



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Automorphe Formen

Wintersemester 2018/2019

Vorlesung gehalten von Prof. Nils Scheithauer

Typeset in L^AT_EX by Jonas Lenz

Fehler können an jlenz@mathematik.tu-darmstadt.de gemeldet werden

Version vom 8. November 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Absolutbeträge	3
2	Die p-adischen Zahlen	5
3	Integration	12
4	Adele	17
5	Idele	25
6	Charaktere	28

Einleitung

Sei G eine Gruppe, die auf einem topologischen Raum X operiert. Eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *automorphe Form auf X* , wenn

$$f(gx) = \Psi(g, x)f(x)$$

für alle $g \in G, x \in X$ für eine geeignete Funktion $\Psi: G \times X \rightarrow \mathbb{C}$ gilt. Häufig werden noch weitere Bedingungen zum Beispiel an das Wachstum gefordert. Einer automorphen Form kann man eine automorphe Darstellung zuordnen und dieser wiederum eine L -Reihe. Es wird vermutet, dass diese automorphen L -Reihen dieselben sind, die man in der arithmetischen algebraischen Geometrie findet (Langlands-Programm). Ein Spezialfall dieser Korrespondenz ist der Modularitätssatz:

Satz 0.1 (Breuil, Conrad, Diamond, Taylor (2001), Wiles (1995) vermutet von Taniyama und Shimura (1958)). *Sei E eine rationale elliptische Kurve mit Führer N . Dann gibt es eine Neuform $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ mit*

$$L_f = L_E.$$

In dieser Vorlesung betrachten wir automorphe Formen auf $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ für $n = 1$ und wenn es die Zeit erlaubt für $n = 2$.

Literatur

Goldfeld, Hundley: Automorphic representations and L -functions for the general linear group, Cambridge University Press.

Skript von Herrn Brunier

1 Absolutbeträge

Definition 1.1. Sei K ein Körper. Ein *Absolutbetrag auf K* ist eine Abbildung $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}$ mit

i) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $|xy| = |x| |y|$,

iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$

für alle $x, y \in K$. Gilt zusätzlich

$$|x + y| \leq \max(|x|, |y|),$$

so heißt $|\cdot|$ *nicht-archimedisch*. Ist $|\cdot|$ ein Betrag auf K , so definiert

$$d(x, y) := |x - y|$$

eine Metrik auf K . Zwei Absolutbeträge heißen *äquivalent*, wenn sie dieselbe Topologie auf K erzeugen.

Satz 1.2. Seien $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ zwei Absolutbeträge auf K . Dann sind äquivalent

i) $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ sind äquivalent,

ii) es existiert $c > 0$ mit $|x|_1 = |x|_2^c$ für alle $x \in K$.

Satz 1.3. Sei $|\cdot|$ ein Absolutbetrag auf K . Dann sind die folgenden Abbildungen stetig:

i) $K \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$,

ii) $K \rightarrow K, x \mapsto -x$,

iii) $K \times K \rightarrow K, (x, y) \mapsto x + y$,

$$iv) K^* \rightarrow K^*, x \mapsto x^{-1},$$

$$v) K \times K \rightarrow K, (x, y) \mapsto xy.$$

Satz 1.4. *Sei K ein Körper mit Absolutbetrag $|\cdot|$. Dann gibt es eine Körpererweiterung \hat{K}/K und eine Fortsetzung von $|\cdot|$ auf \hat{K} , sodass K dicht in \hat{K} und \hat{K} vollständig bezüglich $|\cdot|$ ist.*

Ist \tilde{K} ein weiterer Erweiterungskörper von K mit obigen Eigenschaften, so existiert genau ein Körperisomorphismus $\tilde{K} \rightarrow \hat{K}$, der auf K die Identität ist und die Absolutbeträge ineinander überführt.

Beweis. Sei $K' := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folge bezüglich } |\cdot|\}$ die Menge der Cauchy-Folgen in K . Dann ist K' ein kommutativer Ring mit 1 und $N := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Nullfolge}\}$ ein maximales Ideal. Somit ist $\hat{K} = K'/N$ ein Körper. Die Abbildung

$$\begin{aligned} K &\rightarrow \hat{K} \\ x &\mapsto (x) + N \end{aligned}$$

ist ein Körperhomomorphismus und somit injektiv. Der Absolutbetrag auf \hat{K} wird definiert durch

$$|(x_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$$

wobei $|x_n|$ aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichung eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} ist. Dieser ist wohldefiniert, \hat{K} ist vollständig und K ist dicht in \hat{K} . Die Einbettung $K \hookrightarrow \hat{K}$ ist auf einer dichten Teilmenge von \tilde{K} definiert. Da die Einbettung die Absolutbeträge erhält, ist sie stetig und lässt sich somit eindeutig zu einer stetigen Abbildung $\tilde{K} \rightarrow \hat{K}$ fortsetzen. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus, der die Absolutbeträge erhält. Die Eindeutigkeit ist aus der Konstruktion klar. \square

Bemerkung 1.5. *Im Gegensatz ist der algebraische Abschluss nicht eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.*

2 Die p -adischen Zahlen

Für $x \in \mathbb{Q}$ definieren wir

$$|x|_\infty := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Dann ist $|\cdot|_\infty$ ein Absolutbetrag.

Sei $p > 0$ eine Primzahl. Wir schreiben $x \in \mathbb{Q}^*$ als $x = p^n \frac{a}{b}$ mit $p \nmid ab$ und definieren

$$|x|_p := p^{-n}$$

und setze $|0|_p = 0$. Dann ist der p -adische Betrag $|\cdot|_p$ ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf \mathbb{Q} . Mit d_p bezeichnen wir die Metrik, die durch $|\cdot|_p$ induziert wird. Es gilt die verschärfte Dreiecksungleichung

$$|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p).$$

Ist $|x|_p \neq |y|_p$ so gilt Gleichheit.

Beispiel 2.1. i) Die Folge $1, p, p^2, \dots$ konvergiert p -adisch gegen 0, da $d_p(0, p^n) = p^{-n} \rightarrow 0$.

ii) Die Folge $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \dots$ ist keine Cauchy-Folge bezüglich $|\cdot|_p$.

Theorem 2.2 (Ostrowski). Ein Absolutbetrag auf \mathbb{Q} ist äquivalent zu $|\cdot|_\infty$ oder zu einem $|\cdot|_p$ für eine Primzahl p .

Satz 2.3 (Produktformel). Sei $x \in \mathbb{Q}^*$. Dann gilt

$$|x|_\infty \prod_p |x|_p = 1.$$

Bemerkung 2.4. Die Primzahlen $2, 3, \dots$ werden als endliche Primzahlen bezeichnet und ∞ als unendliche Primzahl. Wir bezeichnen endliche Primzahlen meist mit p und beliebige Primzahlen mit ν .

Definition 2.5. Wir fixieren eine endliche Primzahl p und definieren

$$K(x, r) := \{y \in \mathbb{Q} \mid d_p(x, y) < r\},$$

$$\overline{K}(x, r) := \{y \in \mathbb{Q} \mid d_p(x, y) \leq r\}$$

als offener beziehungsweise abgeschlossener Ball bezüglich $|\cdot|_p$ um x mit Radius r .

