TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

FACHBEREICH MATHEMATIK

Automorphe Formen

Wintersemester 2018/2019

Vorlesung gehalten von Prof. Nils Scheithauer

Typeset in LaTeX von Jonas Lenz
Fehler können an jlenz@mathematik.tu-darmstadt.de gemeldet werden

Version vom 2. September 2019

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Sei G eine Gruppe, die auf einem topologischen Raum X operiert. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ heißt *automorphe Form auf* X, wenn

$$f(gx) = \Psi(g, x)f(x)$$

für alle $g \in G$ und $x \in X$ für eine geeignete Funktion $\Psi\colon G \times X \to \mathbb{C}$ gilt. Häufig werden noch weitere Bedingungen zum Beispiel an das Wachstum gefordert. Einer automorphen Form kann man eine automorphe Darstellung zuordnen und dieser wiederum eine L-Reihe. Es wird vermutet, dass diese automorphen L-Reihen dieselben sind, die man in der arithmetischen algebraischen Geometrie findet (Langlands-Programm). Ein Spezialfall dieser Korrespondenz ist der Modularitätssatz[1]

Satz 0.1 (Breuil, Conrad, Diamond, Taylor (2001), Wiles (1995) vermutet von Taniyama und Shimura (1958))**.** *Sei E eine rationale elliptische Kurve mit Führer N. Dann gibt es eine Neuform $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ mit*

$$L_f = L_E.$$

Beweis. Der erste Teilbeweis wurde 1995 von Andrew Wiles als Teil des Beweises des letzten Satzes von Fermat geführt [Wil95]. 6 Jahre später folgte der vollständige Beweis (siehe [BCDT01]). □

In dieser Vorlesung betrachten wir automorphe Formen auf $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_\mathbb{Q})$ für $n = 1$ und wenn es die Zeit erlaubt auch für $n = 2$.

[1]https://de.wikipedia.org/wiki/Modularitätssatz

Literatur

Goldfeld, Hundley: Automorphic representations and L-functions for the general linear group, Cambridge University Press.
Skript von Herrn Brunier

1 Absolutbeträge

Wir wollen die sogenannten p-adischen Zahlen betrachten, die als Abschluss der rationalen Zahlen bezüglich einer geeigneten Topologie entstehen. Dafür betrachten wir zunächst den allgemeinen Begriff des Absolutbetrags sowie einige Eigenschaften.

Definition 1.1. Sei K ein Körper. Ein *Absolutbetrag auf K* ist eine Abbildung $|\cdot| : K \to \mathbb{R}$ mit

i) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $|xy| = |x|\,|y|$,

iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$

für alle $x, y \in K$. Gilt zusätzlich die starke Dreiecksungleichung

$$|x + y| \leq \max(|x|, |y|),$$

so heißt $|\cdot|$ *nicht-archimedisch*. Ist $|\cdot|$ ein Betrag auf K, so definiert

$$d(x, y) \coloneqq |x - y|$$

eine Metrik auf K. Zwei Absolutbeträge heißen *äquivalent*, wenn sie die selbe Topologie auf K erzeugen.

Zunächst bemerken wir eine besonders einfache Charakterisierung äquivalenter Absolutbeträge. Danach geben wir Beispiel für stetige Abbildungen an. Die Beweise der nächsten beiden Sätze bleiben dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

Satz 1.2. *Seien $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ zwei Absolutbeträge auf K. Dann sind äquivalent*

i) $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ erzeugen die selbe Topologie,

ii) es existiert $c > 0$ mit $|x|_1 = |x|_2^c$ für alle $x \in K$.

Beweis. Dies ist die Äquivalenz von i) und iii) in [Gou93, Lemma 3.1.2]. □

Satz 1.3. *Sei* $|\cdot|$ *ein Absolutbetrag auf* K*. Dann sind die folgenden Abbildungen stetig:*

i) $K \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$,

ii) $K \to K, x \mapsto -x$,

iii) $K \times K \to K, (x, y) \mapsto x + y$,

iv) $K^* \to K^*, x \mapsto x^{-1}$,

v) $K \times K \to K, (x, y) \mapsto xy$.

In der Analysis wurden die reellen Zahlen als Vervollständigung der rationalen Zahlen bezüglich des Betrages eingeführt. Das Konzept der Vervollständigung lässt sich auch auf allgemeine Absolutbeträge verallgemeinern.

Satz 1.4. *Sei* K *ein Körper mit Absolutbetrag* $|\cdot|$*. Dann gibt es eine Körpererweiterung* $\hat{K}/K$ *und eine Fortsetzung von* $|\cdot|$ *auf* $\hat{K}$*, sodass* K *dicht in* $\hat{K}$ *und* $\hat{K}$ *vollständig bezüglich* $|\cdot|$ *ist.*[1] *Ist* $\tilde{K}$ *ein weiterer Erweiterungskörper von* K *mit obigen Eigenschaften, so existiert genau ein Körperisomorphismus* $\tilde{K} \to \hat{K}$*, der auf* K *die Identität ist und die Absolutbeträge ineinander überführt.*

Beweis. Sei $K' := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folge bezüglich } |\cdot|\}$ die Menge aller Cauchy-Folgen in K. Dann ist K' ein kommutativer Ring mit 1 und man prüft leicht nach, dass $N := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Nullfolge}\}$ ein maximales Ideal ist. Somit ist $\hat{K} = {}^{K'}/_{N}$ ein Körper. Die Abbildung

$$\begin{aligned} K &\to \hat{K} \\ x &\mapsto (x) + N \end{aligned}$$

ist ein Körperhomomorphismus und somit injektiv. Der Absolutbetrag auf $\hat{K}$ wird durch

$$|(x_n)| = \lim_{n\to\infty} |x_n|$$

definiert, wobei $|x_n|$ aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichung eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist obiger Grenzwert wohldefiniert.

[1] Wir bezeichnen auch die Fortsetzung auf $\hat{K}$ mit $|\cdot|$.

Nach Konstruktion ist $\hat{K}$ vollständig und K ist dicht in $\hat{K}$. Sei $\tilde{K}$ ein weiterer Erweiterungskörper von K mit obigen Eigenschaften. Die Einbettung $K \hookrightarrow \hat{K}$ ist auf einer dichten Teilmenge von $\tilde{K}$ definiert. Da die Einbettung die Absolutbeträge erhält, ist sie stetig und lässt sich somit eindeutig zu einer stetigen Abbildung $\tilde{K} \to \hat{K}$ fortsetzen. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus, der die Absolutbeträge erhält. Die Eindeutigkeit ist aus der Konstruktion klar. □

Bemerkung 1.5. *Im Gegensatz ist der algebraische Abschluss nicht eindeutig bis auf* eindeutigen *Isomorphismus.*

2 Die p-adischen Zahlen

In diesem Kapitel betrachten wir nun bestimmte Absolutbeträge und vervollständigen $\mathbb{Q}$ bezüglich deren Topologien.

Für $x \in \mathbb{Q}$ definieren wir

$$|x|_\infty := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Dann ist $|\cdot|_\infty$ ein Absolutbetrag.

Lemma 2.1. *Sei $p > 0$ eine Primzahl. Wir schreiben $x \in \mathbb{Q}^*$ als $x = p^n \frac{a}{b}$ mit $p \nmid ab$ und definieren*

$$|x|_p := p^{-n}.$$

*Außerdem setzen wir $|0|_p = 0$. Dann ist der p-*adische Betrag *$|\cdot|_p$ ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$, das heißt die starke Dreiecksungleichung*

$$|x+y|_p \leq \max\left(|x|_p, |y|_p\right).$$

gilt. Dabei gilt im Fall $|x|_p \neq |y|_p$ Gleichheit. Mit d_p bezeichnen wir die Metrik, die durch $|\cdot|_p$ induziert wird.

Beweis. Dies ist Lemma 4.1.3 in [Dei10]. □

Beispiel 2.2. i) Für eine Primzahl p konvergiert die Folge $1, p, p^2, \ldots$ p-adisch gegen 0, da $d_p(0, p^n) = p^{-n} \to 0$.

ii) Die Folge $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \ldots$ ist keine Cauchy-Folge bezüglich $|\cdot|_p$.

Tatsächlich kann man die Absolutbeträge auf $\mathbb{Q}$ leicht charakterisieren.

Theorem 2.3 (Ostrowski)**.** *Ein Absolutbetrag auf* $\mathbb{Q}$ *ist äquivalent zu* $|\cdot|_\infty$ *oder zu einem* $|\cdot|_p$ *für eine Primzahl* p*.*

Beweis. Einen Beweis findet man in [Gou93, Theorem 3.1.3]. Hierbei muss man unterscheiden, ob der Absolutbetrag archimedisch ist, oder nicht. □

Die folgende Formel wird an einigen Stellen nützlich sein.

Satz 2.4 (Produktformel)**.** *Sei* $x \in \mathbb{Q}^*$*. Dann gilt*

$$|x|_\infty \prod_p |x|_p = 1.$$

Beweis. Dies sieht man durch eine einfache Rechnung ein, aufgeschrieben ist diese zum Beispiel in [Dei10, Proposition 4.1.4]. □

Bemerkung 2.5. *Die Primzahlen* $2, 3, \ldots$ *werden als* endliche *Primzahlen bezeichnet und* ∞ *als* unendliche *Primzahl. Wir bezeichnen endliche Primzahlen meist mit* p *und beliebige Primzahlen mit* ν*.*

Definition 2.6. Wir fixieren eine endliche Primzahl p und definieren

$$\begin{aligned} K(x,r) &:= \{y \in \mathbb{Q} \mid d_p(x,y) < r\}, \\ \overline{K}(x,r) &:= \{y \in \mathbb{Q} \mid d_p(x,y) \leq r\}, \end{aligned}$$

als *offener* beziehungsweise *abgeschlossener Ball* bezüglich $|\cdot|_p$ um x mit Radius r.

Im Unterschied zu den bekannten Bällen aus Analysis I besitzen die Bälle bezüglich der p-adischen Beträge einige überraschende Eigenschaften. Beispielsweise ist einem beliebigen Ball jeder innere Punkt ein Mittelpunkt. Hierbei geht stark ein, dass wir mit einem nicht-archimedischen Betrag arbeiten und der p-adische Betrag nur abzählbar viele Werte annimmt.

Satz 2.7. *Sei* p *eine endliche Primzahl,* $x \in \mathbb{Q}$ *und* $r \in \mathbb{R}_{>0}$*.*

(i) Für $x' \in K(x,r)$ *gilt*

$$K(x',r) = K(x,r).$$

(ii) Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ *gilt*

$$\begin{aligned} K(x,r) &= \overline{K}(x,r-\varepsilon), \\ \overline{K}(x,r) &= K(x,r+\varepsilon). \end{aligned}$$

(iii) Für $r \in \mathbb{R} \setminus \{p^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$K(x,r) = \overline{K}(x,r).$$

(iv) Sei $r = p^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$K(x,p^n) = \overline{K}(x,p^{n-1}).$$

Außerdem gibt es $x_1, \ldots, x_{p-1} \in \overline{K}(x,p^n)$ mit

$$\overline{K}(x,p^n) = \overline{K}(x,p^{n-1}) \cup \overline{K}(x_1,p^{n-1}) \cup \cdots \cup \overline{K}(x_{p-1},p^{n-1})$$

wobei die Vereinigungen disjunkt sind.

Beweis. (i) Sei $x' \in K(x,r)$ beliebig. Dann gilt für jedes $y \in K(x,r)$, dass

$$\begin{aligned} |x' - y|_p &= |(x' - x) + (x - y)|_p \\ &\leq \max(|x' - x|_p, |x - y|_p) < r. \end{aligned}$$

Also folgt $y \in K(x',r)$ und somit $K(x,r) \subseteq K(x',r)$. Die umgekehrte Inklusion folgt analog.

(ii) und (iii) Die Distanzfunktion $d_p(x,y) = |x - y|_p$ nimmt höchstens abzählbar viele Werte an, nämlich p^n für ein $n \in \mathbb{Z}$ oder 0. Also gilt für $r > 0$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, dass

$$\begin{aligned} |x - y|_p < r &\Leftrightarrow |x - y|_p \leq r - \varepsilon, \\ |x - y|_p \leq r &\Leftrightarrow |x - y|_p < r + \varepsilon. \end{aligned}$$

Falls r nicht von der Form p^n für ein $n \in \mathbb{Z}$ ist, dann gilt

$$|x - y|_p < r \Leftrightarrow |x - y|_p \leq r.$$

Dies beweist (ii) und (iii).

(iv) Nach Definition der Norm gilt

$$|x - y|_p < p^n \Leftrightarrow |x - y|_p \leq p^{n-1}.$$

Die restliche Aussage verbleibt als Übung. □

Auch für Cauchyfolgen gilt eine stärkere Eigenschaft.

Satz 2.8. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ eine p-adische Cauchyfolge, die nicht p-adisch gegen 0 konvergiert. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n|_p$ für alle $n > N$ konstant ist.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich $|\cdot|_p$ und somit $(|x_n|_p)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Daher ist $(|x_n|_p)$ konvergent in $\mathbb{R}$. Da es keine Nullfolge ist und nur Werte p^n für $n \in \mathbb{Z}$ annimmt, muss sie stationär werden. □

Definition 2.9. Wir definieren $\mathbb{Q}_p$ als die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_p$. Die obigen Eigenschaft von $|\cdot|_p$ setzen sich auf $\mathbb{Q}_p$ fort.

Beispiel 2.10. Sei $x \in \mathbb{Q}_p^*$. Aufgrund der Stetigkeit der Norm gilt dann $|x|_p = p^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.

Als nächstes beweisen wir den Satz von Bolzano-Weierstraß für p-adische Zahlen.

Theorem 2.11. *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{Q}_\nu$ hat einen Häufungspunkt.*

Beweis. Für $\nu = \infty$ ist dies die Aussage des Satzes von Bolzano-Weierstraß, bekannt aus Analysis I. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}_p$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{Q}_p$. Nach Definition ist jedes x_n eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_p$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir $x'_n \in \mathbb{Q}$ sodass

$$|x_n - x'_n|_p < p^{-n}$$

gilt, dies geht aufgrund der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}_p$. Die Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ ist beschränkt in $|\cdot|_p$. Wir werden zeigen, dass $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge besitzt, die Cauchy ist. Diese Teilfolge definiert eine Zahl $x' \in \mathbb{Q}_p$. Die zugehörige Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird ebenfalls gegen x konvergieren. Wir konstruieren die Cauchy Teilfolge von $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgendermaßen. Da $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existieren $y \in \mathbb{Q}$ und $m \in \mathbb{Z}$ mit $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{K}(y, p^m)$. Dieser zerfällt in endlich viele (p Stück) disjunkte abgeschlossene Bälle mit Radius p^{m-1}. Mindestens einer dieser Bälle muss unendlich viele Folgenglieder $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthalten. Beginnend mit x_1 entfernen wir alle Elemente der Folge, die nicht in diesem Ball liegen. Dieser Ball zerfällt erneut und so weiter. Dadurch erhalten wir eine Teilfolge $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass alle x''_i für alle $i \geq N$ in einem abgeschlossen Ball mit Radius p^{m-N} liegen. Damit folgt

$$\left|x''_i - x''_j\right|_p \leq p^{m-N}$$

für alle $i, j \geq N$. Somit wir haben unsere gewünschte Cauchyfolge konstruiert. □

Als Konsequenz halten wir folgendes Resultat fest, welches für $p = \infty$ ebenfalls aus der Analysis bekannt ist.

Korollar 2.12. *Eine Menge ist in $\mathbb{Q}_p$ genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Dies gilt, da in metrischen Räumen Folgenkompaktheit äquivalent zu Kompaktheit ist (vgl. z. B. [Man15, Proposition 6.22]). □

Definition 2.13. Wir definieren die *p-adischen ganzen Zahlen* durch

$$\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}.$$

Mit der starken Dreiecksungleichung kann man zeigen, dass dies ein Unterring von $\mathbb{Q}_p$ ist.

Die nächste Aussage im nächsten Kapitel wichtig werden, wenn wir ein geeignetes Maß auf $\mathbb{Q}_p$ definieren wollen. Dafür spielen sowohl die Kompaktheit als auch die Offenheit von $\mathbb{Z}_p$ eine große Rolle.

Satz 2.14. *Die p-adischen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ sind beschränkt, abgeschlossen und offen. Insbesondere ist $\mathbb{Z}_p$ kompakt.*

Beweis. Da die Abbildung $|\cdot|_p$ stetig ist, folgt die Abgeschlossenheit von $\mathbb{Z}_p$. Mit Satz 2.7 (ii) ist klar, dass $\mathbb{Z}_p$ offen ist. Die Beschränktheit ist klar. Mit Korollar 2.12 folgt dann die Kompaktheit. □

Satz 2.15. *Sei $x \in \mathbb{Z}_p$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann existiert ein eindeutiges $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq \alpha < p^n$ und*

$$|x - \alpha|_p \leq p^{-n}.$$

Beweis. Da $\mathbb{Q}$ nach Konstruktion dicht in $\mathbb{Q}_p$ ist, existiert $t \in \mathbb{Q}$ mit $|t - x|_p \leq p^{-n}$. Dann gilt

$$|t|_p = |(t - x) + x|_p \leq \max(|t - x|_p, |x|_p) \leq 1,$$

das heißt $t \in \mathbb{Z}_p$ und $t = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) = 1$ und $(p, b) = 1$. Letzteres gilt, da $\|t\|_p \leq 1$. Wähle $b' \in \mathbb{Z}$ mit $bb' = 1 \mod p^n$. Dies existiert mit dem Lemma von Bézout wegen $(p^n, b) = 1$. Dann gilt

$$|t - ab'|_p = \left|\frac{a}{b} - ab'\right|_p$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\frac{a}{b}(1-bb')\right|_p \\
&= \left|\frac{a}{b}\right|_p \underbrace{|1-bb'|_p}_{\le p^{-n}} \\
&\le p^{-n}.
\end{aligned}
$$

Für $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha = ab' \mod p^n$ und $0 \le \alpha < p^n$ gilt

$$|t-\alpha|_p \le p^{-n},$$

sowie wegen der starken Dreicksungleichung

$$
\begin{aligned}
|x-\alpha|_p &= |(x-t)+(t-\alpha)|_p \\
&\le \max(|x-t|_p, |t-\alpha|_p) \le p^{-n}.
\end{aligned}
$$

Sei β ein anderes solches Element. Dann gilt $|\alpha - \beta| \le p^{-n}$, was $p^n \mid (\alpha - \beta)$ und somit $\alpha = \beta$ impliziert. $\square$

Korollar 2.16. *Es gilt $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_p$, insbesondere existiert für jedes $x \in \mathbb{Z}_p$ eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ mit $0 \le \alpha_n < p^n$, $\alpha_n = \alpha_{n-1} \mod p^{n-1}$ und $|x - \alpha_n| \le p^{-n}$. Darüber hinaus ist diese Folge eindeutig.*

Sei umgekehrt $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ eine Folge mit $0 \le \alpha_n < p^n$ sowie $\alpha_n = \alpha_{n-1} \mod p^{n-1}$. Dann ist $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Konstruktion eine Cauchyfolge und konvergiert daher gegen ein $x \in \mathbb{Z}_p$.

Bisher haben wir die p-adischen Zahlen analytisch konstruiert. Jetzt werden wir eine algebraische Konstruktion kennenlernen.

Definition 2.17. Eine Folge von Restklassen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wobei $\alpha_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ist, die $\alpha_n = \alpha_{n-1} \mod p^{n-1}$ erfüllt, heißt *kompatibles System*. Die Menge aller kompatiblen System heißt *projektiver Limes* des Systems. Der projektive Limes $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ist ein Ring bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation.

Theorem 2.18. *Die Abbildung*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z}_p &\to \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\
x &\mapsto (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}
\end{aligned}
$$

ist ein Ringisomorphismus. Weiterhin ist die Abbildung

$$\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

$$x \mapsto \alpha_n$$

surjektiv und ihr Kern ist durch $p^n\mathbb{Z}_p$ gegeben. Also folgt

$$\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

aufgrund des Homomorphiesatzes.

Lemma 2.19. *Sei $x \in \mathbb{Q}_p$ mit $|x|_p = p^n$ für ein $n > 0$. Dann gilt $|p^n x|_p = 1$, sodass $p^n x \in \mathbb{Z}_p$ folgt. Dies impliziert*

$$\mathbb{Q}_p = \bigcup_{n=1}^{\infty} p^{-n}\mathbb{Z}_p$$

sodass $\mathbb{Q}_p$ der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}_p$ ist.

Dies liefert nach der bisherigen analytischen Beschreibung von $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Z}_p$ nun auch eine algebraische Beschreibung.

Für $x \in \mathbb{Q}_p^*$ gilt $|x^{-1}|_p = \frac{1}{|x|_p}$ und somit auch

$$\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Z}_p \mid |x|_p = 1\}.$$

Proposition 2.20. *Jedes $x \in \mathbb{Z}_p$ hat eine Darstellung der Form*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i$$

mit $b_i \in \{0, \dots, p-1\}$. Weiterhin ist diese Darstellung eindeutig.

Beweis. Für $x \in \mathbb{Z}_p$ gibt es eine eindeutige Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ mit $0 \leq \alpha_n < p^n$, $\alpha_n = \alpha_{n-1} \mod p^{n-1}$ und $|x - \alpha_n| \leq p^{-n}$. Insbesondere lassen sich die α_n schreiben durch

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i$$

wobei $b_i \in \{0, \dots, p-1\}$ gilt. □

Proposition 2.21. *Sei $x \in \mathbb{Q}_p$ mit $|x|_p = p^n$. Dann hat x eine eindeutige Darstellung der Form*

$$x = b_{-n}p^{-n} + b_{-n+1}p^{-n+1} + \dots,$$

wobei $b_i \in \{0, \dots, p-1\}$ und $b_{-n} \neq 0$.

Bemerkung 2.22. *Die Elemente in* $\mathbb{Z}_p^*$ *sind von der Form*

$$x = b_0 + b_1 p + \dots$$

mit $b_0 \neq 0$.

Definition 2.23. Ein Hausdorffraum heißt *lokalkompakt*, falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat.

Beispiel 2.24. (i) Ein kompakter Hausdorffraum ist lokalkompakt.

(ii) $(\mathbb{R} = \mathbb{Q}_\infty, |\cdot|_\infty)$ ist lokalkompakt.

Proposition 2.25. $\mathbb{Q}_p$ *ist lokal kompakt.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{Q}_p$ und wähle $r > 0$. Dann ist $\overline{K}(x, r)$ eine kompakte Umgebung von x. □

Proposition 2.26. $\mathbb{Q}_p^* = \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ *ist lokalkompakt.*

Wir haben bereits gesehen, dass $\mathbb{Z}_p$ offen, abgeschlossen und kompakt ist. Analog brauchen wir folgendes Resultat für die Konstruktion eines Maßes auf $\mathbb{Q}_p^*$.

Proposition 2.27. $\mathbb{Z}_p^*$ *ist offen, abgeschlossen und kompakt.*

Beweis. Dies folgt aus der Stetigkeit von $|\cdot| : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}$. □

Proposition 2.28. $(\mathbb{Q}_p, +)$, $(\mathbb{Z}_p, +)$, $(\mathbb{Q}_p^*, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ *sind lokalkompakte topologische Gruppen*

3 Integration

Definition 3.1. Sei X ein Hausdorffraum. Die *Borel σ-Algebra* $\sigma(X)$ von X ist die kleinste σ-Algebra, die die offenen Mengen von X enthält. Ein *Radonmaß* auf X ist ein Maß $\mu\colon \sigma(X) \to [0, \infty]$ sodass

i) μ ist lokal endlich, das heißt für jedes $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U von x die endliches Maß hat.

ii) μ ist *regulär von innen*, das heißt

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A \text{ kompakt }\}$$

gilt für alle $A \in \sigma(X)$.

Beispiel 3.2. Das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$ ist ein Radonmaß.

Beweis. Es ist klar, dass das Lebesguemaß lokal endlich ist. Die Regularität von innen folgt aus [Els18, II, 7.2]. □

Die beiden folgenden Theoreme sichern uns die Existenz und Eindeutigkeit eines in einem gewissen Sinne schönen Maßes auf $\mathbb{Q}_p$ beziehungsweise allgemeiner auf lokalkompakten Hausdorffgruppen. Weitere Details zu dieser Theorie findet man in Kapitel VII §2,3 in [Els18].

Theorem 3.3 (Riesz)**.** *Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und*

$$I\colon \mathrm{C}_c(X) \to \mathbb{C}$$

eine positive lineare Form, *das heißt $I(f) \geq 0$ für alle $0 \leq f \in \mathrm{C}_c(X)$. Dann existiert ein eindeutiges Radonmaß $\mu\colon \sigma(X) \to [0, \infty]$ mit $I(f) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$. Hierbei bezeichnet $\mathrm{C}_c(X)$ den Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf X. Außerdem gilt für kompakte Mengen K*

$$\mu(K) = \inf\{I(f) \mid f \in \mathrm{C}_c(X), f \geq \chi_K\}$$

sowie

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A \textit{ kompakt }\}$$

für alle $A \in \sigma(X)$.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [Els18, VII, 2.5]. □

Theorem 3.4 (Haar)**.** *Sei* G *eine lokalkompakte Hausdorffgruppe. Dann gibt es ein linksinvariantes Radonmaß* μ *auf* G*. Dieses ist eindeutig bis auf einen positiven Faktor und heißt* Haarmaß *auf* G*.*

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [Els18, VII, 3.12]. □

Beispiel 3.5. i) Auf einer diskreten Gruppe ist das Zählmaß ein Haarmaß.

ii) Auf $(\mathbb{R}^n, +)$ ist das Lebesguemaß ein Haarmaß.

iii) Auf $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ist $\frac{\mathrm{d}x}{|x|}$, wobei $\mathrm{d}x$ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ ist, ein Haarmaß.

iv) Ein Haarmaß auf $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ ist durch

$$\frac{\mathrm{d}x_{11}\mathrm{d}x_{12}\mathrm{d}x_{21}\mathrm{d}x_{22}}{|\det(M)|^2}$$

mit $M = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ gegeben.

Theorem 3.6. *Sei* G *eine lokalkompakte Hausdorffgruppe und* $\emptyset \neq K \subseteq G$ *kompakt mit positivem Maß bezüglich eines Haarmaßes auf* G*. Dann gibt es ein eindeutiges Haarmaß* μ *auf* G*, das* $\mu(K) = 1$ *erfüllt.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass jede kompakte Menge endliches Maß hat. Sei dafür $K \subseteq G$ kompakt. Für $x \in K$ existiert eine offene Umgebung U_x von x mit endlichem Maß, da das Maß lokal endlich ist. Die Familie $\{U_x \mid x \in K\}$ ist eine offene Überdeckung der kompakten Menge K und besitzt somit eine endliche Teilüberdeckung $\{U_x \mid x \in F\}$ für eine endliche Teilmenge $F \subseteq K$. Wegen der Subadditivität und Monotnie von μ gilt dann

$$\mu(K) \leq \mu\left(\bigcup_{x \in F} U_x\right) \leq \sum_{x \in F} \mu(U_x) < \infty.$$

Also hat jede kompakte Menge endliches Maß und wir können das Haarmaß geeignet normieren. □

Definition 3.7. Sei G eine lokalkompakte Hausdorffgruppe und μ ein Haarmaß auf G. Dann definiert für $x \in G$

$$\mu_x(A) = \mu(Ax)$$

ein linksinvariantes Maß auf G.

Definition 3.8. Die Eindeutigkeit impliziert $\mu_x = \delta(x)\mu$ für ein $\delta(x) \in \mathbb{R}_{>0}$. Insbesondere ist $\delta(x)$ unabhängig von der Wahl von μ. Die Funktion

$$\begin{aligned} \delta\colon G &\to \mathbb{R}_{>0} \\ x &\mapsto \delta(x) \end{aligned}$$

heißt *modulare Funktion* von G.

Proposition 3.9. *Die Abbildung δ ist ein Morphismus topologischer Gruppen.*

Beweis. Für $x, y \in G$ gilt

$$\begin{aligned} \delta(xy)\mu(A) &= \mu_{xy}(A) = \mu(Axy) \\ &= \mu_y(Ax) = \delta(y)\delta(x)\mu(A). \end{aligned}$$

Der Rest verbleibt als Übungsaufgabe. □

Beispiel 3.10. Man kann zeigen, dass jeder stetiger Gruppenhomomorphismus $h\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ konstant sein muss. Daraus folgt, dass jedes Haarmaß auf $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ auch rechtsinvariant ist.

Wir betrachten nun die lokalkompakten Hausdorffgruppen $\mathbb{Q}_p$ sowie $\mathbb{Q}_p^*$. Wir normieren das Haarmaß μ auf $\mathbb{Q}_p$ durch die Forderung $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$.

Als nächstes betrachten wir die modulare Funktion von $\mathbb{Q}_p$, dies wird uns auch eine Transformationsformel auf $\mathbb{Q}_p$ liefern.

