TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik

Automorphe Formen

Wintersemester 2018/2019

Vorlesung gehalten von Prof. Nils Scheithauer

Typeset in LaTeX by Jonas Lenz
Fehler können an `jlenz@mathematik.tu-darmstadt.de` gemeldet werden

Version vom 1. November 2018

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Sei G eine Gruppe, die auf einem topologischen Raum X operiert. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ heißt *automorphe Form auf* X, wenn

$$f(gx) = \Psi(g, x) f(x)$$

für alle $g \in G, x \in X$ für eine geeignete Funktion $\Psi\colon G \times X \to \mathbb{C}$ gilt. Häufig werden noch weitere Bedingungen zum Beispiel an das Wachstum gefordert. Einer automorphen Form kann man eine automorphe Darstellung zuordnen und dieser wiederum eine L-Reihe. Es wird vermutet, dass diese automorphen L-Reihen dieselben sind, die man in der arithmetischen algebraischen Geometrie findet (Langlands-Programm). Ein Spezialfall dieser Korrespondenz ist der Modularitätssatz:

Satz 0.1 (Breuil, Conrad, Diamond, Taylor (2001), Wiles (1995) vermutet von Taniyama und Shimura (1958))**.** *Sei E eine rationale elliptische Kurve mit Führer N. Dann gibt es eine Neuform $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ mit*

$$L_f = L_E.$$

In dieser Vorlesung betrachten wir automorphe Formen auf $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ für $n = 1$ und wenn es die Zeit erlaubt für $n = 2$.

Literatur

Goldfeld, Hundley: Automorphic representations and L-functions for the general linear group, Cambridge University Press.
Skript von Herrn Brunier

1 Absolutbeträge

Definition 1.1. Sei K ein Körper. Ein *Absolutbetrag auf* K ist eine Abbildung $|\cdot| : K \to \mathbb{R}$ mit

i) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $|xy| = |x|\,|y|$,

iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$

für alle $x, y \in K$. Gilt zusätzlich

$$|x + y| \leq \max(|x|, |y|),$$

so heißt $|\cdot|$ *nicht-archimedisch*. Ist $|\cdot|$ ein Betrag auf K, so definiert

$$d(x, y) := |x - y|$$

eine Metrik auf K. Zwei Absolutbeträge heißen *äquivalent*, wenn sie dieselbe Topologie auf K erzeugen.

Satz 1.2. *Seien $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ zwei Absolutbeträge auf K. Dann sind äquivalent*

i) $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ sind äquivalent,

ii) es existiert $c > 0$ mit $|x|_1 = |x|_2^c$ für alle $x \in K$.

Satz 1.3. *Sei $|\cdot|$ ein Absolutbetrag auf K. Dann sind die folgenden Abbildungen stetig:*

i) $K \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$,

ii) $K \to K, x \mapsto -x$,

iii) $K \times K \to K, (x, y) \mapsto x + y$, *iv)* $K^* \to K^*, x \mapsto x^{-1}$,

v) $K \times K \to K, (x, y) \mapsto xy$.

Satz 1.4. *Sei K ein Körper mit Absolutbetrag $|\cdot|$. Dann gibt es eine Körpererweiterung $\hat{K}/K$ und eine Fortsetzung von $|\cdot|$ auf $\hat{K}$, sodass K dicht in $\hat{K}$ und $\hat{K}$ vollständig bezüglich $|\cdot|$ ist. Ist $\tilde{K}$ ein weiterer Erweiterungskörper von K mit obigen Eigenschaften, so existiert genau ein Körperisomorphismus $\tilde{K} \to \hat{K}$, der auf K die Identität ist und die Absolutbeträge ineinander überführt.*

Beweis. Sei $K' \coloneqq \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folge bezüglich } |\cdot|\}$ die Menge der Cauchy-Folgen in K. Dann ist K' ein kommutativert Ring mit 1 und $N \coloneqq \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Nullfolge}\}$ ein maximales Ideal. Somit ist $\hat{K} = K'/N$ ein Körper. Die Abbildung

$$\begin{aligned} K &\to \hat{K} \\ x &\mapsto (x) + N \end{aligned}$$

ist ein Körperhomomorphismus und somit injektiv. Der Absolutbetrag auf $\hat{K}$ wird definiert durch

$$|(x_n)| = \lim_{n\to\infty} |x_n|$$

wobei $|x_n|$ aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichung eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Dieser ist wohldefiniert, $\hat{K}$ ist vollständig und K ist dicht in $\hat{K}$. Die Einbettung $K \hookrightarrow \hat{K}$ ist auf einer dichten Teilmenge von $\tilde{K}$ definiert. Da die Einbettung die Absolutbeträge erhält, ist sie stetig und lässt sich somit eindeutig zu einer stetigen Abbildung $\tilde{K} \to \hat{K}$ fortsetzen. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus, der die Absolutbeträge erhält. Die Eindeutigkeit ist aus der Konstruktion klar. □

Bemerkung 1.5. *Im Gegensatz ist der algebraische Abschluss nicht eindeutig bis auf* eindeutigen *Isomorphismus.*

2 Die p-adischen Zahlen

Für $x \in \mathbb{Q}$ definieren wir

$$|x|_\infty := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Dann ist $|\cdot|_\infty$ ein Absolutbetrag.