Satz 2.6. Sei $x \in \mathbb{Q}$ und $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

(i) Für $x' \in K(x, r)$ gilt

$$K(x', r) = K(x, r).$$

(ii) Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt

$$K(x, r) = \overline{K}(x, r - \varepsilon),$$

$$\overline{K}(x, r) = K(x, r + \varepsilon).$$

(iii) Für $r \in \mathbb{R} \setminus \{p^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$K(x, r) = \overline{K}(x, r).$$

(iv) Sei $r = p^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$K(x, p^n) = \overline{K}(x, p^{n-1}).$$

Außerdem gibt es $x_1, \dots, x_{p-1} \in \overline{K}(x, p^n)$ mit

$$\overline{K}(x, p^n) = \overline{K}(x, p^{n-1}) \cup \overline{K}(x_1, p^{n-1}) \cup \dots \cup \overline{K}(x_{p-1}, p^{n-1})$$

wobei die Vereinigungen disjunkt sind.

Beweis. (i) Sei $x' \in K(x, r)$ beliebig. Dann gilt für jedes $y \in K(x, r)$, dass

$$|x' - y|_p = |(x' - x) * (x - y)|_p$$

$$\leq \max(|x' - x|_p, |x - y|_p) < r.$$

Also folgt $y \in K(x', r)$ und somit $K(x, r) \subseteq K(x', r)$. Die umgekehrte Inklusion folgt analog.

(ii) and (iii) Die Distanzfunktion $d_p(x, y) = |x - y|_p$ nimmt höchstens abzählbar viele Werte an, nämlich p^n für ein $n \in \mathbb{Z}$ oder 0. Also gilt für $r > 0$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, dass

$$\begin{aligned} |x - y|_p < r &\Leftrightarrow |x - y|_p \leq r - \varepsilon, \\ |x - y|_p \leq r &\Leftrightarrow |x - y|_p < r + \varepsilon. \end{aligned}$$

Falls r nicht von der Form p^n für ein $n \in \mathbb{Z}$ ist, dann gilt

$$|x - y|_p < r \Leftrightarrow |x - y|_p \leq r.$$

Dies beweist (ii) und (iii).

(iv) Nach Definition der Norm gilt

$$|x - y|_p < p^n \Leftrightarrow |x - y|_p \leq p^{n-1}.$$

Die restliche Aussage verbleibt als Übung. □

Satz 2.7. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ eine p -adische Cauchyfolge, die nicht p -adisch gegen 0 konvergiert. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n|_p$ konstant für alle $n > N$ ist.

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich $|\cdot|_p$ also folgt, dass $(|x_n|_p)$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R} ist. Daher ist $(|x_n|_p)$ konvergent in \mathbb{R} . Da es keine Nullfolge ist, muss sie stationär werden. □

Definition 2.8. Wir definieren \mathbb{Q}_p als die Vervollständigung von \mathbb{Q} bezüglich $|\cdot|_p$. Die obigen Eigenschaft von $|\cdot|_p$ setzen sich auf \mathbb{Q}_p fort.

Beispiel 2.9. Sei $x \in \mathbb{Q}_p^*$. Dann gilt $|x|_p = p^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.

Als nächstes beweisen wir den Satz von Bolzano-Weierstraß für p -adische Zahlen.

Theorem 2.10. Jede beschränkte Folge in \mathbb{Q}_ν hat einen Häufungspunkt.

Beweis. Für $\nu = \infty$ ist dies die Aussage des Satzes von Bolzano-Weierstraß. Sei also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}_p$ eine beschränkte Folge in \mathbb{Q}_p . Nach Definition ist jedes x_n eine Cauchyfolge in \mathbb{Q} bezüglich $|\cdot|_p$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir $x'_n \in \mathbb{Q}$ sodass

$$|x_n - x'_n| < p^{-n}$$

gilt, dies geht aufgrund der Dichtheit von \mathbb{Q} in \mathbb{Q}_p . Die Folge $(x'_n) \subseteq \mathbb{Q}$ ist beschränkt in $|\cdot|_p$. Wir werden zeigen, dass (x'_n) eine Teilfolge besitzt, die Cauchy ist. Diese Teilfolge definiert eine Zahl $x' \in \mathbb{Q}_p$. Die zugehörige Teilfolge von (x_n) wird ebenfalls gegen x konvergieren. Wir konstruieren die Cauchy Teilfolge von (x'_n) folgendermaßen. Da (x'_n) beschränkt ist, existieren $y \in \mathbb{Q}$ und $m \in \mathbb{Z}$ mit $(x'_n) \subseteq \overline{K}(y, p^m)$. Dieser zerfällt in endlich viele (p Stück) disjunkte abgeschlossene Bälle mit Radius p^{m-1} . Mindestens einer dieser Bälle muss unendlich viele Folgenglieder (x'_n) enthalten. Beginnend mit x_1 entfernen wir alle Elemente der Folge, die nicht in diesem Ball liegen. Dieser Ball zerfällt erneut und so weiter. Dadurch erhalten wir eine Teilfolge (x''_n) von (x'_n) mit der Eigenschaft, dass alle x''_i für alle $i \geq N$ in einem abgeschlossenen Ball mit Radius p^{m-N} liegen. Damit folgt

$$|x''_i - x''_j|_p \leq p^{m-N}$$

für alle $i, j \geq N$. Somit wir haben unsere gewünschte Cauchyfolge konstruiert. \square

Korollar 2.11. *Eine Menge ist genau dann in \mathbb{Q}_p kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Definition 2.12. Wir definieren die *p-adischen ganzen Zahlen* durch

$$\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}.$$

Dies ist ein Unterring von \mathbb{Q}_p .

Satz 2.13. *Die p-adischen ganzen Zahlen \mathbb{Z}_p sind beschränkt, abgeschlossen und offen. Insbesondere ist \mathbb{Z}_p kompakt.*

Satz 2.14. *Sei $x \in \mathbb{Z}_p$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann existiert ein eindeutiges $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq \alpha < p^n$ und*

$$|x - \alpha|_p \leq p^{-n}.$$

Beweis. Da \mathbb{Q} dicht in \mathbb{Q}_p ist, existiert $t \in \mathbb{Q}$ mit $|t - x|_p \leq p^{-n}$. Dann gilt

$$|t|_p = |(t - x) + x|_p \leq \max(|t - x|_p, |x|_p) \leq 1,$$

das heißt $t \in \mathbb{Z}_p$ und $t = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) = 1$ und $(p, b) = 1$. Wähle $b' \in \mathbb{Z}$ mit $bb' \equiv 1 \pmod{p^n}$. Dann gilt

$$|t - ab'|_p = \left| \frac{a}{b} - ab' \right|_p$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{a}{b} (1 - bb') \right|_p \\
&= \left| \frac{a}{b} \right|_p |1 - bb'|_p.
\end{aligned}$$

Für $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha = ab' \pmod{p^n}$ und $0 \leq \alpha < p^n$ gilt

$$|t - \alpha|_p \leq p^{-n},$$

sowie

$$\begin{aligned}
|x - \alpha|_p &= |(x - t) + (t - \alpha)|_p \\
&\leq \max(|x - t|_p, |t - \alpha|_p) \leq p^{-n}.
\end{aligned}$$

Sei β ein anderes solches Element. Dann gilt $|\alpha - \beta| \leq p^{-n}$, was $p^n \mid (\alpha - \beta)$ und somit $\alpha = \beta$ impliziert. \square

Korollar 2.15. *Es gilt $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_p$, insbesondere für jedes $x \in \mathbb{Z}_p$ existiert eine Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ mit $0 \leq \alpha_n < p^n$, $\alpha_n = \alpha_{n-1} \pmod{p^{n-1}}$ und $|x - \alpha_n| \leq p^{-n}$. Darüber hinaus ist diese Folge eindeutig.*

Sei umgekehrt $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ eine Folge mit $0 \leq \alpha_n < p^n$ sowie $\alpha_n = \alpha_{n-1} \pmod{p^{n-1}}$. Dann ist $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert gegen ein $x \in \mathbb{Z}_p$.