Proposition 3.11. *Für eine messbare Menge $A \subseteq \mathbb{Q}_p$ und $x \in \mathbb{Q}_p^*$ gilt*

$$\mu(Ax) = |x|_p\, \mu(A).$$

Beweis. Für $x \in \mathbb{Q}_p^*$ definiert

$$\mu_x(A) = \mu(Ax)$$

ein Radonmaß auf $\mathbb{Q}_p$. Dies ist linksinvariant, da wegen der Linksinvarianz von μ

$$\mu_x(y + A) = \mu((y + A)x) = \mu(yx + Ax) = \mu_x(A)$$

gilt. Also folgt aus der Eindeutigkeit, dass $\mu_x(A) = c(x)\mu(A)$ mit $c(x) \in \mathbb{R}_{>0}$ unabhängig von A gilt. Sei zunächst $|x|_p = p^{-n}$ für ein $n > 0$. Dann gilt $x\mathbb{Z}_p = p^n\mathbb{Z}_p$ sowie

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{j=0}^{p^n-1} (j + p^n\mathbb{Z}_p)$$

als disjunkte Vereinigung. Aus der σ-Additivität folgt daher

$$\begin{aligned} \mu(\mathbb{Z}_p) &= \sum_{j=0}^{p^n-1} \mu(j + p^n\mathbb{Z}_p) \\ &= p^n\mu(p^n\mathbb{Z}_p), \end{aligned}$$

was $|x|_p \, \mu(\mathbb{Z}_p) = \mu(x\mathbb{Z}_p)$ impliziert. Also ist in diesem Fall $c(x) = |x|_p$. Als nächstes betrachten wir den Fall $|x|_p = p^n$ mit $n > 0$. Dann gilt $\mu(A) = \mu(x^{-1}xA) = |x^{-1}|_p \, \mu(xA)$, also folgt $\mu(xA) = |x|_p \, \mu(A)$. □

Als Konsequenz erhalten wir wie angekündigt folgende nützliche Transformationsformel für $\mathbb{Q}_p$.

Korollar 3.12. *Sei f integrierbar. Dann gilt für $a \in \mathbb{Q}_p^*$*

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(a^{-1}x) \, \mathrm{d}\mu(x) = |a|_p \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Beweis. Wir wollen die letzte Proposition verwenden Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Q}_p} f(a^{-1}x) \, \mathrm{d}\mu(x) &= \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) \, \mathrm{d}\mu_a(x) \\ &= |a|_p \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) \, \mathrm{d}\mu(x). \end{aligned}$$ □

Wir werden das normierte Haarmaß auf $\mathbb{Q}_p$ mit $\mathrm{d}x$ notieren.

Beispiel 3.13. Wir können jetzt das Volumen von $\mathbb{Z}_p^* = \bigcup_{j=1}^{p-1}(j + p\mathbb{Z}_p)$ berechnen. Es gilt

$$\mu_{\mathrm{d}x}(\mathbb{Z}_p^*) = \sum_{j=1}^{p-1} \mu_{\mathrm{d}x}(j + p\mathbb{Z}_p)$$

$$
\begin{aligned}
&= (p-1)\mu_{\mathrm{d}x}(p\mathbb{Z}_p)\\
&= \frac{p-1}{p}\mu_{\mathrm{d}x}(\mathbb{Z}_p)\\
&= \frac{p-1}{p}.
\end{aligned}
$$

Wir konstruieren nun ein Haarmaß auf $\mathbb{Q}_p^*$. Für $A \subseteq \mathbb{Q}_p^* \subseteq \mathbb{Q}_p$ definieren wir

$$\mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x|_p}}(A) \coloneqq \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_A(x)\frac{\mathrm{d}x}{|x|_p}.$$

Da dies in 0 nicht definiert ist, setzen wir den Integranden in diesem Punkt auf 0. Dann gilt für $y \in \mathbb{Q}_p^*$, dass

$$
\begin{aligned}
\mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x|_p}}(yA) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_{yA}(x)\frac{\mathrm{d}x}{|x|_p}\\
&= \left|y^{-1}\right|_p \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_A(y^{-1}x)\frac{\mathrm{d}x}{|y^{-1}x|_p}\\
&= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_A(x)\frac{\mathrm{d}x}{|x|_p}\\
&= \mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x|_p}}(A).
\end{aligned}
$$

Also ist $\mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x|_p}}$ linksinvariant. Das Volumen von $\mathbb{Z}_p^*$ bezüglich $\mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x|_p}}$ ist

$$
\begin{aligned}
\mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x|_p}}(\mathbb{Z}_p^*) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(\mathbb{Z}_p^*)\frac{\mathrm{d}x}{|x|_p}\\
&= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(\mathbb{Z}_p^*)\ \mathrm{d}x = \mu_{\mathrm{d}x}(\mathbb{Z}_p^*)\\
&= \frac{p-1}{p},
\end{aligned}
$$

wobei wir $|x|_p = 1$ für alle $x \in \mathbb{Z}_p^*$ benutzt haben.

Theorem 3.14. $\frac{\mathrm{d}x}{|x|_p}$ *definiert ein Haarmaß auf* $\mathbb{Q}_p^*$. *Das normierte Haarmaß*

$$\mathrm{d}^*x = \frac{p}{p-1}\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}$$

erfüllt $\mu_{\mathrm{d}^*x}(\mathbb{Z}_p^*) = 1$.

Für $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $s \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$a^s = \mathrm{e}^{s\log(a)}.$$

Die Riemannsche ζ-Funktion ist durch

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert. Die Reihe konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > 1$ und besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ mit einer Polstelle vom Grad 1 in $s = 1$. Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ werden wir

$$\int_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x|_p^s \, \mathrm{d}^* x$$

berechnen. Wir können das Integrationsgebiet durch

$$\mathbb{Z}_p \setminus \{0\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} p^k \mathbb{Z}_p^*$$

in disjunkte Mengen zerlegen. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x|_p^s \, \mathrm{d}^* x &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{p^k \mathbb{Z}_p^*} |x|_p^s \, \mathrm{d}^* x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(p^{-k}\right)^s \int_{p^k \mathbb{Z}_p^*} \mathrm{d}^* x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(p^{-k}\right)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \left(p^{-s}\right)^k \\
&= \frac{1}{1 - p^{-s}}.
\end{aligned}$$

Dies scheint zunächst „zufällig“ zu sein, aber wir werden später sehen, dass es hier einen tieferen Zusammenhang gibt.

4 Adele

Wir wollen alle Vervollständigungen von $\mathbb{Q}$ gleichzeitig betrachten. Dafür betrachten wir den lokalkompakten Ring

$$\mathbb{A} = \{(x_\infty, x_2, x_3, x_5, \ldots,) \mid x_\nu \in \mathbb{Q}_\nu \text{ und } x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ a.e.}\}$$

von Adelen.

Wir erinnern kurz an die Definition der Produkttopolgie.

Definition 4.1. Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die Produkttopologie auf $\prod_{i\in I} X_i$ ist die gröbste Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$, bezüglich der alle Projektionen stetig sind. Eine Basis für diese Topologie ist durch $\{\prod_{i\in I} O_i\}$ gegeben, wobei O_i für alle $i \in I$ offen ist und $O_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ gilt.

Mengen dieser Form heißen *offene Rechtecke.*

Wir benötigen folgenden klassischen Satz aus der Topologie.

Theorem 4.2 (Tychonoff)**.** *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Dann ist das Produkt der X_i genau dann kompakt, wenn alle X_i kompakt sind.*

Beweis. Für einen Beweis siehe beispielsweise [Man15, Theorem 7.7] □

Theorem 4.3. *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Hausdorffräumen. Dann ist $\prod_{i\in I} X_i$ lokalkompakt genau dann wenn alle X_i lokalkompakt und alle bis auf endlich viele sogar kompakt sind.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Da die Projektionen $p_j\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ stetig sind, folgt, dass alle X_i lokalkompakt sind. Sei $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ und $C = (C_i)_{i\in I}$ eine kompakte Umgebung von x. C enthält eine Vereinigung offener Rechtecke. Da alle bis auf endlich viele Komponenten eines offenen Rechtecks der ganze Raum sind, gilt das gleich auch für C, das heißt

$$\pi_i(C) = X_i$$

für alle bis auf endlich viele $i \in I$.
„$\Leftarrow$": Da mit $J = \{i \in I \mid X_i \text{ kompakt }\}$, die Menge $I \setminus J$ endlich ist, folgt mit

$$X = \prod_{i \in J} X_i \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i,$$

dass X als Produkt einer kompakten und einer lokalkompakten Menge lokalkompakt ist. $\square$

Beispiel 4.4. $\prod_{p<\infty} \mathbb{Q}_p$ ist nicht lokalkompakt und daher gibt es dort kein Haarmaß.

Daher benötigen einen für unsere Zwecke besseren Begriff des Produkts.

Definition 4.5. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie lokalkompakter Hausdorffräume und für jedes $i \in I$ sei $\emptyset \neq K_i \subseteq X_i$ eine kompakte offene Menge. Diese muss es nicht geben, betrachte dafür zum Beispiel $\mathbb{R}^n$. Dann definieren wir das eingeschränkte Produkt

$$X = \widehat{\prod_{i \in I}}^{K_i} X_i := \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \mid x_i \in K_i \text{ für fast alle } i \in I\}.$$

Falls K_i aus dem Kontext klar ist, lassen wir diese in der Schreibweise weg. Ein eingeschränktes offenes Rechteck ist eine Menge der Form

$$\prod_{i \in I} U_i$$

wobei $U_i \subseteq X_i$ offen ist und $U_i = K_i$ für alle bis auf endlich viele $i \in I$ gilt. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt *offen*, wenn es eine Vereinigung solcher Mengen ist. Die dazugehörige Topologie heißt die *eingeschränkte Produkttopologie.*

Proposition 4.6. *Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie lokalkompakter Hausdorffräume. Für jedes $i \in I$ sei $K_i \subseteq X_i$ eine kompakte offene Menge. Dann ist*

$$X = \widehat{\prod_{i \in I}}^{K_i} X_i$$

ausgestattet mit der eingeschränkten Produkttopologie ein lokalkompakter Hausdorffraum.

Beweis. Sei $x = (x_i)_{i \in I} \in X$. Definiere $J = \{i \in I \mid x_i \in K_i\}$. Dann ist $I \setminus J$ endlich. Für jedes $i \in I \setminus J$ wählen wir eine kompakte Umgebung U_i von x_i. Dann ist

$$\prod_{i \in I \setminus J} U_i \times \prod_{i \in J} K_i$$

eine kompakte Umgebung von x. Die Hausdorffeigenschaft folgt da, die X_i Hausdorff sind. $\square$

Definition 4.7. Der Ring

$$\mathbb{A}_f := \widehat{\prod_{p<\infty}}^{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

heißt der Ring der *endlichen Adele.* Nach dem letzten Satz ist $\mathbb{A}_f$ ein lokalkompakter Hausdorffraum.

Proposition 4.8. *Der Ring $\mathbb{A}_f$ ist ein topologischer Ring, das heißt, die Ringverknüpfungen sind stetig.*

Proposition 4.9. *Die Menge*

$$\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{A}_f$$

ist kompakt und offen.

Sei $N \in \mathbb{Z}$ sowie $N > 0$. Dann gilt

$$N = \prod_{p<\infty} p^{\nu_p}$$

und $\nu_p = 0$ für alle bis auf endlich viele p. Weiterhin ist

$$N\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p<\infty} p^{\nu_p} \mathbb{Z}_p$$

eine kompakte offene Umgebung der $0 \in \mathbb{A}_f$. Eine beliebige offene Umgebung der $0 \in \mathbb{A}_f$ ist eine Vereinigung von Mengen der Form

$$\prod_{i \in I \setminus J} U_i \times \prod_{j \in J} K_j$$

wobei $I \setminus J$ endlich ist und die U_i für $i \in I \setminus J$ offen sind. In $\mathbb{Q}_p$ gilt $K(0, p^m) = p^{-m}\mathbb{Z}_p$ für alle $m \in \mathbb{Z}$.

Proposition 4.10. *Jede offene Umgebung der $0 \in \mathbb{A}_f$ enthält eine Menge der Form $N\hat{Z}$ für ein $N \in \mathbb{Z}$ mit $N > 0$.*

Proposition 4.11. *Die Einbettung* $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{A}_f$ *hat dichtes Bild.*

Definition 4.12. Der Ring $\mathbb{A} \coloneqq \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f$ heißt *Ring der Adele.*

Bemerkung 4.13. $\mathbb{A}$ *ist ein lokalkompakter Hausdorffraum.*

Proposition 4.14. $\mathbb{A}$ *ist ein topologischer Ring. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} Q &\to \mathbb{A} \\ a &\mapsto (a, a, \dots) \end{aligned}$$

liefert eine Einbettung von $\mathbb{Q}$ *nach* $\mathbb{A}$.

Proposition 4.15. $\mathbb{Q}$ *ist eine diskrete abgeschlossene Untergruppe von* $\mathbb{A}$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\mathbb{A}$ die diskrete Topologie auf $\mathbb{Q}$ erzeugt, das heißt für jedes $a \in \mathbb{Q}$ existiert eine offene Umgebung U mit $\mathbb{Q} \cap U = \{a\}$. Aufgrund der Stetigkeit der Addition können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a = 0$ annehmen. Wähle

$$U \coloneqq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p.$$

Für $r \in \mathbb{Q} \cap U$ gilt

$$|r|_p \leq 1$$

für alle $p < \infty$. Also folgt $r \in \mathbb{Z}$ und somit $r = 0$.
Es bleibt zu zeigen, dass $\mathbb{Q}$ abgeschlossen in $\mathbb{A}$ ist. Sei dazu $a \in \overline{\mathbb{Q}}$. Wir nehmen $a \notin \mathbb{Q}$ an. Es existiert eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{A}$ mit $U \cap \mathbb{Q} = \{0\}$. Wähle eine offene Umgebung V von $0 \in \mathbb{A}$, die $V + V \subseteq U$ und $-V = V$ erfüllt. Die Stetigkeit der Addition impliziert, dass es eine offene Umgebung W von 0 gibt, die $W + W \subseteq U$ erfüllt. Wenn man $V = W \cap (-W)$ setzt, erhält man die gewünschte Menge. Dann gilt $(a + V) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Sei $x \in (a + V) \cap \mathbb{Q}$. Dann $x \neq a$. Da $\mathbb{A}$ Hausdorff ist, existiert eine offene Umgebung W von a mit $x \notin W$. Dann ist $(a + V) \cap W$ eine offene Umgebung von a. Wähle $y \in (a + V) \cap W \cap \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$x - y \in ((a + V) \cap \mathbb{Q}) - ((a + V) \cap W \cap Q.$$

Dies impliziert $x - y \in (V - V) \cap \mathbb{Q}$ also $x - y \in (U \cap \mathbb{Q}) = \{0\}$. Aber $x = y$ ist ein Widerspruch. □

Wir betrachten die kanonische Projektion

$$\pi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}/\mathbb{Q}$$

und statten $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ mit der Quotiententopologie aus, das heißt $U \subseteq \mathbb{A}/\mathbb{Q}$ ist genau dann offen wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{A}$ ist. Insbesondere ist π stetig.

Proposition 4.16. *Die kanonische Projektion ist offen.*

Beweis. Sei $U \subseteq \mathbb{A}$ offen. Wir müssen zeigen, dass $\pi^{-1}(\pi(U))$ offen ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(U)) &= \{a \in \mathbb{A} \mid \pi(a) \in \pi(U)\} \\ &= \bigcup_{a\in U} (a + \mathbb{Q}) \\ &= \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} (x + U),\end{aligned}$$

somit ist die Offenheit gezeigt. □

Proposition 4.17. $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ *ist ein kompakter Hausdorffraum.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ Hausdorff ist. Sei dafür $a + \mathbb{Q} \neq b + \mathbb{Q}$. Dann gilt $a - b \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$, welches eine offene Menge ist. Dann existiert eine offene symmetrische Umgebung der 0 mit

$$((a - b) + U + U) \cap \mathbb{Q} = \emptyset.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}((a + U) - (b + U)) \cap \mathbb{Q} &= \emptyset \\ ((a - b) + U) \cap (Q + U) &= \emptyset \\ (a + U) \cap (b + U + \mathbb{Q}) &= \emptyset \\ (a + U + \mathbb{Q}) \cap (b + U + \mathbb{Q}) &= \emptyset.\end{aligned}$$

Daher sind $(a+U)$ und $(b+U)$ disjunkt in $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ sind. Es bleibt die Kompaktheit zu zeigen. Dafür zeigen wir, dass es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{A}$ mit $\pi(K) = \mathbb{A}$ gibt. Sei $K := [0, 1] \times \hat{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{A}$. Wir zeigen, dass jede Restklasse in $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ einen Repräsentanten in K besitzt. Sei $a = (a_\nu)_{\nu\leq\infty} \in \mathbb{A}$. Für $p < \infty$ schreiben wir

$$a_p = \sum_{n=n_p} a_p(n)p^n$$

Dann gilt $n_p = 0$ für fast alle p. Definiere

$$b \coloneqq a - \sum_{p<\infty} \sum_{n=n_p}^{-1} a_p(n) p^n,$$

wobei der zweite Summand ein Element von $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}$ ist. Dann gilt $b \in \mathbb{R} \times \mathbb{A}$, da

$$\begin{aligned} \left| a_p - \sum_{q<\infty} \sum_{n=n_q}^{-1} a_q(n) q^n \right|_p &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_p(n) p^n - \sum_{\infty>q\neq p} \sum_{n=n_q} a_q(n) q^n \right|_p \\ &= \max\left(\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_p(n) p^n \right|_p, \left| \sum_{\infty>q\neq p} \sum_{n=n_q}^{-1} a_q(n) q^n \right|_p \right) \leq 1. \end{aligned}$$

Indem wir b um eine geeignete ganze Zahlen verschieben, erhalten wir einen Repräsentanten in K. □

Da $\mathbb{A}$ eine lokalkompakte Hausdorffgruppe ist, können wir das Haarmaß auf $\mathbb{A}$ betrachten, sodass $[0, 1] \times \hat{\mathbb{Z}}$ Maß 1 hat.

Definition 4.18. Eine *einfache Funktion auf* $\mathbb{A}$ ist eine Funktion der Form

$$f = \prod_{\nu\leq\infty} f_\nu,$$

wobei $f_\nu \in \mathrm{C}_c(\mathbb{Q}_\nu)$ und $f_p = \chi_{\mathbb{Z}_p}$ für fast alle $p < \infty$.

Bemerkung 4.19. *Für* $x = (x_\nu)_{\nu\leq\infty} \in \mathbb{A}$ *gilt*

$$f(x) = \prod_{\nu\leq\infty} f_\nu(x),$$

wobei nur endlich viele Faktoren ungleich 1 *sind. Die einfachen Funktionen auf* $\mathbb{A}$ *sind stetig und haben kompakten Träger (Notation* $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{A})$*).*

Proposition 4.20. *Sei* $f = \prod_{\nu\leq\infty} f_\nu$ *eine einfache Funktion auf* $\mathbb{A}$*. Dann gilt*

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \prod_{\nu\leq\infty} \int_{\mathbb{Q}_p} f_\nu(x)\,\mathrm{d}x_\nu.$$

Beweis. Betrachte die endliche Menge $I \coloneqq \{p < \infty \mid f_p \neq \chi_{\mathbb{Z}_p}\} \cup \{\infty\}$. Definiere $\mathbb{A}_I \coloneqq \prod_{\nu\in I} \mathbb{Q}_\nu$. Dann gilt $\mathbb{A} = \mathbb{A}_I \times \mathbb{A}^I$, wobei

$$\mathbb{A}^I \coloneqq \widehat{\prod_{p\in I}}^{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

ist. $\mathbb{A}_I$ ist als endliches Produkt lokalkompakter Hausdorffräume wieder ein lokalkompakter Hausdorffraum. Das Haarmaß auf $\mathbb{A}_I$ ist durch das Produkt der Haarmaße auf den Faktoren gegeben und der Satz von Fubini gilt. Wir schreiben

$$f = \prod_{\nu \in I} f_\nu \cdot \prod_{p \notin I} f_p.$$

Mit Fubini gilt somit

$$\begin{aligned}
\int_A f(x)\ \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{A}_I} f_I(x)\ \mathrm{d}x \int_{\mathbb{A}^I} f^I(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \prod_{\nu \in I} \int_{\mathbb{Q}_\nu} f_\nu(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \prod_{\nu \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_\nu} f_\nu(x)\ \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Sei $x \in \mathbb{Z}_p$. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{Z}, n > 0$ genau ein $\alpha_n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha_n < p^n$ mit

$$\begin{aligned}
|x - \alpha_n|_p &\leq p^{n-} \\
\Leftrightarrow \alpha_n &\in x + K(0, p^{-n}) \\
\Leftrightarrow \alpha_n &\in x + p^n \mathbb{Z}_p.
\end{aligned}$$

Theorem 4.21. *Sei nun $x \in \hat{\mathbb{Z}} = \prod_{\nu \leq \infty} \mathbb{Z}_p$. Dann existiert für jedes $N \in \mathbb{Z}$, $N > 0$ existiert ein eindeutiges $\alpha_N \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha < N$ mit*

$$\alpha_N \in x + N\hat{\mathbb{Z}}.$$

Beweis. Sei $x = (x_p)_{p \leq \infty}$ mit $x_p = \sum_{n=0}^{\infty} x_p(n) p^n$ sowie $N = \prod_{p \leq \infty} p^{\nu_p}$. Dann gilt $\nu_p = 0$ für fast alle p und $N\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p < \infty} p^{\nu_p} \mathbb{Z}_p$. Der Chinesische Restsatz existiert ein eindeutiges $\alpha_N \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha < N$ mit

$$\alpha_N = \sum_{n=0}^{\nu_p - 1} x_p(n) p^n \quad \mod p^{\nu_p}$$

für alle $\nu_p \neq 0$. Für dieses α_N gilt $\alpha_N \in x + N\hat{\mathbb{Z}}$. Diese Approximation werden für wachsendes N immer besser. Insbesondere gilt $\alpha_M = \alpha_N \mod N$ für alle Vielfachen M von N. Also definiert x eine Folge ganzer Zahlen $(\alpha_N)_{N>0}$ mit $0 \leq \alpha_N < N$ sowie $\alpha_M = \alpha_N \mod N$ falls $N \mid M$. □

Umgekehrt definiert eine solche Folge ein Element in $\hat{\mathbb{Z}}$.

Definition 4.22. Eine Folge von Restklassen $(\alpha_N)_{N>0}$ mit $\alpha_N \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, die die Kompatibilitätsbedingung $\alpha_M = \alpha_N \mod N$ für $N \mid M$ erfüllt, heißt *kompatibles System.* Der projektive Limes

$$\varprojlim \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \left\{(\alpha_N) \in \prod_{N>0} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \mid (\alpha_N)_{N>0} \text{ ist kompatibel}\right\}$$

ist auf natürliche Art und Weise ein Ring. Wir können diesen mit der Topologie des projektiven Limes ausstatten.

Theorem 4.23. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{Z}} &\mapsto \varprojlim \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ x &\mapsto (\alpha_N \mod N) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus topologischer Ringe.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{Z}} &\to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ x &\mapsto \alpha_N \mod N \end{aligned}$$

ist surjektiv mit Kern $N\hat{\mathbb{Z}}$. Also folgt

$$\hat{\mathbb{Z}}/N\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.$$

5 Idele

Definition 5.1. Die Einheitengruppe $\mathbb{A}^*$ von $\mathbb{A}$ heißt Gruppe der *Idele*. Es gilt

$$\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f, \mathbb{A}_f = \hat{\prod}_{p<\infty}^{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

$$\mathbb{A}^* = \mathbb{R}^* \times \mathbb{A}_f^*, \mathbb{A}_f^* = \{(a_p)_{p<\infty} \mid a_p \in \mathbb{Q}_p^* \forall p, a_p \in \mathbb{Z}_p^* \text{ a.e. } p\} = \hat{\prod}^{\mathbb{Z}_p^*} \mathbb{Q}_p^*.$$

Wir statten $\mathbb{A}_f^*$ mit der eingeschränkten Produkttopologie aus. $\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p$ ist offen und kompakt in $\mathbb{A}_f$, $\hat{\mathbb{Z}}^* = \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p^*$ ist offen und kompakt in $\mathbb{A}_f^*$ bezüglich der eingeschränkten Produkttopologie. $\hat{Z}^*$ ist nicht offen bezüglich der Topologie von $\mathbb{A}_f^*$, die von $\mathbb{A}_f$ induziert wird. Die eingeschränkte Produkttopologie auf $\mathbb{A}_f^*$ ist echt feiner als die Topologie, die von $\mathbb{A}_f$ induziert wird. Wir statten $\mathbb{A}^* = \mathbb{R}^* \times \mathbb{A}_f^*$ mit der Produkttopologie aus.

Theorem 5.2. *Dann sind $(A_f^*, \cdot)$ und $(\mathbb{A}^*, \cdot)$ lokal kompakte Hausdorffgruppen.*

Wir normieren das Haarmaß auf $\mathbb{A}_f^*$ sodass $\hat{\mathbb{Z}}^*$ Maß 1 hat und schreiben $\mathrm{d}^* x_f$ für dieses Maß. Auf $\mathbb{R}^*$ ist $\frac{\mathrm{d}t}{|t|}$ ein Haarmaß. Wir statten $\mathbb{A}^*$ mit dem Produktmaß aus, also mit dem Haarmaß

$$\mathrm{d}^* x = \frac{\mathrm{d}t}{|t|} \cdot \mathrm{d}^* x_f.$$

Definition 5.3. Eine *einfache Funktion auf* $\mathbb{A}^*$ ist eine Funktion der Form

$$f = \prod_{\nu \leq \infty} f_\nu$$

mit $f_\nu \in C_c(\mathbb{Q}_\nu^*)$ für alle $\nu \leq \infty$ und $f_p = \chi_{\mathbb{Z}_p^*}$ für fast alle $p < \infty$. Für eine solche Funktion definieren wir das Integral über

$$\int_{\mathbb{A}^*} f(x) \, \mathrm{d}^* x = \prod_{\nu \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_\nu^*} f_\nu(x) \, \mathrm{d}x.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^* &\to \mathbb{A}^* \\ x &\mapsto (x, x, \dots) \end{aligned}$$

ist eine Einbettung von $\mathbb{Q}^*$ nach $\mathbb{A}^*$.

Proposition 5.4. $\mathbb{Q}^*$ *ist eine diskrete und abgeschlossene Untergruppe von* $\mathbb{A}^*$*.*

Für $a = (a_\nu)_{\nu \leq \infty} \in \mathbb{A}^*$ definieren wir die Norm

$$|a| \coloneqq \prod_{\nu \leq \infty} |a_\nu|_\nu \,,$$

wobei nur endlich viele Faktoren ungleich 1 sind. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^* &\to \mathbb{R}^*_{>0} \\ a &\mapsto |x| \end{aligned}$$

ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Der Kern

$$A' \coloneqq \{a \in \mathbb{A}^* \mid |a| = 1\}$$

ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{A}^*$. Für $x \in \mathbb{Q}^*$ gilt

$$\prod_{\nu \leq \infty} |x|_\nu = 1.$$

Also ist $\mathbb{Q}^*$ eine diskrete abgeschlossene Untergruppe von A'.

Der Quotient $A'/\mathbb{Q}^*$ ausgestattet mit der Quotiententopologie ist eine lokal kompakte Hausdorffgruppe. Wir definieren

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{Z}}^* &\to \mathbb{A}' \\ (x_p)_{p<\infty} &\mapsto (1, x_2, x_3, \dots). \end{aligned}$$

Proposition 5.5. *Die kanonische Abbildung* $f \colon \hat{\mathbb{Z}}^* \to \mathbb{A}'/\mathbb{Q}^*$ *ist ein Isomorphismus topologischer Gruppen.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass f injektiv ist. Sei dafür $f((x_p)_{p<\infty}) = f((y_p)_{p<\infty})$. Dann gilt

$$(1, x_2, x_3, \dots) = (r(1, y_2, y_3, \dots)$$

für ein $r \in \mathbb{Q}^*$. Die erste Komponente impliziert aber $r = 1$. Also folgt die Injektivität.

Für die Surjektivität betrachten wir $a = (a_\infty, a_2, a_3, \dots) \in \mathbb{A}'$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
1 &= |a_\infty|_\infty \prod_{p<\infty} |a_p|_p \\
&= a_\infty \frac{|a_\infty|_\infty}{a_\infty} \prod_{p<\infty} |a_p|_p \\
&=: a_\infty \cdot r.
\end{aligned}$$

Definiere $b = (r, a_2, a_3, \dots)$. Dann gilt $b \in \hat{\mathbb{Z}}^*$, da

$$\begin{aligned}
|ra_p|_p &= \left| \frac{|a_\infty|_\infty}{a_\infty} \prod_{q<\infty} |a_q|_q \, a_p \right|_p \\
&= \left| |a_p|_p \, a_p \right|_p \left| \prod_{p \neq q < \infty} |a_q|_q \right|_p = 1
\end{aligned}$$

sowie $f(b) = ra$. Die Stetigkeit verbleibt als Übungsaufgabe. $\square$

Korollar 5.6. $\mathbb{A}'/\mathbb{Q}^*$ *ist kompakt.*

Der Isomorphismus $\hat{\mathbb{Z}} = \lim_{\Leftarrow}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ impliziert

$$\hat{\mathbb{Z}}^* = \lim_{\Leftarrow} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* = A'/\mathbb{Q}^*.$$

6 Charaktere

An dieser Stelle vergessen wir die Notation ˆ aus Kapitel 4.

