end{aligned}
$$

Im Fall $\nu = \infty$ und $\delta = 0$ gilt

$$\hat{f}_\infty = f_\infty = (-\mathrm{i})^\delta f_\infty.$$

Für $\delta = 1$ gilt

$$\hat{f}_\infty(x) = \int_{\mathbb{R}} y \mathrm{e}^{-\pi y^2 - 2\pi \mathrm{i} xy} \mathrm{d}y = (-\mathrm{i})^\delta f_\infty(x).$$

Wir berechnen nun das ζ-Integral

$$\zeta(\hat{f}, \overline{\omega}, 1-s) = \prod_{\nu \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_\nu^*} f_\nu(x) \overline{\omega}_n u(x) \left|x_\nu\right|_\nu^{1-s} \ \mathrm{d}^* x_\nu.$$

Für $p \nmid N$ gilt

$$\zeta_p(\hat{f}_p, \overline{\omega}, 1-s) = \frac{1}{1-\chi(p)p^{1-s}}.$$

Für $p \mid N$ gilt $\square$

10 Automorphe Formen auf $\mathrm{GL}(1, \mathbb{A})$

Definition 10.1. Sei $\omega\colon \mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* \to T$ ein Charakter, der nicht notwendigerweise endlich ist. Eine *automorphe Form* auf $\mathrm{GL}(1, \mathbb{A})$ mit Charakter ω ist eine Funktion

$$\Phi\colon \mathrm{GL}(1, \mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

mit den Eigenschaften

(i) $\Phi(\gamma g) = \Phi(g)$ für alle $\gamma \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{Q})$ und $g \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{A})$,

(ii) $\Phi(zg) = \omega(z)\Phi(g)$ für alle $z, g \in \mathbb{A}^*$,

(iii) Φ wächst moderat.

Die automorphen Formen mit Charakter ω bilden einen komplexen Vektorraum S_ω. Setzen wir in ii) $g = (1, 1, \dots)$, so erhalten wir

$$\Phi(z) = \omega(z)\Phi(g) = c\omega(z).$$

Also ist $\dim_{\mathbb{C}} S_\omega = 1$.

Theorem 10.2. *Sei Φ eine autormorphe Form auf $\mathrm{GL}(1, \mathbb{A})$. Dann kann Φ als*

$$\Phi(g) = c\chi_{idelic}(g)\,|g|^{\mathrm{it}}$$

mit $c \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ und χ ein primitiver Dirichlet Charakter geschrieben werden kann. Diese Darstellung ist eindeutig. Wir können ζ-Integrale für beliebige automorphe Formen auf $\mathrm{GL}(1, \mathbb{A})$ definieren. Diese haben ähnliche Eigenschaften wie die, die zu endlichen Charakteren von $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ korrespondieren.

11 Automorphe Formen auf $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$

Definition 11.1. Eine Funktion $\Phi\colon \mathrm{GL}(2,\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ heißt *glatt*, wenn für jedes $g_0 \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ eine offene Umgebung U und eine glatte Funktion $\Phi_\infty^U\colon \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ existiert, sodass

$$\Phi(g) = \Phi_\infty^U(g_\infty)$$

für alle $g \in U$ gilt.

Definition 11.2. Sei $g \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ mit Einträgen $a = (a_\infty, a_2, \dots)$ usw. Definiere

$$\|g\| = \prod_{\nu \le \infty} \max\{|a_\nu|_\nu, |b_\nu|_\nu, |c_\nu|_\nu, |d_\nu|_\nu, |a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu|_\nu\}.$$

Eine Funktion $\Phi\colon \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})\ \mathrm{GL}(2,\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ *wächst moderat*, falls Konstanten $B, C > 0$ mit

$$|\Phi(g)| \le C\,\|g\|^B$$

für alle $g \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ existieren. Sei $K = O(2,\mathbb{R}) \prod_{p<\infty} \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_p)$ die maximale kompakte Untergruppe von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$. Eine Funktion $\Phi\colon \mathrm{GL}(2,\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ heißt *rechts K-endlich*, wenn die Menge

$$\{\Phi(gk) \mid k \in K\}$$

für jedes $g \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ einen endlich-dimensionalen Vektorraum definiert. Sei $Z(U(g))$ der Zentralisator der universellen einhüllenden Algebra von $g \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Eine glatte Funktion $\Phi\colon \mathrm{GL}(2,\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ heißt *$Z(U(g))$-endlich* wenn die Menge

$$\{D\phi(g) \mid D \in Z(U(g))\}$$

einen endlich-dimensionalen Vektorraum erzeugt.