Definition 2.16. Eine Folge von Restklassen $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wobei $\alpha_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ist, die $\alpha_n = \alpha_{n-1} \pmod{p^{n-1}}$ erfüllt, heißt *kompatibles System*. Die Menge aller kompatiblen System heißt *projektiver Limes* des Systems. Der projektive Limes $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ist ein Ring bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation.

Theorem 2.17. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_p &\rightarrow \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\
x &\mapsto (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}
\end{aligned}$$

ist ein Ringisomorphismus. Weiterhin ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_p &\rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\
x &\mapsto \alpha_n
\end{aligned}$$

ist surjektiv und ihr Kern ist durch $p^n\mathbb{Z}_p$ gegeben. Also folgt

$$\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

aufgrund des Homomorphiesatzes.

Lemma 2.18. Sei $x \in \mathbb{Q}_p$ mit $|x|_p = p^n$ für ein $n > 0$. Dann gilt $|p^n x|_p = 1$, sodass $p^n x \in \mathbb{Z}_p$ folgt. Dies impliziert

$$\mathbb{Q}_p = \bigcup_{n=1}^{\infty} p^{-n} \mathbb{Z}_p$$

sodass \mathbb{Q}_p der Quotientenkörper von \mathbb{Z}_p ist.

Für $x \in \mathbb{Q}_p^*$ gilt $|x^{-1}|_p = \frac{1}{|x|_p}$ und somit auch

$$\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Z}_p \mid |x|_p = 1\}.$$

Proposition 2.19. Jedes $x \in \mathbb{Z}_p$ hat eine Darstellung der Form

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i$$

mit $b_i \in \{0, \dots, p-1\}$. Weiterhin ist diese Darstellung eindeutig.

Beweis. Für $x \in \mathbb{Z}_p$ gibt es eine eindeutige Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ mit $0 \leq \alpha_n < p^n$, $\alpha_n = \alpha_{n-1} \pmod{p^{n-1}}$ und $|x - \alpha_n| \leq p^{-n}$. Insbesondere lassen sich die α_n schreiben durch

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i$$

wobei $b_i \in \{0, \dots, p-1\}$ gilt. □

Proposition 2.20. Sei $x \in \mathbb{Q}_p$ mit $|x|_p = p^n$. Dann hat x eine eindeutige Darstellung der Form

$$x = b_{-n} p^{-n} + b_{-n+1} p^{-n+1} + \dots,$$

wobei $b_i \in \{0, \dots, p-1\}$ und $b_{-n} \neq 0$.

Bemerkung 2.21. Die Elemente in \mathbb{Z}_p^* sind von der Form

$$x = b_0 + b_1 p + \dots$$

mit $b_0 \neq 0$.

Definition 2.22. Ein Hausdorffraum heißt *lokal kompakt*, falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat.

Beispiel 2.23. (i) Ein kompakter Hausdorffraum ist lokal kompakt.

(ii) $(\mathbb{R} = \mathbb{Q}_\infty, |\cdot|_\infty)$ ist lokal kompakt.

Proposition 2.24. \mathbb{Q}_p ist lokal kompakt.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{Q}_p$ und wähle $r > 0$. Dann ist $\overline{K}(x, r)$ eine kompakte Umgebung von x . □

Proposition 2.25. $\mathbb{Q}_p^* = \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ ist lokal kompakt.

Wir haben bereits gesehen, dass \mathbb{Z}_p offen, abgeschlossen und kompakt ist.

Proposition 2.26. \mathbb{Z}_p^* ist offen, abgeschlossen und kompakt.

Beweis. Dies folgt aus der Stetigkeit von $|\cdot| : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}$. □

Proposition 2.27. $(\mathbb{Q}_p, +)$, $(\mathbb{Z}_p, +)$, (\mathbb{Q}_p^*, \cdot) , (\mathbb{Z}_p^*, \cdot) sind lokal kompakte topologische Gruppen

3 Integration

Definition 3.1. Sei X ein Hausdorffraum. Die *Borel σ -Algebra* $\sigma(X)$ von X ist die kleinste σ -Algebra, die die offenen Mengen von X enthält. Ein *Radonmaß* auf X ist ein Maß $\mu: \sigma(X) \rightarrow [0, \infty]$ sodass

- i) μ ist lokal endlich, das heißt für jedes $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U von x die endliches Maß hat.
- ii) μ ist *regulär von innen*, das heißt

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A \text{ kompakt} \}$$

gilt für alle $A \in \sigma(X)$.

Beispiel 3.2. Das Lebesguemaß auf \mathbb{R}^n ist ein Radonmaß.

Theorem 3.3 (Riesz). *Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum und*

$$I: C_c(X) \rightarrow \mathbb{C}$$

eine positive lineare Form, das heißt $I(f) \geq 0$ für alle $0 \leq f \in C_c(X)$. Dann existiert ein eindeutiges Radonmaß $\mu: \sigma(X) \rightarrow [0, \infty]$ mit $I(f) = \int_X f \, d\mu$. Außerdem gilt für kompakte Mengen K

$$\mu(K) = \inf\{I(f) \mid f \in C_c(X), f \geq \chi_K\}$$

sowie

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A \text{ kompakt} \}$$

für alle $A \in \sigma(X)$.

Beweis. Elstrodt, Kapitel 8 von Maß- und Integrationstheorie. □

Theorem 3.4 (Haar). *Sei G eine lokal kompakte Hausdorffgruppe. Dann gibt es ein linksinvariantes Radonmaß μ auf G . Dieses ist eindeutig bis auf positive Konstanten und heißt Haarmaß auf G .*

Beispiel 3.5. i) Auf einer diskreten Gruppe ist das Zählmaß ein Haarmaß.

ii) Auf $(\mathbb{R}^n, +)$ ist das Lebesguemaß ein Haarmaß.

iii) Auf (\mathbb{R}^*, \cdot) ist $\frac{dx}{|x|}$, wobei dx das Lebesguemaß auf \mathbb{R} ist, ein Haarmaß.

iv) Ein Haarmaß auf $GL(2, \mathbb{R})$ ist durch

$$\frac{dx_{11}dx_{12}dx_{21}dx_{22}}{|\det(M)|^2}$$

gegeben. (M wie man es erwartet).