Definition 6.1. Sei G eine topologische Gruppe. Ein *Quasicharakter* von G ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus $G \to \mathbb{C}^*$. Ein *Charakter* von G ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus $G \to T := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Proposition 6.2. *Sei G eine kompakte Gruppe und $f\colon G \to \mathbb{C}^*$ ein Quasicharakter. Dann ist f ein Charakter.*

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{aligned} G &\to \mathbb{R}^*_{>0} \\ x &\mapsto |f(x)| \end{aligned}$$

ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Daher ist das Bild eine kompakte Untergruppe von $\mathbb{R}^*_{>0}$, nämlich $\{1\}$. □

Definition 6.3. Eine lokal kompakte Hausdorffgruppe heißt *total umzusammenhängend*, falls jede offene Umgebung der 1 eine offene Untergruppe enthält.

Beispiel 6.4. Zum Beispiel sind

i) $(\mathbb{Q}_p, +)$, $(\mathbb{Q}_p^*, \cdot)$

ii) $(\mathbb{Z}_p, +)$, $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$

iii) $(\mathbb{A}_f, +)$, $(\mathbb{A}_f^*, \cdot)$

iv) $(\hat{Z}, +)$, $(\hat{Z}^*, \cdot)$

solche Gruppen.

Proposition 6.5. *Sei G eine total unzusammenhängende lokal kompakte Hausdorffgruppe und $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$ ein Quasicharakter. Dann ist* $\ker(\chi)$ *offen.*

Beweis. Sei $0 < \varepsilon < 1$. Dann ist $V_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > \varepsilon\}$ eine offene Umgebung von $1 \in \mathbb{C}^*$. Also ist $\chi^{-1}(V_\varepsilon)$ offen in G und enthält somit eine offene Untergruppe $H \subseteq G$. Das Bild $\chi(H)$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{C}^*$ in V_ε. Für $z \in \mathbb{C}$ ungleich 1 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ sodass die Potenz z^n außerhalb von V_ε liegt. Also folgt $\chi(H) = 1$. Sei nun $x \in \ker(\chi)$. Dann ist xH eine offene Umgebung von x in $\ker(\chi)$. $\square$

Definition 6.6. Sei G eine topologische Gruppe. Dann ist die Menge der Charaktere auf G eine Gruppe bezüglich punktweiser Multiplikation. Dieser Gruppe heißt die *duale Gruppe von G*, wir bezeichnen sie mit $\hat{G}$. Wir statten $\hat{G}$ mit kompakt-offenen Topologie aus. Eine Subbasis dieser Topologie bilden die Mengen der Form

$$S(K, U) := \{\chi \in C(G, T) \mid \chi(K) \subseteq U\}$$

wobei $K \subseteq G$ kompakt und $U \subseteq T$ offen ist. Endliche Schnitte dieser Mengen bilden eine Basis der Topologie von $\hat{G}$.

Proposition 6.7. *Die duale Gruppe $\hat{G}$ ist eine abelsche Hausdorffgruppe.*

Beweis. Sei $f \in \hat{G}, \varepsilon \neq f$. Dann existiert ein $x \in G$ mit

$$f(x) \neq 1\varepsilon(x).$$

Da T Hausdorff ist, können wir offene Mengen $U, W \subseteq T$ mit $f(x) \in U, 1 \in W$ sowie $U \cap W = \emptyset$ wählen. Definiere $K = \{x\}$. Dann gilt $f \in S(K, U)$, $\varepsilon \in S(K, W)$ sowie $S(K, U) \cap S(K, W) = \emptyset$. $\square$

Proposition 6.8. *Sei G eine topologische Gruppe.*

i) Falls G endlich ist, so ist $\hat{G}$ ebenfalls endlich,

ii) Falls G diskret ist, so ist $\hat{G}$ kompakt.

Proposition 6.9. *Sei G eine Hausdorffgruppe.*

i) Falls G lokal kompakt ist, so ist $\hat{G}$ ebenfalls lokal kompakt.

ii) Falls G kompakt ist, so ist $\hat{G}$ diskret.

Beispiel 6.10. Wir betrachten einige Beispiele von Charakteren.

i) Die Abbildung

$$\mathrm{e}_\infty \colon \mathbb{R} \to T$$

$$x \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x} =: \mathrm{e}(x)$$

ist ein Charakter von $\mathbb{R}$.

Nun werden wir die Charaktere einiger Gruppen bestimmen, die in der Vorlesung eine Rolle spielen, z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{A}$.

Proposition 6.11. *Es gilt* $\chi(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a x}$. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \hat{\mathbb{R}} \\ a &\mapsto (x \mapsto \mathrm{e}_\infty(ax)) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus topologischer Gruppen.

Beweis. Wir zeigen, dass jeder Charakter von $\mathbb{R}$ von der angegebenen Form ist. Sei $\gamma \colon \mathbb{R} \to T$ ein Charakter. Dann gilt $\gamma(0) = 1$ und wegen der Stetigkeit von γ existiert $a > 0$ mit

$$\int_0^a \gamma(t)\ \mathrm{d}t = c \neq 0.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_x^{x+a} \gamma(t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^a \gamma(x+t)\ \mathrm{d}t \\ &= \gamma(x) \int_0^a \gamma(t)\ \mathrm{d}t = \gamma(x)c \end{aligned}$$

und somit folgt $\gamma(x) = \frac{1}{c} \int_x^{x+a} \gamma(t)\ \mathrm{d}t$. Dies impliziert aber, dass γ differenzierbar ist mit

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \frac{1}{c} \left(\gamma(x+a) - \gamma(x)\right) \\ &= \frac{1}{c} (\gamma(a) - 1)\gamma(x). \end{aligned}$$

Aus der Differentialgleichung folgt, dass γ von der gewünschten Gestalt ist. □

Proposition 6.12. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\to \widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \\ n &\mapsto (x \to \mathrm{e}(nx)) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Proposition 6.13. *Die dualen Gruppen der zyklischen Gruppen sind*

$$\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$
$$\hat{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq T.$$

Sei nun $p < \infty$. Wie wir wissen, ist ein Element $a \in \mathbb{Q}_p$ von der Form

$$a = \sum_{n=n_p}^{\infty} a_p(n) p^n$$

mit $a_p(n) \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a_p(n) < p$. Der *Hauptteil* von a ist definiert als

$$a^- = \sum_{n=n_p}^{-1} a_p(n) p^n.$$

In der folgenden Definition ist eine gute Konvention $-a^-$ zu wählen, dies wird später klar werden. Wir definieren also

$$e_p(a) := \mathrm{e}(-a^-) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(-a^-)}.$$

Dann ist

$$e_p \colon \mathbb{Q}_p \to T$$

ein Charakter. Die Stetigkeit folgt, daraus, dass e_p auf $\mathbb{Z}_p$ konstant 1, also lokal konstant ist.

Proposition 6.14. *Die Abbildung*

$$\mathbb{Q}_p \to \hat{\mathbb{Q}}_p$$
$$a \mapsto (x \mapsto e_p(ax))$$

ist ein Isomorphismus topologischer Gruppen.

Beweis. Wie so oft, ist die Surjektivität der schwierigste Teil. Es ist klar, dass diese Abbildung ein Homomorphismus ist. Für die Injektivität betrachten wir $a \in \mathbb{Q}_p$ mit $e_p(ax) = 1$ für alle $x \in \mathbb{Q}_p$. Dann gilt $ax \in \mathbb{Z}_p$ für alle $x \in \mathbb{Q}_p$. Dies impliziert aber $a = 0$. Für die Surjektivität sei $\chi \colon \mathbb{Q}_p \to T$ ein Charakter.

i) Wir nehmen zunächst $\mathbb{Z}_p \subseteq \ker(\chi)$ an. Für $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ gilt dann $p^m \frac{1}{p^m} = 1$ und somit $\chi(\frac{1}{p^m})^{p^m} = 1$. Also muss $\chi(\frac{1}{p^m})$ eine Einheitswurzel sein, im Besonderen gilt

$$\chi(\frac{1}{p^m}) = \mathrm{e}(\frac{a_m}{p^m})$$

für ein eindeutiges $a_m \in \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$. Wir erhalten so eine Folge $(a_m)_{m>0} \in \prod_{m>0}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ und behaupten, dass diese kompatibel ist. Dies gilt, da

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}(\frac{a_m}{p^m}) &= \chi(\frac{1}{p^m}) = \chi(\frac{p}{p^{m+1}}) \\
&= \chi(\frac{1}{p^{m+1}})^p = \mathrm{e}(\frac{a_{m+1}}{p^{m+1}})^p = \mathrm{e}(\frac{a_{m+1}}{p^m})^p,
\end{aligned}$$

sodass $\frac{a_{m+1}}{p^m} = \frac{a_m}{p^m} \mod 1$. Also definiert $(a_m)_{m>0}$ eine p-adische Zahl $a \in \mathbb{Z}_p$. Es gilt $\chi(x) = e_p(-ax)$ für alle $x \in \mathbb{Q}_p$. Dies ist wahr für $x \in \mathbb{Z}_p$. Als nächstes beweisen wir dies für $x = \frac{1}{p^m}$ mit $\mathbb{Z} \ni m > 0$. Dazu schreiben wir $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_p(n)p^n$ modulo p^m gilt

$$\begin{aligned}
a &= \sum_{n=0}^{m-1} a_p(n)p^n \mod p^m \\
&= a_m \mod p^m.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{a_m}{p^m} = \frac{1}{p^m}\sum_{n=0}^{m-1} a_p(n)p^n \mod 1$$

und

$$\begin{aligned}
e_p(-\frac{a}{p^m}) &= \mathrm{e}((\frac{a}{p^m})^-) \\
&= \mathrm{e}(\frac{1}{p^m}\sum_{n=0}^{\infty} a_p(n)p^n) \\
&= \mathrm{e}(\frac{a^m}{p^m}) = \chi(\frac{1}{p^m}).
\end{aligned}$$

Da $\mathbb{Q}_p$ als Gruppe von $\mathbb{Z}_p$ und den Elementen der Form $\frac{1}{p^m}$ mit $\mathbb{Z} \ni m > 0$ erzeugt wird, folgt die Gleichheit der Charaktere.

ii) Wir reduzieren den allgemeinen Fall auf Fall 1. Da $\mathbb{Q}_p$ total unzusammenhängend ist, enthält der Kern von χ einen Ball $K(0, p^{-m}) = p^m\mathbb{Z}_p$ für $\mathbb{Z} \ni m > 0$. Wir definieren nun einen neuen Charakter, auf denen wir i) anwenden können. Für $\psi(x) := \chi(p^m x)$ gilt $\mathbb{Z}_p \subseteq \ker(\psi)$ und somit $\psi(x) = e_p(ax)$ für ein $a \in \mathbb{Z}_p$. Damit folgt $\chi(x) = e_p(\frac{a_p}{p^m}x)$. □

Sei $a = (a_\nu)_{\nu\leq\infty}$. Dann gilt $a_p \in \mathbb{Z}_p$ für fast alle p. Dies impliziert, dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}\colon \mathbb{A} &\to T \\
a &\mapsto \prod_{\nu\leq\infty} \mathrm{e}_\nu(a_\nu)
\end{aligned}$$

wohldefiniert ist. Außerdem ist e ein Charakter.

Proposition 6.15. *Die Abbildung*

$$
\begin{aligned}
A &\to \hat{A} \\
a &\mapsto (x \mapsto \mathrm{e}(ax))
\end{aligned}
$$

ist ein Isomorphismus topologischer Gruppen.

Beweis. Es ist klar, dass die Abbildung ein Homomorphismus ist. Um die Surjektivität zu zeigen, betrachten wir einen beliebigen Charakter $\chi\colon \mathbb{A} \to T$. Dies induziert einen Charakter χ_ν auf $\mathbb{Q}_\nu$ via

$$\mathbb{Q}_\nu \hookrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\chi} T.$$

Wir wissen, dass dann ein eindeutiges $a_\nu \in \mathbb{Q}_\nu$ mit $\chi_\nu(x_\nu) = \mathrm{e}_\nu = (a_\nu x_\nu)$ für alle $x_\nu \in \mathbb{Q}_\nu$ existiert. Es gilt $a = (a_\nu)_{\nu \leq \infty} \in \mathbb{A}$, das heißt $a_p \in \mathbb{Z}_p$ für fast alle $p < \infty$. Die natürliche Abbildung $\chi_f\colon \mathbb{A}_f \to T$ ist ein Charakter von $\mathbb{A}_f$. Da $\mathbb{A}_f$ total unzusammenhängend ist, existiert $\mathbb{Z} \ni m > 0$ mit $m\hat{Z} \subseteq \ker(\chi_f) = \prod_{p<\infty} p^{\nu_p}\mathbb{Z}_p$ (hier ist $\hat{\mathbb{Z}}$ *nicht* die duale Gruppe) mit $m = \prod p^{\nu_p}$. Also gilt für alle $p \not| m$, dass $\mathbb{Z}_p \subseteq \ker(\chi_p)$ und somit $a_p \in \mathbb{Z}_p$. Da ein beliebiges Element $x \in \mathbb{A}$ die Summe von endlich vielen Elementen in $\mathbb{Q}_\nu$ und etwas $m\hat{Z}$ ist, erhalten wir, dass $\chi(x) = \mathrm{e}(ax)$ für alle $x \in \mathbb{A}$ gilt. $\square$

Als nächstes bestimmen wir die Charaktere der kompakten Gruppe $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$. Sei $r \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$r = \sum_{n=n_p}^{\infty} r_p(n) n^p$$

mit $n_p = 0$ für fast alle $p < \infty$ und

$$r - \sum_{p<\infty} \sum_{n=n_p}^{-1} r_p(n) \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$$

for all p. Also folgt $r - \sum_{p<\infty} \sum_{n=n_p}^{-1} r_p(n) \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt dass für alle $a \in \mathbb{Q}$ die Abbildung

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A} &\to T \\
x &\mapsto \mathrm{e}(ax)
\end{aligned}
$$

trivial auf $\mathbb{Q}$ ist, das heißt ein Charakter von $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$.

Theorem 6.16. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\to \widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \\ a &\mapsto (x \mapsto \mathrm{e}(ax)) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus topologischer Gruppen.

Bemerkung 6.17. *Wenn man dieser Isomorphie dualisiert, bekommt man eine Motiviation für die Einführung der Adele; nämlich um die Charaktere von $\mathbb{Q}$ beschreiben zu können. Dies verwendet den Dualitätssatz von Pontryagin.*

Beweis des Theorems. Wir zeigen lediglich die Surjektivität. Sei $\chi \colon \mathbb{A} \to T$ ein Charakter, der trivial auf $\mathbb{Q}$ ist. Da es ein Charakter auf $\mathbb{A}$ ist, gilt

$$\chi(x) = \mathrm{e}(ax)$$

für ein $a \in \mathbb{A}$. Wir müssen zeigen, dass $a \in \mathbb{Q}$ ist. Dazu schreiben wir $a = (a_\infty, a_f)$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{A}_f$ ist, gilt

$$(a_f + \hat{\mathbb{Z}}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

Also ist a_f von der Form $r + b_f$, wobei $r \in \mathbb{Q}$ und $b_f \in \hat{Z}$ ist. Wir schreiben $a = r + b$ mit $b = (b_\infty, b_f) = (a_\infty - r, b_f)$. Da χ trivial auf $\mathbb{Q}$ ist, gilt

$$1 = \mathrm{e}(ax) = \mathrm{e}(rx)\mathrm{e}(bx)$$

und somit

$$\mathrm{e}(b_\infty x) = \prod_{p<\infty} \mathrm{e}((b_p x)^-)$$

für alle $x \in \mathbb{Q}$. Wählen wir $x = 1$, so erhalten wir $b_\infty \in \mathbb{Z}$. Für $x = \frac{1}{p^m}$ mit $\mathbb{Z} \ni m > 0$ und mit $b = \sum_{n=0}^\infty b_n(p)p^n$ erhalten wir

$$\mathrm{e}(b_\infty \frac{1}{p^m}) = \mathrm{e}\left(\frac{1}{p^m} \sum_{n=0}^{m-1} b_n(p)p^n\right),$$

woraus

$$b_\infty = \sum_{n=0}^{m-1} b_n(p)p^n \mod p^m$$

folgt. Dies impliziert, dass $b = b_\infty \mod p^m$ für alle $m > 0$ gilt. Also folgt $b \in \mathbb{Z}$ und somit $a = r + b \in \mathbb{Q}$. Der Rest verbleibt als Übung. □

Definition 6.18. Sei $p < \infty$. Ein Quasicharakter $\chi_p\colon \mathbb{Q}_p^* \to \mathbb{C}^*$ heißt *unverzweigt*, falls $\mathbb{Z}_p^* \subseteq \ker(\chi_p)$ gilt.

Proposition 6.19. *Für $s \in \mathbb{C}$ ist die Abbildung*

$$\begin{aligned}\lambda\colon \mathbb{Q}_p^* &\to \mathbb{C}^* \\ a &\mapsto |a|_p^s\end{aligned}$$

ein unverzweigter Quasicharakter. Außerdem ist jeder unverzweigte Quasicharakter von dieser Form für ein eindeutiges $s \in \mathbb{C}/\frac{2\pi\mathrm{i}}{\log(p)}\mathbb{Z}$. Die Abbildung λ ist ein genau dann ein Charakter, wenn $s = \mathrm{i}t$ für ein $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweis. Die erste Aussage ist klar. Sei nun $\chi\colon \mathbb{Q}_p^* \to \mathbb{C}^*$ ein unverzweigter Quasicharakter. Wähle $s \in \mathbb{C}$ so, dass $\chi(p) = p^{-s}$. Schreibe nun $a \in \mathbb{Q}_p^*$ als $a = p^m n$ mit $n \in \mathbb{Z}_p^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\chi(a) = \chi(p^m n) = \chi(p)^m &= p^{-sm} \\ &= |a|_p^s.\end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit folgt aus $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{e}^z = 1\} = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$. Die letzte Aussage ist klar. $\square$

Sei nun $\chi\colon \mathbb{A}^* \to T$ ein Charakter. Dann definieren die Einbettung $\mathbb{Q}_\nu^* \to \mathbb{A}^*$ Charaktere $\chi_\nu\colon \mathbb{Q}_\nu^* \to T$.

Proposition 6.20. *Die Abbildung*

$$x \mapsto (x_\nu)_{\nu \le \infty}$$

ist eine Bijektion zwischen den Charakteren von $\mathbb{A}^*$ und den Systemen von Charakteren $\chi_\nu\colon \mathbb{Q}_\nu^* \to T$ sodass χ_p für fast alle p unverzweigt.

Beweis. Ist nun $(\chi_\nu)_{\nu \le \infty}$ ein solches System, so ist

$$\begin{aligned}\chi\colon A^* &\to T \\ a &\mapsto \prod_{\nu \le \infty} \chi_\nu(a_\nu)\end{aligned}$$

ein Charakter.

Sei nun $\chi\colon \mathbb{A}^* \to T$ ein Charakter und $(\chi_\nu)_{\nu \le \infty}$ das zugehörige System lokaler Charaktere. Wir müssen zeigen, dass fast alle dieser χ_p unverzweigt sind. Wegen $\mathbb{A}^* =$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{A}_f^*$ reicht es die Aussage für χ_f zu zeigen. Da $\mathbb{A}_f^*$ total unzusammenhängend ist, enthält der Kern $\ker(\chi_f)$ eine offene Untergruppe. Also enthält es eine offene Menge der Form $\prod_{p\in I} U_p \times \prod_{p\notin I} \mathbb{Z}_p^*$ für eine endliche Menge I und $U_p \subseteq \mathbb{Q}_p^*$ offen. Dann ist χ_p für alle $p \notin I$ unverzweigt. $\square$

Definition 6.21. Ein Charakter $\chi\colon G \to T$ heißt *endlich*, falls $\chi(G)$ endlich ist oder äquivalent, falls χ endliche Ordnung in $\hat{G}$ hat.

Proposition 6.22. *Sei G eine kompakte, total unzusammenhängende Hausdorffgruppe. Dann ist jeder Charakter auf G endlich.*

Beweis. Sei $x \in \hat{G}$ und $H = \ker(\chi)$. Dann ist H offen und

$$G = \bigcup_{a\in G/H} aH$$

ist eine offene Überdeckung von G. Da G kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung und H ist konstant auf jedem a_iH. Somit $\chi(G) = \{\chi(a_i), \ldots, \chi(a_n)\}$. $\square$

Da die Gruppe $A'/\mathbb{Q}^* \simeq \hat{\mathbb{Z}}^*$ kompakt und total unzusammenhängend ist, ist jeder Charakter dieser Gruppe endlich.

Wir zeigen zunächst folgendes Lemma, um den nächsten Satz leichter beweisen zu können.

Lemma 6.23. *Sei $\chi\colon \mathbb{R}_0^* \to T$ ein endlicher Charakter. Dann ist χ trivial.*

Beweis. Die Exponentialfunktion liefert einen Isomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R}_{>0}^*, \cdot)$. Wir wissen bereits, dass die Charaktere von $(\mathbb{R}, +)$ von der der Form $\square$

Der Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} A^* &\to \mathbb{A}' \times \mathbb{R}_{>0}^* \\ (a_\infty, a_f) &\mapsto \left(\left(\frac{a_\infty}{|a|}, a_f \right), |a| \right) \end{aligned}$$

induziert einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* &\to \mathbb{A}'/\mathbb{Q}^* \times \mathbb{R}_{>0}^* \\ (a_\infty, a_f)\mathbb{Q}^* &\mapsto \left(\left(\frac{a_\infty}{|a|}, a_f \right) \mathbb{Q}^*, |a| \right) \end{aligned}$$

Proposition 6.24. *Es gibt eine Bijektion zwischen*

i) den Charakteren von $\mathbb{A}'/\mathbb{Q}^*$,

ii) den Charakteren von $\mathbb{A}'/\mathbb{Q} \times \mathbb{R}^*_{>0}$, *die trivial auf* $\mathbb{R}^*_{>0}$ *sind,*

iii) den endlichen Charakteren von $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$.

Beweis. Es ist klar, dass die beiden ersten Mengen identisch sind. Der Rest ist klar. □

Definition 6.25. Ein *Dirichlet-Charakter von „Level“* N ist ein Charakter $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to T$.

Ist ψ ein Dirichlet-Charakter von Grad $d \mid N$. Dann induziert ψ einen Dirichlet-Charakter von Grad N durch

Definition 6.26. Ein Dirichlet-Charakter χ heißt *primitiv von Grad* N, falls χ nicht durch einen Dirichlet-Charakter kleineren Grads induziert wird. In diesem Fall heißt N der *Führer* von χ.

Proposition 6.27. *Sei* $\chi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to T$ *ein Dirichlet-Charakter* $\mod N$. *Dann induziert* χ *einen Charakter* ω *von* $\mathbb{A}'/\mathbb{Q}^*$ *durch*

$$\mathbb{A}'/\mathbb{Q}^* \simeq \hat{Z}^* \simeq \varprojlim (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$$

sowie einen endlichen Charakter von $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ *durch*

$$\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* \simeq \mathbb{A}'/\mathbb{Q}^* \times \mathbb{R}^*_{>0} \to \mathbb{A}'/\mathbb{Q}^* \simeq \hat{Z}^* \simeq \varprojlim (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$$

Dieser Charakter erzeugt einen Charakter $\mathbb{A}^* \to T$, *der trivial auf* $\mathbb{Q}^*$ *ist. Das zugehörige System von Charakteren* $\omega_\nu\colon \mathbb{Q}_\nu^* \to T$ *erfüllt*

i) ω_p *ist für fast alle* p *unverzweigt, nämlich für* $p \nmid N$ *und* ω_p *ist durch* $\omega_p(p) = \chi(p)^{-1}$ *eindeutig bestimmt,*

ii) Für $p \mid N$ *sei* $N = p^{m_p} q$ *mit* $(p, q) = 1$. *In diesem Fall ist* ω_p *verzweigt und*

$$K(1, p^{-m_p}) = 1 + p^{m_p}\mathbb{Z}_p \subseteq \ker(\omega_p).$$

Wir zerlegen $\mathbb{Z}_p^*$ *in*

$$\mathbb{Z}_p^* = \bigcup_{j \in (\mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z})^*} j(1 + p^{m_p}\mathbb{Z}_p = \bigcup_{j \in (\mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z})^*} j + p^{m_p}\mathbb{Z}_p$$

(Die natürliche Abbildung $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$ induziert eine surjektive Abbildung $\mathbb{Z}_p^* \to (\mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z})^*$ mit Kern $1 + p^{m_p}\mathbb{Z}_p$) und schreiben $x \in \mathbb{Q}_p^*$ als $x = p^m u$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $u \in \mathbb{Z}_p^*$. Falls $u \in j + p^{m_p}\mathbb{Z}_p$ liegt, gilt

$$\begin{aligned}\omega_p(x) &= \omega_p(p)^m \omega_p(u)\\ &= \omega_p(p)^m \omega_p(j).\end{aligned}$$

Wir können χ durch $\chi = \chi_{p^{m_p}}\chi_q$ faktorisieren. Dann gilt $\omega_p(p) = \chi_q(p)^{-1}$ und $\omega_p(j) = \chi_{p^{m_p}}(j)$.

iii) χ_∞ ist entweder trivial oder der Signums-Charakter.

Beweis. Wir beweisen iii). Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\chi_\infty(x) &= \chi((x, 1, 1, 1, \dots)\mathbb{Q})\\ &= \chi((\frac{x}{|x|}, (1, 1, 1, \dots))\mathbb{Q}, |x|).\end{aligned}$$

Somit folgt $\chi_\infty(x^2) = 1$ und die Behauptung folgt. □

Wir stellen uns nun die Frage, welche endlichen Charaktere man durch Liften erreichen kann. Sei dazu $\omega\colon \mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* \to T$ ein Charakter endlicher Ordnung. Wir betrachten $\omega\colon \mathbb{A}^* \to T$ als Charakter auf $\mathbb{A}^*$. Dann sind fast alle ω_p unverzweigt. Betrachte ein verzweigtes ω_p. Dann ist $\ker(\omega_p)$ offen und enthält daher einen größten Ball

$$K(1, p^{-m_p}) = 1 + K(0, p^{-m_p}) = 1 + p^{m_p}\mathbb{Z}_p$$

mit $0 < m_p \in \mathbb{Z}$. Definiere $N \coloneqq \prod_{\omega_p \text{ verzweigt}} p^{m_p}$ und $\chi(p) = \omega_p(p)$ für alle $p \not| N$. Wir setzen χ zu einer multiplikativen Funktion auf $\{m \in \mathbb{Z} \mid (m, N) = 1\}$ fort. Dann ist ω auf dem Kern von $\hat{\mathbb{Z}}^* \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ trivial, sodass

$$\chi_(m + N) = \chi(m)$$

gilt. Also definiert χ einen Charakter

$$\chi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to T.$$

Da wir m_p minimal gewählt haben, ist der Charakter χ primitiv. Wenn wir χ zu einem Charakter auf $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ liften, erhalten wir ω.

Somit erhalten wir folgendes Resultat.

Theorem 6.28. *Jeder endliche Charakter*

$$\omega\colon \mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* \to T$$

ist der idelische Lift eines eindeutigen primitiven Dirichlet-Charakters $\chi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to T$.

7 Fourieranalysis

Sei G eine abelsche, lokal kompakte Hausdorffgruppe, $\mathrm{d}x$ ein Haarmaß auf G sowie $\hat{G}$ die duale Gruppe.

Definition 7.1. Die *Fouriertransformierte* von $f \in L^1(G)$ ist definiert durch

$$\begin{aligned}\hat{f} \colon \hat{G} &\to \mathbb{C}\\ \chi &\mapsto \hat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Beispiel 7.2. Für $G = (\mathbb{R}, +)$ erhalten wir die bekannte Fouriertransformation aus der Integrationstheorie. Wir wissen bereits, dass $\hat{G} \cong G$ und somit können wir die Fouriertransformation als Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ auffassen. Wir erhalten so die klassische Formel für die Fouriertransformation.

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\mathrm{e}_\infty(yx)}\,\mathrm{d}x.$$

Im Folgenden werden wir Schwartzfunktionen betrachten.

Definition 7.3. Eine Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *Schwartzfunktion*, wenn $f \in \mathrm{C}^\infty$ und $Pf^{(n)}$ für alle Polynome P und alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist.

Beispiel 7.4. Die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ ist eine Schwartzfunktion, außerdem alle C^∞ Funktionen, die kompakten Träger haben.

Wir erweitern diese Definition auf $\mathbb{Q}_p$.

Definition 7.5. Sei $p < \infty$. Eine Funktion $f \colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ heißt *Schwartzfunktion*, falls sie lokal konstant ist und kompakten Träger hat. Wir definieren $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ als die Menge aller Schwartzfunktionen auf $\mathbb{Q}_p$. Dies ist ein komplexer Vektorraum.

Beispiel 7.6. Für $a \in \mathbb{Q}_p$ und $m \in \mathbb{Z}$ ist $\chi_{a+p^m\mathbb{Z}_p}$ eine Schwartzfunktion.

Tatsächlich sind alle Schwartzfunktionen quasi von dieser Form.