Sei $p > 0$ eine Primzahl. Wir schreiben $x \in \mathbb{Q}^*$ als $x = p^n \frac{a}{b}$ mit $p \nmid ab$ und definieren

$$|x|_p := p^{-n}$$

und setze $|0|_p = 0$. Dann ist der p-adische Betrag $|\cdot|_p$ ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$. Es gilt

$$|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p).$$

Ist $|x|_p \neq |y|_p$ so gilt Gleichheit.

Beispiel 2.1. i) Die Folge $1, p, p^2, \ldots$ konvergiert p-adisch gegen 0, da $d_p(0, p^n) = p^{-n} \to 0$.

ii) Die Folge $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \ldots$ ist keine Cauchy-Folge bezüglich $|\cdot|_p$.

Theorem 2.2 (Ostrowski)**.** *Ein Absolutbetrag auf* $\mathbb{Q}$ *ist äquivalent zu* $|\cdot|_\infty$ *oder zu einem* $|\cdot|_p$ *für eine Primzahl* p*.*

Satz 2.3 (Produktformel)**.** *Sei* $x \in \mathbb{Q}^*$*. Dann gilt*

$$|x|_\infty \prod_p |x|_p = 1.$$

Bemerkung 2.4. *Die Primzahlen* $2, 3, \ldots$ *werden als* endliche *Primzahlen bezeichnet und* ∞ *als* unendliche *Primzahl. Wir bezeichnen endliche Primzahlen meist mit* p *und beliebige Primzahlen mit* ν*.*

Definition 2.5. Wir fixieren eine endliche Primzahl p und definieren

$$K(x,r) \coloneqq \{y \in \mathbb{Q} \mid d_p(x,y) < r\},$$
$$\overline{K}(x,r) \coloneqq \{y \in \mathbb{Q} \mid d_p(x,y) \leq r\}$$

als offener beziehungsweise abgeschlossener Ball bezüglich $|\cdot|_p$ um x mit Radius r.

Satz 2.6. *Sei $x \in \mathbb{Q}$ und $r \in \mathbb{R}, r > 0$.*

(i) Für $x' \in K(x,r)$ gilt

$$K(x',r) = K(x,r).$$

(ii) Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt

$$K(x,r) = \overline{K}(x,r-\varepsilon),$$
$$\overline{K}(x,r) = K(x,r+\varepsilon).$$

(iii) Für $r \in \mathbb{R} \setminus \{p^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$K(x,r) = \overline{K}(x,r).$$

(iv) Sei $r = p^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$K(x,p^n) = \overline{K}(x,p^{n-1}).$$

Außerdem gibt es $x_1, \dots, x_{p-1} \in \overline{K}(x,p^n)$ mit

$$\overline{K}(x,p^n) = \overline{K}(x,p^{n-1}) \cup \overline{K}(x_1,p^{n-1}) \cup \dots \cup \overline{K}(x_{p-1},p^{n-1})$$

wobei die Vereinigungen disjunkt sind.

Beweis. (i) Sei $x' \in K(x,r)$ beliebig. Dann gilt für jedes $y \in K(x,r)$, dass

$$\begin{aligned}|x'-y|_p &= |(x'-x) * (x-y)|_p \\ &\leq \max(|x'-x|_p, |x-y|_p) < r.\end{aligned}$$

Also folgt $y \in K(x',r)$ und somit $K(x,r) \subseteq K(x',r)$. Die umgekehrte Inklusion folgt analog.

(ii) and (iii) Die Distanzfunktion $d_p(x,y) = |x-y|_p$ nimmt höchstens abzählbar viele Werte an, nämlich p^n für ein $n \in \mathbb{Z}$ oder 0. Also gilt für $r > 0$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, dass

$$|x-y|_p < r \Leftrightarrow |x-y|_p \leq r - \varepsilon,$$
$$|x-y|_p \leq r \Leftrightarrow |x-y|_p < r + \varepsilon.$$

Falls r nicht von der Form p^n für ein $n \in \mathbb{Z}$ ist, dann gilt

$$|x-y|_p < r \Leftrightarrow |x-y|_p \leq r.$$

Dies beweist (ii) und (iii).

(iv) Nach Definition der Norm gilt

$$|x-y|_p < p^n \Leftrightarrow |x-y|_p \leq p^{n-1}.$$

Die restliche Aussage verbleibt als Übung. □

Satz 2.7. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ eine p-adische Cauchyfolge, die nicht p-adisch gegen 0 konvergiert. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n|_p$ konstant für alle $n > N$ ist.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich $|\cdot|_p$ also folgt, dass $(|x_n|_p)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist. Daher ist $(|x_n|_p)$ konvergent in $\mathbb{R}$. Da es keine Nullfolge ist, muss sie stationär werden. □

Definition 2.8. Wir definieren $\mathbb{Q}_p$ als die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_p$. Die obigen Eigenschaft von $|\cdot|_p$ setzen sich auf $\mathbb{Q}_p$ fort.

Beispiel 2.9. Sei $x \in \mathbb{Q}_p^*$. Dann gilt $|x|_p = p^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.

Als nächstes beweisen wir den Satz von Bolzano-Weierstraß für p-adische Zahlen.