Theorem 3.6. *Sei G eine lokal kompakte Hausdorffgruppe und $K \subseteq G$ kompakt. Dann gibt es ein eindeutiges Haarmaß μ auf G , das $\mu(K) = 1$ erfüllt.*

Definition 3.7. Sei G eine lokal kompakte Hausdorffgruppe und μ ein Haarmaß auf G . Dann definiert für $x \in G$

$$\mu_x(A) = \mu(Ax)$$

ein links invariantes Maß auf G .

Definition 3.8. Die Eindeutigkeit impliziert $\mu_x = \delta(x)\mu$ für ein $\delta(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Insbesondere ist $\delta(x)$ unabhängig von der Wahl von μ . Die Funktion

$$\begin{aligned} \delta: G &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \delta(x) \end{aligned}$$

heißt *modulare Funktion* von G .

Proposition 3.9. *Die Abbildung δ ist ein Morphismus topologischer Gruppen.*

Beweis. Für $x, y \in G$ gilt

$$\begin{aligned} \delta(xy)\mu(A) &= \mu_{xy}(A) = \mu(Axy) \\ &= \mu_y(Ax) = \delta(y)\delta(x)\mu(A). \end{aligned}$$

Der Rest verbleibt als Übungsaufgabe. □

Beispiel 3.10. Man kann zeigen, dass jeder stetiger Gruppenhomomorphismus $h: \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ konstant sein muss. Daraus folgt, dass jedes Haarmaß auf $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ auch rechts invariant ist.

Wir betrachten nun die lokal kompakten Hausdorffgruppen \mathbb{Q}_p sowie \mathbb{Q}_p^* . Wir normieren das Haarmaß μ auf \mathbb{Q}_p durch die Forderung $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$.

Proposition 3.11. Für eine messbare Menge $A \subseteq \mathbb{Q}_p$ und $x \in \mathbb{Q}_p^*$ gilt

$$\mu(xA) = |x|_p \mu(A).$$

Beweis. Für $x \in \mathbb{Q}_p^*$ definiert

$$\mu_x(A) = \mu(xA)$$

ein Radonmaß auf \mathbb{Q}_p . Dies ist links invariant, da

$$\mu_x(y + A) = \mu((y + A)x) = \mu(yx + Ax) = \mu_x(A)$$

gilt. Also folgt aus der Eindeutigkeit, dass $\mu_x(A) = c(x)\mu(A)$ mit $c(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ unabhängig von A gilt. Sei zunächst $|x|_p = p^{-n}$ für ein $n > 0$. Dann gilt $x\mathbb{Z}_p = p^n\mathbb{Z}_p$ sowie

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{j=0}^{p^n-1} (j + p^n\mathbb{Z}_p)$$

als disjunkte Vereinigung. Aus σ -Additivität folgt daher

$$\begin{aligned} \mu(\mathbb{Z}_p) &= \sum_{j=0}^{p^n-1} \mu(j + p^n\mathbb{Z}_p) \\ &= p^n \mu(p^n\mathbb{Z}_p), \end{aligned}$$

was $|x|_p \mu(\mathbb{Z}_p) = \mu(x\mathbb{Z}_p)$ impliziert. Also ist in diesem Fall $c(x) = |x|_p$. Als nächstes betrachten wir den Fall $|x|_p = p^n$ mit $n > 0$. Dann gilt $\mu(A) = \mu(x^{-1}xA) = |x^{-1}|_p \mu(xA)$, also folgt $\mu(xA) = |x|_p \mu(A)$. \square

Korollar 3.12. Sei f integrierbar. Dann gilt für $a \in \mathbb{Q}_p^*$

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(a^{-1}x) \, d\mu(x) = |a|_p \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) \, d\mu(x).$$

Beweis. Wir wollen die letzte Proposition verwenden. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Q}_p} f(a^{-1}x) \, d\mu(x) &= \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) \, d\mu_a(x) \\ &= |a|_p \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) \, d\mu(x).\end{aligned}$$

Wir werden das normierte Haarmaß auf \mathbb{Q}_p mit dx notieren. □

Beispiel 3.13. Wir können jetzt das Volumen von $\mathbb{Z}_p^* = \bigcup_{j=1}^{p-1} (j + p\mathbb{Z}_p)$ berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}\mu_{dx}(\mathbb{Z}_p^*) &= \sum_{j=1}^{p-1} \mu_{dx}(j + p\mathbb{Z}_p) \\ &= (p-1)\mu_{dx}(p\mathbb{Z}_p) \\ &= \frac{p-1}{p} \mu_{dx}(\mathbb{Z}_p) \\ &= \frac{p-1}{p}.\end{aligned}$$

Wir konstruieren nun ein Haarmaß auf \mathbb{Q}_p^* . Für $A \subseteq \mathbb{Q}_p^* \subseteq \mathbb{Q}_p$ definieren wir

$$\mu_{\frac{dx}{|x|_p}}(A) := \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_A(x) \frac{dx}{|x|_p}.$$

Da dies in 0 nicht definiert ist, setzen wir den Integranden in diesem Punkt auf 0. Dann gilt für $y \in \mathbb{Q}_p^*$, dass

$$\begin{aligned}\mu_{\frac{dx}{|x|_p}}(yA) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_{yA}(x) \frac{dx}{|x|_p} \\ &= |y^{-1}|_p \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_A(y^{-1}x) \frac{dx}{|y^{-1}x|_p} \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_A(x) \frac{dx}{|x|_p} \\ &= \mu_{\frac{dx}{|x|_p}}(A).\end{aligned}$$

Also ist $\mu_{\frac{dx}{|x|_p}}$ links invariant. Das Volumen von \mathbb{Z}_p^* bezüglich $\mu_{\frac{dx}{|x|_p}}$ ist

$$\begin{aligned}\mu_{\frac{dx}{|x|_p}}(\mathbb{Z}_p^*) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(\mathbb{Z}_p^*) \frac{dx}{|x|_p} \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(\mathbb{Z}_p^*) \, dx = \mu_{dx}(\mathbb{Z}_p^*) \\ &= \frac{p-1}{p}.\end{aligned}$$

Theorem 3.14. $\frac{dx}{|x_p|}$ definiert ein Haarmaß auf \mathbb{Q}_p^* . Das normierte Haarmaß

$$d^*x = \frac{p}{p-1} \frac{dx}{|x_p|}$$

erfüllt $\mu_{d^*x}(\mathbb{Z}_p^*) = 1$.

Für $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $s \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$a^s = e^{s \log(a)}.$$

Die Riemannsche ζ -Funktion ist durch

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert. Die Reihe konvergiert für $\operatorname{Re}(s) > 1$ und besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf \mathbb{C} mit einer Polstelle vom Grad 1 in $s = 1$. Für $\operatorname{Re}(s) > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Für $\operatorname{Re}(s) > 0$ werden wir

$$\int_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x|_p^s d^*x$$

berechnen. Wir können das Integrationsgebiet durch

$$\mathbb{Z}_p \setminus \{0\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} p^k \mathbb{Z}_p^*$$

in disjunkte Mengen zerlegen. Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x|_p^s d^*x &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{p^k \mathbb{Z}_p^*} |x|_p^s d^*x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (p^{-k})^s \int_{p^k \mathbb{Z}_p^*} d^*x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (p^{-k})^s = \sum_{k=0}^{\infty} (p^{-2})^k \\ &= \frac{1}{1 - p^{-s}}. \end{aligned}$$

Dies scheint zunächst „zufällig“ zu sein, aber wir werden später sehen, dass es hier einen tieferen Zusammenhang gibt.