Proposition 7.7. *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$. Dann ist f eine endliche Linearkombination von Funktionen der Form $\chi_{a+p^m\mathbb{Z}_p}$.*

Beweis. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$. Da f lokal konstant ist, ist $f^{-1}(0)$ offen. Insbesondere ist somit $\mathbb{Q}_p \setminus f^{-1}(0)$ abgeschlossen. Also ist $\mathbb{Q}_p \setminus f^{-1}(0) = \operatorname{supp}(f)$ kompakt. Wir können es durch die offenen Mengen $f^{-1}(z)$ für $z \neq 0$ überdecken. Aufgrund der Komapktheit reichen endlich viele dieser Mengen $f^{-1}(z)$ und f hat endliches Bild. Jede der offene Mengen $f^{-1}(z)$ ist eine Vereinigung offener Bälle. Also ist $\operatorname{supp}(f)$ die Vereinigung von endlich vielen Bällen auf denen f konstant ist. □

Definition 7.8. Für $f \in L^1(\mathbb{Q}_p)$ definieren wir die Fouriertransformation durch

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\mathrm{e}_p(-xy)\ \mathrm{d}x.$$

Ziel ist es die Riemannsche Zeta-Funktion meromorph fortzusetzen. Für die analytische Fortsetzung benötigen wir die Maschinerie, die wir bisher aufgebaut haben.

Wir sammeln nun einige Eigenschaften der Fouriertransformation, die wir für $\mathbb{Q}_\infty$ bereits aus der Integrationstheorie kennen.

Proposition 7.9. *Sei $\nu \leq \infty$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_\nu)$.*

i) Für $a \in \mathbb{Q}_\nu$ und $g(x) = \mathrm{e}_\nu(ax)f(x)$ gilt

$$\hat{g}(x) = \hat{f}(x-a).$$

ii) Für $a \in \mathbb{Q}_\nu$ und $g(x) = f(x+a)$ gilt

$$\hat{g}(x) = \mathrm{e}_\nu(ax)\hat{f}(x).$$

iii) Für $a \in \mathbb{Q}_\nu^*$ und $g(x) = f(ax)$ gilt

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{|a|_\nu}\hat{f}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Beweis. Die Beweise funktionieren analog zum bereits Bekannten, für iii) verwendet man Korollar 3.12. □

Wir zeigen nun die lokale Inversionformel für die Fouriertransformation.

Proposition 7.10. *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_\nu)$. Dann gilt $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_\nu)$ sowie*

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x).$$

Beweis. Für $\nu = \infty$ ist dies aus Integrationstheorie bekannt. Sei nun $p < \infty$. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten. Zunächst zeigen wir, dass $f = \chi_{\mathbb{Z}_p}$ ein Fixpunkt der Fouriertransformation ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\hat{f}(y) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_{\mathbb{Z}_p}(x)\mathrm{e}_p(-xy)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{e}_p(-xy)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p} \psi(x)\ \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

wobei $\psi = \mathrm{e}_p(-xy)\colon \mathbb{Z}_p \to T$ ein Charakter ist. Dieser ist genau dann trivial, wenn $y \in \mathbb{Z}_p$. In diesem Fall gilt $\hat{f}(y) = 1$. Sei nun $y \notin \mathbb{Z}_p$. Dann existiert $t \in \mathbb{Z}_p$ mit $\psi(t) \neq 1$ und

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \psi_(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{Z}_p} \psi(x+t)\ \mathrm{d}x = \psi(t)\int_{\mathbb{Z}_p} \psi(x)\ \mathrm{d}x.$$

Da $\psi(t) \neq 1$, ist dies nur für $\hat{f}(y) = 0$ möglich. Also ist $\chi_{\mathbb{Z}_p}$ ein Fixpunkt der Fouriertransformation.

Als nächstes betrachten die Fouriertransformation von $f = \chi_{p^n\mathbb{Z}_p}$ und zeigen, dass diese $p^{-n}\chi_{p^{-n}\mathbb{Z}_p}$ ist. Es gilt $f(x) = \chi_{p^n\mathbb{Z}_p}(x) = \chi_{\mathbb{Z}_p}(\frac{x}{p^n})$. Mit Proposition 7.9 iii) angewendet mit $a = \frac{1}{p^n}$ folgt

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{p^n}\chi_{\mathbb{Z}_p}(p^n x) = \frac{1}{p^n}\chi_{p^{-n}\mathbb{Z}_p}(x).$$

Nun betrachten $f(x) = \chi_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(x)$ und zeigen, dass

$$\hat{f}(y) = p^{-n}\mathrm{e}_p(-ay)\chi_{p^{-n}\mathbb{Z}_p}(y)$$

gilt. Wir wollen 7.9 i) verwenden und bemerken, dass $f(x) = \chi_{p^n\mathbb{Z}_p}(x-a)$ gilt. Somit folgt die Behauptung. Da $\mathrm{e}_p(-ay)$ lokal konstant ist, folgt $\mathrm{e}_p(-ay)\chi_{p^{-n}\mathbb{Z}_p}(y) \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$. Also bildet die Fouriertransformation $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ ab. Es bleibt lediglich die Inversionsformel zu zeigen. Sei dafür $f(x) = p^{-n}\mathrm{e}_p(-ax)\chi_{p^{-n}\mathbb{Z}_p}(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\hat{f}(y) &= p^{-n}\hat{\chi}_{p^{-n}\mathbb{Z}_p}(y+a) \\ &= p^{-n}p^n\chi_{p^n\mathbb{Z}_p}(y+a) \\ &= \chi_{-a+p^n\mathbb{Z}_p}(y)\end{aligned}$$

$$= \chi_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(-y).$$

Da für $f = \chi_{a+p^n\mathbb{Z}_p}$ die behauptete Formel gilt und jede Schwartzfunktion eine endliche Summe solcher Funktionen ist, folgt die Behauptung. $\square$

Nach der lokalen Fourieranalysis machen wir nun globale Fourieranalysis auf den Adelen. Zunächst betrachten wir die endlichen Adele.

Definition 7.11. Eine Funktion $f\colon \mathbb{A}_f \to \mathbb{C}$ heißt *Schwartzfunktion* falls f lokal konstant ist und kompakten Träger hat. Wir bezeichnen den komplexen Vektorraum aller Schwartzfunktionen auf $\mathbb{A}_f$ mit $\mathcal{S}(\mathbb{A}_f)$.

Beispiel 7.12. Für $a \in \mathbb{A}_f$ und $\mathbb{Z} \ni m > 0$ ist die Funktion $\chi_{a+m\hat{\mathbb{Z}}}$ eine Schwartzfunktion.

Proposition 7.13. *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_f)$. Dann ist f eine endliche Linearkombination von Funktionen der Form $\chi_{a+m\hat{\mathbb{Z}}}$.*

Definition 7.14. Sei $f \in L^1(\mathbb{A})$. Dann ist die Fouriertransformation von f definiert durch

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{A}} f(x)\overline{\mathrm{e}(xy)}\,\mathrm{d}x.$$

Definition 7.15. Eine Funktion $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ heißt *Schwartzfunktion*, falls f eine endliche Linearkombination von Funktionen der Form $t(x) = g(x_\infty)h(x_f)$ für $x = (x_\infty, x_f)$ ist.

Definition 7.16. Seien $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $h \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_f)$. Eine Funktion der Form

$$\begin{aligned} f\colon A &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \prod_{\nu \leq \infty} f_\nu(x_\nu) \end{aligned}$$

mit $f_\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_\nu)$ für alle $\nu \leq \infty$ sowie $f_p = \chi_{\mathbb{Z}_p}$ für fast alle p heißt *einfache Schwartzfunktion.*

Lemma 7.17. *Jede Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ ist eine endliche Linearkombination einfacher Schwartzfunktionen.*

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ ist f integrierbar und die lokale Inversionformel impliziert das folgende Theorem.

Theorem 7.18. *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$. Dann gilt $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ und*

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x).$$

Theorem 7.19 (Poissonsche Summenformel)**.** *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$. Dann gilt*

$$\sum_{t \in \mathbb{Q}} f(t) = \sum_{t \in \mathbb{Q}} \hat{f}(t)$$

und insbesondere sind beide Summen absolut konvergent.

Beweis. Es genügt, die Behauptung für $f(x) = f_\infty(x_\infty)\chi_{a+N\hat{Z}}(x_f)$ zu zeigen. Da $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}_f$ dicht ist, existiert $t \in \mathbb{Q}$ mit $t \in a + N\hat{Z}$. Dann gilt auch $t + N\hat{Z} = a + N\hat{Z}$ sowie

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathbb{Q}} f(x) &= \sum_{x \in \mathbb{Q}} f_\infty(x_\infty)\chi_{a+N\hat{Z}}(x_f) \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Q}} f_\infty(x_\infty)\chi_{t+N\hat{Z}}(x_f) \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Q} \cap (t+N\hat{Z})} f_\infty(x_\infty) \\
&= \sum_{y \in \mathbb{Z}} f_\infty(Ny + t).
\end{aligned}$$

Dies impliziert die absolute Konvergenz beider Reihen. Die Gleichheit kann aus der klassischen Poissonsche Summationsformel gefolgert werden. Sie kann ebenfalls folgendermaßen bewiesen werden. Die Funktion

$$\begin{aligned}
F \colon \mathbb{A} &\to \mathbb{C} \\
x &\mapsto \sum_{t \in \mathbb{Q}} f(x+t)
\end{aligned}$$

ist unter $\mathbb{Q}$ invariant und kann daher als Funktion auf $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ aufgefasst werden. Sie hat eine Fourierentwicklung durch die Charaktere der dualen Gruppe $\widehat{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$, d.h.

$$F(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Q}} a_\nu \mathrm{e}(\nu x)$$

mit

$$a_\nu = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} F(x)\mathrm{e}(-\nu x)\, \mathrm{d}x.$$

Es gilt

$$a_\nu = \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} \sum_{t \in \mathbb{Q}} f(x+t)\mathrm{e}(-\nu x)\, \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t\in\mathbb{Q}} \int_{\mathbb{A}/\mathbb{Q}} f(x+t)\mathrm{e}(-\nu x)\ \mathrm{d}x \\
&= \sum_{t\in\mathbb{Q}} \int_{A/\mathbb{Q}} f(x+t)\mathrm{e}(-\nu(x+t))\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{A} f(x)\mathrm{e}(-\nu x)\ \mathrm{d}x \\
&= \hat{f}(\nu).
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\sum_{t\in\mathbb{Q}} f(x+t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Q}} \hat{f}(\nu)\mathrm{e}(\nu x).$$

Für $x = 0$ folgt die Behauptung. $\square$

8 Die Riemannsche ζ-Funktion

Wir werden die analytischen Eigenschaften der Riemannschen ζ-Funktion mit Hilfe adelischer Methoden zeigen. Natürlich geht dies auch mit klassischen Methoden aus der Funktionentheorie, aber unsere Methode wird alles in einen größeren Kontext stellen und auch auf andere Situationen anwendbar sein.

Definition 8.1. Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ ist die Riemannsche ζ-Funktion durch

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert.

Lemma 8.2. *Die Reihe konvergiert lokal gleichmäßig und absolut.*

Wir betrachten nun die Poisson-Summation für Schwartzfunktionen.

Definition 8.3. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ definieren wir

$$E(f)(x) = \sum_{t \in \mathbb{Q}^*} f(tx)$$

für $x \in \mathbb{A}^*$.

Proposition 8.4. *$E(f)$ konvergiert lokal gleichmäßig und absolut und definiert eine stetige Funktion auf $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$. Weiterhin ist $E(f)$ schnell fallend, das heißt für alle $\mathbb{Z} \ni N > 0$ existiert ein $C_N > 0$ mit*

$$|E(f)(x)| \leq \frac{C_N}{|x|^N}$$

für $|x| \geq 1$. Außerdem gilt

$$E(f)(x) = \frac{1}{|x|} \left(E(\hat{f})(\frac{1}{x}) + \hat{f}(0) \right) - f(0).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Konvergenz der Reihe. Es reicht diese für Funktionen der Form

$$f(x) = f_\infty(x_\infty)\chi_{a+N\hat{Z}}(x_f)$$

mit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{A}_f$, $\mathbb{Z} \ni N > 0$. Da f_∞ eine Schwartzfunktion ist, existiert ein $C > 0$, sodass

$$|f_\infty(x_\infty)| \leq \frac{C}{1 + x_\infty^2}$$

für alle $x_\infty \in \mathbb{R}$ gilt. Sei $x_f \in \mathbb{A}_f^*$. Dann ist x_f von der Form

$$x_f = ru$$

für eindeutige $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^*$, $u \in \hat{Z}^*$. Insbesondere ist dann $r\hat{Z}^*$ eine kompakte offene Teilmenge von $\mathbb{A}_f^*$. Für $t \in \mathbb{Q}^*$ gilt

$$\begin{aligned} tx_f &\in a + N\hat{Z} \\ \Rightarrow tru &\in a + N\hat{Z} \\ \Rightarrow t &\in r^{-1}\left(u^{-1}a + N\hat{Z}\right) \\ \Rightarrow t &\in r^{-1}s(\hat{Z} \cap \mathbb{Q}^*) \\ \Rightarrow t &\in \frac{1}{n}\hat{Z} \end{aligned}$$

für ein $Z \ni n > 0$. Somit gilt nun

$$\begin{aligned} |E(f)(x)| &\leq \sum_{t \in \mathbb{Q}^*} |f(tx)| \\ &\leq \sum_{t \in \mathbb{Q}^*} |f_\infty(tx_\infty)|\, \chi_{a+N\hat{Z}}(tx_f) \\ &\leq \sum_{t \in \mathbb{Q}^*, tx_f \in a+N\hat{Z}} |f_\infty(tx_\infty)| \\ &\leq c \sum_{t \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}} \frac{1}{1 + (tx_\infty)^2} \\ &\leq c \sum_{t \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + t^2 x_\infty^2/n^2}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite verhält sich wie $\zeta(2)$. Daher konvergiert $E(f)$ gleichmäßig auf Mengen der Form $I \times r\hat{Z}^*$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}^*$ kompakt ist.

Ebenso kann man zeigen, dass $E(f)$ schnell fallend ist. Die Darstellung über die Fouriertransformation folgt aus der Poissonschen Summationsformel. Für $x \in \mathbb{A}^*$ definieren wir

$$f_x(y) \colon f(xy) \in \mathcal{S}(\mathbb{A}).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\hat{f}_x(y) &= \int_{\mathbb{A}} f_x(z)\overline{\mathrm{e}(zy)}\ \mathrm{d}z \\ &= \int_{\mathbb{A}} f(xz)\mathrm{e}(-xzy/x)\ \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{|x|}\hat{f}(y/x).\end{aligned}$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned}E(f)(x) &= \sum_{t\in\mathbb{Q}} f(tx) - f(0) \\ &= \sum_{t\in\mathbb{Q}} f_x(t) - f(0) \\ &= \sum_{t\in\mathbb{Q}} \hat{f}_x(t) - f(0) \\ &= \frac{1}{|x|}\sum_{t\in Q} \hat{f}(t/x) - f(0) \\ &= \frac{1}{|x|}\left(\sum_{t\in\mathbb{Q}^*} \hat{f}(t/x) + \hat{f}(0)\right) - f(0) \\ &= \frac{1}{|x|}\Big(E(\hat{f})(1/x) + \hat{f}(0)\Big) - f(0),\end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. □

Definition 8.5. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ definieren wir das ζ-Integral von f durch

$$\zeta(f,s) = \int_{\mathbb{A}^*} f(x)\,|x|^s\ \mathrm{d}^*x,$$

wobei d^*x das normalisierte Haarmaß auf $\mathbb{A}^*$ ist.

Wenn man die richtige Funktion einsetzt erhält man die Riemannsche ζ-Funktion. Allerdings kann man mit dieser Methode auch Funktionalgleichungen für andere holomorphe Funktionen zeigen.

Proposition 8.6. *Sei $g = g_\infty g_f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ mit*

$$\begin{aligned}g_\infty(x_\infty) &= \mathrm{e}^{-\pi x_\infty^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \\ g_f(x_f) &= \chi_{\hat{\mathbb{Z}}}(x_f) \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_f).\end{aligned}$$

Dann gilt für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\zeta(g,s) = \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s),$$

das heißt $\zeta(g,s)$ ist die vervollständigte Riemannsche ζ-Funktion.

Beweis. Es gilt

$$\zeta(g,s) = \int_{\mathbb{R}^*} g_\infty(x_\infty)\,|x_\infty|^s \ \mathrm{d}^* x_\infty \cdot \int_{\mathbb{A}_f^*} g_f(x_f)\,|x_f|^s \ \mathrm{d}_f^* x_f.$$

Das erste Integral ergibt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^*} g_\infty(t)\,|t|^s \frac{\mathrm{d}t}{|t|} &= 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\pi t^2} t^{s-1}\ \mathrm{d}t \\ &= \pi^{-s/2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{s/2-1}\ \mathrm{d}x \\ &= \pi^{-s/2}\Gamma(s/2).\end{aligned}$$

Das zweite Integral ergibt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}_f^*} g_f(x_f)\,|x_f|^s\ \mathrm{d}_f^* x_f &= \prod_{p<\infty}\int_{\mathbb{Q}_p^*} g_p(x_p)\,|(|\,x_p)_p^s\ \mathrm{d}^* x_p \\ &= \prod_{p<\infty}\int_{\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}} |x_p|_p^s\ \mathrm{d}^* x_p \\ &= \prod_{p<\infty}\frac{1}{1+p^{-s}} = \zeta(s).\end{aligned}$$

Wenn wir die beiden Rechnung kombinieren, folgt die Behauptung. □

Wir zeigen nun folgende allgemeine Aussage. Als Spezialfall wird daraus die Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion folgen.

Theorem 8.7. *Es gilt*

$$\zeta(f,s) = \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*} E(f)(x)\,|x|^s\ \mathrm{d}^* x.$$

Das Integral konvergiert lokal gleichmäßig für $\mathrm{Re}(s) > 1$ *und definiert eine holomorphe Funktion. Weiterhin hat es eine meromorphe Fortsetzung nach* $\mathbb{C}$ *und ist holomorph auf* $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$. *In* $s = 0, 1$ *liegt ein Pol der Ordnung* ≤ 1 *mit Residuum* $-f(0)$ *bzw.* $\hat{f}(0)$ *vor. Außerdem erfüllt das* ζ*-Integral die Funktionalgleichung*

$$\zeta(f,s) = \zeta(\hat{f}, 1-s).$$

Beweis. Zunächst zeigen wir die Konvergenz für $\mathrm{Re}(s) > 1$. Es gilt

$$|f(x)| \leq \frac{c}{1+|x_\infty|^N}\chi_{\frac{1}{n}\hat{Z}}(x_f)$$

für geeignetes $c > 0$, $\mathbb{Z} \ni N, n > 0$ und $N > \mathrm{Re}(s)$. Damit können wir nun leicht die Konvergenz zeigen, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\zeta(|f|, s) &= \int_{\mathbb{A}^*} |f(x)| \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x \\
&= \int_{\mathbb{R}^*} |f_\infty(t)| \, |t|^s \frac{\mathrm{d}t}{|t|} \int_{\mathbb{A}_f} |f(x_f)| \, |x_f|^s \ \mathrm{d}_f^* x_f \\
&\leq 2C \int_{\mathbb{R}^*_{\geq 0}} \frac{t^{s-1}}{1+t^N} \ \mathrm{d}t \int_{\frac{1}{n}\hat{Z} \cap \mathbb{A}_f^*} |x_f|^s \ \mathrm{d}_f^* x_f.
\end{aligned}$$

Der erste Faktor ist endlich, da wir N groß genug gewählt haben. Der zweite Faktor konvergiert wie $\zeta(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$. Diese Abschätzungen gelten lokal gleichmäßig in s und dies zeigt die Konvergenz.

Als nächstes zeigen wir, dass wir $\zeta(f, s)$ auch durch obiges Integral darstellen können. Dazu verwenden wir, dass die Isomorphie

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}^* &\to \mathbb{A}^1 \times \mathbb{R}^*_{>0} \\
(a_\infty, a_f) &\mapsto \left(\left(\frac{a_\infty}{|a|}, a_f\right), |a|\right)
\end{aligned}$$

einen Isomorphismus

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}* &\to \mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^* \times \mathbb{R}^*_{>0} \\
(a_\infty, a_f)\mathbb{Q}^* &\mapsto \left(\left(\frac{a_\infty}{|a|}, a_f\right)\mathbb{Q}^*, |a|\right)
\end{aligned}$$

induziert. In Kombination mit dem Isomorphismus

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^* &\to \hat{Z}^* \\
(1, a_f)\mathbb{Q}^* &\mapsto a_f
\end{aligned}$$

erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* \to \hat{Z}^* \times \mathbb{R}^*_{>0} =: \mathcal{F}.$$

Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt (da $\mathrm{d}^* x$ ein invariantes Maß ist)

$$\begin{aligned}
\zeta(f, s) &= \int_{\mathbb{A}^*} f(x) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x \\
&= \sum_{t \in \mathbb{Q}^*} \int_{t\mathcal{F}} f(x) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x \\
&= \sum_{t \in \mathbb{Q}^*} \int_{\mathcal{F}} f(tx) \, |tx|^s \ \mathrm{d}^* x \\
&= \sum_{t \in \mathbb{Q}^*} \int_{\mathcal{F}} f(tx) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{F}} \sum_{t \in \mathbb{Q}^*} f(tx) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x \\
&= \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*} E(f)(x) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x,
\end{aligned}
$$

wobei wir verwendet haben, dass das Integral absolut konvergiert, damit wir Integral und Summe (Integral bzgl. Zählmaß) vertauschen dürfen. Da $\{1\} \subseteq \mathbb{R}_{>0}*$ eine Nullmenge ist und $A^1/\mathbb{Q}^*$ kompakt ist, hat auch

$$
\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^* \times \{1\} \subseteq \mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*
$$

Maß 0. Damit folgt (da Nullmengen für das Integral unwichtig sind)

$$
\zeta(f,s) = \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* |x|>1} E(f)(x) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x + \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* |x|<1} E(f)(x) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x
$$

Da $E(f)$ schnell fallend ist, konvergiert das erste Integral für $s \in \mathbb{C}$, da

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* |x|>1} E(f)(x) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x \right| &\leq \int_{|x|>1} |E(f)(X)| \, ||x|^s| \ \mathrm{d}^* x \\
&\leq \int_{|y|>1} \frac{C_n}{|x|^N} \, |x|^{\mathrm{Re}(s)} \ \mathrm{d}^* x \\
&\leq C_N \int_{A^1/\mathbb{Q}^*} \int_1^\infty t^{\mathrm{Re}(s)-N} \frac{\mathrm{d}t}{t} \ \mathrm{d}^* x \\
&\leq C_N \int_1^\infty t^{\mathrm{Re}(s)-N-1} \ \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

mit Fubini folgt. Wenn wir N groß genug wählen ($\mathrm{Re}(s) < N$), konvergiert das letzte Integral und die Konvergenz ist lokal gleichmäßig. Daraus folgt, dass $\int_{|x|>1} E(f)(x) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x$ eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ definiert.

Für das zweite Integral verwenden wir die Darstellung von $E(f)$ aus Proposition 8.4. Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|<1} E(f)(x) \, |x|^s \ \mathrm{d}^* x = &\int_{|x|<1} E(\hat{f})(\frac{1}{x}) \, |x|^{s-1} \ \mathrm{d}^* x \\
&+ \hat{f}(0) \int_{|x|<1} |x|^{s-1} \ \mathrm{d}^* x - f(0) \int_{|x|<1} |x|^s \ \mathrm{d}^* x.
\end{aligned}
$$

Wir betrachten nun jedes Integral einzeln und beginnen mit dem zweiten. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|<1} |x|^{s-1} \ \mathrm{d}^* x &= \int_{\mathbb{A}^1/\mathbb{Q}^*} \int_0^1 t^{s-1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \ \mathrm{d}^* x \\
&= \int_0^1 t^{s-2} \ \mathrm{d}t = \frac{1}{s-1}.
\end{aligned}
$$

Analog folgt

$$
\int_{|x|<1} |x|^s \ \mathrm{d}^* x = \frac{1}{s}.
$$

Für das erste Integral verwenden wir die Substitution $y = \frac{1}{x}$ und erhalten

$$\int_{|x|<1} E(\hat{f})(\frac{1}{x}) \, |x|^{s-1} \, \mathrm{d}^* x = \int_{|y|>1} E(\hat{f})(y) \, |y|^{1-s} \, \mathrm{d}^* y.$$

Das schwierige bei dieser Substitution ist, wie sich das Maß verhält. Für $\nu = \infty$ gilt für die Substitution $y = \frac{1}{x}$ mit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x^2}$ und somit

$$\int_0^\infty f(\frac{1}{x}) \, \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int_\infty^0 f(y) \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Der Fall $\nu < \infty$ verbleibt als Übung. Insgesamt erhalten wir

$$\zeta(f, s) = \int_{|x|>1} E(f)(x) \, |x|^s + E(\hat{f})(x) \, |x|^{1-s} \, \mathrm{d}^* x + \frac{\hat{f}(0)}{s-1} - \frac{f(0)}{s}.$$

Dies zeigt die meromorphe Fortsetzung sowie die Aussage über die Residuen. $\square$

Dieses Theorem ist eines der Hauptresultate der Vorlesung und liefert eine schöne Beschreibung der Eigenschaften des ζ-Integrals. Für $g \in \mathcal{S}(A)$ aus Proposition 8.6 gilt $g = \hat{g}$, sodass $\zeta(g, s) = \zeta(g, 1-s)$ folgt.

Proposition 8.8. *Sei* $\zeta^*(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ *für* $\mathrm{Re}(s) > 1$. *Dann definiert* ζ^* *ist eine meromorphe Funktion auf* $\mathbb{C}$ *mit einfachen Polen in* 0 *und* 1. *Weiterhin gilt* $\zeta^*(s) = \zeta^*(1-s)$.

9 Dirichletsche L-Reihe

Sei $\chi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to T$ ein Dirichletcharakter modulo N. Wir setzen χ zu einer Funktion auf $\mathbb{Z}$ durch

$$\chi(a) = \begin{cases} \chi(a \mod N), & (a,N) = 1, \\ 0, & (a,N) > 1. \end{cases}$$

fort und definieren die *L-Reihe* von χ durch

$$L(\chi, s) \coloneqq \sum_{n=1} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Diese Reihe konvergiert für $\operatorname{Re}(s) > 1$ und definiert dort eine holomorphe Funktion. Es gilt

$$L(\chi, s) = \prod_{p>0} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}.$$

Erinnerung: Sei ω ein endlicher Charakter von $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$. Wir betrachten ω als Charakter auf $\mathbb{A}^*$. Dann sind fast alle ω_p unverzweigt, das heißt $\mathbb{Z}_p^* \subseteq \ker(\omega_p)$. Falls ω_p verzweigt, so existiert ein minimales $\mathbb{Z} \ni m_p > 0$ mit

$$1 + K(0, p^{-m_p}) \subseteq \ker(\omega_p).$$

Der Führer von ω ist durch $N = \prod_{p \text{verzweigt}} p^{m_p}$ definiert. Dann definiert ω durch $\chi(p) = \overline{\omega_p(p)}$ für $p \nmid N$ einen primitiven Dirichletcharakter modulo N. Wenn wir χ zu einem Charakter auf $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ liften, erhalten wir ω zurück.

Definition 9.1. Sei ω ein endlicher Charakter auf $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ und $f \in \mathcal{S}(A)$. Wir definieren die twisted ζ-Funktion

$$\zeta(f, \omega, s) \coloneqq \int_{\mathbb{A}^*} f(x)\omega(x)\,|x|^s \;\mathrm{d}^*x.$$

Wie im letzten Kapitel kann man zeigen, dass das Integral lokal gleichmäßig für $\mathrm{Re}(s) > 1$ konvergiert und dort eine holomorphe Funktion definiert. Ebenso gilt

$$\zeta(f, \omega, s) = \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*} E(f)(x)\omega(x)\, |x|^s \, \mathrm{d}^*x,$$

wobei $E(f)$ wie im letzten Kapitel definiert ist (siehe Definition 8.3).

Als Vorbereitungen benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 9.2. *Sei K eine kompakte Hausdorffgruppe mit Haarmaß $\mathrm{d}x$ und $\chi\colon K \to T$ ein Charakter. Dann gilt*

$$\int_K \chi(x) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \mathrm{vol}(K), & \textit{falls } \chi \textit{ trivial ist,} \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Nun können wir unseren Satz formulieren.