Definition 11.3. Sei $\omega\colon \mathbb{Q}^*\backslash\mathbb{A}^* \to T$ ein Charakter. Eine *automorphe Form* auf $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ mit Charakter ω ist eine glatte Funktion

$$\Phi\colon \mathrm{GL}(2,\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

mit

(i) $\Phi(\gamma g) = \Phi(g)$ für alle $\gamma \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$ und $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$,

(ii) $\Phi(zg) = \omega(z)\Phi(g)$ für alle $z \in \mathbb{A}^*$ und $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$,

(iii) Φ ist rechts K-endlich,

(iv) Φ ist $Z(U(g))$-endlich,

(v) Φ wächst moderat.

Solch eine Funktion heißt *Spitzenform*, wenn zusätzlich

$$\int_{\mathbb{Q}\ \mathbb{A}} \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \,\mathrm{d}x = 0$$

für alle g gilt.

Bemerkung 11.4. *Automorphe Formen auf* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ *können durch Lifts klassischer Modulformen erhalten werden.*

12 Die modulare Gruppe

Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ operiert auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ via

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Diese Gruppenoperation ist transitiv. Für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $cz + d \neq 0$ gilt

$$\mathrm{Im}(Mz) = \frac{\det(M)}{|cz+d|^2} \mathrm{Im}(z).$$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ wird durch die Operation von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$, den Matrizen mit positiver Determinante, in drei Orbits zerlegt, nämlich $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $-H$ und $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Beispiel 12.1. (i) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ operiert durch Translation, es gilt $T^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^m = z + m$.

(ii) $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ operiert durch $Sz = \frac{-1}{z}$

(iii) Für $z = x + \mathrm{i}y \in H$ gilt

$$M_z = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$$

und $M_z\mathrm{i} = z$.

(iv) Es gilt die folgende Formel $(ST)^3 = (TS)^3 = S^2 = -1$.

Wir charakterisieren nun Erzeuger von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 12.2. *Die Gruppe* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *wird durch die Matrizen* $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$, S *erzeugt.*

Proposition 12.3. *Der Stabilisator von* i *in* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *ist*

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid MM^T = 1\}.$$

Insbesondere ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &\to H \\ M \, \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &\mapsto M_i \end{aligned}$$

eine Bijektion.

Proposition 12.4. *Die Gruppe* $\Gamma \coloneqq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *wird von* S *und* T *erzeugt wird.*

Beweis. Sei $G = \langle S, T \rangle \subseteq \Gamma$. Dann gilt $-1 = S^2 \in G$. Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. Wir zeigen per Induktion über $|c|$, dass $M \in G$. Falls $c = 0$, dann gilt $M = \pm \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \pm T^n$ für geeignetes $n \in \mathbb{Z}$. Also ist $M \in G$. Sei nun $c \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ST^m M &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ a + mc & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für geeignetes m gilt

$$0 \leq a + mc < |c| \, .$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist dann aber $ST^m M \in G$, sodass $M \in G$ folgt. $\square$

Definiere $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| < \frac{1}{2}, |z| > 1\}$. D ist ein Fundamentalbereich für Operation von Γ auf H.

Theorem 12.5. *(1) Für jedes* $z \in H$ *existiert ein* $\gamma \in \Gamma$ *mit* $\gamma y \in \overline{D}$.