Theorem 2.10. *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{Q}_\nu$ hat einen Häufungspunkt.*

Beweis. Für $\nu = \infty$ ist dies die Aussage des Satzes von Bolzano-Weierstraß. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}_p$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{Q}_p$. Nach Definition ist jedes x_n eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_p$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir $x_n' \in \mathbb{Q}$ sodass

$$|x_n - x_n'| < p^{-n}$$

gilt, dies geht aufgrund der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}_p$. Die Folge $(x'_n) \subseteq \mathbb{Q}$ ist beschränkt in $|\cdot|_p$. Wir werden zeigen, dass (x'_n) eine Teilfolge besitzt, die Cauchy ist. Diese Teilfolge definiert eine Zahl $x' \in \mathbb{Q}_p$. Die zugehörige Teilfolge von (x_n) wird ebenfalls gegen x konvergieren. Wir konstruieren die Cauchy Teilfolge von (x'_n) folgendermaßen. Da (x'_n) beschränkt ist, existieren $y \in \mathbb{Q}$ und $m \in \mathbb{Z}$ mit $(x'_n) \subseteq \overline{K}(y, p^m)$. Dieser zerfällt in endlich viele (p Stück) disjunkte abgeschlossene Bälle mit Radius p^{m-1}. Mindestens einer dieser Bälle muss unendlich viele Folgenglieder (x'_n) enthalten. Beginnend mit x_1 entfernen wir alle Elemente der Folge, die nicht in diesem Ball liegen. Dieser Ball zerfällt erneut und so weiter. Dadurch erhalten wir eine Teilfolge (x''_n) von (x'_n) mit der Eigenschaft, dass alle x''_i für alle $i \geq N$ in einem abgeschlossen Ball mit Radius p^{m-N} liegen. Damit folgt

$$\left|x''_i - x''_j\right|_p \leq p^{m-N}$$

für alle $i, j \geq N$. Somit wir haben unsere gewünschte Cauchyfolge konstruiert. □

Korollar 2.11. *Eine Menge ist genau dann in $\mathbb{Q}_p$ kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Definition 2.12. Wir definieren die *p-adischen ganzen Zahlen* durch

$$\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}.$$

Dies ist ein Unterring von $\mathbb{Q}_p$.

Satz 2.13. *Die p-adischen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ sind beschränkt, abgeschlossen und offen. Insbesondere ist $\mathbb{Z}_p$ kompakt.*

Satz 2.14. *Sei $x \in \mathbb{Z}_p$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann existiert ein eindeutiges $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq \alpha < p^n$ und*

$$|x - \alpha|_p \leq p^{-n}.$$

Beweis. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{Q}_p$ ist, existiert $t \in \mathbb{Q}$ mit $|t - x|_p \leq p^{-n}$. Dann gilt

$$|t|_p = |(t - x) + x|_p \leq \max(|t - x|_p, |x|_p) \leq 1,$$

das heißt $t \in \mathbb{Z}_p$ und $t = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}, (a, b) = 1$ und $(p, b) = 1$. Wähle $b' \in \mathbb{Z}$ mit $bb' = 1 \mod p^n$. Dann gilt

$$|t - ab'|_p = \left|\frac{a}{b} - ab'\right|_p$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\frac{a}{b}(1-bb')\right|_p \\
&= \left|\frac{a}{b}\right|_p |1-bb'|_p .
\end{aligned}
$$

Für $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha = ab' \mod p^n$ und $0 \leq \alpha < p^n$ gilt

$$|t-\alpha|_p \leq p^{-n},$$

sowie

$$
\begin{aligned}
|x-\alpha|_p &= |(x-t)+(t-\alpha)|_p \\
&\leq \max(|x-t|_p, |t-\alpha|_p) \leq p^{-n}.
\end{aligned}
$$

Sei β ein anderes solches Element. Dann gilt $|\alpha-\beta| \leq p^{-n}$, was $p^n \mid (\alpha-\beta)$ und somit $\alpha = \beta$ impliziert. $\square$

Korollar 2.15. *Es gilt $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_p$, insbesondere für jedes $x \in \mathbb{Z}_p$ existiert eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ mit $0 \leq \alpha_n < p^n$, $\alpha_n = \alpha_{n-1} \mod p^{n-1}$ und $|x-\alpha_n| \leq p^{-n}$. Darüber hinaus ist diese Folge eindeutig.*

Sei umgekehrt $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ eine Folge mit $0 \leq \alpha_n < p^n$ sowie $\alpha_n = \alpha_{n-1} \mod p^{n-1}$. Dann ist $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert gegen ein $x \in \mathbb{Z}_p$.

Definition 2.16. Eine Folge von Restklassen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wobei $\alpha_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ist, die $\alpha_n = \alpha_{n-1} \mod p^{n-1}$ erfüllt, heißt *kompatibles System*. Die Menge aller kompatiblen System heißt *projektiver Limes* des Systems. Der projektive Limes $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ist ein Ring bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation.

Theorem 2.17. *Die Abbildung*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z}_p &\to \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\
x &\mapsto (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}
\end{aligned}
$$

ist ein Ringisomorphismus. Weiterhin ist die Abbildung

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z}_p &\to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\
x &\mapsto \alpha_n
\end{aligned}
$$

ist surjektiv und ihr Kern ist durch $p^n\mathbb{Z}_p$ gegeben. Also folgt

$$\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

aufgrund des Homomorphiesatzes.

Lemma 2.18. *Sei $x \in \mathbb{Q}_p$ mit $|x|_p = p^n$ für ein $n > 0$. Dann gilt $|p^n x|_p = 1$, sodass $p^n x \in \mathbb{Z}_p$ folgt. Dies impliziert*

$$\mathbb{Q}_p = \bigcup_{n=1}^{\infty} p^{-n}\mathbb{Z}_p$$

sodass $\mathbb{Q}_p$ der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}_p$ ist.