Theorem 9.3. *Sei $\omega \neq 1$ ein endlicher Charakter von $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$. Dann hat $\zeta(f, \omega, s)$ eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ und erfüllt die Funktionalgleichung*

$$\zeta(f, \omega, s) = \zeta(\hat{f}, \overline{\omega}, 1 - s).$$

Beweis. Wie im Fall $\omega = 1$ erhält man

$$\begin{aligned} \zeta(f, \omega, s) &= \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*} E(f)(x)\omega(x)\, |x|^s \, \mathrm{d}^*x \\ &= \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* |x|<1} E(f)(x)\omega(x)\, |x|^s \, \mathrm{d}^*x + \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* |x|>1} E(f)(x)\omega(x)\, |x|^s \, \mathrm{d}^*x. \end{aligned}$$

Der zweite Summand konvergiert für alle $s \in \mathbb{C}$ und ist holomorph. Für das Integral erhalten wir zuvor mit der Funktionalgleichung für $E(f)$

$$\int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* |x|<1} E(f)(x)\omega(x)\, |x|^s \, \mathrm{d}^*x$$

$$= \int_{|x|<1} E(\hat{f})(\frac{1}{x})\omega(x)\, |x|^{s-1} \, \mathrm{d}^*x + \hat{f}(0) \int_{|x|<1} \omega(x)\, |x|^{s-1} \, \mathrm{d}^*x - f(0) \int_{|x|<1} \omega(x)\, |x|^s \, \mathrm{d}^*x.$$

Mit der Substitution $y = \frac{1}{x}$ wird das Integral zu

$$\int_{|y|>1} E(\hat{f})(y)\overline{\omega}(y)\, |y|^{1-s} \, \mathrm{d}^*y.$$

Als nächstes zeigen wir, dass die beiden anderen Integrale verschwinden. Es gilt

$$\int_{|x|<1} \omega(x)\, |x|^{s-1} \, \mathrm{d}^*x = \int_{A^1/\mathbb{Q}^*} \int_0^1 \omega(x) t^{s-1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \, \mathrm{d}^*x$$

$$= \int_0^1 t^{s-2}\ \mathrm{d}t \int_{A^1/\mathbb{Q}^*} \omega(x)\ \mathrm{d}x.$$

Da wir ω als nicht trivial vorausgesetzt haben, folgt mit Lemma 9.2, dass das zweite Integral verschwindet. Das dritte Integral lässt sich genauso behandeln. Daraus folgt nun

$$\zeta(f,\omega,s) = \int_{\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*|x|>1} E(f)(x)\omega(x)\,|x|^s + E(\hat{f})(x)\overline{\omega}(x)\,|x|^{1-s}\ \mathrm{d}^*x.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Theorem 9.4. *Sei $\omega \neq 1$ ein endlicher Charakter von $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ mit Führer N und sei χ der zugehörige primitive Dirichletcharakter modulo N. Dann gibt es $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ mit*

$$\zeta(f,\omega,s) = L_\infty(\overline{\chi},s)L(\overline{\chi},s),$$

wobei $L_\infty(\overline{\chi},s) = \Gamma(\frac{s+\delta}{2})\pi^{-\frac{s+\delta}{2}}$ für $\delta \in \{0,1\}$, sodass $\omega_\infty(-1) = (-1)^\delta = \overline{\chi}(-1)$ gilt. Für $L^*(\overline{\chi},s) = L_\infty(\overline{\chi},s)L(\overline{\chi},s)$ gilt

$$L^*(\overline{\chi},s) = (-1)^\delta N^{-s}\overline{\tau(\omega,\mathrm{e})}L^*(\overline{\chi},1-s),$$

mit

$$\tau_(\omega,\mathrm{e}) = \varphi(N)\int_{1/N\hat{Z}^*} \omega(x)\mathrm{e}(x)\ \mathrm{d}^*x.$$

Beweis. Wir schreiben $N = \prod_{p<\infty} p^{n_p}$. Wir definieren $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ durch $f_p = \chi_{\mathbb{Z}_p}$ für $p \nmid N$, $f_p = p^{n_p}(1-\frac{1}{p})\chi_{1+p^{n_p}\mathbb{Z}_p}$ für $p \mid N$ und $f_\infty(t) = t^s\mathrm{e}^{-\pi t^2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\zeta(f,\omega,s) &= \int_{\mathbb{A}^*} f(x)\omega(x)\,|x|^s\ \mathrm{d}^*x\\ &= \prod_{\nu\leq\infty}\int_{\mathbb{Q}_\nu^*} f_\nu(x_\nu)\omega_\nu(x_\nu)\,|x_\nu|_\nu^s\ \mathrm{d}^*x_\nu.\end{aligned}$$

Also reicht es die einzelne Faktoren $\zeta_\nu(f_\nu,\omega_\nu,s)$ zu berechnen.

Sei $p \nmid N$, also unverzweigt. Dann gilt, da $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\} = \bigcup_{j=0}^\infty p^j\mathbb{Z}_p^*$

$$\begin{aligned}\zeta_p &= \int_{\mathbb{Q}_p^*\cap\mathbb{Z}_p} \omega_p(x_p)\,|x|_p^s\ \mathrm{d}^*x_p\\ &= \sum_{j=0}^\infty \int_{p^j\mathbb{Z}_p^*} \omega_p(x_p)\,|x_p|_p^s\ \mathrm{d}^*x_p\\ &= \sum_{j=0}^\infty \int_{\mathbb{Z}_p^*} \omega_p(p^jy_p)\,\left|p^jy_p\right|_p^s\ \mathrm{d}^*y_p.\end{aligned}$$

Da das Maß invariant unter Multiplikation ist folgt, dass sich obiges Integral zu folgendem Ausdruck vereinfacht

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{\infty} \omega_p(p^j)p^{-js} \int_{\mathbb{Z}_p^*} \mathrm{d}^* y_p \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\chi}(p)^j p^{-js} = \frac{1}{1-\overline{\chi}(p)p^{-s}}.\end{aligned}$$

Sei $p \mid N$, also p verzweigt. In diesem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned}\zeta_p &= p^{n_p}(1-\frac{1}{p}) \int_{1+p^{n_p}\mathbb{Z}_p} \omega_p(x_p) \left|x_p\right|_p^s \ \mathrm{d}^* x_p \\ &= \varphi(p^{n_p}) \int_{1+p^{n_p}\mathbb{Z}_p} \mathrm{d}^* x_p = 1,\end{aligned}$$

da $\mathbb{Z}_p^*$ die disjunkte Zerlegung

$$\mathbb{Z}_p^* = \bigcup_{j \in (\mathbb{Z}/p^{n_p}\mathbb{Z})^*} (j + p^{n_p}\mathbb{Z}_p)$$

besitzt. Für $\nu = \infty$ und $\delta = 0$ ist ω_∞ trivial. Es gilt

$$\zeta_\infty = \int_{\mathbb{R}^*} \mathrm{e}^{-\pi x^2} \left|x\right| \frac{\mathrm{d}x}{|x|} = \Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}.$$

Für $\delta = 1$ ist ω_∞ der Signumscharakter und es gilt

$$\begin{aligned}\zeta_\infty &= \int_{\mathbb{R}^*} \mathrm{e}^{-\pi x^2} x\omega_\infty(x) \left|x\right|^s \frac{\mathrm{d}x}{|x|} \\ &= \Gamma(\frac{s+1}{2})\pi^{-\frac{s+1}{2}}.\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\zeta(f, \omega, s) = L_\infty(\overline{\chi}, s)L(\overline{\chi}, s).$$

Die Funktionalgleichung von L^* folgt aus

$$\zeta(f, \omega, s) = \zeta(\hat{f}, \overline{\omega}, 1-s).$$

Dazu berechnen wir die Fouriertransformierte von f. Für $p \nmid N$ gilt $\hat{f}_p = f_p$.

Für $p \mid N$ gilt mit der Substitution $y = 1 + t$

$$\begin{aligned}\hat{f}_p(x) &= \int_{\mathbb{Q}_p} f_p(y)\mathrm{e}_p(-xy) \ \mathrm{d}y \\ &= \varphi(p^{n_p}) \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_{1+p^{n_p}\mathbb{Z}_p}(y)\mathrm{e}_p(-xy) \ \mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi(p^{n_p}) \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_{p^{n_p}\mathbb{Z}_p}(t) \mathrm{e}_p(-x(1+t))\ \mathrm{d}t \\
&= \varphi(p^{n_p}) \mathrm{e}_p(-x) \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_{\mathbb{Z}_p}(p^{-n_p}t) \mathrm{e}_p(-xp^{n_p}p^{-n_p}t)\ \mathrm{d}t \quad = \varphi(p^{n_p})\overline{\mathrm{e}_p(x)}\, |p^{n_p}|_p \int_{\mathbb{Q}_p} g(t)\ \mathrm{d}t \\
&= (1-\frac{1}{p})\overline{\mathrm{e}_p(x)} \int_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{e}_p(-xp^{n_p}t)\ \mathrm{d}t \\
&= (1-\frac{1}{p})\overline{\mathrm{e}_p(x)} \chi_{p^{-n_p}\mathbb{Z}_p}(x).
\end{aligned}
$$

Im Fall $\nu = \infty$ und $\delta = 0$ gilt

$$\hat{f}_\infty = f_\infty = (-\mathrm{i})^\delta f_\infty.$$

Für $\delta = 1$ gilt

$$\hat{f}_\infty(x) = \int_{\mathbb{R}} y \mathrm{e}^{-\pi y^2 - 2\pi \mathrm{i} xy} \mathrm{d}y = (-\mathrm{i})^\delta f_\infty(x).$$

Wir berechnen nun das ζ-Integral

$$\zeta(\hat{f}, \overline{\omega}, 1-s) = \prod_{\nu \le \infty} \int_{\mathbb{Q}_\nu^*} f_\nu(x) \overline{\omega}_n u(x)\, |x_\nu|_\nu^{1-s}\ \mathrm{d}^* x_\nu.$$

Für $p \nmid N$ gilt

$$\zeta_p(\hat{f}_p, \overline{\omega}, 1-s) = \frac{1}{1-\chi(p)p^{1-s}}.$$

Für $p \mid N$ gilt $\square$

10 Automorphe Formen auf $\mathrm{GL}(1, \mathbb{A})$

Definition 10.1. Sei $\omega\colon \mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* \to T$ ein Charakter, der nicht notwendigerweise endlich ist. Eine *automorphe Form* auf $\mathrm{GL}(1, \mathbb{A})$ mit Charakter ω ist eine Funktion

$$\Phi\colon\ \mathrm{GL}(1, \mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

mit den Eigenschaften

(i) $\Phi(\gamma g) = \Phi(g)$ für alle $\gamma \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{Q})$ und $g \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{A})$,

(ii) $\Phi(zg) = \omega(z)\Phi(g)$ für alle $z, g \in \mathbb{A}^*$,

(iii) Φ wächst moderat.

Die automorphen Formen mit Charakter ω bilden einen komplexen Vektorraum S_ω. Setzen wir in ii) $g = (1, 1, \dots)$, so erhalten wir

$$\Phi(z) = \omega(z)\Phi(g) = c\omega(z).$$

Also ist $\dim_{\mathbb{C}} S_\omega = 1$.

Theorem 10.2. *Sei Φ eine autormorphe Form auf $\mathrm{GL}(1, \mathbb{A})$. Dann kann Φ als*

$$\Phi(g) = c\chi_{idelic}(g)\,|g|^{\mathrm{i}t}$$

mit $c \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ und χ ein primitiver Dirichlet Charakter geschrieben werden kann. Diese Darstellung ist eindeutig. Wir können ζ-Integrale für beliebige automorphe Formen auf $\mathrm{GL}(1, \mathbb{A})$ definieren. Diese haben ähnliche Eigenschaften wie die, die zu endlichen Charakteren von $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$ korrespondieren.

11 Automorphe Formen auf $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$

Definition 11.1. Eine Funktion $\Phi\colon \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ heißt *glatt*, wenn für jedes $g_0 \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ eine offene Umgebung U und eine glatte Funktion $\Phi_\infty^U\colon \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ existiert, sodass

$$\Phi(g) = \Phi_\infty^U(g_\infty)$$

für alle $g \in U$ gilt.

Definition 11.2. Sei $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ mit Einträgen $a = (a_\infty, a_2, \dots)$ usw. Definiere

$$\|g\| = \prod_{\nu \le \infty} \max\{|a_\nu|_\nu, |b_\nu|_\nu, |c_\nu|_\nu, |d_\nu|_\nu, |a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu|_\nu\}.$$

Eine Funktion $\Phi\colon \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})\ \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ *wächst moderat*, falls Konstanten $B, C > 0$ mit

$$|\Phi(g)| \le C \|g\|^B$$

für alle $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ existieren. Sei $K = O(2, \mathbb{R}) \prod_{p<\infty} \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_p)$ die maximale kompakte Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$. Eine Funktion $\Phi\colon \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ heißt *rechts K-endlich*, wenn die Menge

$$\{\phi \circ R_k \mid k \in K\}$$

für jedes $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ einen endlich-dimensionalen Vektorraum definiert, wobei R_k die Rechtstranslation mit k ist. Sei $Z(U(g))$ der Zentralisator der universellen einhüllenden Algebra von $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Eine glatte Funktion $\Phi\colon \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ heißt *$Z(U(g))$-endlich* wenn die Menge

$$\{D\phi \mid D \in Z(U(g))\}$$

einen endlich-dimensionalen Vektorraum erzeugt (Vektorraum von Funktionen).

Definition 11.3. Sei $\omega\colon \mathbb{Q}^*\backslash\mathbb{A}^* \to T$ ein Charakter. Eine *automorphe Form* auf $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ mit Charakter ω ist eine glatte Funktion

$$\Phi\colon\ \mathrm{GL}(2,\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

mit

(i) $\Phi(\gamma g) = \Phi(g)$ für alle $\gamma \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$ und $g \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$,

(ii) $\Phi(zg) = \omega(z)\Phi(g)$ für alle $z \in \mathbb{A}^*$ und $g \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$,

(iii) Φ ist rechts K-endlich,

(iv) Φ ist $Z(U(g))$-endlich,

(v) Φ wächst moderat.

Solch eine Funktion heißt *Spitzenform*, wenn zusätzlich

$$\int_{\mathbb{Q}\;\mathbb{A}} \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)\,\mathrm{d}x = 0$$

für alle g gilt.

Bemerkung 11.4. *Automorphe Formen auf* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ *können durch Lifts klassischer Modulformen erhalten werden.*

12 Die modulare Gruppe

Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ operiert auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ via

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Diese Gruppenoperation ist transitiv. Für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $cz + d \neq 0$ gilt

$$\mathrm{Im}(Mz) = \frac{\det(M)}{|cz+d|^2} \mathrm{Im}(z).$$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ wird durch die Operation von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$, den Matrizen mit positiver Determinante, in drei Orbits zerlegt, nämlich $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $-H$ und $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Beispiel 12.1. (i) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ operiert durch Translation, es gilt $T^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^m = z + m$.

(ii) $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ operiert durch $Sz = \frac{-1}{z}$

(iii) Für $z = x + \mathrm{i}y \in H$ gilt

$$M_z = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$$

und $M_z \mathrm{i} = z$.

(iv) Es gilt die folgende Formel $(ST)^3 = (TS)^3 = S^2 = -1$.

Wir charakterisieren nun Erzeuger von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 12.2. *Die Gruppe* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *wird durch die Matrizen* $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$, S *erzeugt.*

Proposition 12.3. *Der Stabilisator von* i *in* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *ist*

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid MM^T = 1\}.$$

Insbesondere ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\,\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &\to H \\ M\,\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &\mapsto M_i \end{aligned}$$

eine Bijektion.

Proposition 12.4. *Die Gruppe* $\Gamma \coloneqq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *wird von* S *und* T *erzeugt wird.*

Beweis. Sei $G = \langle S, T\rangle \subseteq \Gamma$. Dann gilt $-1 = S^2 \in G$. Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. Wir zeigen per Induktion über $|c|$, dass $M \in G$. Falls $c = 0$, dann gilt $M = \pm \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \pm T^n$ für geeignetes $n \in \mathbb{Z}$. Also ist $M \in G$. Sei nun $c \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ST^mM &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ a+mc & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für geeignetes m gilt

$$0 \leq a + mc < |c|\,.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist dann aber $ST^mM \in G$, sodass $M \in G$ folgt. □

Definiere $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| < \frac{1}{2}, |z| > 1\}$. D ist ein Fundamentalbereich für Operation von Γ auf H.

Theorem 12.5. *(1) Für jedes* $z \in H$ *existiert ein* $\gamma \in \Gamma$ *mit* $\gamma y \in \overline{D}$.

(2) Seien $z \neq w \in \overline{D}$ konjugiert bezüglich Γ. Dann liegen z, w auf dem Rand von D und $|\mathrm{Re}(z)| = \frac{1}{2}$ und $z = w \pm 1$ oder $|z| = 1$ und $z = -\frac{1}{w}$.

(3) Sei $z \in \overline{D}$ und $\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma z = z\}$ der Stabilisator von z. Dann gilt mit $\rho = \mathrm{e}^{2/3\pi \mathrm{i}}$

$$\begin{aligned}\Gamma_i &= \langle S\rangle\\ \Gamma_\rho &= \langle ST\rangle\\ \Gamma_{-\overline{\rho}} &= \langle TS\rangle\\ \Gamma_z &= \langle -1\rangle\end{aligned}$$

für alle $z \in \overline{D} \setminus \{\mathrm{i}, \rho, -\overline{\rho}\}$.

Beweis. Wir beweisen lediglich 1). Sei $z \in H$. Dann ist $\{mz + n \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Jeder Ball um 0 enthält lediglich endlich viele Gitterpunkte. Also existiert ein Paar $(c, d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit

$$|cz + d| \leq |mz + n|$$

für alle $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Das heißt, es gibt einen Gitterpunkt, der am nächsten an der Null ist. Aufgrund der Minimalität gilt $(c, d) = 1$ und es gibt eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}T^m M &= \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} a + mc & b + md \\ c & d \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und mit $z' :- T^m M z$

$$|z'| = \left| \frac{(a + mc)z + (b + md)}{cz + d} \right| \geq 1.$$

Wenn man m geeignet wählt, folgt $abs\mathrm{Re}(z') \leq \frac{1}{2}$, also $z' \in \overline{D}$. □

13 Modulare Formen für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

Nun können wir modulare Formen definieren, dies sind sehr besondere Funktionen. Erinnerung: $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert auf der oberen Halbebene H durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Definition 13.1. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Eine meromorphe Funktion $f\colon H \to \mathbb{C}$ heißt *meromorphe modulare Form von Gewicht k* für Γ falls

1) $f(M\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau)$ gilt für alle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

2) f ist meromorph im unendlichen, das heißt, es f besitzt eine Fourierentwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n,$$

wobei $q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \tau}$ und $a_n = 0$ für n hinreichend klein.

Tatsächlich kann man die Voraussetzung 1) abschwächen. Man muss dies nicht für alle Matrizen in $\mathrm{SL}_2(Z)$ testen, dies würde sehr lange dauern, es reicht sich auf die Erzeuger zu beschränken. Dies ist nicht vollkommen offensichtlich.

Bemerkung 13.2. *1) Da Γ von S und T erzeugt wird, ist es ausreichend, die Transformationseigenschaft für S und T zu überprüfen.*

2) Die Abbildung

$$\begin{aligned} H &\to \{q \in \mathbb{C} \mid 0 < |q| < 1\} \\ \tau &\mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \tau} \end{aligned}$$

ist holomorph und surjektiv. Da f wegen 1) für T 1-periodisch ist, ist die Funktion

$$g(q) := f\left(\frac{\log(q)}{2\pi \mathrm{i}}\right)$$

wohldefiniert und meromorph. Falls g zu einer meromorphen Funktion auf dem offenen Einheitsball fortgesetzt werden kann, so besitzt g eine Laurententwicklung der Form

$$g(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n$$

in einer Umgebung der 0 mit $a_n = 0$ für hinreichend kleines n. Dann gilt

$$f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \tau n}$$

mit $a_n = 0$ für hinreichend kleines n. In diesem Fall sagen wir, dass f meromorph im unendlichen ist. Die Fourierkoeffizienten sind durch

$$a_n = \int_w^{w+1} f(\tau) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} n \tau} \, \mathrm{d}\tau$$

für beliebiges w mit möglicherweise hinreichendem großem Imaginärteil (sodass g im korrespondieren Ball keine Pole hat).

Definition 13.3. Eine holomorphe Funktion heißt *holomorphe modulare Form* oder auch *Modulform*, falls

1) $f(M\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau)$ für alle $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

2) f holomorph im unendlichen ist, das heißt, f hat eine Fourierentwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

für $q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \tau}$.

Falls zusätzlich $a_0 = 0$ gilt, dann heißt f *Spitzenform*.

Der Raum aller modularer Formen von Gewicht k wird mit M_k bezeichnet und der Raum der Spitzenform mit S_k.

Theorem 13.4 (Hecke)**.** *Sei $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ einen Spitzenform von Gewicht $k > 0$. Dann gilt*

$$|a_n| \leq c n^{k/2}.$$

Diese Schranke heißt *triviale Schranke*. Man kann diese Schranke noch verbessern, dafür gab es die Fields-Medaille und den Abel-Preis.

Beweis. Mit

$$h(\tau) = |f(\tau)| \operatorname{Im}(\tau)^{k/2}$$

gilt

$$h(M\tau) = h(\tau)$$

für alle $M \in \Gamma$. Außerdem gilt

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n = q \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^{n-1}.$$

Deshalb ist $\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}t} f(\tau)$ für alle $\gamma > 0$ auf dem Gebiet $\{\gamma \in H \mid \operatorname{Im}(\tau) \geq \gamma\}$ beschränkt. Also ist

$$\left| f(\tau)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}t} \right| \leq |f(\tau)| \, \mathrm{e}^{2\pi y}$$

und

$$h(T)) \, |f(\tau)| \, y^{k/2}$$

auf $\overline{\mathbb{D}}$ beschränkt. Da h invariant unter Γ ist, gilt

$$0 \leq h(\tau) \leq c'$$

für ein $c' > 0$ und alle $\tau \in H$. Nun schätzen wir die Fourierkoeffizienten ab

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \left| \int_0^1 f(x+iy) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}n(x+\mathrm{i}} \right| \, \mathrm{d}x \\
&\leq \mathrm{e}^{2\pi ny} \int_0^1 |f(x+\mathrm{i}y)| \, \mathrm{d}x \\
&\leq \mathrm{e}^{2\pi ny} y^{-k/2} \int_0^1 h(x+\mathrm{i}y) \, \mathrm{d}x \\
&\leq c' y^{-k/2} \mathrm{e}^{2\pi ny}.
\end{aligned}$$

Wenn wir $y = \frac{1}{n}$ wählen, erhalten wir die Behauptung. □

Bemerkung 13.5. *Eine Konsequenz des Beweises von Deligne*[1] *der Ramanujan-Petersson Vermutung* [2] *ist*

$$|a_n| \leq c(\varepsilon) n^{\frac{k-1}{2}+\varepsilon}$$

für alle $\varepsilon > 0$.

[1] http://www.numdam.org/article/SB_1968-1969__11__139_0.pdf

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Ramanujan-Petersson_conjecture

Definition 13.6. Die einfachsten Beispiele für Modulformen sind die *Eisensteinreihen*[3]

$$G_k(\tau) := \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m\tau+n)^k}.$$

Zum Beweis der Wohldefiniertheit der Eisensteinreihen benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 13.7. *Sei $K \subseteq H$ kompakt. Dann gibt es Konstanten $\gamma, \delta > 0$, sodass*

$$\gamma\,|m\mathrm{i}+n| \leq |m\tau+n| \leq \delta\,|m\mathrm{i}+n|$$

für alle $m, n \in \mathbb{R}$ und $\tau \in K$ gilt.

Beweis. Dies verbleibt als Übung. Sollte sofort aus Stetigkeit und Positivität der mittleren Funktion folgen. □

Theorem 13.8. *Sei $k \geq 3$. Dann konvergiert die Eisensteinreihe G_k absolut und lokal gleichmäßig. Insbesondere ist G_k holomorph auf H.*

Beweis. Aufgrund des vorherigen Lemmas reicht es zu zeigen, dass

$$\sum_{\substack{(mn,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$$

für $\alpha > 1$ konvergiert. An dieser Stelle ist $k \geq 3$ wichtig, da man sonst $\alpha \leq 1$ erhalten würde. Im weiteren betrachten wir die Reihe für eine endliche Teilmenge $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ und schätzen diese unabhängig von der Menge ab. □

Bemerkung 13.9. *Da die Reihen absolut konvergieren, können wir die Summationsreihenfolge der G_k vertauschen, ohne dass sich der Wert ändert.*

Als nächstes zeigen wir, dass die G_k wirklich von Gewicht k sind.

Theorem 13.10. *Für $k \geq 3$ gilt*

$$G_k(M\tau) = (c\tau+d)^k G_k(\tau).$$

[3] `https://de.wikipedia.org/wiki/Gotthold_Eisenstein`

Beweis. rechnen, wird nachgereicht. □

Proposition 13.11. *Für $\tau \in H$ und $k \geq 2$ gilt*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+n)^k} = \frac{(-2\pi \mathrm{i})^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n$$

mit $q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}$.

Nun zeigen wir die Fourierreihendarstellung, was wir benötigen, um zu zeigen, dass Eisensteinreihen Modulformen definieren.

Theorem 13.12. *Für alle $\tau \in H$ und $k \in 2\mathbb{Z}, k \geq 4$ gilt*

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi \mathrm{i})^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

mit $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} k^{d-1}$. Insbesondere gilt $G_k \in M_k$.

Definition 13.13. Die *normalisierte Eisensteinreihe* wird als

$$E_k \coloneqq \frac{1}{2\zeta(k)} G_k$$

definiert. Für $k \in 2\mathbb{Z}, k \geq 4$ gilt

$$2\zeta(k) = -\frac{(2\pi \mathrm{i})^k}{k!} B_k$$

wobei B_k Bernoullizahlen[4] sind. Also gilt

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n.$$

Man kann außerdem zeigen, dass

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{(m,n)=1} \frac{1}{(m\tau+n)^k}$$

gilt.

Definition 13.14. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Für eine meromorphe Funktion $f\colon H \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definieren wir eine Operation von $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}^+)$ durch

$$(f\,|_{k,M})(\tau) = \det(M)^{k/2}(c\tau+d)^{-k} f(M\tau).$$

Dann gilt für $M, N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

$$(f\,|_{k,M})\,|_{k,N} = f\,|_{k,MN}\,.$$

Der Index wird oft weggelassen, wenn er aus dem Kontext klar ist.

[4] `https://de.wikipedia.org/wiki/Bernoulli-Zahl`

Definition 13.15. Sei f eine meromorphe Funktion auf H. Die Ordnung von f in $\omega \in H$ ist definiert als die Zahl n, sodass

$$\frac{f(\tau)}{(\tau-\omega)^n}$$

holomorph und ungleich 0 in ω ist. Wir schreiben $n = \nu_\omega(f)$. Wenn f eine meromorphe Modulform ist, dann gilt

$$\nu_\omega(f) = \nu_{M\omega}(f)$$

für alle $M \in \Gamma$. Wenn $f(\tau) = \sum_{n\geq n_0} a_n q^n$ mit $a_{n_0} \neq 0$ ist, dann gilt $\nu_\infty(f) = n_0$.

Theorem 13.16 ($\frac{k}{12}$-Formel, Gewichtsformel)**.** *Sei $f \neq 0$ eine meromorphe Modulform von Gewicht k. Dann hat f nur endlich viele Polstellen und Nullstellen modulo Γ und es gilt*

$$\nu_\infty(f) + \sum_{\tau\in\Gamma\ H} \frac{1}{\frac{1}{2}\,|G_t|}\nu_t(f) = \frac{k}{12}.$$

Beweis. rechnen und cauchyintegral formel + Residuensatz. □

Bemerkung 13.17. *Die Transformationsformel impliziert, dass $M_k = \{0\}$, wenn k ungerade ist. Sei $0 \neq f \in M_k$*

Proposition 13.18. *(i) $M_k = \{0\}$ für $k < 0$ oder $k = 2$.*

(ii) $M_k = \mathbb{C}$ für $k = 0$.

(iii) $M_k = \mathbb{C}E_k$ für $k = 4, 6, 8, 10, 14$.

Definition 13.19. Wir definieren

$$\triangle(\tau) = \frac{1}{1728}(E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2) \neq 0.$$

Dann ist $\triangle \in S_{12}$, $\nu_\infty(\triangle) = 1$ und $\triangle(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in H$.

Die „zufällig“ erscheinende Wahl der Potenzen erklärt sich durch Theorem 13.22. Die Wahl des Faktors dient der Normalisierung.

Proposition 13.20. *(i) $S_k = \{0\}$ für $k < 12$ oder $k = 14$.*

(ii) $S_k = \triangle M_{k-12}$ für $k > 14$.

(iii) $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$ für $k > 2$.

In der Zerlegung in (iii) ist der erste Summand derjenige, der sehr gut verstanden ist. Alle Mysterien verstecken sich im zweiten Summanden.

Proposition 13.21. *Sei* $0 \leq k \in 2\mathbb{Z}$. *Dann gilt*

$$\dim M_k = \begin{cases} \left[\frac{k}{12}\right], & \textit{wenn } k \equiv 2 \mod 12 \\ \left[\frac{k}{12}\right] + 1, & \textit{wenn } k \not\equiv 2 \mod 12. \end{cases}$$

Die folgende Aussage ist sehr wichtig, dadurch sieht man dass M eine sehr einfache Struktur hat.

Theorem 13.22. *Die Abbildung* $\mathbb{C}[X, Y] \to M$ *definiert durch*

$$X \mapsto E_4$$
$$Y \mapsto E_6$$

ist ein Isomorphismus von Ringen mit $M = \bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k$. *Die* Hilbertfunktion *ist durch*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \dim(M_k) t^k &= \frac{1}{(1-t^4)(1-t^6} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{4n}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} t^{6m}\right) \end{aligned}$$

definiert.

Beweis. Der Beweis verbleibt als Übung. □

Definition 13.23. Wir definieren $j = \frac{E_4^3}{\triangle}$.

Wir teilen nicht durch 0, da $\triangle \neq 0$.