(2) *Seien* $z \neq w \in \overline{D}$ *konjugiert bezüglich* Γ*. Dann liegen* z, w *auf dem Rand von* D *und* $|\mathrm{Re}(z)| = \frac{1}{2}$ *und* $z = w \pm 1$ *oder* $|z| = 1$ *und* $z = -\frac{1}{w}$*.*

(3) *Sei* $z \in \overline{D}$ *und* $\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma z = z\}$ *der Stabilisator von* z*. Dann gilt mit* $\rho = \mathrm{e}^{2/3\pi \mathrm{i}}$

$$\begin{aligned}\Gamma_i &= \langle S \rangle \\ \Gamma_\rho &= \langle ST \rangle \\ \Gamma_{-\overline{\rho}} &= \langle TS \rangle \\ \Gamma_z &= \langle -1 \rangle\end{aligned}$$

für alle $z \in \overline{D} \setminus \{\mathrm{i}, \rho, -\overline{\rho}\}$*.*

Beweis. Wir beweisen lediglich 1). Sei $z \in H$. Dann ist $\{mz + n \mid (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Jeder Ball um 0 enthält lediglich endlich viele Gitterpunkte. Also existiert ein Paar $(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit

$$|cz + d| \leq |mz + n|$$

für alle $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Das heißt, es gibt einen Gitterpunkt, der am nächsten an der Null ist. Aufgrund der Minimalität gilt $(c,d) = 1$ und es gibt eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T^m M &= \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + mc & b + md \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und mit $z' :- T^m M z$

$$|z'| = \left| \frac{(a + mc)z + (b + md)}{cz + d} \right| \geq 1.$$

Wenn man m geeignet wählt, folgt $abs\mathrm{Re}(z') \leq \frac{1}{2}$, also $z' \in \overline{D}$. $\square$

13 Modulare Formen für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Nun können wir modulare Formen definieren, dies sind sehr besondere Funktionen. Erinnerung: $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert auf der oberen Halbebene H durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Definition 13.1. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Eine meromorphe Funktion $f \colon H \to \mathbb{C}$ heißt *meromorphe modulare Form von Gewicht* k für Γ falls

1) $f(M\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau)$ gilt für alle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

2) f ist meromorph im unendlichen, das heißt, es f besitzt eine Fourierentwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n,$$

wobei $q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \tau}$ und $a_n = 0$ für n hinreichend klein.

Tatsächlich kann man die Voraussetzung 1) abschwächen. Man muss dies nicht für alle Matrizen in $\mathrm{SL}_2(Z)$ testen, dies würde sehr lange dauern, es reicht sich auf die Erzeuger zu beschränken. Dies ist nicht vollkommen offensichtlich.

Bemerkung 13.2. *1) Da Γ von S und T erzeugt wird, ist es ausreichend, die Transformationseigenschaft für S und T zu überprüfen.*

2) Die Abbildung

$$\begin{aligned} H &\to \{q \in \mathbb{C} \mid 0 < |q| < 1\} \\ \tau &\mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \tau} \end{aligned}$$

ist holomorph und surjektiv. Da f wegen 1) für T 1-periodisch ist, ist die Funktion

$$g(q) := f\left(\frac{\log(q)}{2\pi \mathrm{i}}\right)$$

wohldefiniert und meromorph. Falls g zu einer meromorphen Funktion auf dem offenen Einheitsball fortgesetzt werden kann, so besitzt g eine Laurententwicklung der Form

$$g(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n$$

in einer Umgebung der 0 mit $a_n = 0$ für hinreichend kleines n. Dann gilt

$$f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \tau n}$$

mit $a_n = 0$ für hinreichend kleines n. In diesem Fall sagen wir, dass f meromorph im unendlichen ist. Die Fourierkoeffizienten sind durch

$$a_n = \int_w^{w+1} f(\tau) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} n \tau} \, \mathrm{d}\tau$$

für beliebiges w mit möglicherweise hinreichendem großem Imaginärteil (sodass g im korrespondieren Ball keine Pole hat).

Definition 13.3. Eine holomorphe Funktion heißt *holomorphe modulare Form* oder auch *Modulform*, falls

1) $f(M\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau)$ für alle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

2) f holomorph im unendlichen ist, das heißt, f hat eine Fourierentwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

für $q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \tau}$.

Falls zusätzlich $a_0 = 0$ gilt, dann heißt f *Spitzenform*.

Der Raum aller modularer Formen von Gewicht k wird mit M_k bezeichnet und der Raum der Spitzenform mit S_k.

Theorem 13.4 (Hecke)**.** *Sei $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ einen Spitzenform von Gewicht $k > 0$. Dann gilt*

$$|a_n| \leq c n^{k/2}.$$

Diese Schranke heißt *triviale Schranke*. Man kann diese Schranke noch verbessern, dafür gab es die Fields-Medaille und den Abel-Preis.