Für $x \in \mathbb{Q}_p^*$ gilt $|x^{-1}|_p = \frac{1}{|x|_p}$ und somit auch

$$\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Z}_p \mid |x|_p = 1\}.$$

Proposition 2.19. *Jedes $x \in \mathbb{Z}_p$ hat eine Darstellung der Form*

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i$$

mit $b_i \in \{0, \dots, p-1\}$. Weiterhin ist diese Darstellung eindeutig.

Beweis. Für $x \in \mathbb{Z}_p$ gibt es eine eindeutige Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ mit $0 \leq \alpha_n < p^n$, $\alpha_n = \alpha_{n-1} \mod p^{n-1}$ und $|x - \alpha_n| \leq p^{-n}$. Insbesondere lassen sich die α_n schreiben durch

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i$$

wobei $b_i \in \{0, \dots, p-1\}$ gilt. □

Proposition 2.20. *Sei $x \in \mathbb{Q}_p$ mit $|x|_p = p^n$. Dann hat x eine eindeutige Darstellung der Form*

$$x = b_{-n}p^{-n} + b_{-n+1}p^{-n+1} + \dots,$$

wobei $b_i \in \{0, \dots, p-1\}$ und $b_{-n} \neq 0$.

Bemerkung 2.21. *Die Elemente in $\mathbb{Z}_p^*$ sind von der Form*

$$x = b_0 + b_1 p + \dots$$

mit $b_0 \neq 0$.

Definition 2.22. Ein Hausdorffraum heißt *lokal kompakt*, falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat.

Beispiel 2.23. (i) Ein kompakter Hausdorffraum ist lokal kompakt.

(ii) $(\mathbb{R} = \mathbb{Q}_\infty, |\cdot|_\infty)$ ist lokal kompakt.

Proposition 2.24. $\mathbb{Q}_p$ *ist lokal kompakt.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{Q}_p$ und wähle $r > 0$. Dann ist $\overline{K}(x, r)$ eine kompakte Umgebung von x. $\square$

Proposition 2.25. $\mathbb{Q}_p^* = \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ *ist lokal kompakt.*

Wir haben bereits gesehen, dass $\mathbb{Z}_p$ offen, abgeschlossen und kompakt ist.

Proposition 2.26. $\mathbb{Z}_p^*$ *ist offen, abgeschlossen und kompakt.*

Beweis. Dies folgt aus der Stetigkeit von $|\cdot| : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}$. $\square$

Proposition 2.27. $(\mathbb{Q}_p, +)$, $(\mathbb{Z}_p, +)$, $(Q_p^*, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ *sind lokal kompakte topologische Gruppen*

3 Integration

Definition 3.1. Sei X ein Hausdorffraum. Die Borel σ-Algebra $\sigma(X)$ von X ist die kleinste σ-Algebra, die die offenen Mengen von X enthält. Ein *Radonmaß* auf X ist ein Maß $\mu\colon \sigma(X) \to [0, \infty]$ sodass

i) μ ist lokal endlich, das heißt für jedes $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U von x die endliches Maß hat.

ii) μ ist *regulär von innen*, das heißt

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A \text{ kompakt }\}$$

gilt für alle $A \in \sigma(X)$.

Beispiel 3.2. Das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$ ist ein Radonmaß.

Theorem 3.3 (Riesz)**.** *Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum und*

$$I\colon C_c(X) \to \mathbb{C}$$

eine positive lineare Form*, das heißt $I(f) \geq 0$ für alle $0 \leq f \in \mathbb{C}_c(X)$. Dann existiert ein eindeutiges Radonmaß $\mu\colon \sigma(X) \to [0, \infty]$ mit $I(f) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. Außerdem gilt für kompakte Mengen K*

$$\mu(K) = \inf\{I(f) \mid f \in \mathbb{C}_c(X), f \geq \chi_K\}$$

sowie

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A \textit{ kompakt }\}$$

für alle $A \in \sigma(X)$.

Beweis. Elstrodt, Kapitel 8 von Maß- und Integrationstheorie. $\square$

Theorem 3.4 (Haar). *Sei G eine lokal kompakte Hausdorffgruppe. Dann gibt es ein linksinvariantes Radonmaß μ auf G. Dieses ist eindeutig bis auf positive Konstanten und heißt* Haarmaß *auf G.*

Beispiel 3.5.

i) Auf einer diskreten Gruppe ist das Zählmaß ein Haarmaß.

ii) Auf $(\mathbb{R}^n, +)$ ist das Lebesguemaß ein Haarmaß.

iii) Auf $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ist $\frac{\mathrm{d}x}{|x|}$, wobei $\mathrm{d}x$ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ ist, ein Haarmaß.

iv) Ein Haarmaß auf $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ ist durch

$$\frac{\mathrm{d}x_{11}\mathrm{d}x_{12}\mathrm{d}x_{21}\mathrm{d}x_{22}}{|\det(M)|^2}$$

gegeben. (M wie man es erwartet).

Theorem 3.6. *Sei G eine lokal kompakte Hausdorffgruppe und $K \subseteq G$ kompakt. Dann gibt es ein eindeutiges Haarmaß μ auf G, das $\mu(K) = 1$ erfüllt.*

Definition 3.7. Sei G eine lokal kompakte Hausdorffgruppe und μ ein Haarmaß auf G. Dann definiert für $x \in G$

$$\mu_x(A) = \mu(Ax)$$

ein links invariantes Maß auf G.