Bemerkung 13.24. *Dann gilt* $j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + \dots$. *Es gilt* $196884 = 196883 + 1$ *wobei der erste Summand mit der Monstergruppe zu tun hat. Die* j*-Funktion liefert einen Zusammenhang zwischen Gruppentheorie und Modulformen. Für weitere Details verweisen wir auf den Wikipediaartikel und die dort angegebenen Quellen*[5].

Proposition 13.25. j *ist eine meromorphe modulare Form von Gewicht* 0 *und hat einen einfachen Pol in* ∞. *Außerdem definiert* j *eine Bijektion zwischen* $\Gamma \backslash H$ *und* $\mathbb{C}$.

[5] `https://de.wikipedia.org/wiki/J-Funktion`

Beweis. Die erste Aussage ist klar. Für die zweite müssen wir zeigen, dass für $\lambda \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$f_\lambda := E_4^3 - \lambda \triangle$$

genau eine Nullstelle in H hat. Aus der Gewichtsformel folgt

$$\nu_\infty(f_\lambda) + \frac{1}{3}\nu_\rho(f_\lambda) + \frac{1}{12}\nu_{\mathrm{i}}(f_\lambda) + \sum_{\substack{\tau \in \Gamma \backslash H \\ \tau \neq \rho, \mathrm{i}}} \nu_\tau(f_\lambda) = 1.$$

Dies vereinfacht sich durch Einführen geeigneter Variablen zu

$$\frac{n_\rho}{3} + \frac{n_{\mathrm{i}}2}{+} n_\tau = 1$$

mit nicht negativen $n_\rho, n_{\mathrm{i}}, n_\tau \in \mathbb{Z}$. Diese Gleichung hat Lösungen $(3,0,0), (0,2,0)$ und $(0,0,1)$. Dies zeigt die Behauptung. □

Proposition 13.26. *Die meromorphen modularen Formen von Gewicht* 0 *auf* H *sind genau die rationalen Funktionen in* j.

Beweis. Sei f eine meromorphe modulare Form von Gewicht 0. Wir nehmen an, dass f Pole der Ordnung $m_1, \ldots, m_n$ in $\tau_1, \ldots, \tau_n$ hat. Dann ist

$$f(z) \prod_{i=1}^{n} (j(z) - j(\tau_i))^{m_i}$$

holomorph in H. Daher können wir ohne Einschränkung annehmen, dass f holomorph in H ist. Für geeignetes $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ gilt $f\triangle^k \in M_{12k}$ und wir können Funktion als

$$f\triangle^k = \sum_{4i+6j=12k} \alpha_{ij} E_4^i E_6^j$$

schreiben. Damit gilt

$$f = \sum_{i+j=k} \alpha_{ij} \frac{E_4^{3i}}{\triangle^i} \frac{E_6^{2j}}{\triangle^j},$$

was die Behauptung beweist, da $\frac{E_4^3}{\triangle} = j$ und $\frac{E_6^2}{\triangle} = j + c$ für ein geeignetes c gilt, da auch E_4^3 und $\triangle$ eine Basis von M_{12} bilden. □

Bevor wir uns die Eisensteinreihe von Gewicht 2 betrachten, wiederholen wir noch einmal die Definition. Mit Lemma 13.7 gilt für alle $\tau \in K$, wobei K kompakt ist, dass

$$|G_k(\tau)| \leq \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m\tau + n)^k}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{\gamma} \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\\(m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{|m\mathrm{i}+n|^k}\\
&\le \frac{1}{\gamma} \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\\(m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m^2+n^2)^{k/2}}\\
&\le \frac{1}{\gamma}\left(4\sum_{m\ge1}\frac{1}{m^k} + 4\sum_{m,n\ge1}\frac{1}{(m^2+n^2)^{k/2}}\right)\\
&\le \frac{1}{\gamma}\left(4\sum_{m\ge1}\frac{1}{m^k} + 4\sum_{m\ge1}\frac{1}{m^{k/2}}\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^{k/2}}\right)\\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

falls $k \geq 3$. Wir betrachten nun den Fall $k = 2$, in dem die Reihe erstmal nicht absolut konvergieren muss. Daher müssen wir eine Additionsreihenfolge vorgeben.

Definition 13.27. Wir definieren

$$G_2(\tau) = \sum_{n\neq0}\frac{1}{n^2} + \sum_{m\neq0}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m\tau+n)^2}\right).$$

Das folgende Resultat beschreibt die Wohldefiniertheit und einen Zusammenhang zum Fall $k \geq 3$.

Proposition 13.28. *G_2 definiert einen holomorphe Funktion auf H und es gilt*

$$G_2(\tau) = \frac{\pi^2}{3}(1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_i(n)q^n)$$

Beweis. Für $m \neq 0$ gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m\tau+n)^2} = (2\pi\mathrm{i})^2\sum_{n=1}^{\infty} nq^{mn},$$

sodass

$$\sum_{m\neq0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m\tau+n)^2} = -8\pi^2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} nq^{mn}$$

gilt. Wenn wir zeigen, dass die letzte Summe absolut konvergiert, dürfen wir umordnen. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}\infty\,|nq^{nm}| &= \sum_{n=1}^{\infty} n\sum_{m=1}^{\infty}|q^n|^m\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{|q^n|}{1-|q^n|}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{|q|^n}{1-|q|^n} \\
&\leq C + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\,|q|^n
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $1-|q|^n \geq \frac{1}{2}$ für fast alle n gilt. Da $n\,|q|^n \leq |q|^{n/2}$ für alle bis auf endliche viele n gilt (aufgrund des exponentiellen Abfalls), dass wir den letzten Term nach oben gegen $D + 2\sum_{n=1}^{\infty} |q|^{n/2}$ abschätzen. Dann dürfen wir umordnen und erhalten die Behauptung.

Für einen alternativen Beweis bemerken wir zunächst

$$
n^j \leq \sigma_j(n) \leq \zeta(j) n^j.
$$

Die untere Abschätzung ist klar und die obere gilt wegen

$$
\begin{aligned}
\sigma_j(n) &= \sum_{d|n} d^j \\
&= n^j \sum_{d|n} \left(\frac{d}{n}\right)^j \\
&= n^j \sum_{d|n} \left(\frac{1}{n}\right)^j \\
&\leq n^j \zeta(j).
\end{aligned}
$$

Damit folgt $(\sigma_j(n))^{1/n} \to 1$ für $n \to \infty$. $\square$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
G_2(-\frac{1}{\tau}) &= \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(-m\frac{1}{\tau}+n)^2} \\
&= \tau^2 \left(\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\neq 0} \frac{1}{(m\tau+n)^2} \right).
\end{aligned}
$$

Die wichtige Beobachtung ist, dass falls G_2 eine modulare Form von Gewicht 2 wäre, dann der letzte Summand wieder $\tau^2 G_2$ wäre. Dies ist aber nicht der Fall, da die Reihen in der „falschen“ Reihenfolge genommen werden. Den Unterschied zwischen den beiden Termen beschreibt die folgende Proposition.

Proposition 13.29. *Es gilt* $G_2(-\frac{1}{\tau}) = \tau^2 G_2(\tau) - 2\pi \mathrm{i} \tau$.

Beweis. Wir definieren

$$
a_{m,n}(\tau) := \frac{1}{(m\tau+n-1)(m\tau+n)} = \frac{1}{m\tau+n-1} - \frac{1}{m\tau+n}.
$$

Dann gilt

$$\frac{1}{(m\tau+n)^2} - a_{m,n}(\tau) = -\frac{1}{(m\tau+n)^2(m\tau+n-1)}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
G_2^*(\tau) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{(m\tau+n)^2} - a_{m,n}(\tau)\right) \\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m\tau+n)^2} - \sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{m\tau+n-1} - \frac{1}{m\tau+n}\right) = G_2(\tau),
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass die Doppelsumme absolut konvergiert und wir daher umordnen dürfen. Der letzte Summand verschwindet als Teleskopsumme. Da die Doppelsumme absolut konvergiert, erhalten wir

$$\begin{aligned}
G_2(\tau) &= \frac{pi^2}{3} + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\neq 0}\left(\frac{1}{(m\tau+n)^2} - a_{m,n}(\tau)\right) \\
&= \tau^{-2}G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) - \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\neq 0} a_{m,n}(\tau).
\end{aligned}$$

Da die äußere Summe in $G_2(\tau)$ absolut konvergiert, gilt dies auch für $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\neq 0} a_{m,n}(\tau)\right)$ (da die Terme „nicht weit auseinander sind“) und es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\neq 0} a_{m,n}(\tau) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{-N+1}^{N}\sum_{m\neq 0} a_{m,n}(\tau) \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{m\neq 0}\sum_{-N+1}^{N} a_{m,n}(\tau) \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{2}{\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{-\frac{N}{\tau}+m} + \frac{1}{-\frac{N}{\tau}-m}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{2}{\tau}\left(\pi\coth\left(-\frac{\pi N}{\tau}\right) + \frac{\tau}{N}\right) \\
&= \frac{2\pi}{\tau}\lim_{N\to\infty}\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{N}{\tau}}+1}{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{N}{\tau}}-1} \\
&= -\frac{2\pi\mathrm{i}}{\tau}.
\end{aligned}$$

□

Definition 13.30. Wir definieren nun die Dedekindsche η-Funktion.

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$$

mit $q = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}$.

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ absolut und kompakt gleichmäßig für $|q| < 1 - \varepsilon$ konvergiert, folgt, dass das Produkt konvergiert und holomorph ist (für weitere Details siehe Freitag Funktionentheorie)

Proposition 13.31. *Es gilt*

$$\eta(-\frac{1}{\tau}) = \sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}}\eta(\tau)$$

Beweis. Wir berechnen nun die logarithmische Ableitung

$$\begin{aligned}
\frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} &= (\log(\eta(\tau)))' \\
&= \frac{2\pi\mathrm{i}}{24}\left(1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}\right) \\
&= \frac{2\pi\mathrm{i}}{24}\left(1 - 24\sum_{n=1}^{\infty} nq^n \sum_{k=0}^{\infty} q^{kn}\right) \\
&= \frac{2\pi\mathrm{i}}{24}\left(1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} nq^{n(k+1)}\right) \\
&= \frac{2\pi\mathrm{i}}{24}\left(1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_i(n)q^n\right) \\
&= \frac{2\pi\mathrm{i}}{24}\frac{3}{\pi^2}G_2(\tau) \\
&= \frac{1}{4\pi}G_2(\tau).
\end{aligned}$$

Als nächstes berechnen wir die logarithmische Ableitung der rechten Seite.

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}}\eta(\tau)\right)'}{\left(\sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}}\eta(\tau)\right)} &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}}}\frac{1}{\mathrm{i}}\eta(\tau) + \sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}}\eta'(\tau)}{\sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}}\eta(\tau)} \\
&= \frac{1}{2\tau} + \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{4\pi\tau^2}\left(\tau^2 G_2(\tau) - 2\pi\mathrm{i}\tau\right) \\
&= \frac{1}{\tau^2}\frac{\mathrm{i}}{4\pi}G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) \\
&= \frac{1}{\tau^2}\frac{\eta'\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right)} \\
&= \frac{\left(\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)'}{\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right)}
\end{aligned}$$

Dies impliziert, dass $\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = c\sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}}\eta(\tau)$ für eine geeignete Konstante. Indem man $\tau = 1$ setzt, erhält man $c = 1$. □

Korollar 13.32. *Es gilt*

$$\begin{aligned}\triangle\tau = \frac{1}{1728} &= (E_4^3(\tau) \\ &= q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} \\ &= \eta^{24}(\tau).\end{aligned}$$

Man kann Modulformen über verschiedene Ansätze erhalten. Wir haben bereits gesehen, dass dies über Eisensteinreihen und Produktansätze geht. Als nächstes betrachten wir θ-Funktionen.

Sei V ein euklidischer Vektorraum von Dimension n. Ein *Gitter* ist eine Teilmenge $L \subseteq V$, falls diese von der Form

$$L = \mathbb{Z}v_1 + \cdots + \mathbb{Z}v_n$$

für eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ ist. Die Zahl $\det((v_i, v_j))$ ist unabhängig von der gewählten Basis und heißt *Determinante von* L, das heißt $\det(L) = \det((v_i, v_j))$. Es gilt außerdem, dass das Volumen des Fundamentalbereichs durch die Wurzel der Determinante von L gegeben ist. Das *duale Gitter* zu L ist durch

$$L' := \{x \in V \mid (x, \alpha) \in \mathbb{Z} \forall \alpha \in L\}$$

definiert und ist wiederum ein Gitter. Die *theta-Reihe* von L ist definiert als

$$\theta_L(\tau) := \sum_{\alpha \in L} q^{\frac{\alpha^2}{2}}$$

definiert eine holomorphe Funktion auf H, da das Skalarprodukt positiv definit ist. Die Poissonsche Summationsformel impliziert, dass

$$\theta_L\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{\mathrm{i}}}^n \frac{1}{\sqrt{\det(L)}} \theta_{L'}(\theta).$$

Ein Gitter L heißt *gerade*, falls $\alpha^2 = (\alpha, \alpha) \in 2\mathbb{Z}$ für alle $\alpha \in L$ gerade ist. In diesem Fall folgt $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}$ für alle $\alpha, \beta \in L$ (Polarisationsformel) und somit $L \subseteq L'$. Außerdem gilt $|L'/L| = \det(L)$. Falls $L = L'$ gilt, heißt L unimodular.

Uns interessiert die Frage, wann die theta-Funktion eines Gitters eine Modulform ist. Dies kann höchstens dann passieren wenn es unimodular ist.

Theorem 13.33. *Sei $L \subseteq V$ ein gerades unimodulares Gitter. Dann gilt* *i)* $\dim(V) = 0 \mod 8$,

ii) θ_L *ist eine Modulform von Gewicht* $\frac{n}{2}$.

Beweis. Beide Aussagen folgen aus der Transformationsformel von θ_L. $\square$

Bemerkung 13.34. *Angenommen wir haben ein gerades Gitter* L*. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\theta_L(\tau) &= \sum_{a \in L} q^{\frac{\alpha^2}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n,\end{aligned}$$

wobei $a_n = |\{\alpha \in L \mid \alpha^2 = 2n\}|$.

Beispiel 13.35. Betrachte $D_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \mod 2\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dies ist gerades Gitter mit Determinante 4. Falls $n = 0 \mod 8$ ist, definieren wir

$$D_n^+ \coloneqq D_n \cup (s + D_n)$$

mit $s = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$. Dies ist ein gerades Gitter, da $(s, s) = \frac{n}{4} \in 2\mathbb{Z}$ gilt. D_8^+ heißt auch E_8. Es gilt

$$\theta_{E_8}(\tau) = E_4(\tau) = 1 + 240q + 2160q^2 + \ldots.$$

Man kann sich überzeugen, dass es genau 240 Vektoren der Länge 1 gibt.

14 Hecke-Petersson Theorie

Diese Theorie gibt eine natürliche Erklärung der Multiplikativität der Koeffizienten von

$$\begin{aligned}\Delta(\tau) &= q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}\\ &= q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 - 6048q^6\end{aligned}$$

Definition 14.1. Für $\mathbb{Z} \ni N > 0$ definiere

$$\Gamma(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod N\}.$$

$\Gamma(N)$ ist eine normale Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und heißt *Hauptkongruenzuntergruppe* vom Level N. Sie hat endlichen Index, tatsächlich gilt sogar

$$|\mathrm{SL}_2(Z)/\Gamma(N)| = N^3\prod_{p|N}(1-\frac{1}{p^2}).$$

Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(Z)$ heißt *Kongruenzuntergruppe*, falls Γ die Gruppe $\Gamma(N)$ für ein $N \in \mathbb{N}$ enthält.

Beispiel 14.2. Die beiden wichtigsten Beispiele für Kongruenzuntergruppen sind $\Gamma_0(N)$ und $\Gamma_1(N)$

Wir schreiben $\Sigma = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ für Matrizen mit positiver Determinante.

Proposition 14.3. *Sei Γ eine Kongruenzuntergruppe und $\alpha \in \Sigma$. Dann existiert ein $M \in \mathbb{N}$ mit*

$$\Gamma(M) \subseteq \alpha\Gamma\alpha^{-1}.$$

Beweis. Sei $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$. Wähle $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}$, sodass $M_1\alpha, M_2\alpha^{-1} \in M_2(\mathbb{Z})$ gilt. Definiere $M = M_1M_2N$. Dann können wir $\gamma \in \Gamma(N)$ schreiben als

$$\gamma = 1 + Mg$$

mit einem $g \in M_2(\mathbb{Z})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\alpha\gamma\alpha^{-1} &= 1 + M_1 M_2 N \alpha g \alpha^{-1} \\ &= 1 + N(M_1, \alpha) g (M_2 \alpha^{-1}) \\ &\in \Gamma(N).\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung, wenn man α durch α^{-1} ersetzt. $\square$

Proposition 14.4. *Sei $\alpha \in \Sigma$ und Γ eine Kongruenzuntergruppe. Dann existiert eine Menge von Repräsentanten (γ_i) von $(\Gamma \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha)\backslash\Gamma$ sodass*

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_i \Gamma\alpha\gamma_i$$

als disjunkte Vereinigung gilt. Insbesondere ist die Menge (γ_i) endlich.

Beweis. Seien $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Gamma\alpha\gamma = \Gamma\alpha\gamma' &\Leftrightarrow \alpha\gamma'\gamma^{-1}\alpha^{-1}\Gamma \\ &\Leftrightarrow \gamma'\gamma^{-1} \in \alpha^{-1}\Gamma\alpha \\ &\Leftrightarrow \gamma' \in (\alpha^{-1}\Gamma\alpha \cap \Gamma)\gamma.\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Ein analoges Resultat erhält man für Linksadjunktion.

Bemerkung 14.5. *Mit den Voraussetzungen wie eben können wir eine Menge (β_i) von Repräsentanten von $\Gamma/(\Gamma \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha)$ finden, die*

$$\Gamma\alpha\Gamma) \bigcup \beta_i \alpha\Gamma$$

als disjunkte Vereinigung erfüllt.

Nun haben wir alles beisammen, um die Hecke Algebra definieren zu können.

Definition 14.6. Für $\alpha \in \Sigma$ definieren wir $T_\alpha = \Gamma\alpha\Gamma \in \Gamma\backslash\Sigma/\Gamma$ und die Hecke Algebra

$$H_\Gamma = \{ \sum_{\alpha \in \Gamma\backslash\Sigma/\Gamma} c_\alpha T_\alpha \mid c_\alpha in \mathbb{Z} \}$$

wobei alles bis auf endliche c_α verschwinden. H_Γ ist der freie $\mathbb{Z}$-Modul, der durch die T_α erzeugt wird.

Für $\alpha, \beta \in \Sigma$ gilt

$$\begin{aligned}(\Gamma\alpha\Gamma)(\Gamma\beta\Gamma) &= (\cup_i \Gamma\alpha_i)(\cup_j \beta_j \Gamma \\ &= \cup_{i,j}\Gamma\alpha_i\beta_j\Gamma,\end{aligned}$$

so dass $(\Gamma\alpha\Gamma)(\Gamma\beta\Gamma)$ die endliche Vereinigung von Doppelnebenklassen ist. Daher können wir H_Γ zu einer Algebra machen, in dem wir

$$T_\alpha T_\beta \coloneqq \sum c^\gamma_{\alpha\beta} T_\gamma$$

definieren, wobei wir über alle $\gamma \in \Gamma\backslash\Sigma/\Gamma$ summieren, die

$$\Gamma\gamma\Gamma \subseteq (\Gamma\alpha\Gamma)(\Gamma\beta\Gamma)$$

erfüllen. Die Koeffizienten sind definiert durch

$$c_{\alpha\beta} = |\{(i,j) \mathit{\Gamma}\alpha_i\beta_j = \mathit{\Gamma}\gamma\}|$$

wobei die α_i, β_j aus den disjunkten Vereinigungen von $\Gamma\alpha\Gamma$ kommen. Es ist a priori nicht klar, ob dieses Produkt wohldefiniert ist. Wir zeigen dies nun. Es gilt

$$\begin{aligned}|\{(i,j) \mid \Gamma\alpha_i\beta_j = \Gamma\gamma\}| &= \left|\{(i,j) \mid \Gamma\alpha_i = \Gamma\gamma\beta_j^{-1}\}\right| \\ &= \left|\{j \mid \Gamma\alpha\Gamma \supseteq \Gamma\gamma\ \beta_j^{-1}\}\right| \\ &= \left|\{j \mid \gamma\beta_j^{-1} \in \Gamma\alpha\Gamma\}\right| \\ &= \left|\{j \mid \beta_j \in \Gamma\alpha^{-1}\Gamma\gamma\}\right| \\ &= \left|\{j \mid \Gamma\beta_j \subseteq \Gamma\alpha^{-1}\Gamma\gamma\}\right|.\end{aligned}$$

Dies ist die Anzahl der Nebenklassen der Form $\Gamma\varepsilon$ in $\Gamma\alpha^{-1}\Gamma\gamma \cap \Gamma\beta\Gamma$. Diese letzte Zahl ist unabhängig von der Wahl der α_i, β_j. Sei nun $\Gamma\gamma\Gamma = \Gamma\eta\Gamma$. Dann gilt $\gamma = \delta'$ $deltaS$ für geeignete $S, S' \in \Gamma$. Ebenso gilt

$$\begin{aligned}\Gamma\alpha^{-1}\Gamma\gamma \cap \Gamma\beta\Gamma &= \Gamma\alpha^{-1}\Gamma\eta\delta \cap \Gamma\beta\Gamma \\ &= (\Gamma\alpha^{-1}\Gamma\eta \cap \Gamma\beta\Gamma)\delta.\end{aligned}$$

Dies impliziert, dass Multiplikation mit δ^{-1} Nebenklassen der Form $\Gamma\varepsilon$ in $\Gamma\alpha^{-1}\Gamma\gamma \cap \Gamma\beta\Gamma$ in Nebenklassen der Form $\Gamma\rho$ in $\Gamma\alpha^{-1}\Gamma\eta \cap \Gamma\beta\Gamma$. Also haben wir die Unabhängigkeit der Anzahl von γ gezeigt.

Definition 14.7. Zusammen mit diesem Produkt heißt H_Γ die zu Γ gehörende *Hecke Algebra.*

Falls $\Gamma\gamma\Gamma = \cup_{k=1}^{l}\Gamma\gamma_k$ als disjunkte Vereinigung gilt, so folgt

$$|\{(i,j) \mid \Gamma\alpha_i\beta_j\Gamma = \Gamma\gamma\Gamma\}| = l\,|\{(i,j) \mid \Gamma\alpha_i\beta_j = \Gamma\gamma\}|\,.$$

Theorem 14.8. *Die Hecke Algebra H_Γ ist assoziativ.*

Beweis. Ein Beweis kann in dem Buch von Shimura über automorphe Formen gefunden werden □

Wir betrachten nun den Fall $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Proposition 14.9. *Sei $\alpha \in \Sigma$. Dann enthält $\Gamma\alpha\Gamma$ eine eindeutige Matrix der Form*

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

wobei $d_1, d_2 \in \mathbb{Q}^+$ und $\frac{d_1}{d_2} \in \mathbb{Z}$ erfüllt seien.

Beweis. Wähle $\mathbb{Z} \ni N > 0$ so, dass $N\alpha$ ganzzahlig ist. Seien a_1, a_2 die Spalten von $N\alpha$ und e_1, e_2 die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^2$. Definiere

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 \\ \Lambda_2 &= \mathbb{Z}a_1 + \mathbb{Z}a_2 \subseteq \Lambda_1.\end{aligned}$$

Aus dem Elementarteilersatz folgt die Existenz einer Basis $(\xi_1, \xi_2\}$ von Λ_1 sowie die von positiven Zahlen D_1, D_2 $D_2 \mid D_1$, sodass $\{D_1\xi_1, D_2\xi_2\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von Λ_2 ist. Sei ξ die Matrix mit Spalten ξ_1, ξ_2. Da Λ_1 unimodular ist, folgt

$$\det(\xi)^2 = \det(\xi^T\xi) = 1.$$

Durch Umorientieren können wir $\det(\xi) = 1$, also $\xi \in \Gamma$ annehmen. Aus

$$\begin{aligned}\Lambda_2 &= \mathbb{Z}a_1 + \mathbb{Z}a_2 \\ &= \mathbb{Z}D_1\xi_1 + \mathbb{Z}D_2\xi_2\end{aligned}$$

folgt

$$N\alpha = \xi\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}\gamma$$

für ein geeignetes $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Wie zuvor kann man nun $\det(\gamma) = 1$ also $\gamma \in \Gamma$ sehen. Teilen durch N liefert die Existenz, die Eindeutig verbleibt als Übung. □

Proposition 14.10. *Sei $\gamma \in \Sigma$. Dann gibt es $\delta_1, \dots, \delta_n \in \Sigma$ mit*

$$\Gamma\gamma\Gamma = \cup_{i=1}^n \Gamma\delta_i = \cup_{i=1}^n \delta_i\Gamma$$

wobei die Vereinigungen disjunkt sind.

Beweis. Wähle eine disjunkte Zerlegung $\Gamma\gamma\Gamma = \cup_{i=1}^n \Gamma\gamma_i$. Mit der letzten Proposition folgt dann

$$\Gamma\gamma\Gamma = (\Gamma\gamma\Gamma)^T = \cup_{i=1}^n \gamma_i^T\Gamma.$$

Es gilt

$$\Gamma\gamma_i \cap \gamma_j^T\Gamma \neq \emptyset$$

für alle i, j. Angenommen, dies wäre falsch, dann gilt mit $\Gamma\gamma_i \subseteq \Gamma\gamma_i\Gamma = \Gamma\gamma\Gamma = \cup_{j=1}^n \gamma_j^T\Gamma$, dass insbesondere

$$\Gamma\gamma_i \subseteq \cup j \neq i\gamma_j^T\Gamma$$

gilt. Durch Multiplikation von rechts mit Γ folgt

$$\Gamma\gamma\Gamma = \Gamma\gamma_i\Gamma \subseteq \cup_{j\neq i}\gamma_j^T\Gamma$$

was ein Widerspruch ist, da die Nebenklassen paarweise disjunkt sind. Wähle nun $\delta_i \in \Gamma\gamma_i \cap \gamma_i^T\Gamma$. Dann gilt $\Gamma\delta_i = \Gamma\gamma_i$ und $\delta_i\Gamma = \gamma_i^T\Gamma$, was uns die gewünschte Zerlegung gibt. $\square$

Damit können wir nun die Kommutativität der Multiplikation zeigen.

Proposition 14.11. *Seien $\alpha, \beta \in \Sigma$. Dann gilt*

$$(\Gamma\alpha\Gamma)(\Gamma\beta\Gamma) = (\Gamma\beta\Gamma)(\Gamma\alpha\Gamma).$$

Beweis. Wir wählen zunächst eine beidseitige disjunkte Zerlegung, das heißt

$$\Gamma\alpha\Gamma = \cup_{i=1}^n \Gamma\alpha_i = \cup_{i=1}^n \alpha_i\Gamma$$
$$\Gamma\beta\Gamma = \cup_{i=1}^n \Gamma\beta_i = \cup_{i=1}^n \beta_i\Gamma.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}(\Gamma\alpha\Gamma)(\Gamma\beta\Gamma) &= \cup_{i,j}\Gamma\alpha_i^T\beta_j^T\Gamma \\ &= \cup_{i,j}(\Gamma\beta_j\alpha_i\Gamma)^T \\ &= \cup_{i,j}(\Gamma\beta_j\alpha_i\Gamma) \\ &= (\Gamma\beta\Gamma)(\Gamma\alpha\Gamma).\end{aligned}$$

$\square$

Nun können wir die Kommutativität der Hecke Algebra zeigen.

Theorem 14.12. *Die Hecke Algebra H_Γ ist kommutativ.*

Beweis. Seien $\alpha, \beta \in \Sigma$ und wir wählen beidseite disjunkte Zerlegungen

$$\Gamma\alpha\Gamma = \cup_{i=1}^n \Gamma\alpha_i = \cup_{i=1}^n \alpha_i\Gamma$$
$$\Gamma\beta\Gamma = \cup_{i=1}^n \Gamma\beta_i = \cup_{i=1}^n \beta_i\Gamma.$$

Aufgrund der letzten Proposition gilt

$$(\Gamma\alpha\Gamma)(\Gamma\beta\Gamma) = (\Gamma\beta\Gamma)(\Gamma\alpha\Gamma).$$

Sei nun $\gamma \in \Sigma$ mit

$$\Gamma\gamma\Gamma \subseteq (\Gamma\alpha\Gamma)(\Gamma\beta\Gamma)$$

und der disjunkten Zerlegung

$$\Gamma\gamma\Gamma = \cup_{k=1}^l \Gamma\gamma_k.$$

Wir müssen nun zeigen, dass $c_{\alpha\beta}^\gamma$ symmetrisch in α und β ist. Es gilt (mit Proposition 14.9)

$$\begin{aligned} c_{\alpha\beta}^\gamma &= |\{(i,j) \mid \Gamma\alpha_i\beta_j = \Gamma\gamma\}| \\ &= \frac{1}{l} |\{(i,j) \mid \Gamma\alpha_i\beta_j\Gamma = \Gamma\gamma\Gamma\}| \\ &= \frac{1}{l} \left|\{(i,j) \mid \Gamma\beta_j^T\alpha_i^T\Gamma = \Gamma\gamma\Gamma\}\right| \\ &= \left|\{(i,j) \mid \Gamma\beta_j^T\alpha_i^T = \Gamma\gamma\}\right| \\ &= c_{\beta\alpha}^\gamma. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Als nächstes wollen wir die Hecke Algebra auf Modulformen operieren lassen.