Beweis. Mit

$$h(\tau) = |f(\tau)| \operatorname{Im}(\tau)^{k/2}$$

gilt

$$h(M\tau) = h(\tau)$$

für alle $M \in \Gamma$. Außerdem gilt

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n = q \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^{n-1}.$$

Deshalb ist $\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}t} f(\tau)$ für alle $\gamma > 0$ auf dem Gebiet $\{\gamma \in H \mid \operatorname{Im}(\tau) \geq \gamma\}$ beschränkt. Also ist

$$\left| f(\tau)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}t} \right| \leq |f(\tau)|\, \mathrm{e}^{2\pi y}$$

und

$$h(T))\, |f(\tau)|\, y^{k/2}$$

auf $\overline{\mathbb{D}}$ beschränkt. Da h invariant unter Γ ist, gilt

$$0 \leq h(\tau) \leq c'$$

für ein $c' > 0$ und alle $\tau \in H$. Nun schätzen wir die Fourierkoeffizienten ab

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \int_0^1 f(x+iy)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}n(x+\mathrm{i}} \right| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \mathrm{e}^{2\pi ny} \int_0^1 |f(x+\mathrm{i}y)| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \mathrm{e}^{2\pi ny} y^{-k/2} \int_0^1 h(x+\mathrm{i}y) \, \mathrm{d}x \\ &\leq c' y^{-k/2} \mathrm{e}^{2\pi ny}. \end{aligned}$$

Wenn wir $y = \frac{1}{n}$ wählen, erhalten wir die Behauptung. □

Bemerkung 13.5. *Eine Konsequenz des Beweises von Deligne*[1] *der Ramanujan-Petersson Vermutung* [2] *ist*

$$|a_n| \leq c(\varepsilon) n^{\frac{k-1}{2}+\varepsilon}$$

für alle $\varepsilon > 0$.

[1] `http://www.numdam.org/article/SB_1968-1969__11__139_0.pdf`
[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Ramanujan-Petersson_conjecture`

Definition 13.6. Die einfachsten Beispiele für Modulformen sind die *Eisensteinreihen*[3]

$$G_k(\tau) \coloneqq \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\\(m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m\tau+n)^k}.$$

Zum Beweis der Wohldefiniertheit der Eisensteinreihen benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 13.7. *Sei $K \subseteq H$ kompakt. Dann gibt es Konstanten $\gamma, \delta > 0$, sodass*

$$\gamma\,|m\mathrm{i}+n| \leq |m\tau+n| \leq \delta\,|m\mathrm{i}+n|$$

für alle $m, n \in \mathbb{R}$ und $\tau \in K$ gilt.

Beweis. Dies verbleibt als Übung. Sollte sofort aus Stetigkeit und Positivität der mittleren Funktion folgen. □

Theorem 13.8. *Sei $k \geq 3$. Dann konvergiert die Eisensteinreihe G_k absolut und lokal gleichmäßig. Insbesondere ist G_k holomorph auf H.*

Beweis. Aufgrund des vorherigen Lemmas reicht es zu zeigen, dass

$$\sum_{\substack{(mn,n)\in\mathbb{Z}^2\\(m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$$

für $\alpha > 1$ konvergiert. An dieser Stelle ist $k \geq 3$ wichtig, da man sonst $\alpha \leq 1$ erhalten würde. Im weiteren betrachten wir die Reihe für eine endliche Teilmenge $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ und schätzen diese unabhängig von der Menge ab. □

Bemerkung 13.9. *Da die Reihen absolut konvergieren, können wir die Summationsreihenfolge der G_k vertauschen, ohne dass sich der Wert ändert.*

Als nächstes zeigen wir, dass die G_k wirklich von Gewicht k sind.

Theorem 13.10. *Für $k \geq 3$ gilt*

$$G_k(M\tau) = (c\tau+d)^k G_k(\tau).$$

[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Gotthold_Eisenstein

Beweis. rechnen, wird nachgereicht. □

Proposition 13.11. *Für $\tau \in H$ und $k \geq 2$ gilt*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+n)^k} = \frac{(-2\pi \mathrm{i})^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n$$

mit $q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}$.