4 Adele

Wir wollen alle Vervollständigungen von \mathbb{Q} gleichzeitig betrachten. Dafür betrachten wir den lokal kompakten Ring

$$\mathbb{A}_Q = \{(x_\infty, x_2, x_3, x_5 \dots) \mid x_\nu \in \mathbb{Q}_\nu \text{ und } x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ a.e.}\}$$

von Adelen.

Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die Produkttopologie auf $\prod_{i \in I} X_i$ ist die größte Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$, bezüglich der alle Projektionen stetig sind. Eine Basis für diese Topologie ist durch $\{\prod_{i \in I} O_i\}$ gegeben, wobei O_i für alle $i \in I$ offen ist und $O_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ gilt.

Mengen dieser Form heißen *offene Rechtecke*.

Wir benötigen folgenden klassischen Satz aus der Topologie.

Theorem 4.1 (Tychonoff). *Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Dann ist das Produkt der X_i genau dann kompakt, wenn alle X_i kompakt sind.*

Theorem 4.2. *Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Hausdorffräumen. Dann ist $\prod_{i \in I} X_i$ lokal kompakt genau dann wenn alle X_i lokal kompakt und alle bis auf endlich viele sogar kompakt sind.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Da die Projektionen $p_j: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ stetig sind, folgt, dass alle X_i lokal kompakt sind. Sei $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ und $C = (C_i)_{i \in I}$ eine kompakte Umgebung von x . C enthält eine Vereinigung offener Rechtecke. Da alle bis auf endlich viele Komponenten eines offenen Rechtecks der ganze Raum sind, gilt das gleich auch für C , das heißt

$$\pi_i(C) = X_i$$

für alle bis auf endlich viele $i \in I$. „ \Leftarrow “: Da mit $J = \{i \in I \mid x_i \text{ compact}\}$, die Menge $I \setminus J$ endlich ist, folgt mit

$$X = \prod_{i \in J} X_i \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i,$$

dass X als Produkt einer kompakten und einer lokal kompakten Menge lokal kompakt ist. \square

Beispiel 4.3. $\prod_{p < \infty} \mathbb{Q}_p$ ist nicht lokal kompakt und deswegen wissen wir nicht, ob es ein Haarmaß gibt.

Definition 4.4. Sei $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie lokal kompakter Hausdorffräume und für jedes $i \in I$ sei $K_i \subseteq X_i$ eine kompakte offene Menge (Diese muss es nicht geben, betrachte dafür zum Beispiel \mathbb{R}^n). Dann definieren wir das eingeschränkte Produkt

$$X = \widehat{\prod_{i \in I}^{K_i} X_i} := \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \mid x_i \in K_i \text{ für fast alle } i \in I\}.$$

Falls K_i aus dem Kontext klar ist, lassen wir diese in der Schreibweise weg. Ein eingeschränktes offenes Rechteck ist eine Menge der Form

$$\prod_{i \in I} U_i$$

wobei $U_i \subseteq X_i$ offen ist und $K_i = U_i$ für alle bis auf endlich viele $i \in I$ gilt. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt offen, wenn es eine Vereinigung solcher Mengen ist. Die dazugehörige Topologie heißt die *eingeschränkte Produkttopologie*.

Proposition 4.5. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie lokal kompakter Hausdorffräume. Für jedes $i \in I$ sei $K_i \subseteq X_i$ eine kompakte offene Menge. Dann ist

$$X = \widehat{\prod_{i \in I}^{K_i} X_i}$$

ausgestattet mit der eingeschränkten Produkttopologie ein lokal kompakter Hausdorffraum.

Beweis. Sei $x = (x_i)_{i \in I} \in X$. Definiere $J = \{i \in I \mid x_i \in K_i\}$. Dann ist $I \setminus J$ endlich. Für jedes $i \in I \setminus J$ wählen wir eine kompakte Umgebung U_i von x_i . Dann ist

$$\prod_{i \in I \setminus J} U_i \times \prod_{i \in J} K_i$$

eine kompakte Umgebung von x . Die Hausdorffeigenschaft verbleibt als Übung. \square

Definition 4.6. Der Ring

$$\mathbb{A}_f := \widehat{\prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

heißt der Ring der *endlichen Adele*. Nach dem letzten Satz ist \mathbb{A}_f ein lokal kompakter Hausdorffraum.

Proposition 4.7. *Der Ring \mathbb{A}_f ist ein topologischer Raum, das heißt, die Ringverknüpfungen sind stetig.*

Proposition 4.8. *Die Menge*

$$\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{A}_f$$

ist kompakt und offen.

Sei $N \in \mathbb{Z}$ sowie $N > 0$. Dann gilt

$$N = \prod_{p < \infty} p^{\nu_p}$$

und $\nu_p = 0$ für alle bis auf endlich viele p . Weiterhin haben wir, dass

$$N\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p < \infty} p^{\nu_p} \mathbb{Z}_p$$

eine kompakte offene Umgebung der $0 \in \mathbb{A}_f$. Eine beliebige offene Umgebung der $0 \in \mathbb{A}_f$ ist eine Vereinigung von Mengen der Form

$$\prod_{i \in I \setminus J} U_i \times \prod_{j \in J} K_j$$

wobei $I \setminus J$ endlich ist und die U_i für $i \in I \setminus J$ offen sind. In \mathbb{Q}_p gilt $K(0, p^m) = p^{-m} \mathbb{Z}_p$ für alle $m \in \mathbb{Z}$.

Proposition 4.9. *Jede offene Umgebung der $0 \in \mathbb{A}_f$ enthält eine Menge der Form $N\hat{\mathbb{Z}}$ für ein $N \in \mathbb{Z}$ mit $N > 0$.*

Proposition 4.10. *Die Einbettung $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{A}_f$ hat dichtes Bild.*

Definition 4.11. Der Ring $\mathbb{A} := \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f$ heißt *Ring der Adele*.

Bemerkung 4.12. \mathbb{A} ist ein lokal kompakter Hausdorffraum.

Proposition 4.13. \mathbb{A} ist ein topologischer Ring. Die Abbildung

$$\begin{aligned} Q &\rightarrow \mathbb{A} \\ a &\mapsto (a, a, \dots) \end{aligned}$$

liefert eine Einbettung von \mathbb{Q} nach \mathbb{A} .

Proposition 4.14. \mathbb{Q} ist eine diskrete abgeschlossene Untergruppe von \mathbb{A} .