Proposition 14.13. *Sei $f \in M_k$ und $\alpha \in \Sigma$. Wähle eine disjunkte Zerlegung*

$$\Gamma\alpha\Gamma = \cup_{i=1}^n \Gamma\alpha_i.$$

Dann ist

$$f \mid_{T_\alpha} = \det(\alpha)^{\frac{k}{2}-1} \sum_{i=1}^n f \mid_{\alpha_i}$$

wohldefiniert.

Beweis. Wähle eine andere disjunkte Zerlegung $\Gamma\alpha\Gamma = \cup_{j=1}^{n}\beta_j$. Nach möglicher Umnummerierung gilt $\beta_i = M\alpha_i$ für geeignete $M_i \in \Gamma$. Daraus folgt

$$f\ |_{\beta_i} = f\ |_{M_i\alpha_i} = (f\ |_{M_i})\ |_{\alpha_i} = f\ |_{\alpha_i}\ .$$

Also ist die Definition unabhängig von der Zerlegung. □

Das nächste Ziel wird sein, zu zeigen, dass dies wieder eine Modulform definiert. Dafür benötigen wir folgende Vorbereitung.

Proposition 14.14. *Sei $\alpha \in \Sigma$. Dann gilt $\alpha\gamma\alpha'$ mit $\gamma \in \Gamma$ und $\alpha' = r\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ wobei $r \in \mathbb{Q}^+, a, b, d \in \mathbb{Z}$ mit $(a,b,d) = 1$ sowie $a, d > 0$.*

Beweis. Sei $\alpha = \begin{pmatrix} x & y \\ s & t \end{pmatrix}$. Es genügt zu zeigen, dass

$$\gamma\alpha = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

für ein geeignetes $\gamma \in \Gamma$ gilt. Dies ist für $s = 0$ klar. Für $s \neq 0$ wählen wir $c', d' \in \mathbb{Z}$ mit $d' = -c'\frac{x}{s}$. Setze $c = \frac{c'}{(c',d')}$ und $d = \frac{d'}{(c',d')}$ und ergänze c, d zu einer Matrix $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. □

Proposition 14.15. *Sei $\alpha \in \Sigma$ und $f \in M_k$. Dann gilt $f\ |_{T_\alpha} \in M_k$ und ebenso für S_k.*

Beweis. Sei $f \in M_k$. Zunächst zeigen wir, dass $f\ |_{T_\alpha}$ invariant unter Γ ist. Wähle die disjunkte Zerlegung $\Gamma\alpha\Gamma = \cup_i \Gamma\alpha_i$ und sei $M \in \Gamma$. Dann gilt

$$\Gamma\alpha\Gamma M = \cup_i \Gamma\alpha_i M$$

sodass

$$\begin{aligned}(f\ |_{T_\alpha})\ |_M &= (\det(\alpha)^{\frac{k}{2}-1} \sum f\ |_{\alpha_i})\ |_M \\ &= \det(a)^{\frac{k}{2}-1} \sum f\ |_{\alpha_i M} \\ &= f\ |_{T_\alpha}\end{aligned}$$

gilt. Aus der Konstruktion ist klar, dass $f \mid_{T_\alpha}$ holomorph auf H ist. Es bleibt zu zeigen, dass $f \mid_{T_\alpha}$ holomorph im unendlichen ist. Sei $\alpha \in \Sigma$. Die vorherige Proposition impliziert $\alpha = \gamma\alpha'$ mit $\gamma \in \Gamma$ und $\alpha' = r\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ mit geeigneten r, a, b, d. Dann folgt

$$\begin{aligned} f \mid_\alpha (\tau) &= f \mid_{\gamma\alpha'} (\tau) = f \mid_{\alpha'} (\tau) \\ &= f \mid_{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}} = \left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{k}{2}} f\left(\frac{a\tau + b}{d}\right). \end{aligned}$$

Da f holomorph im unendlichen ist, konvergiert $f(\tau)$ für $\tau \to i\infty$ und somit auch $f\left(\frac{a\tau+d}{d}\right)$. Daraus folgt $f \mid_{T_\alpha} \in M_k$. Der Beweis für S_k funktioniert analog. □

Proposition 14.16. *Seien $\alpha, \beta \in \Sigma$ und $f \in M_k$. Dann gilt*

$$(f \mid_{T_\alpha} \mid_{T_\beta} = f \mid_{T_\alpha T_\beta} .$$

Proposition 14.17. *Das Maß*

$$\mathrm{d}\mu(\tau) = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}, \tau = x + \mathrm{i}y \in H$$

ist invariant unter $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}^+)$.

Definition 14.18. Ein offene Menge $F \subseteq H$ heißt *Fundamentalbereich von* Γ, falls eine Menge von Repräsentanten von $\Gamma\backslash H$ mit $F \subset R \subset \overline{F}$ und $\mu(\partial F) = 0$ existiert. Wir definieren $\mu(\Gamma\backslash H) := \mu(F)$, wobei F ein beliebiger Fundamentalbereich von Γ ist. Es gilt

$$\mu(\Gamma\backslash H) = \frac{\pi}{3}.$$

Für $f, g \in S_k$ definieren wir

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_{\Gamma\backslash H} f(\tau)\overline{g(\tau)}\,\mathrm{Im}(\tau)^k \,\mathrm{d}\mu(\tau) \\ &= \int_F f(\tau) = \overline{g}(\tau)\,\mathrm{Im}(\tau)^k \,\mathrm{d}\mu(\tau), \end{aligned}$$

wobei F ein beliebiger Fundamentalbereich von Γ ist.

Theorem 14.19. $(\cdot, \cdot)$ *definiert ein inneres Produkt auf S_k.*

Theorem 14.20. *Der Heckeoperator T_α für $\alpha \in \Sigma$ ist bezüglich $(\cdot, \cdot)$ selbstadjungiert.*

Beweis. z.b. in [Automorphe Formen] von Anton Deitmar. □

Definiere $\Delta_n = \{\alpha \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det(\alpha) = n\}$ sowie $T_n = \sum_{\alpha \in \Gamma\backslash\Delta_n/\Gamma} T_\alpha$. Indem wir $\Delta_n = \cup \Gamma\gamma_i$ schreiben, gilt

$$f\mid_{T_n} = n^{\frac{k}{2}-1} \sum f\mid_{\gamma_i},$$

also

$$f\mid_{T_n} = n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\gamma \in \Gamma\backslash\Delta_n} f\mid_\gamma .$$

Solange wir keine explizite Beschreibung der Menge haben, über die wir summieren, ist die Formel noch nicht sehr nützlich. Es gilt $\Delta_n = \cup_{\substack{ad=n \\ b \mod d}} \Gamma(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix})$. Damit erhalten wir

$$f\mid_{T_n}(\tau) = n^{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ b \mod d}} d^{-k} f\left(\frac{a\tau+b}{d}\right).$$

Als nächstes betrachten wir die Fourierkoeffizienten der neuen Modulform.

Proposition 14.21. *Sei $f(\tau) = \sum_{m=0}^\infty c_m q^m \in M_k$. Dann gilt $f\mid_{T_n}(\tau) = \sum_{m=0}^\infty b_m q^m \in M_k$, wobei die Koeffizienten b_m durch*

$$b_m = \sum_{d\mid(m,n)} d^{k-1} c_{\frac{mn}{d^2}}$$

gegeben sind. Insbesondere gilt $b_0 = c_0\sigma_{k-1}(n)$ und $b_1 = c_n$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
f\mid_{T_n}(\tau) &= n^{k-1} \sum_{ad=n} \sum_{b \mod d} d^{-k} f\left(\frac{a\tau+b}{d}\right) \\
&= n^{k-1} \sum_{ad=n} \sum_{b} d^{-k} \sum_{m=0}^\infty c_m e^{2\pi i m \frac{a\tau+b}{d}} \\
&= n^{k-1} \sum_{ad=n} \sum_{m} c_m e^{2\pi i m a \frac{\tau}{d}} \sum_{b \mod d} e^{2\pi i m \frac{b}{d}} \\
&= \sum_{ad=n} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} \sum_{m'=0}^\infty c dm' q^{am'}
\end{aligned}$$

was durch umschreiben die gewünschte Formel ergibt. □

Proposition 14.22. *Sei $f(\tau) = \sum_{m=0}^\infty c_m q^m \in M_k \setminus \{0\}$ für $k > 0$ eine ßimultaneËigenform für alle Heckeoperatoren, das heißt*

$$f\mid_{T_n} = \lambda_n f$$

für geeignete $\lambda_n \in \mathbb{C}$ für alle $n > 0$. Dann gilt

1. $c_1 \neq 0$,

2. $c_n = \lambda_n c_1, n > 0$,

3. $c_m c_n = c_1 \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} c_{\frac{mn}{d^2}}$.

Insbesondere gilt $c_m c_n = c_1 c_{mn}$ falls $(m,n) = 1$.

Beweis. Es gilt $f |_{T_n} (\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m q^m$ mit

$$b_m = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} c_{\frac{mn}{d^2}}.$$

Dann impliziert $f |_{T_n} = \lambda_n f$ dass

$$\lambda_n c_m = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} c_{\frac{mn}{d^2}}$$

gilt. Daraus können wir bereits alles folgern. Setzen wir $m = 1$ so erhalten wir $\lambda = nc_1 = c_n$. Da wir den Grad positiv gewählt haben, folgt $c_1 \neq 0$ und somit die ersten beiden Aussagen. Die letzte Aussage folgt, wenn man die untere in die obere Formel einsetzt. □

Wir können den letzten Satz nun auf S_{12} und Δ anwenden.

Beispiel 14.23. Da $S_{12} = \mathbb{C}\Delta$ gilt, wissen wir eine Eigenform aller T_n ist. Da es normalisiert ist ($c_1 = 1$), sind die Fourierkoeffizienten multiplikativ.

Proposition 14.24. *In H_Γ gelten die folgenden Beziehungen.*

1. $T_n T_m = T_m = T_n = Tmn$ *falls* $(m,n) = 1$,

2. $T_p T_{p^n} = T_{p^{n+1}} + pT_{(p,p)} T_{p^{n-1}}$ *falls p prim ist.*

Beweis. Shimura, p.63. □

Bemerkung 14.25. *Für $f \in M_k$ gilt*

$$f |_{pT_{(p,p)}} = pf |_{T_{(p,p)}} = p^{k-1} f.$$

Für $\sigma_k(m) = \sum_{d|m} d^k$ gilt

$$\sigma_k(m)\sigma_k(n) = \sum_{d|(m,n)} d^k \sigma_k\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

Proposition 14.26. *Sei $k \geq 4$ gerade. Dann gilt*

$$E_k \mid_{T_n} = \sigma_{k-1}(n) E_k$$

für alle $n \geq 1$.

Beweis. Es gilt

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) q^m$$

und

$$E_k \mid_{T_n} (\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m q^m$$

mit

$$\begin{aligned}
b_0 &= \sigma_{k-1}(n) \\
b_m &= \sum_{d \mid (m,n)} d^{k-1} c_{\frac{mn}{d^2}} \\
&= -\frac{2k}{B_k} \sum_{d \mid (m,n)} d^{k-1} \sigma_{k-1}\left(\frac{mn}{d^2}\right) \\
&= -\frac{2k}{B_k} \sigma_{k-1}(m) \sigma_{k-1}(n) \\
&= \sigma_{k-1}(n) c_m,
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Proposition 14.27. *Sei $f \in S_k$ eine Eigenfunktion für alle Hecke Operatoren, also $f \not\equiv 0$ mit $f \mid_{T_n} = \lambda_n f$ für geeignete $\lambda_n \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$|\lambda_n| \leq n^{\frac{k}{2}-1} \sigma_1(n).$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass die Funktion $h(\tau) := |f(\tau)|\, y^{\frac{k}{2}}$ beschränkt in H ist. Insbesondere existiert ein $\nu \in H$ mit $h(\tau) \leq h(\nu)$. Dann gilt

$$f \mid_{T_n} (\tau) = n^{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ b \mod d}} d^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{d}\right)$$

sodass

$$\lambda_n f(\tau) = n^{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ b \mod d}} d^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{d}\right)$$

folgt. Damit gilt

$$\left|\lambda_n f(\tau) y^{\frac{k}{2}}\right| = n^{k-1} \left| \sum_{\substack{ad=n \\ b \bmod d}} d^{-k} f\left(\frac{a\tau+b}{d}\right) y^{\frac{k}{2}} \right|.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt dann

$$|\lambda_n| \, |f(\tau)| \, y^{\frac{k}{2}} \leq n^{k-1} \sum_{\frac{1}{(ad)^{\frac{k}{2}}}} \left| f\left(\frac{a\tau+b}{d}\right) \right| \left(\frac{ay}{d}\right)^{\frac{k}{2}}.$$

Wenn wir $\tau = \nu$ wählen, erhalten wir

$$|\lambda_n| \, h(\nu) \leq n^{k-1} \frac{1}{n^{\frac{k}{2}}} h(\nu) \sum_{ad=n} \sum_{b \bmod d} 1.$$

Teilen durch $h(\nu)$ liefert dann die Behauptung. $\square$

Proposition 14.28. *Sei $k \geq 4$ und $f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m q^m \in M_k$ mit $c_0 = 1$. Falls $f \,|_{T_n} = \lambda_n f$ für geeignete λ_n und alle $n > 1$ gilt, so folgt $f = E_k$.*

Beweis. Es gilt $f \,|_{T_n} (\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m q^m$ mit $b_0 = \sigma_{k-1}(n)$. Also gilt $\lambda_n = \sigma_{k-1}(n)$. Wir nehmen $f \neq E_k$ an. Dann gilt $f - E_k =: g \in S_k$ und g verschwindet nicht überall. Weiterhin gilt $g \,|_{T_n} \sigma_{k-1}(n) g$. Aus der letzten Proposition folgt dann

$$\sigma_{k-1}(n) \leq n^{\frac{k}{2}-1} \sigma_1(n).$$

Allerdings gilt

$$\begin{aligned}
2\sigma_{k-1}(n) - 2n^{\frac{k}{2}-1}\sigma_1(n) &= \sum_{d|n} \left(d^{k-1} + \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} - \frac{n^{\frac{k}{2}}}{n}\left(d + \frac{n}{d}\right) \right) \\
&= \sum_{d|n} \frac{n^{\frac{k}{2}}}{d} \left(\frac{d^k}{n^{\frac{k}{2}}} + \frac{n^{\frac{k}{2}} - 1}{d^{k-2}} - \left(\frac{d^2}{n} + 1 \right) \right) \\
&= \sum_{d|n} \frac{n^{\frac{k}{2}}}{d} \left(1 - \left(\frac{n^{\frac{k}{2}}}{d} \right)^{k-2} \right) \left(\left(\frac{d}{n^{\frac{k}{2}}} \right)^{k} - 1 \right) \\
&> 0
\end{aligned}$$

da in der letzten Summe „quasi alle Summanden“positiv sind.

$\square$

Eine Dirichletreihe ist eine formale Reihe

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$ sowie $n^s = \mathrm{e}^{s \log n}$.

Proposition 14.29. *Sei* $L(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ *eine Dirichletreihe. Dann existiert ein* $\sigma_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *mit*

1. $L(s)$ *konvergiert absolut für* $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$,

2. $L(s)$ *konvergiert nicht absolut für* $\mathrm{Re}(s) < \sigma_0$,

3. $L(s)$ *ist für* $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ *holomorph. Für* $\rho \in \mathbb{R}$ *mit* $\rho > \sigma_0$ *konvergiert die Funktion absolut gleichmäßig und ist auf* $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) \geq \rho\}$ *beschränkt.*

Beweis. Für $s = \sigma + it$ gilt

$$\left|\frac{a_n}{n^s}\right| = \frac{|a_n|}{n^\sigma}.$$

Definiere σ_0 als das Infimum über alle σ, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma}$ konvergiert. Dann konvergiert nach Konstruktion $L(s)$ absolut für $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$. Für $\rho \in \mathbb{R}$ mit $\rho > \sigma_0$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|\, n^\sigma}{<} \infty$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) \geq \rho$. Mit dem Satz von Weierstraß folgt, dass $L(s)$ holomorph ist, da $\frac{a_n}{n^s}$ holomorph ist. σ_0 heißt *absolute Konvergenzabszisse.* $\square$

Lemma 14.30. *Sei* $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *eine Dirichletreihe mit* $a_n = \mathcal{O}(n^x)$ *für ein* $x \in \mathbb{R}$, *das heißt* $|a_n| \leq cn^x$ *für ein geeignetes* $x \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$\sigma_0 \leq x + 1.$$

Beweis. Sei $|a_n| \leq cn^x$. Dann folgt $\frac{|a_n| n^\sigma}{\leq} c \frac{1}{n^{\sigma - x}}$ und durch aufsummieren auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|\, n^\sigma}{\leq} c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma - x}}.$$

Dies ist endlich, falls $\sigma - x > 1$ bzw. $\sigma > x + 1$ gilt. $\square$

Dieses Lemma wird im weiteren Verlauf sehr hilfreich sein.

Als nächstes wiederholen wir die Γ-Funktion samt einiger ihrer Eigenschaften.

Die Γ-Funktion ist für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ durch

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y} y^{s-1} \, \mathrm{d}y.$$

Sie kann meromorph auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden, wobei in $\{0, -1, -2, \dots\}$ Pole der Ordnung 1 mit Residuen

$$\mathrm{res}_{s=-n} \Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

vorliegen. Außerdem erfüllt Γ die Funktionalgleichung

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

und hat keine Nullstellen.

Lemma 14.31. *Sei nun $k \geq 4$ gerade und $f(\tau) = \sum_{n=0}^\infty a_n q^n \in M_k$. Dann gilt $a_n = \mathcal{O}(n^{k-1})$.*

Beweis. Es gilt $E_k = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^\infty \sigma_{k-1}(n) q^n$ für die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe. $\square$

Damit erhalten wir aus dem vorherigen Lemma, dass die L-Reihe

$$L(f, s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{s}$$

für $\mathrm{Re}(s) > k$ absolut konvergiert und holomorph ist.

Wir definieren

$$D(f, s) = \frac{1}{(2\pi)^s} \Gamma(s) L(f, s)$$

dies hat eine schönere Funktionalgleichung.

Theorem 14.32. *Mit den obigen Notationen gilt*

1. *$L(f, s)$ lässt sich meromorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzen. Der einzig mögliche Pol ist ein Pol von Ordnung in 1 in $s = k$ und für das Residuum gilt*

$$\mathrm{res}_{s=k} L(f, s) = \frac{(2\pi \mathrm{i})^k}{(k-1)!} a_0.$$

Außerdem gilt $L(f, 0) = -a_0$ und $L(f, -n) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

2. Die Funktion

$$D(f,s) - a_0\left(\frac{\mathrm{i}^k}{s-k} - \frac{1}{s}\right) = \int_1^\infty (f(\mathrm{i}y) - a_0)\left(y^s + \mathrm{i}^k y^{k-s}\right)$$

ist holomorph auf $\mathbb{C}$ *und auf jedem vertikalem Streifen* $\{s \in \mathbb{C} \mid \alpha \leq \mathrm{Re}(s) \leq \beta\}$ *beschränkt. Außerdem erfüllt sie die Funktionalgleichung*

$$D(f,k-s) = \mathrm{i}^k D(f,s).$$

Beweis. Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ gilt

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{s-1}\,\mathrm{d}x \\ &= (2\pi n)^s \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\pi n y} y^{s-1}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

sodass

$$\Gamma(s)(2\pi n)^{-s} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\pi n y} y^{s-1}\,\mathrm{d}y$$

gilt. Diese Formel ist der Schlüssel des Beweises. Sei nun $\mathrm{Re}(s) > k$. Dann gilt mit dem Satz über majorisierte Konvergenz

$$\begin{aligned}D(f,s) &= \frac{1}{(2\pi)^s}\Gamma(s)\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{s} \\ &= \sum_{n=1}^\infty (2\pi n)^{-s}\Gamma(s) a_n \\ &= \sum_{n=1}^\infty \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\pi n y} y^{s-1}\,\mathrm{d}y\right) a_n \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty a_n \mathrm{e}^{-2\pi n y}\right) y^{s-1}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty (f(\mathrm{i}y) - a_0) y^{s-1}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_1^\infty (f(\mathrm{i}y) - a_0) y^{s-1}\,\mathrm{d}y + \int_0^1 (f(\mathrm{i}y) - a_0) y^{s-1}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst das erste Integral mit der Substitution $y = \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f(\mathrm{i}y) - a_0) y^{s-1}\,\mathrm{d}y &= -\int_\infty^1 f\left(\frac{\mathrm{i}}{x}\right) - a_0) x^{1-s-2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^\infty f\left(\frac{1}{-\mathrm{i}x}\right) - a_0) x^{s-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^\infty (f(\mathrm{i}x) - a_0)\mathrm{i}^k x^{k-s-1}\,\mathrm{d}x + a_0\int_1^\infty (\mathrm{i}^k x^{k-s-1} - x^{-s-1})\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^\infty (f(\mathrm{i}x) - a_0)\mathrm{i}^k x^{k-s-1}\,\mathrm{d}x + a_0\left(\frac{\mathrm{i}^k}{s-k} - \frac{1}{s}\right).\end{aligned}$$

Wenn wir dies in obige Formel einsetzen, erhalten wir die Behauptung, wenn alle Integrale existieren. Dies ist wegen $f(\mathrm{i}y) - a_0 = \mathcal{O}(q) = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-2\pi ny}$ für $y \to \infty$ der Fall. Dies zeigt außerdem, dass die Funktion holomorph in $s = 1$ ist. Weiterhin ist es in jedem vertikalen Streifen beschränkt. Daher hat $D(f, s)$ eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ mit möglichen Polen der Ordnung 1 in $s = k$ und $s = 0$. Die letzte Gleichung impliziert ebenso die Funktionalgleichung. Da $\Gamma(s)$ keine Nullstellen hat, ist $L(f, s) = (2\pi)^s \frac{1}{\Gamma(s)} D(f, s)$ meromorph auf $\mathbb{C}$ mit möglichen Polen in $s = 0$ und $s = k$. Die Laurentwicklung von $\Gamma(s)$ und $D(f, s)$ in 0 sind

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \frac{1}{s} + \dots \\ D(f, s) &= -\frac{a_0}{s} + \dots\end{aligned}$$

Also ist $L(f, s)$ endlich in $s = 0$ mit $L(f, 0) = -a_0$. Die anderen Pole von Γ ergeben Nullstellen. Außerdem gilt

$$\operatorname{res}_{s=k} L(f, s) = \operatorname{res}_{s=k} (2\pi)^s \frac{1}{\Gamma(s)} D(f, s) = (2\pi)^k \frac{1}{\Gamma(s)} a_0 \mathrm{i}^k \square$$

Es gibt auch die umgekehrte Aussage dieses Satzes (Hecke's Umkehrsatz) Falls eine Dirichletreihe die Funktionalgleichung erfüllt, so definiert $\sum a_n q^n$ eine Modulform. Hierbei ist die Voraussetzung, dass die Dirichletreihe in vertikalen Streifen beschränkt ist, wichtig. Einen Beweis findet man in [Modular forms, Miyake].

Beispiel 14.33. Sei $k \geq 4$ gerade. Dann gilt

$$L(E_k, s) = -\frac{2k}{B_k} \zeta(s) \zeta(s + 1 - k).$$

Proposition 14.34. *Sei $\alpha \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ multiplikativ mit $\alpha(1) = 1$, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n)$ absolut konvergiert. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \prod_p \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(p^n).$$

Beweis. Sei $p_N = \prod_{p \leq N} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(p^n)$. Dann gilt mit der Mulitplikativität

$$\begin{aligned} p_N &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_r=0}^{\infty} \alpha(p_1^{n_1}) \dots \alpha(p_r^{n_r}) \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_r=0}^{\infty} \alpha(p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \alpha(n) + \sum_{n \in E_N} \alpha(n) \end{aligned}$$

wobei $p_1, \dots, p_r$ die Primzahlen kleiner gleich N sind und $E_N = \{n > N \mid$ die Primteiler von n sind höchstens $p_1, \dots, p_r\}$. Es folgt

$$\left| p_N - \sum_{n=1}^{N} \alpha(n) \right| \leq \sum_{n>N} |\alpha(n)| .$$

Aus der absoluten Konvergenz folgt die Behauptung. □

Sei $f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n \in M_k$. eine simultane Eigenform für alle Heckeoperatoren mit $c_1 = 1$. Dann gilt

1. $c_{mn} = c_m c_n$ falls $(m,n) = 1$.

2. $c_{p^n} c_p = c_{p^{n+1}} + p^{k-1} c_{p^{n-1}}$ falls p prim ist.

Wir wissen dann, dass die Dirichletreihe

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

für $\mathrm{Re}(s) > k$ konvergiert. Wir betrachten nun die Produktdarstellung

Proposition 14.35. *Für* $\mathrm{Re}(s) > k$ *gilt*

$$L(f,s) = \prod_p \frac{1}{1 - c_p p^{-s} + p^{k-1-2s}}.$$

Beweis. Da die c_n multiplikativ sind, gilt dies auch für $c_n n^{-s}$. Mit dem letzten Satz gilt dann

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = \prod_p \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_{p^n} p^{-ns}}_{L_p(f,s)} .$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
L_p(f,s)(1 - c_p p^{-s} + p^{k-1-2s}) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{p^n} p^{-ns} - \sum_{n=0}^{\infty} c_{p^n} c_p p^{-(n+1)s} + \sum_{n=0}^{\infty} p^{k-1} c_{p^n} p^{-(n+2)s} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{p^n} p^{-ns} - \sum_{n=1}^{\infty} c_{p^{n-1}} c_p p^{-ns} + \sum_{n=2}^{\infty} p^{k-1} c_{p^{n-2}} p^{-ns} \\
&= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_{p^n} p^{-ns} - \sum_{n=2}^{\infty} c_{p^{n-1}} c_p p^{-ns} + \sum_{n=2} \dots \\
&= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (c_p - c_{p^{n-1}} c_p + p^{k-1} c_{p^{n-s}}) p^{-ns} \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

15 Zerlegungen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

Wir erinnern uns, dass $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

operiert. Der Stabilisator von i in G ist durch

$$\begin{aligned} K &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \mid 0 \leq \alpha < 2\pi \right\} \\ &= \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

gegeben. Weiterhin definieren wir

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \mid y > 0 \right\}$$

sowie

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Diese Gruppen bilden als Produkt grade G.

Proposition 15.1 (Iwasawa Zerlegung)**.** *Sei $g \in G$. Dann kann g eindeutig als Produkt*

$$g = ank$$

mit $a \in A$, $n \in N$ und $k \in K$ geschrieben werden.

Beweis. Sei $g(\mathrm{i}) = x + \mathrm{i}y \in H$. Definiere

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}$$

$$n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$an = \frac{1}{\sqrt{y}} \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sodass $an(\mathrm{i}) = g(\mathrm{i})$ gilt. Damit folgt $(an)^{-1}g \in K$. Dies beweist die Existenz der Zerlegung. Die Eindeutigkeit verbleibt als Übung. $\square$

Man kann auf ähnliche Art und Weise zeigen, dass auch eine Zerlegung der Form $g = nak$ existiert.

Proposition 15.2 (Cartan Zerlegung)**.** *Sei $g \in G$. Dann ist g von der Form*

$$g = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

mit $y > 0$, $0 \leq \alpha < \pi$ sowie $0 \leq \beta < 2\pi$.

Beweis. Die Matrix $s = g^T g$ ist symmetrisch und positiv definit. Also existiert $k \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit

$$k^T s k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

wobei λ_1, λ_2 positiv sind. Mit

$$d = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

gilt

$$k^T g^T g k = d^T d$$

und weiter

$$\begin{aligned} gk &= (k^T g^T)^{-1} d^T d \\ &= \underbrace{(g^T)^{-1} k d^T}_{h} d. \end{aligned}$$

Wir behaupten, dass h orthogonal ist. Es gilt

$$h^T h = d k^T g^{-1} (g^T)^{-1} k d^T = 1$$

also $h \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ und $g = k^{-1}hd$ mit $h, k \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. Für die Determinante gilt

$$1 = \det(h)\det(d)\det(k).$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = d$$

können wir annehmen, dass $h, k \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Außerdem gilt

$$\det(d) = \sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2} = 1$$

sodass wir d geeignet wählen können. $\square$

Die obigen Zerlegungen existieren für beliebige reduktive Lie-Gruppen. Für weitere infos siehe [Knapp Lie groups beyond an introduction].

$G \overset{\simeq}{\to} K \times A \times N$ wobei K maximal kompakt, A abelsch und N eine nilpotent Untergruppe von G ist.[Knapp, p.455] Dies ist allgemeine Iwasawa Zerlegung.

Cartan Zerlegung $G = KAK$ wobei K maximal kompakt und A abelsch ist. Als nächstes betrachten wir $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\nu)$ mit $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ und deren Zerlegungen.