Nun zeigen wir die Fourierreihendarstellung, was wir benötigen, um zu zeigen, dass Eisensteinreihen Modulformen definieren.

Theorem 13.12. *Für alle $\tau \in H$ und $k \in 2\mathbb{Z}, k \geq 4$ gilt*

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi \mathrm{i})^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

mit $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} k^{d-1}$. Insbesondere gilt $G_k \in M_k$.

Definition 13.13. Die *normalisierte Eisensteinreihe* wird als

$$E_k := \frac{1}{2\zeta(k)} G_k$$

definiert. Für $k \in 2\mathbb{Z}, k \geq 4$ gilt

$$2\zeta(k) = -\frac{(2\pi \mathrm{i})^k}{k!} B_k$$

wobei B_k Bernoullizahlen[4] sind. Also gilt

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n.$$

Man kann außerdem zeigen, dass

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{(m,n)=1} \frac{1}{(m\tau+n)^k}$$

gilt.

Definition 13.14. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Für eine meromorphe Funktion $f\colon H \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definieren wir eine Operation von $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}^+)$ durch

$$(f\,|_{k,M})(\tau) = \det(M)^{k/2}(c\tau+d)^{-k} f(M\tau).$$

[4] https://de.wikipedia.org/wiki/Bernoulli-Zahl

Dann gilt für $M, N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

$$(f\mid_{k,M})\mid_{k,N} = f\mid_{k,MN}.$$

Der Index wird oft weggelassen, da wenn $M \in \Gamma$ auch

$$f\mid_M = f$$

gilt.

Definition 13.15. Sei f eine meromorphe Funktion auf H. Die Ordnung von f in $\omega \in H$ ist definiert als die Zahl n, sodass

$$\frac{f(\tau)}{(\tau-\omega)^n}$$

holomorph und ungleich 0 in ω ist. Wir schreiben $n = \nu_\omega(f)$. Wenn f eine meromorphe Modulform ist, dann gilt

$$\nu_\omega(f) = \nu_{M\omega}(f)$$

für alle $M \in \Gamma$. Wenn $f(\tau) = \sum_{n\geq n_0} a_n q^n$ mit $a_{n_0} \neq 0$ ist, dann gilt $\nu_\infty(f) = n_0$.

Theorem 13.16 ($\frac{k}{12}$-Formel, Gewichtsformel)**.** *Sei $f \neq 0$ eine meromorphe Modulform von Gewicht k. Dann hat f nur endlich viele Polstellen und Nullstellen modulo Γ und es gilt*

$$\nu_\infty(f) + \sum_{\tau\in\Gamma\ H} \frac{1}{\frac{1}{2}|G_t|}\nu_t(f) = \frac{k}{12}.$$

Beweis. rechnen und cauchyintegral formel + Residuensatz. □

Bemerkung 13.17. *Die Transformationsformel impliziert, dass $M_k = \{0\}$, wenn k ungerade ist. Sei $0 \neq f \in M_k$*

Proposition 13.18. *(i) $M_k = \{0\}$ für $k < 0$ oder $k = 2$.*

(ii) $M_k = \mathbb{C}$ für $k = 0$.

(iii) $M_k = \mathbb{C}E_k$ für $k = 4, 6, 8, 10, 14$.

Definition 13.19. Wir definieren

$$\triangle(\tau) = \frac{1}{1728}(E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2) \neq 0.$$

Dann ist $\triangle \in S_{12}$, $\nu_\infty(\triangle) = 1$ und $\triangle(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in H$.

Die „zufällig“ erscheinende Wahl der Potenzen erklärt sich durch Theorem 13.22. Die Wahl des Faktors dient der Normalisierung.

Proposition 13.20. *(i)* $S_k = \{0\}$ *für* $k < 12$ *oder* $k = 14$.

(ii) $S_k = \triangle M_{k-12}$ *für* $k > 14$.

(iii) $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$ *für* $k > 2$.

In der Zerlegung in (iii) ist der erste Summand derjenige, der sehr gut verstanden ist. Alle Mysterien verstecken sich im zweiten Summanden.