Beweis. Wir müssen zeigen, dass \mathbb{A} die diskrete Topologie auf \mathbb{Q} erzeugt, das heißt für jedes $a \in \mathbb{Q}$ existiert eine offene Umgebung U mit $\mathbb{Q} \cap U = \{a\}$. Aufgrund der Stetigkeit der Addition können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a = 0$ annehmen. Wähle

$$U := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p.$$

Für $r \in \mathbb{Q} \cap U$ gilt

$$|r|_p \leq 1$$

für alle $p < \infty$. Also folgt $r \in \mathbb{Z}$ und somit $r = 0$.

Es bleibt zu zeigen, dass \mathbb{Q} abgeschlossen in \mathbb{A} ist. Sei dazu $a \in \overline{\mathbb{Q}}$. Wir nehmen $a \notin \mathbb{Q}$ an. Es existiert eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{A}$ mit $U \cap \mathbb{Q} = \{0\}$. Wähle eine offene Umgebung V von $0 \in \mathbb{A}$, die $V + V \subseteq U$ und $-V = V$ erfüllt. Die Stetigkeit der Addition impliziert, dass es eine offene Umgebung W von 0 gibt, die $W + W \subseteq U$ erfüllt. Wenn man $V = W \cap (-W)$ setzt, erhält man die gewünschte Menge. Dann gilt $(a + V) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Sei $x \in (a + V) \cap \mathbb{Q}$. Dann $x \neq a$. Da \mathbb{A} Hausdorff ist, existiert eine offene Umgebung W von a mit $x \notin W$. Dann ist $(a + V) \cap W$ eine offene Umgebung von a . Wähle $y \in (a + V) \cap W \cap \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$x - y \in ((a + V) \cap \mathbb{Q}) - ((a + V) \cap W \cap \mathbb{Q}).$$

Dies impliziert $x - y \in (V - V) \cap \mathbb{Q}$ also $x - y \in (U \cap \mathbb{Q}) = \{0\}$. Aber $x \neq y$ ist ein Widerspruch. \square

Wir betrachten die kanonische Projektion

$$\pi: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}/\mathbb{Q}$$

und statt \mathbb{A}/\mathbb{Q} mit der Quotiententopologie aus, das heißt $U \subseteq \mathbb{A}/\mathbb{Q}$ ist genau dann offen wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in \mathbb{A} ist. Insbesondere ist π stetig.

Proposition 4.15. *Die kanonische Projektion ist offen.*

Beweis. Sei $U \subseteq \mathbb{A}$ offen. Wir müssen zeigen, dass $\pi^{-1}(\pi(U))$ offen ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(U)) &= \{a \in \mathbb{A} \mid \pi(a) \in \pi(U)\} \\ &= \bigcup_{a \in U} (a + \mathbb{Q}) \\ &= \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} (x + U),\end{aligned}$$

somit ist die Offenheit gezeigt. \square

Proposition 4.16. *A/\mathbb{Q} ist ein kompakter Hausdorffraum.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass A/\mathbb{Q} Hausdorff ist. Sei dafür $a + \mathbb{Q} \neq b + \mathbb{Q}$. Dann gilt $a - b \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$, welches eine offene Menge ist. Dann existiert eine offene symmetrische Umgebung der 0 mit

$$((a - b) + U + U) \cap \mathbb{Q} = \emptyset.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}((a + U) - (b + U)) \cap \mathbb{Q} &= \emptyset \\ ((a - b) + U) \cap (Q + U) &= \emptyset \\ (a + U) \cap (b + U + \mathbb{Q}) &= \emptyset \\ (a + U + \mathbb{Q}) \cap (b + U + \mathbb{Q}) &= \emptyset.\end{aligned}$$

Daher sind $(a + U)$ und $(b + U)$ disjunkt in A/\mathbb{Q} sind. Es bleibt die Kompaktheit zu zeigen. Dafür zeigen wir, dass es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{A}$ mit $\pi(K) = \mathbb{A}$ gibt. Sei $K := [0, 1] \times \hat{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{A}$. Wir zeigen, dass jede Restklasse in \mathbb{A}/\mathbb{Q} einen Repräsentanten in K besitzt. Sei $a = (a_\nu)_{\nu \leq \infty} \in \mathbb{A}$. Für $p < \infty$ schreiben wir

$$a_p = \sum_{n=n_p} a_p(n) p^n$$

Dann gilt $n_p = 0$ für fast alle p . Definiere

$$b := a - \sum_{p < \infty} \sum_{n=n_p}^{-1} a_p(n) p^n,$$

wobei der zweite Summand ein Element von $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}$ ist. Dann gilt $b \in \mathbb{R} \times \mathbb{A}$, da

$$\left| a_p - \sum_{q < \infty} \sum_{n=n_q}^{-1} a_q(n) q^n \right|_p$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_p(n) p^n - \sum_{\infty > q \neq p} \sum_{n=n_q} a_q(n) q^n \right|_p \\
&= \max \left(\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_p(n) p^n \right|_p, \left| \sum_{\infty > q \neq p} \sum_{n=n_q}^{-1} a_q(n) q^n \right|_p \right) \leq 1.
\end{aligned}$$

In dem wir b um eine geeignete ganze Zahlen verschieben, erhalten wir einen Repräsentanten in K . \square

Da \mathbb{A} eine lokal kompakte Hausdorffgruppe ist, können wir das Haarmaß auf A betrachten, sodass $[0, 1] \times \hat{\mathbb{Z}}$ Maß 1 hat.

Definition 4.17. Eine *einfache Funktion* auf \mathbb{A} ist eine Funktion der Form

$$f = \prod_{\nu \leq \infty} f_\nu,$$

wobei $f_\nu \in C_c(\mathbb{Q}_\nu)$ und $f_p = \chi_{\mathbb{Z}_p}$ für fast alle $p < \infty$.

Bemerkung 4.18. Für $x = (x_\nu)_{\nu \leq \infty} \in \mathbb{A}$ gilt

$$f(x) = \prod_{\nu \leq \infty} f_\nu(x),$$

wobei nur endlich viele Faktoren ungleich 1 sind. Die einfachen Funktionen auf \mathbb{A} sind stetig und haben kompakten Träger (Notation $f \in C_c(\mathbb{A})$).

Proposition 4.19. Sei $f = \prod_{\nu \leq \infty} f_\nu$ eine einfache Funktion auf \mathbb{A} . Dann gilt

$$\int_A f(x) \, dx = \prod_{\nu \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_p} f_\nu(x) \, dx_\nu.$$