Definition 3.8. Die Eindeutigkeit impliziert $\mu_x = \delta(x)\mu$ für ein $\delta(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Insbesondere ist $\delta(x)$ unabhängig von der Wahl von μ. Die Funktion

$$\begin{aligned} \delta \colon G &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \delta(x) \end{aligned}$$

heißt *modulare Funktion* von G.

Proposition 3.9. *Die Abbildung δ ist ein Morphismus topologischer Gruppen.*

Beweis. Für $x, y \in G$ gilt

$$\begin{aligned} \delta(xy)\mu(A) &= \mu_{xy}(A) = \mu(Axy) \\ &= \mu_y(Ax) = \delta(y)\delta(x)\mu(A). \end{aligned}$$

Der Rest verbleibt als Übungsaufgabe. $\square$

Beispiel 3.10. Man kann zeigen, dass jeder stetiger Gruppenhomomorphismus $h\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ konstant sein muss. Daraus folgt, dass jedes Haarmaß auf $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ auch rechts invariant ist.

Wir betrachten nun die lokal kompakten Hausdorffgruppen $\mathbb{Q}_p$ sowie $\mathbb{Q}_p^*$. Wir normieren das Haarmaß μ auf $\mathbb{Q}_p$ durch die Forderung $\mu(\mathbb{Z}_p) = 1$.

Proposition 3.11. *Für eine messbare Menge $A \subseteq \mathbb{Q}_p$ und $x \in \mathbb{Q}_p^*$ gilt*

$$\mu(xA) = |x|_p\, \mu(A).$$

Beweis. Für $x \in \mathbb{Q}_p^*$ definiert

$$\mu_x(A) = \mu(xA)$$

ein Radonmaß auf $\mathbb{Q}_p$. Dies ist links invariant, da

$$\mu_x(y + A) = \mu((y + A)x) = \mu(yx + Ax) = \mu_x(A)$$

gilt. Also folgt aus der Eindeutigkeit, dass $\mu_x(A) = c(x)\mu(A)$ mit $c(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ unabhängig von A gilt. Sei zunächst $|x|_p = p^{-n}$ für ein $n > 0$. Dann gilt $x\mathbb{Z}_p = p^n\mathbb{Z}_p$ sowie

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{j=0}^{p^n-1} (j + p^n\mathbb{Z}_p)$$

als disjunkte Vereinigung. Aus σ-Additivität folgt daher

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{Z}_p) &= \sum_{j=0}^{p^n-1} \mu(j + p^n\mathbb{Z}_p) \\ &= p^n\mu(p^n\mathbb{Z}_p),\end{aligned}$$

was $|x|_p\, \mu(\mathbb{Z}_p) = \mu(x\mathbb{Z}_p$ impliziert. Also ist in diesem Fall $c(x) = |x|_p$. Als nächstes betrachten wir den Fall $|x|_p = p^n$ mit $n > 0$. Dann gilt $\mu(A) = \mu(x^{-1}xA) = |x^{-1}|_p\, \mu(xA)$, also folgt $\mu(xA) = |x|_p\, \mu(A)$. $\square$

Korollar 3.12. *Sei f integrierbar. Dann gilt für $a \in \mathbb{Q}_p^*$*

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(a^{-1}x)\ \mathrm{d}\mu(x) = |a|_p \int_{\mathbb{Q}_p} f_(x)\ \mathrm{d}\mu(x).$$

Beweis. Wir wollen die letzte Proposition verwenden Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Q}_p} f(a^{-1}x)\ \mathrm{d}\mu(x) &= \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\ \mathrm{d}\mu_a(x)\\ &= |a|_p \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\ \mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

Wir werden das normierte Haarmaß auf $\mathbb{Q}_p$ mit $\mathrm{d}x$ notieren. □

Beispiel 3.13. Wir können jetzt das Volumen von $\mathbb{Z}_p^* = \bigcup_{j=1}^{p-1}(j + p\mathbb{Z}_p)$ berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}\mu_{\mathrm{d}x}(\mathbb{Z}_p^*) &= \sum_{j=1}^{p-1} \mu_{\mathrm{d}x}(j + p\mathbb{Z}_p)\\ &= (p-1)\mu_{\mathrm{d}x}(p\mathbb{Z}_p)\\ &= \frac{p-1}{p}\mu_{\mathrm{d}x}(\mathbb{Z}_p)\\ &= \frac{p-1}{p}.\end{aligned}$$

Wir konstruieren nun ein Haarmaß auf $\mathbb{Q}_p^*$. Für $A \subseteq \mathbb{Q}_p^* \subseteq \mathbb{Q}_p$ definieren wir

$$\mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}}(A) := \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_A(x)\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}.$$

Da dies in 0 nicht definiert ist, setzen wir den Integranden in diesem Punkt auf 0. Dann gilt für $y \in \mathbb{Q}_p^*$, dass

$$\begin{aligned}\mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}}(yA) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_{yA}(x)\frac{\mathrm{d}x}{|x|_p}\\ &= \left|y^{-1}\right|_p \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_A(y^{-1}x)\frac{\mathrm{d}x}{|y^{-1}x|_p}\\ &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_A(x)\frac{\mathrm{d}x}{|x|_p}\\ &= \mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}}(A).\end{aligned}$$