Proposition 13.21. *Sei* $0 \leq k \in 2\mathbb{Z}$. *Dann gilt*

$$\dim M_k = \begin{cases} \left[\frac{k}{12}\right], & \textit{wenn } k \equiv 2 \mod 12 \\ \left[\frac{k}{12}\right] + 1, & \textit{wenn } k \not\equiv 2 \mod 12. \end{cases}$$

Die folgende Aussage ist sehr wichtig, dadurch sieht man dass M eine sehr einfache Struktur hat.

Theorem 13.22. *Die Abbildung* $\mathbb{C}[X,Y] \to M$ *definiert durch*

$$X \mapsto E_4$$
$$Y \mapsto E_6$$

ist ein Isomorphismus von Ringen mit $M = \bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k$. *Die* Hilbertfunktion *ist durch*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim(M_k) t^k = \frac{1}{(1-t^4)(1-t^6}$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{4n}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} t^{6m}\right)$$

definiert.

Beweis. Der Beweis verbleibt als Übung. $\square$

Definition 13.23. Wir definieren $j = \frac{E_4^3}{\triangle}$.

Wir teilen nicht durch 0, da $\triangle \neq 0$.

Bemerkung 13.24. *Dann gilt* $j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + \dots$ *Es gilt* $196884 = 196883 + 1$ *wobei der erste Summand mit der Monstergruppe zu tun hat. Die* j*-Funktion liefert einen Zusammenhang zwischen Gruppentheorie und Modulformen. Für weitere Details verweisen wir auf den Wikipediaartikel und die dort angegebenen Quellen*[5]*.*

Proposition 13.25. j *ist eine meromorphe modulare Form von Gewicht* 0 *und hat einen einfachen Pol in* ∞*. Außerdem definiert* j *eine Bijektion zwischen* $\Gamma\ H$ *und* $\mathbb{C}$*.*

Beweis. Die erste Aussage ist klar. Für die zweite müssen wir zeigen, dass für $\lambda \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$f_\lambda := E_4^3 - \lambda \triangle$$

genau eine Nullstelle in H hat. Aus der Gewichtsformel folgt

$$\nu_\infty(f_\lambda) + \frac{1}{3}\nu_\rho(f_\lambda) + \frac{1}{12}\nu_\mathrm{i}(f_\lambda) + \sum_{\substack{\tau \in \Gamma\backslash H \\ \tau \neq \rho, \mathrm{i}}} \nu_\tau(f_\lambda) = 1.$$

Dies vereinfacht sich durch Einführen geeigneter Variablen zu

$$\frac{n_\rho}{3} + \frac{n_\mathrm{i}2}{+} n_\tau = 1$$

mit nicht negativen $n_\rho, n_\mathrm{i}, n_\tau \in \mathbb{Z}$. Diese Gleichung hat Lösungen $(3,0,0), (0,2,0)$ und $(0,0,1)$. Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Proposition 13.26. *Die meromorphen modularen Formen von Gewicht* 0 *auf* H *sind genau die rationalen Funktionen in* j*.*

Beweis. Sei f eine meromorphe modulare Form von Gewicht 0. Wir nehmen an, dass f Pole der Ordnung $m_1, \dots, m_n$ in $\tau_1, \dots, \tau_n$ hat. Dann ist

$$f(z) \prod_{i=1}^{n} (j(z) - j(\tau_i))^{m_i}$$

holomorph in H. Daher können wir ohne Einschränkung annehmen, dass f holomorph in H ist. Für geeignetes $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ gilt $f\triangle^k \in M_{12k}$ und wir können Funktion als

$$f\triangle^k = \sum_{4i+6j=12k} \alpha_{ij} E_4^i E_6^j$$

[5] `https://de.wikipedia.org/wiki/J-Funktion`

schreiben. Damit gilt

$$f = \sum_{i+j=k} \alpha_{ij} \frac{E_4^{3i}}{\triangle^i} \frac{E_6^{2j}}{\triangle^j},$$

was die Behauptung beweist, da $\frac{E_4^3}{\triangle} = j$ und $\frac{E_6^2}{\triangle} = j + c$ für ein geeignetes c gilt, da auch E_4^3 und $\triangle$ eine Basis von M_{12} bilden. $\square$