Beweis. Betrachte die endliche Menge $I := \{p < \infty \mid f_p \neq \chi_{\mathbb{Z}_p}\} \cup \{\infty\}$. Definiere $\mathbb{A}_I = \prod_{\nu \in I} \mathbb{Q}_\nu$. Dann gilt $\mathbb{A} = \mathbb{A}_I \times \mathbb{A}^I$, wobei

$$\mathbb{A}^I = \prod_{p \notin I}^{\hat{\mathbb{Z}}_p} \mathbb{Q}_p$$

ist. \mathbb{A}_I ist als endliches Produkt lokal kompakter Hausdorffräume wieder ein lokal kompakter Hausdorffraum. Das Haarmaß auf \mathbb{A}_I ist durch das Produkt der Haarmaße auf den Faktoren gegeben und der Satz von Fubini gilt. Wir schreiben

$$f = \prod_{\nu \in I} f_\nu \cdot \prod_{p \notin I} f_p.$$

Mit Fubini gilt somit

$$\begin{aligned}\int_A f(x) \, dx &= \int_{\mathbb{A}_I} f_I(x) \, dx \int_{\mathbb{A}^I} f^I(x) \, dx \\ &= \prod_{\nu \in I} \int_{\mathbb{Q}_\nu} f_\nu(x) \, dx \\ &= \prod_{\nu \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_\nu} f_\nu(x) \, dx,\end{aligned}$$

was zu zeigen war. \square

Sei $x \in \mathbb{Z}_p$. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{Z}, n > 0$ genau ein $\alpha_n \in \mathbb{Z}, 0 \leq \alpha_n < p^n$ mit

$$\begin{aligned}|x - \alpha_n|_p &\leq p^{-n} \\ \Leftrightarrow \alpha_n &\in x + K(0, p^{-n}) \\ \Leftrightarrow \alpha_n &\in x + p^n \mathbb{Z}_p.\end{aligned}$$

Theorem 4.20. Sei nun $x \in \hat{\mathbb{Z}} = \prod_{\nu \leq \infty} \mathbb{Z}_p$. Dann existiert für jedes $N \in \mathbb{Z}, N > 0$ existiert ein eindeutiges $\alpha_N \in \mathbb{Z}, 0 \leq \alpha_N < N$ mit

$$\alpha_N \in x + N\hat{\mathbb{Z}}.$$

Beweis. Sei $x = (x_p)_{p \leq \infty}$ mit $x_p = \sum_{n=0}^{\infty} x_p(n)p^n$ sowie $N = \prod_{p \leq \infty} p^{\nu_p}$. Dann gilt $\nu_p = 0$ für fast alle p und $N\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p < \infty} p^{\nu_p} \mathbb{Z}_p$. Der Chinesische Restsatz existiert ein eindeutiges $\alpha_N \in \mathbb{Z}, 0 \leq \alpha_N < N$ mit

$$\alpha_N = \sum_{n=0}^{\nu_p-1} x_p(n)p^n \quad \text{mod } p^{\nu_p}$$

für alle $\nu_p \neq 0$. Für dieses α_N gilt $\alpha_N \in x + N\hat{\mathbb{Z}}$. Diese Approximation werden für wachsendes N immer besser. Insbesondere gilt $\alpha_M = \alpha_N \pmod N$ für alle Vielfachen M von N . Also definiert x eine Folge ganzer Zahlen $(\alpha_N)_{N>0}$ mit $0 \leq \alpha_N < N$ sowie $\alpha_M = \alpha_N \pmod N$ falls $N \mid M$. \square

Umgekehrt definiert eine solche Folge ein Element in $\hat{\mathbb{Z}}$.

Definition 4.21. Eine Folge von Restklassen $(\alpha_N)_{N>0}$ mit $\alpha_N \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, die die Kompatibilitätsbedingung $\alpha_M = \alpha_N \pmod N$ für $N \mid M$ erfüllt, heißt *kompatibles System*. Der projektive Limes

$$\varprojlim \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{(\alpha_N) \in \prod_{N>0} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \mid (\alpha_N) \text{ ist kompatibel}\}$$

ist auf natürliche Art und Weise ein Ring. Wir können diesen mit der Topologie des projektiven Limes ausstatten.

Theorem 4.22. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{Z}} &\mapsto \varprojlim \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ x &\mapsto (\alpha_N \bmod N)\end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus topologischer Ringe.

Die Abbildung

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{Z}} &\rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ x &\mapsto \alpha_N \bmod N\end{aligned}$$

ist surjektiv mit Kern $N\hat{\mathbb{Z}}$. Also folgt

$$\hat{\mathbb{Z}}/N\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.$$

5 Idele

Definition 5.1. Die Einheitengruppe \mathbb{A}^* von \mathbb{A} heißt Gruppe der *Idele*. Es gilt

$$\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f, \mathbb{A}_f = \prod_{p < \infty}^{\wedge} \mathbb{Q}_p$$

$$\mathbb{A}^* = \mathbb{R}^* \times \mathbb{A}_f^*, \mathbb{A}_f^* = \{(a_p)_{p < \infty} \mid a_p \in \mathbb{Q}_p^* \forall p, a_p \in \mathbb{Z}_p^* \text{ a.e. } p\} = \prod_{p < \infty}^{\wedge} \mathbb{Q}_p^*.$$

Wir statten \mathbb{A}_f^* mit der eingeschränkten Produkttopologie aus. $\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p$ ist offen und kompakt in \mathbb{A}_f , $\hat{\mathbb{Z}}^* = \prod_{p < \infty} \mathbb{Z}_p^*$ ist offen und kompakt in \mathbb{A}_f^* bezüglich der eingeschränkten Produkttopologie. $\hat{\mathbb{Z}}^*$ ist nicht offen bezüglich der Topologie von \mathbb{A}_f^* , die von \mathbb{A}_f induziert wird. Die eingeschränkte Produkttopologie auf \mathbb{A}_f^* ist echt feiner als die Topologie, die von \mathbb{A}_f induziert wird. Wir statten $\mathbb{A}^* = \mathbb{R}^* \times \mathbb{A}_f^*$ mit der Produkttopologie aus.

Theorem 5.2. *Dann sind (\mathbb{A}_f^*, \cdot) und (\mathbb{A}^*, \cdot) lokal kompakte Hausdorffgruppen.*

Wir normieren das Haarmaß auf \mathbb{A}_f^* sodass $\hat{\mathbb{Z}}^*$ Maß 1 hat und schreiben d^*x_f für dieses Maß. Auf \mathbb{R}^* ist $\frac{dt}{|t|}$ ein Haarmaß. Wir statten \mathbb{A}^* mit dem Produktmaß aus, also mit dem Haarmaß

$$d^*x = \frac{dt}{|t|} \cdot d^*x_f.$$

Definition 5.3. Eine *einfache Funktion* auf \mathbb{A}^* ist eine Funktion der Form

$$f = \prod_{\nu \leq \infty} f_\nu$$

mit $f_\nu \in C_c(\mathbb{Q}_\nu^*)$ für alle $\nu \leq \infty$ und $f_p = \chi_{\mathbb{Z}_p^*}$ für fast alle $p < \infty$. Für eine solche Funktion definieren wir das Integral über

$$\int_{\mathbb{A}^*} f(x) d^*x = \prod_{\nu \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_\nu^*} f_\nu(x) dx.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}^* &\rightarrow \mathbb{A}^* \\ x &\mapsto (x, x, \dots)\end{aligned}$$

ist eine Einbettung von \mathbb{Q}^* nach \mathbb{A}^* .

Proposition 5.4. \mathbb{Q}^* ist eine diskrete und abgeschlossene Untergruppe von \mathbb{A}^* .