Also ist $\mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}}$ links invariant. Das Volumen von $\mathbb{Z}_p^*$ bezüglich $\mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}}$ ist

$$\begin{aligned}\mu_{\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}}(\mathbb{Z}_p^*) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(\mathbb{Z}_p^*)\frac{\mathrm{d}x}{|x|_p}\\ &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(\mathbb{Z}_p^*)\ \mathrm{d}x = \mu_{\mathrm{d}x}(\mathbb{Z}_p^*)\\ &= \frac{p-1}{p}.\end{aligned}$$

Theorem 3.14. $\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}$ *definiert ein Haarmaß auf* $\mathbb{Q}_p^*$. *Das normierte Haarmaß*

$$\mathrm{d}^*x = \frac{p}{p-1}\frac{\mathrm{d}x}{|x_p|}$$

erfüllt $\mu_{\mathrm{d}^*x}(\mathbb{Z}_p^*) = 1$.

Für $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $s \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$a^s = \mathrm{e}^{s\log(a)}.$$

Die Riemannsche ζ-Funktion ist durch

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert. Die Reihe konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > 1$ und besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ mit einer Polstelle vom Grad 1 in $s = 1$. Für $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-2}}.$$

Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ werden wir

$$\int_{\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}} |x|_p^s \ \mathrm{d}^*x$$

berechnen. Wir können das Integrationsgebiet durch

$$\mathbb{Z}_p \setminus \{0\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} p^k\mathbb{Z}_p^*$$

in disjunkte Mengen zerlegen. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}} |x|_p^s \ \mathrm{d}^*x &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{p^k\mathbb{Z}_p^*} |x|_p^s \ \mathrm{d}^*x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(p^{-k}\right)^s \int_{p^k\mathbb{Z}_p^*} \mathrm{d}^*x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(p^{-k}\right)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \left(p^{-2}\right)^k \\
= \frac{1}{1-p^{-s}}.
\end{aligned}$$

Dies scheint zunächst „zufällig“ zu sein, aber wir werden später sehen, dass es hier einen tieferen Zusammenhang gibt.

4 Adele

Wir wollen alle Vervollständigungen von $\mathbb{Q}$ gleichzeitig betrachten. Dafür betrachten wir den lokal kompakten Ring

$$\mathbb{A}_Q = \{(x_\infty, x_2, x_3, x_5 \ldots,) \mid x_\nu \in \mathbb{Q}_\nu \text{ und } x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ a.e.}\}$$

von Adelen.

Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die Produkttopologie auf $\prod_{i\in I} X_i$ ist die gröbste Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$, bezüglich der alle Projektionen stetig sind. Eine Basis für diese Topologie ist durch $\{\prod_{i\in I} O_i\}$ gegeben, wobei O_i für alle $i \in I$ offen ist und $O_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ gilt.

Mengen dieser Form heißen *offene Rechtecke*.

Wir benötigen folgenden klassischen Satz aus der Topologie.

Theorem 4.1 (Tychonoff)**.** *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Dann ist das Produkt der X_i genau dann kompakt, wenn alle X_i kompakt sind.*

Theorem 4.2. *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Hausdorffräumen. Dann ist $\prod_{i\in I} X_i$ lokal kompakt genau dann wenn alle X_i lokal kompakt und alle bis auf endlich viele sogar kompakt sind.*

Beweis. „⇒“: Da die Projektionen $p_j\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ stetig sind, folgt, dass alle X_i lokal kompakt sind. Sei $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ und $C = (C_i)_{i\in I}$ eine kompakte Umgebung von x. C enthält eine Vereinigung offener Rechtecke. Da alle bis auf endlich viele Komponenten eines offenen Rechtecks der ganze Raum sind, gilt das gleich auch für C, das heißt

$$\pi_i(C) = X_i$$

für alle bis auf endlich viele $i \in I$. „$\Leftarrow$“: Da mit $J = \{i \in I \mid x_i \text{ compact }\}$, die Menge $I \setminus J$ endlich ist, folgt mit

$$X = \prod_{i \in J} X_i \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i,$$

dass X als Produkt einer kompakten und einer lokal kompakten Menge lokal kompakt ist. □

Beispiel 4.3. $\prod_{p<\infty} \mathbb{Q}_p$ ist nicht lokal kompakt und deswegen wissen wir nicht, ob es ein Haarmaß gibt.

Definition 4.4. Sei $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie lokal kompakter Hausdorffräume und für jedes $i \in I$ sei $K_i \subseteq X_i$ eine kompakte offene Menge. Dann definieren wir das eingeschränkte Produkt

$$X = \hat{\prod}_{i \in I}^{K_i} X_i := \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \mid x_i \in K_i \text{ für fast alle } i \in I\}.$$

Falls K_i aus dem Kontext klar ist, lassen wir diese in der Schreibweise weg. Ein eingeschränktes offenes Rechteck ist eine Menge der Form

$$\prod_{i \in I} U_i$$

wobei $U_i \subseteq X_i$ offen ist und $K_i = U_i$ für alle bis auf endlich viele $i \in I$ gilt. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt offen, wenn es eine Vereinigung solcher Mengen ist. Die dazugehörige Topologie heißt die *eingeschränkte Produkttopologie.*

Proposition 4.5. *Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie lokal kompakter Hausdorffräume. Für jedes $i \in I$ sei $K_i \subseteq X_i$ eine kompakte offene Menge. Dann ist*

$$X = \hat{\prod}_{i \in I}^{K_i} X_i$$

ausgestattet mit der eingeschränkten Produkttopologie ein lokal kompakter Hausdorffraum.