Proposition 15.3 (Iwasawa decomposition)**.** *Sei $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Dann kann g eindeutig geschrieben werden als*

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

mit $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ sowie $r > 0$.

Analog betrachten wir die Cartan Zerlegung für $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 15.4. *Sei $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Dann kann g geschrieben werden als*

$$g = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

mit $y > 0$, $0 \leq \alpha < \pi$ und $0 \leq \beta < 2\pi$.

16 Zerlegungen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

Sei

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Q}_p, \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Q}_p \, |ad-bc|_p \neq 0 \right\}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}K_p = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p^*) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}_p, ad-bc \in \mathbb{Z}_p^* \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}_p, |ad-bc|_p = 1 \right\}.\end{aligned}$$

Proposition 16.1. *K_p ist eine maximale kompakte Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.*

Der Beweis verbleibt als Übungsaufgabe

Proposition 16.2 (Iwasawa Zerlegung)**.** *Sei $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Dann kann g eindeutig in der Form*

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix} k$$

mit $x \in \mathbb{Q}_p$ sowie $k \in K_p$.

Beweis. Sei $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wir nehmen zuerst an, dass $|c|_p \leq |d|_p$ gilt. Dann folgt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{d} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

und $\left|\frac{c}{d}\right|_p = 1$ das heißt $\frac{c}{d} \in \mathbb{Z}_p$. Also folgt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & u \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{d} & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\in K_p}$$

mit $ru \neq 0$. Es gilt

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{s}{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon p^m & 0 \\ 0 & \eta p^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$$

mit $\eta, \varepsilon \in \mathbb{Z}_p^*$. Also folgt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{s}{u} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{d} & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Dies beweist die Behauptung für den Fall $|c|_p \leq |d|_p$. Falls $|c|_p \geq |d|_p$ gilt, dann folgt $\frac{d}{c} \in \mathbb{Z}_p$ sowie

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

sodass Multiplikation mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \; 1 & 0 \end{pmatrix} \in K$ zum vorherigen Fall führt. $\square$

Proposition 16.3 (Cartan Zerlegung)**.** *Sei $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Dann gilt*

$$g = k_1 \begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix} k_2$$

mit $k_1, k_2 \in K_p$.

17 Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$

Wir erinnern zunächst an einige Eigenschaften der Idele und Adele. Die endlichen Adele A_f sind definiert durch

$$\begin{aligned} A_f &= \hat{\prod_{p<\infty_p}}^{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p \\ &= \{(x_2, x_3, \dots) \mid x_p \in \mathbb{Q}_p, x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ für fast alle } p\}. \end{aligned}$$

Wir haben $\mathbb{A}_f$ mit eingeschränkten Produkttopolgie ausgestattet. Dann ist

$$\hat{Z} = \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{A}_f$$

kompakt. Die Adele sind definiert durch $\mathbb{A} = \mathbb{A} \times \mathbb{A}_f$. Weiterhin haben wir definiert

$$\mathbb{A}_f^* = \hat{\prod_{p<\infty}}^{\mathbb{Z}_p^*} \mathbb{Q}_p^*.$$

Dann ist $\hat{Z}^* = \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p^* \subseteq \mathbb{A}_f^*$ kompakt. Die Idele sind durch $\mathbb{A}^* = \mathbb{R}^* \times \mathbb{A}_f^*$ definiert. Außerdem ist durch

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\hookrightarrow \mathbb{A}_f \\ a &\mapsto (a, a, \dots) \end{aligned}$$

eine Einbettung definiert.

Proposition 17.1 (Schwache Approximation)**.** *$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{A}_f$.*

Beweis. Dies folgt mit dem Chinesischen Restsatz. □

Proposition 17.2 (Starke Approximation für $\mathbb{A}$)**.** *$D = [0,1) \times \hat{Z} \subseteq \mathbb{A}$ ist ein Fundamentalbereich für die Operation von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{A}$, das heißt es gilt*

$$\mathbb{A} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} (\alpha + D)$$

als disjunkte Vereinigung.

Proposition 17.3 (Starke Approximation für $\mathbb{A}^*$)**.** *$D = (0, \infty) \times \hat{\mathbb{Z}}^*$ ist ein Fundamentalbereich für $\mathbb{Q}^* \setminus \mathbb{A}^*$, das heißt es gilt*

$$\mathbb{A}^* = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}_p^*} \alpha D$$

als disjunkte Vereinigung.

Beweis. Für $x \in \mathbb{A}_f^*$ gilt $|x|\, x \in \hat{Z}^*$. □

Für einen Ring R beschreibe $\mathrm{GL}_2(R)$ die Gruppe aller invertierbaren 2×2-Matrizen. Es gilt

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f) = \widehat{\prod_{p<\infty}}^{K_p} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$$

wobei $K_p = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ ist. Wir statten daher $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ mit der eingeschränkten Produkttopologie aus. Definiere

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_f) \coloneqq \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f) \mid \det(g) = 1\}$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}) &\hookrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_f) \\ g &\mapsto (g, g, \dots). \end{aligned}$$

Die folgende Aussage ist falsch, wenn man SL_2 durch GL_2 ersetzt.

Proposition 17.4. *$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ ist dicht in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_f)$.*

Beweis. Sei X der Abschluss von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_f)$. Da Multiplikation in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_f)$ stetig ist, ist X eine Gruppe. Wir wissen bereits, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{A}_f$ ist. Also enthält X alle Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

für $x, y \in \mathbb{A}_f$. Für eine fixe Primzahl p enthält X alle Elemente der Form $g = (g_2, g_3, \dots)$ mit

$$g_p = \begin{pmatrix} 1 & x_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y_p & 1 \end{pmatrix}$$

mit $x_p, y_p \in \mathbb{Q}_p$ sowie

$$g_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für $q \neq p$. Die Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & x_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y_p & 1 \end{pmatrix}$$

mit $x_p, y_p \in \mathbb{Q}_p$ erzeugen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Daher enthält X alle Matrizen der Form $g = (g_2, g_3, \dots)$ mit $g_p \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ and $g_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für fast alle p. Diese sind dicht in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_f)$. $\square$

Es gilt $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$.

Proposition 17.5 (Starke Approximation für $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$)**.** *Sei D_∞ ein Fundamentalbereich für $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, das heißt D_∞ enthält einen Repräsentanten für jedes Element in*

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}).$$

Ein Fundamentalbereich für $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ ist durch

$$D \coloneqq D_\infty \, \mathrm{GL}_2(\hat{Z})$$

gegeben.

Beweis. Wir zeigen, dass jedes Element $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ von der Form $g = \gamma d$ mit $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ und $d \in D$ geschrieben werden kann. Wir schreiben dazu $\det(g) = \underbrace{\alpha}_{\in \mathbb{Q}^*} \underbrace{x}_{\in (0,\infty)\hat{Z}}$ nach der starken Approximation für Idele. Definiere

$$g' = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}).$$

Sei nun U eine offene Umgebung der 1 in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Dann ist

$$g'(U \cdot \mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$$

eine offene Umgebung von g' in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$. Aufgrund der Dichtheit von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_f)$ enthält diese ein Element der Form

$$\underbrace{\gamma_\infty}_{\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})} \underbrace{\gamma}_{\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})}.$$

Dann gilt

$$\gamma_\infty \gamma = g' \gamma'_\infty \gamma'$$

für geeignete γ'_∞, γ', sodass

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g' \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{(\gamma_\infty \gamma'^{-1}_\infty)}_{\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})} (\gamma \gamma'^{-1} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma}_{\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})} \underbrace{(\gamma_\infty \gamma'^{-1}) \begin{pmatrix} x_\infty & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})} \underbrace{\gamma'^{-1} \begin{pmatrix} x_f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_2(\hat{Z})}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass g eine Zerlegung der Form

$$g = \mu d_\infty h$$

besitzt. Die Eindeutigkeit der Zerlegung verbleibt als Übung. $\square$

Nun betrachten wir die Iwasawa Zerlegung für Adele.

Proposition 17.6 (Adelische Iwasawa Zerlegung)**.** *Sei $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. Dann kann g eindeutig als*

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} k$$

mit $x \in \mathbb{A}$, $r, y \in \mathbb{A}^*$, $k \in K = \mathrm{O}_2(\mathbb{R})\,\mathrm{GL}_2(\hat{Z})$ und $y_\infty, r_\infty > 0$ geschrieben werden.

Beweis. Dies folgt durch Zusammensetzen der bisherigen Resultate. $\square$

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ operiert auf auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Dies Operation ist transitiv. Für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ gilt

$$\mathrm{Im}(Mz) = \frac{\det(M)}{|cz+d|^2} \mathrm{Im}(z).$$

Wir definieren eine Operation von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ auf H durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{falls } \det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) > 0$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \overline{\frac{az+b}{cz+d}} \quad \text{falls } \det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) < 0.$$

Die Operation von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ auf H wird von $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt. Der Stabilisator von i ist $\text{‰}_2(\mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^*$ und die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_{\mathrm{i}} &\to H \\ g \, \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_{\mathrm{i}} &\mapsto g\mathrm{i} \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus. Ein Fundamentalbereich für die Operation von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ auf H ist durch

$$\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq 0 \mid |z| \geq 1\}$$

gegeben.

Proposition 17.7. *Sei $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. Dann hat g eine eindeutige Darstellung der Form*

$$g = \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} y & x \\ c0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})} \underbrace{\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})} k$$

mit $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ (diagonal eingebettet) sowie $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x + \mathrm{i}y \in \{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq 0, |z| \geq 1\}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $k \in K = \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \, \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$.

Beweis. Wir wissen bereits aufgrund der starken Approximation, dass $g \in GL_2(\mathbb{A})$ eindeutig in der Form

$$g = \underbrace{\gamma}_{\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})} \underbrace{d_\infty}_{\in D_\infty} \underbrace{h}_{\in \mathrm{GL}_2(\hat{Z})}$$

mit $D_\infty = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Aus

$$\begin{aligned} H &\overset{\to}{\cong} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^* \\ x + \mathrm{i}y &\mapsto \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \setminus H = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^*$$

sodass

$$D_\infty = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \qquad = \left\{ \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x + \mathrm{i}y \in C \right\} \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \mathbb{R}^*$$

mit $C = \{ z \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}(z) \le 0, |z| \ge 1 \}$. $\square$

Proposition 17.8. *Sei $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. Dann kann g eindeutig in der Form*

$$g = k_1 a k_2$$

mit $k_1, k_2 \in K = \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \, \mathrm{GL}_2(\hat{Z})$ und

$$a = \left\{ \begin{pmatrix} yr & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^{m_2} & 0 \\ 0 & 2^{n_2} \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

und $y, r \in \mathbb{R}^*_{>0}$.

18 Die universell einhüllende Algebra von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

Eine Lie-Algebra ist ein Vektorraum g mit einer bilinearen Abbildung

$$[\cdot,\cdot]\colon g \times g \to g$$

die

1. $[x,x] = 0$,
2. $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z[x,y]]$ (Jacobiidentität)

für alle $x, y, z \in g$ erfüllt.

Beispiel 18.1. Die $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{C}$ bilden eine Lie-Algebra bezüglich $[A,B] = AB - BA$.

Definition 18.2. Sei g eine Lie-Algebra. Eine *universell einhüllende Algebra* von g ist ein Paar (U,i) wobei U eine assoziative Algebra und i eine Abbildung $i\colon g \to U$ mit $i([x,y]) = [i(x), i(y)]$ ist, die die folgende universelle Eigenschaft erfüllt

Proposition 18.3. *Sei g eine Lie-Algebra. Dann besitzt g eine universell einhüllende Algebra $U(g)$ und diese ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.*

Beweis. Die Eindeutigkeit ist aus dem Diagramm klar. Die Existenz verbleibt als Übung. $\square$

Wir zitieren folgendes Resultat welches 1900 von Henri Poincaré und 1937 von Birkhoff und Witt bewiesen wurde.

Theorem 18.4. *Sei g eine Lie-Algebra mit universell einhüllender Algebra (U,i). Dann ist die Abbildung $i\colon g \to U$ injektiv.*

Wir konstruieren nun einen Isomorphismus von $U(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ in eine Algebra bestehend aus Differentialoperatoren.

Definition 18.5. Sei $\alpha \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $F\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ glatt. Definiere für $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}(D_\alpha F)(g) &:= \frac{\partial}{\partial t} F(g e^{t\alpha}) \mid_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} F(g + tg\alpha) \mid_{t=0} .\end{aligned}$$

Proposition 18.6. *Für $c \in \mathbb{R}$ und $F, G\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ glatt gilt*

(i) $D_\alpha(F + G) = D_\alpha F + D_\alpha G$,

(ii) $D_\alpha(cF) = c(D_\alpha F)$,

(iii) $D_\alpha(FG) = (D_\alpha F)G + F(D_\alpha G)$.

Definition 18.7. Die Differentialoperatoren D_α erzeugen eine assoziative Algebra über $\mathbb{R}$, die wir mit $D^2_{\mathbb{R}}$ bezeichnen. Das Produkt ist durch Komposition gegeben.

Wir sammeln nun einige Eigenschaften dieser Algebra.

Proposition 18.8. *Für $c \in \mathbb{R}$ und $\alpha, \beta \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ gilt*

(i) $D_{c\alpha} = cD_\alpha$,

(ii) $D_{\alpha+\beta} = D_\alpha + D_\beta$,

(iii) $D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha = D_{\alpha\beta - \beta\alpha}$.

Beweis. Sei $F\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ glatt. Schreibe $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ als $g = (g_{ij})$. Sei $h = (h_{ij}) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $\alpha = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Dann gilt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}(D_\alpha F)(h) &= \frac{\partial}{\partial t} F(h + th\alpha) \mid_{t=0} \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial g_{ij}} \mid_h \frac{\partial}{\partial t}(h_{ij} + t(h\alpha)_{ij}) \mid_{t=0} \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial g_{ij}} \mid_h (h\alpha)_{ij}.\end{aligned}$$

Daraus folgen die beiden ersten Eigenschaften. Anwenden von D_β impliziert unter der Verwendung der Produktregel

$$D_\beta(D_\alpha F)(h) = \frac{\partial}{\partial t}(D_\alpha F)(h + th\beta) \mid_{t=0}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i,j}\frac{\partial F}{\partial g_{ij}}\mid_{h+th\beta}(h\alpha+th\beta\alpha)_{ij}\right)\mid_{t=0}$$
$$=\sum_{i,j}\left(\frac{\partial F}{\partial g_{ij}}\mid_h (h\beta\alpha)_{ij}+\sum_{k,l}\frac{\partial^2 F}{\partial g_{kl}\partial g_{ij}}\mid_h (h\beta)_{kl}(h\alpha)_{ij}\right).$$

Dies impliziert nun

$$\begin{aligned}(D_\beta D_\alpha - D_\alpha D_\beta)(F(h)) &= \sum_{i,j}\frac{\partial F}{\partial g_{ij}}\mid_h ((h\beta\alpha)_{ij}-(h\alpha\beta)_{ij}) \\ &= D_{[\beta,\alpha]}F(h),\end{aligned}$$

was die dritte Behauptung zeigt. □

Also erhalten wir mit $V = \mathrm{C}^\infty(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} j\colon\ \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) &\to \mathrm{End}(V) \\ a &\mapsto D_\alpha. \end{aligned}$$

Aufgrund der universellen Eigenschaft der universell einhüllende Algebra folgt aus $[D_\alpha, D_\beta] = D[\alpha, \beta]$, dass es einen eindeutigen Homomorphismus

$$\Phi\colon U(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \to \mathrm{End}(V)$$

mit $\Phi(i(\alpha)) = D_\alpha$ gibt.

Theorem 18.9. *Die Abbildung Φ ist injektiv und liefert einen Isomorphismus von $U(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ und $D^2_{\mathbb{R}}$.*

Dieses Resultat lässt sich folgendermaßen verallgemeinern: Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra g. Dann kann $U(g)$ mit der Algebra der linksinvarianten Differentialoperatoren identifiziert werden.

Wir erweitern die Operation von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ auf den glatten Funktionen $F\colon\ \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ zu einer Operation von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ durch $(D_{\mathrm{i}\alpha}F)(g) := \mathrm{i}(D_\alpha F)(g)$ für $\alpha \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und identifizieren $U(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))$ mit $D^2_{\mathbb{C}} := D^2_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Im folgenden schreiben wir für $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ nur g.

Proposition 18.10. *Sei $F\colon\ \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ glatt und linksinvariant unter $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ und rechtsinvariant unter dem Zentrum $Z(\mathrm{GL}_2(R)) = \mathbb{R}^*$. Dann ist DF für alle $D \in D^2_{\mathbb{C}}$ linksinvariant unter $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ sowie rechtsinvariant unter $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$.*

Beweis. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und sei $D = D_{\alpha_1} \circ \cdots \circ D_{\alpha_n}$. Dann gilt für $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} DF(\gamma h) &= \frac{\partial}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial}{\partial t_n} (F(\gamma h \mathrm{e}^{t_n \alpha_n} \ldots \mathrm{e}^{t_1 \alpha_1})) \,|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial}{\partial t_n} (F(h \mathrm{e}^{t_n \alpha_n} \ldots \mathrm{e}^{t_1 \alpha_1})) \,|_{t=0} \\ &= (DF)(h). \end{aligned}$$

Die Invarianz unter $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ funktioniert analog. □

19 Das Zentrum von $U(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))$

Proposition 19.1. *Sei $F\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ glatt, linksinvariant unter $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ und rechtsinvariant $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^*$. Sei $D \in Z(U(g))$. Dann ist DF linksinvariant unter $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ und rechtsinvariant unter $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^*$.*

Das Zentrum $Z(U(g))$ wird durch das Harish-Chandra Theorem beschrieben. $Z(U(g))$ ist ein Polynomring in 2 Variablen. Die Erzeuger können folgendermaßen gewählt werden. Es gilt $Z(U(g)) = \mathbb{C}[D_1, D_2]$ mit $D_1 = D_z$ mit $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $D_2 = D_c$ mit $c = x_{11}^2 + x_{12}x_{21} + x_{21}x_{12} + x_{22}^2$.

20 Konstruktion automorpher Formen auf $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$

Wir konstruieren in diesem Abschnitt automorphe Formen auf $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ durch Adelisierung klassischer Modulformen.

Starke Approximation für $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A})$ besagt

$$\mathbb{A}^* = \mathbb{Q}^*\mathbb{R}_+^* \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p^*$$

Sei $x = (x_\infty, x_2, \ldots,) \in \mathbb{A}^*$. Dann ist $rx = (rx_\infty, rx_2, \ldots) \in \mathbb{R}_+^* \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p^*$ für ein geeignetes $r \in \mathbb{Q}^*$.

Für $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ gilt analog

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ \prod_{p<\infty} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p).$$

Sei $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Für $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ definieren wir

$$f\mid_{k,g} = f\mid_g(\tau) = \det(g)^{\frac{k}{2}}(c\tau + d)^{-k} f(g\tau).$$

Wir können g eindeutig schreiben als

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

mit $x, y, \alpha, r \in \mathbb{R}$, $y, r > 0$ und $0 \leq \alpha < 2\pi$. Dann ist

$$f\mid_g(\mathrm{i}) = y^{\frac{k}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\alpha} f(x + \mathrm{i}y).$$

Dies werden wir benutzen, um automorphe Formen zu konstruieren.

Sei nun $f \in M_k$. Wir definieren nun die adelische Anhebung ϕ_f auf $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ von f. Sei $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. Schreibe

$$g = \underbrace{\gamma}_{\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})} \underbrace{g_\infty}_{\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+} \underbrace{k_f}_{\in \prod_{p<\infty} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)} .$$

und definieren

$$\phi_f(g) \coloneqq f \mid_{k,g_\infty} (\mathrm{i}).$$

Da die obige Zerlegung nicht eindeutig ist, müssen wir zeigen, dass dies aber keinen Einfluss auf ϕ_f hat.

Proposition 20.1. *Die Abbildung ϕ_f ist wohldefiniert.*

Beweis. Sei $g = \gamma g_\infty k_f = \gamma' g'_\infty k'_f$. Dann ist $\gamma g_\infty = \gamma' g'_\infty$ in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ sowie $\gamma k_f = \gamma' k'_f$ in $\prod_{p<\infty} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Es folgt $\gamma^{-1}\gamma' \in \prod_{p<\infty} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Dies impliziert $\gamma^{-1}\gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, da die Einträge in allen $\mathbb{Z}_p$ liegen. Aus der ersten Gleichheit folgt $\gamma^{-1}\gamma' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Damit gilt

$$f \mid_{g_\infty} = f \mid_{\gamma^{-1}\gamma' g'_\infty} = (f \mid_{\gamma^{-1}\gamma'}) \mid_{g'_\infty} = f \mid_{g'_\infty} .$$

□

Proposition 20.2. *ϕ_f ist glatt.*

Beweis. Für festes $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ ist

$$\phi_f(g) = f \mid_{g_\infty} (\mathrm{i}) = y^{\frac{k}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\alpha} f(x + \mathrm{i}y)$$

für alle $g = \gamma g_\infty k_f$ in $\gamma \, \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ \prod_{p<\infty} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Diese Funktion ist glatt als Funktion in x, y, α, da f holomorph ist. Somit ist f (im wesentlichen) glatt im Sinne von Kapitel 11 ($\Phi_\infty^U\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ \to \mathbb{C}$). □

Proposition 20.3. *ϕ_f ist linksinvariant unter* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$.

Beweis. Es ist aus der Definition von ϕ_f klar, dass $\phi_f(\gamma g) = \phi_f(g)$ für alle $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ und alle $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ ist. □

Proposition 20.4. *Weiterhin ist $\phi_f(gz) = \phi_f(zg) = \phi_f(g)$ für alle $z \in Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}))$ und $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$.*

Beweis. Schreibe $z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ mit einem $a \in \mathbb{A}^* = \mathbb{Q}^*\mathbb{R}_+^*\hat{Z}^*$. Dann

$$z = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\infty & 0 \\ 0 & a_\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_f & 0 \\ 0 & a'_f \end{pmatrix}$$

mit $a'_\infty \in \mathbb{R}_+^*$ und $a'_f \in \hat{Z}^*$. Ist $g = \gamma g_\infty k_f$, so ist

$$gz = \gamma \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} g_\infty \begin{pmatrix} a'_\infty & 0 \\ 0 & a'_\infty \end{pmatrix} k_f \begin{pmatrix} a'_f & 0 \\ 0 & a'_f \end{pmatrix}$$

und

$$\phi_f(gz) = f \mid_{g_\infty \begin{pmatrix} a'_\infty & 0 \\ 0 & a'_\infty \end{pmatrix}} (\mathrm{i})$$

$$f \mid_{g_\infty} (\mathrm{i}) = \phi_f(g).$$

Das entscheidende hier ist, dass der Strich Operator trivial auf den Diagonalmatrizen ist und mit Komposition verträglich ist. □

Sei $K = \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \prod_{p<\infty} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$.

Proposition 20.5. *Dann ist ϕ_f rechts K-endlich.*

Beweis. Durch Rechtstranslation mit $k \in K$ entstehen neue Funktionen $(\phi_f \circ \mathbb{R}_k)(g) = \phi_f(gk)$. Wir werden zeigen, dass dieser Vektorraum endlichdimensional ist. Seine Dimension ist nach oben durch 2 beschränkt. Schreibe dazu (Iwasawa Zerlegung) $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ als $g\gamma g_\infty k_f$ mit

$$g_\infty = sowieimmer$$

wobei $x, y, \alpha, r \in \mathbb{R}$, $y, r > 0$ und $0 \le \alpha < 2\pi$. Sei $k \in K$. Wir nehmen zuerst an, dass $k_\infty \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ ist, das heißt

$$k_\infty \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta. \end{pmatrix}$$

Dann ist $gk = \gamma g_\infty \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta. \end{pmatrix} k'_f$ wobei k'_f auch den endlichen Anteil von k enthält. Es gilt

$$g_\infty \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

sodass

$$\phi_f(gk) = y^{\frac{k}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\alpha+\beta)} f(x+\mathrm{i}y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\beta}\phi_f(g)$$

folgt. Das heißt für positive Determinante passiert nichts. Ist $k_\infty \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit $\det(K_\infty) = -1$, so ist

$$k_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta. \end{pmatrix}$$

und

$$gk = gk = \gamma g_\infty \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} k_f'.$$

Mit

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt

$$g_\infty \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{matrix} \cos \\ \sin\alpha\ \mathrm{c} \end{matrix} \right.$$

sodass

$$\begin{aligned} \phi_f(gk) &= y^{\frac{k}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\beta-\alpha)} f(-x+\mathrm{i}y) \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\beta} y^{\frac{k}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha} f(-x+\mathrm{i}y) \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\beta} \phi_f\left(g \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\langle \phi_f \circ R_k \mid k \in K \rangle = \mathbb{C}\phi_f + \mathbb{C}(\phi_f \circ R_{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

□

Als nächstes müssen wir zeigen, dass ϕ_f ist $Z(U(g))$-endlich ist. Dafür benutzen wir das Resultat aus dem letzten Kapitel.

Proposition 20.6. *ϕ_f ist $\mathbb{Z}(U(g))$-endlich.*

Beweis. Hierbei betrachten wir ϕ_f wieder als Funktion auf $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$. Also

$$\begin{aligned}\phi_f\colon\ \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ &\to \mathbb{C}\\ g &\mapsto f\mid_g(\mathrm{i}).\end{aligned}$$

Aus dem letzten Kapitel wissen wir, dass $Z(U(g))$ von D_z und D_c erzeugt wird. Es gilt

$$\begin{aligned}(D_z\phi_f)(g) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_f(g\exp(tz))\right)\mid_{t=0}\\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\phi_f(g(\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t & 0\\ 0 & \mathrm{e}^t\end{pmatrix}))\mid_{t=0}\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(f\mid_{g\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t & 0\\ 0 & \mathrm{e}^t\end{pmatrix}}(\mathrm{i})\right)\mid_{t=0}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(f\mid_g(\mathrm{i}))\mid_{t=0} = 0.$$

Sei $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$. Dann lässt sich g eindeutig schreiben als

$$\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r & 0\\ 0 & r\end{pmatrix}.$$

In diesen Koordinaten ist der Casimir-Operator durch

$$D_c = 2y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+2y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}D_c\phi_f &= D_c\left(y^{\frac{k}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\alpha}f(x+\mathrm{i}y)\right)\\ &= 2y^{\frac{k}{2}+2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\alpha}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x+\mathrm{i}y)\\ -2\mathrm{i}ky^{\frac{k}{2}+1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x+\mathrm{i}y)\\ +2y^{\frac{k}{2}}\frac{k}{2}(\frac{k}{2}-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\alpha}f(x+\mathrm{i}y)\\ &= \frac{1}{2}k(k-2)\phi_f(g).\end{aligned}$$

Einige Terme fallen hier weg, da f holomorph ist. Insbesondere sind somit Real- und Imaginärteil harmonisch. Somit folgt

$$\langle D\phi_f \mid D\in Z(U(g))\rangle = \mathbb{C}\phi_f. \square$$

Proposition 20.7. *Als letztes zeigen wir noch, dass ϕ_f beschränktes Wachstum hat.*

Beweis. Schreibe $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ in seiner üblichen Zerlegung

$$g = \gamma \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} k_f$$

mit $x, y, \alpha, r \in \mathbb{R}$, $r, y > 0$, $x^2 + y^2 \geq 1$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\phi_f(g)| &= y^{\frac{k}{2}} \, |f(x + \mathrm{i}y)| \\ &\leq c y^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

für y groß genug, weil $f \in M_k$ ist, und

$$\|g\| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} y^{\frac{1}{3}}$$

(vgl Goldfeld, Humdley, S.123) sodass

$$|\phi_f(g)| \leq D \, \|g\|^m$$

für geeignete Konstanten D, m. □

Insgesamt haben wir folgendes gezeigt.

Theorem 20.8. *Sei $f \in M_k$. Dann ist die Funktion*

$$\phi_f \colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

glatt und erfüllt

1. *$\phi_f(\gamma g) = \phi_f(g)$ für alle $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ und $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$,*
2. *$\phi_f(zg) = \phi_f(g)$ für alle $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ und $z \in Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}))$,*
3. *ϕ_f ist rechts K-endlich,*
4. *ϕ_f ist $Z(U(g))$-endlich,*
5. *ϕ_f hat beschränktes Wachstum,*

das heißt ϕ_f ist eine automorphe Form auf $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$.

Literaturverzeichnis

[BCDT01] Breuil, Christophe ; Conrad, Brian ; Diamond, Fred ; Taylor, Richard: On the modularity of elliptic curves over Q: Wild 3-adic exercises. In: *Journal of the American Mathematical Society* 14 (2001), S. 843–939

[Dei10] Deitmar, Anton: *Automorphe Formen*. Springer, 2010 (Springer-Lehrbuch Masterclass)

[Els18] Elstrodt, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer Spektrum, 2018

[Gou93] Gouvêa, Fernando Q.: *p-adic numbers: an Introduction: with 15 figures*. Springer-Verlag GmbH, 1993 (Universitext)

[Man15] Manetti, Marco: *Topology*. `https://doi.org/10.1007/978-3-319-16958-3`. Version: 1st ed. 2015, 2015 (La Matematica per il 3+2)

[Wil95] Wiles, Andrew: Modular Elliptic Curves and Fermat's last theorem. In: *Annals of Mathematics* 141 (1995), S. 443–551