Beweis. Für $a = (a_\nu)_{\nu \leq \infty} \in \mathbb{A}^*$ definieren wir die Norm

$$|a| := \prod_{\nu \leq \infty} |a_\nu|_\nu,$$

wobei nur endlich viele Faktoren ungleich 1 sind. Die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^* &\rightarrow \mathbb{R}_{>0}^* \\ a &\mapsto |a|\end{aligned}$$

ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Der Kern

$$A' := \{a \in \mathbb{A}^* \mid |a| = 1\}$$

ist eine abgeschlossene Untergruppe von \mathbb{A}^* . Für $x \in \mathbb{Q}^*$ gilt

$$\prod_{\nu \leq \infty} |x|_\nu = 1.$$

Also ist \mathbb{Q}^* eine diskrete abgeschlossene Untergruppe von A' . □

Der Quotient A'/\mathbb{Q}^* ausgestattet mit der Quotiententopologie ist eine lokal kompakte Hausdorffgruppe. Wir definieren

$$\begin{aligned}\hat{\mathbb{Z}}^* &\rightarrow A' \\ (x_p)_{p < \infty} &\mapsto (1, x_2, x_3, \dots).\end{aligned}$$

Proposition 5.5. Die kanonische Abbildung $f: \hat{\mathbb{Z}}^* \rightarrow A'/\mathbb{Q}^*$ ist ein Isomorphismus topologischer Gruppen.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass f injektiv ist. Sei dafür $f((x_p)_{p < \infty}) = f((y_p)_{p < \infty})$. Dann gilt

$$(1, x_2, x_3, \dots) = (r(1, y_2, y_3, \dots))$$

für ein $r \in \mathbb{Q}^*$. Die erste Komponente impliziert aber $r = 1$. Also folgt die Injektivität. Für die Surjektivität betrachten wir $a = (a_\infty, a_2, a_3, \dots) \in \mathbb{A}'$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 &= |a_\infty|_\infty \prod_{p < \infty} |a_p|_p \\ &= a_\infty \frac{|a_\infty|_\infty}{a_\infty} \prod_{p < \infty} |a_p|_p \\ &=: a_\infty \cdot r. \end{aligned}$$

Definiere $b = (r, a_2, a_3, \dots)$. Dann gilt $b \in \hat{\mathbb{Z}}^*$, da

$$\begin{aligned} |ra_p|_p &= \left| \frac{|a_\infty|_\infty}{a_\infty} \prod_{q < \infty} |a_q|_q a_p \right|_p \\ &= \left| |a_p|_p a_p \right|_p \left| \prod_{p \neq q < \infty} |a_q|_q \right|_p = 1 \end{aligned}$$

sowie $f(b) = ra$. Die Stetigkeit verbleibt als Übungsaufgabe. □

Korollar 5.6. \mathbb{A}'/\mathbb{Q}^* ist kompakt.

Der Isomorphismus $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ impliziert

$$\hat{\mathbb{Z}}^* = \varprojlim (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* = \mathbb{A}'/\mathbb{Q}^*.$$

6 Charaktere

Definition 6.1. Sei G eine topologische Gruppe. Ein *Quasicharakter* von G ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow \mathbb{C}^*$. Ein *Charakter* von G ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow T := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Proposition 6.2. Sei G eine kompakte Gruppe und $f: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ ein Quasicharakter. Dann ist f ein Charakter.

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \mathbb{R}_{>0}^* \\ x &\mapsto |f(x)| \end{aligned}$$

ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Daher ist das Bild eine kompakte Untergruppe von $\mathbb{R}_{>0}^*$, nämlich $\{1\}$. \square

Definition 6.3. Eine lokal kompakte Hausdorffgruppe heißt *total unzusammenhängend*, falls jede offene Umgebung der 1 eine offene Untergruppe enthält.

Beispiel 6.4. Zum Beispiel sind

- i) $(\mathbb{Q}_p, +), (\mathbb{Q}_p^*, \cdot)$
- ii) $(\mathbb{Z}_p, +), (\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$
- iii) $(\mathbb{A}_f, +), (\mathbb{A}_f^*, \cdot)$
- iv) $(\hat{\mathbb{Z}}, +), (\hat{\mathbb{Z}}^*, \cdot)$

solche Gruppen.

Proposition 6.5. Sei G eine total unzusammenhängende lokal kompakte Hausdorffgruppe und $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ ein Quasicharakter. Dann ist $\ker(\chi)$ offen.

Beweis. Sei $0 < \varepsilon < 1$. Dann ist $V_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > \varepsilon\}$ eine offene Umgebung von $1 \in \mathbb{C}^*$. Also ist $\chi^{-1}(V_\varepsilon)$ offen in G und enthält somit eine offene Untergruppe $H \subseteq G$. Das Bild $\chi(H)$ ist eine Untergruppe von \mathbb{C}^* in V_ε . Für $z \in \mathbb{C}$ ungleich 1 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ sodass die Potenz z^n außerhalb von V_ε liegt. Also folgt $\chi(H) = 1$. Sei nun $x \in \ker(\chi)$. Dann ist xH eine offene Umgebung von x in $\ker(\chi)$. \square

Definition 6.6. Sei G eine topologische Gruppe. Dann ist die Menge der Charaktere auf G eine Gruppe bezüglich punktweiser Multiplikation. Dieser Gruppe heißt die *duale Gruppe von G* , wir bezeichnen sie mit \hat{G} . Wir statten \hat{G} mit kompakt-offenen Topologie aus. Eine Subbasis dieser Topologie bilden die Mengen der Form

$$S(K, U) := \{\chi \in C(G, T) \mid \chi(K) \subseteq U\}$$

wobei $K \subseteq G$ kompakt und $U \subseteq T$ offen ist. Endliche Schnitte dieser Mengen bilden eine Basis der Topologie von \hat{G} .

Proposition 6.7. *Die duale Gruppe \hat{G} ist eine abelsche Hausdorffgruppe.*

Beweis. Sei $f \in \hat{G}, \varepsilon \neq f$. Dann existiert ein $x \in G$ mit

$$f(x) \neq 1_\varepsilon(x).$$

Da T Hausdorff ist, können wir offene Mengen $U, W \subseteq T$ mit $f(x) \in U, 1 \in W$ sowie $U \cap W = \emptyset$ wählen. Definiere $K = \{x\}$. Dann gilt $f \in S(K, U), \varepsilon \in S(K, W)$ sowie $S(K, U) \cap S(K, W) = \emptyset$. \square

Proposition 6.8. *Sei G eine topologische Gruppe.*

- i) Falls G endlich ist, so ist \hat{G} ebenfalls endlich,*
- ii) Falls G diskret ist, so ist \hat{G} kompakt.*

Proposition 6.9. *Sei G eine Hausdorffgruppe.*

- i) Falls G lokal kompakt ist, so ist \hat{G} ebenfalls lokal kompakt.*
- ii) Falls G kompakt ist, so ist \hat{G} diskret.*

Beispiel 6.10. Wir betrachten einige Beispiele von Charakteren.

- i) Die Abbildung

$$e_\infty: \mathbb{R} \rightarrow T$$

$$x \mapsto e^{2\pi i x} =: e(x)$$

ist ein Charakter von \mathbb{R} .

Proposition 6.11. *Es gilt $\chi(x) = e^{2\pi i ax}$. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \hat{\mathbb{R}} \\ a &\mapsto (x \mapsto e_{\infty}(ax)) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus topologischer Gruppen.