Beweis. Sei $x = (x_i)_{i \in I} \in X$. Definiere $J = \{i \in I \mid x_i \in K_i\}$. Dann ist $I \setminus J$ endlich. Für jedes $i \in I \setminus J$ wählen wir eine kompakte Umgebung U_i von x_i. Dann ist

$$\prod_{i \in I \setminus J} U_i \times \prod_{i \in J} K_i$$

eine kompakte Umgebung von x. Die Hausdorffeigenschaft verbleibt als Übung. □

Definition 4.6. Der Ring

$$\mathbb{A}_f := \widehat{\prod_{p<\infty}}^{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

heißt der Ring der *endlichen Adele*. Nach dem letzten Satz ist $\mathbb{A}_f$ ein lokal kompakter Hausdorffraum.

Proposition 4.7. *Der Ring $\mathbb{A}_f$ ist ein topologischer Raum, das heißt, die Ringverknüpfungen sind stetig.*

Proposition 4.8. *Die Menge*

$$\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{A}_f$$

ist kompakt und offen.

Sei $N \in \mathbb{Z}$ sowie $N > 0$. Dann gilt

$$N = \prod_{p<\infty} p^{\nu_p}$$

und $\nu_p = 0$ für alle bis auf endlich viele p. Weiterhin haben wir, dass

$$N\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p<\infty} p^{\nu_p}\mathbb{Z}_p$$

eine kompakte offene Umgebung der $0 \in \mathbb{A}_f$. Eine beliebige offene Umgebung der $0 \in \mathbb{A}_f$ ist eine Vereinigung von Mengen der Form

$$\prod_{i \in I \setminus J} U_i \times \prod_{j \in J} K_j$$

wobei $I \setminus J$ endlich ist und die U_i für $i \in I \setminus J$ offen sind. In $\mathbb{Q}_p$ gilt $K(0, p^m) = p^{-m}\mathbb{Z}_p$ für alle $m \in \mathbb{Z}$.

Proposition 4.9. *Jede offene Umgebung der $0 \in \mathbb{A}_f$ enthält eine Menge der Form $N\hat{Z}$ für ein $N \in \mathbb{Z}$ mit $N > 0$.*

Proposition 4.10. *Die Einbettung $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{A}_f$ hat dichtes Bild.*

Definition 4.11. Der Ring $\mathbb{A} := \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f$ heißt *Ring der Adele.*

Bemerkung 4.12. $\mathbb{A}$ *ist ein lokal kompakter Hausdorffraum.*

Proposition 4.13. $\mathbb{A}$ *ist ein topologischer Ring. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} Q &\to \mathbb{A} \\ a &\mapsto (a, a, \dots) \end{aligned}$$

liefert eine Einbettung von $\mathbb{Q}$ *nach* $\mathbb{A}$.

Proposition 4.14. $\mathbb{Q}$ *ist eine diskrete abgeschlossene Untergruppe von* $\mathbb{A}$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\mathbb{A}$ die diskrete Topologie auf $\mathbb{Q}$ erzeugt, das heißt für jedes $a \in \mathbb{Q}$ existiert eine offene Umgebung U mit $\mathbb{Q} \cap U = \{a\}$. Aufgrund der Stetigkeit der Addition können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a = 0$ annehmen. Wähle

$$U := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p.$$

Für $r \in \mathbb{Q} \cap U$ gilt

$$|r|_p \leq 1$$

für alle $p < \infty$. Also folgt $r \in \mathbb{Z}$ und somit $r = 0$.
Es bleibt zu zeigen,dass $\mathbb{Q}$ abgeschlossen in $\mathbb{A}$ ist. Sei dazu $a \in \overline{\mathbb{Q}}$. Wir nehmen $a \notin \mathbb{Q}$ an. Es existiert eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{A}$ mit $U \cap \mathbb{Q} = \{0\}$. Wähle eine offene Umgebung V von $0 \in \mathbb{A}$, die $V + V \subseteq U$ und $-V = V$ erfüllt. Die Stetigkeit der Addition impliziert, dass es eine offene Umgebung W von 0 gibt, die $W + W \subseteq U$ erfüllt. Wenn man $V = W \cap (-W)$ setzt, erhält man die gewünschte Menge. Dann gilt $(a + V) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Sei $x \in (a + V) \cap \mathbb{Q}$. Dann $x \neq a$. Da $\mathbb{A}$ Hausdorff ist, existiert eine offene Umgebung W von a mit $x \notin W$. Dann ist $(a + V) \cap W$ eine offene Umgebung von a. Wähle $y \in (a + V) \cap W \cap \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$x - y \in ((a + V) \cap \mathbb{Q}) - ((a + V) \cap W \cap Q.$$

Dies impliziert $x - y \in (V - V) \cap \mathbb{Q}$ also $x - y \in (U \cap \mathbb{Q}) = \{0\}$. Aber $x = y$ ist ein Widerspruch. $\square$

Wir betrachten die kanonische Projektion

$$\pi \colon \mathbb{A} \to A/\mathbb{Q}$$

und statten $A/\mathbb{Q}$ mit der Quotiententopologie aus, das heißt $U \subseteq A/\mathbb{Q}$ ist genau dann offen wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{A}$ ist. Insbesondere ist π stetig.

Proposition 4.15. *Die kanonische Projektion ist offen.*

Beweis. Sei $U \subseteq \mathbb{A}$ offen. Wir müssen zeigen, dass $\pi^{-1}(\pi(U))$ offen ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(U)) &= \{a \in \mathbb{A} \mid \pi(a) \in \pi(U)\} \\ &= \bigcup_{a \in U} (a + \mathbb{Q}) \\ &= \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} (x + U),\end{aligned}$$

somit ist die Offenheit gezeigt. □

Proposition 4.16. *$A/\mathbb{Q}$ ist ein kompakter Hausdorffraum.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $A/\mathbb{Q}$ Hausdorff ist. Sei dafür $a + \mathbb{Q} \neq b + \mathbb{Q}$. Dann gilt $a - b \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$, welches eine offene Menge ist. Dann existiert eine offene symmetrische Umgebung der 0 mit

$$((a - b) + U + U) \cap \mathbb{Q} = \emptyset.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}((a + U) - (b + U)) \cap \mathbb{Q} &= \emptyset \\ ((a - b) + U) \cap (Q + U) &= \emptyset \\ (a + U) \cap (b + U + \mathbb{Q}) &= \emptyset \\ (a + U + \mathbb{Q}) \cap (b + U + \mathbb{Q}) &= \emptyset.\end{aligned}$$

Daher sind $(a + U)$ und $(b + U)$ disjunkt in $A/\mathbb{Q}$ sind. Es bleibt die Kompaktheit zu zeigen. Dafür zeigen wir, dass es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{A}$ mit $\pi(K) = \mathbb{A}$ gibt. Sei $K := [0, 1] \times \hat{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{A}$. Wir zeigen, dass jede Restklasse in $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ einen Repräsentanten in K besitzt. Sei $a = (a_\nu)_{\nu \leq \infty} \in \mathbb{A}$. Für $p < \infty$ schreiben wir

$$a_p = \sum_{n = n_p} a_p(n) p^n$$

Dann gilt $n_p = 0$ für fast alle p. Definiere

$$b := a - \sum_{p < \infty} \sum_{n = n_p}^{-1} a_p(n) p^n,$$

wobei der zweite Summand ein Element von $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}$ ist. Dann gilt $b \in \mathbb{R} \times \mathbb{A}$, da

$$\left| a_p - \sum_{q < \infty} \sum_{n = n_q}^{-1} a_q(n) q^n \right|_p$$

$$= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_p(n)p^n - \sum_{\infty > q \neq p} \sum_{n=n_q} a_q(n)q^n \right|_p$$

$$= \max\left(\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_p(n)p^n \right|_p, \left| \sum_{\infty > q \neq p} \sum_{n=n_q}^{-1} a_q(n)q^n \right|_p \right) \leq 1.$$

In dem wir b um eine geeignete ganze Zahlen verschieben, erhalten wir einen Repräsentanten in K. $\square$

Da $\mathbb{A}$ eine lokal kompakte Hausdorffgruppe ist, können wir das Haarmaß auf A betrachten, sodass $[0,1] \times \hat{\mathbb{Z}}$ Maß 1 hat.

Definition 4.17. Eine *einfache Funktion auf* $\mathbb{A}$ ist eine Funktion der Form

$$f = \prod_{\nu \leq \infty} f_\nu,$$

wobei $f_\nu \in C_c(\mathbb{Q}_\nu)$ und $f_p = \chi_{\mathbb{Z}_p}$ für fast alle $p < \infty$.

Bemerkung 4.18. *Für* $x = (x_\nu)_{\nu \leq \infty} \in \mathbb{A}$ *gilt*

$$f(x) = \prod_{\nu \leq \infty} f_\nu(x),$$

wobei nur endlich viele Faktoren ungleich 1 *sind. Die einfachen Funktionen auf* $\mathbb{A}$ *sind stetig und haben kompakten Träger (Notation* $f \in C_c(\mathbb{A})$*).*

Proposition 4.19. *Sei* $f = \prod_{\nu \leq \infty} f_\nu$ *eine einfache Funktion auf* $\mathbb{A}$*. Dann gilt*

$$\int_A f(x)\ \mathrm{d}x = \prod_{\nu \leq \infty} \int_{\mathbb{Q}_p} f_\nu(x)\ \mathrm{d}x_\nu.$$

Beweis. Betrachte die endliche Menge $I \coloneqq \{p < \infty \mid f_p \neq \chi_{\mathbb{Z}_p}\} \cup \{\infty\}$. Definiere $\mathbb{A}_I = \prod_{\nu \in I} \mathbb{Q}_\nu$. Dann gilt $\mathbb{A} = \mathbb{A}_I \times \mathbb{A}^I$, wobei

$$\mathbb{A}^I = \prod\nolimits_{p \notin I}^{\hat{\mathbb{Z}}_p} \mathbb{Q}_p$$

ist. $\mathbb{A}_I$ ist als endliches Produkt lokal kompakter Hausdorffräume wieder ein lokal kompakter Hausdorffraum. Das Haarmaß auf $\mathbb{A}_I$ ist durch das Produkt der Haarmaße auf den Faktoren gegeben und der Satz von Fubini gilt. Wir schreiben

$$f = \prod_{\nu \in I} f_\nu \cdot \prod_{p \notin I} f_p.$$

Mit Fubini gilt somit

$$\begin{aligned}\int_A f(x)\ \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{A}_I} f_I(x)\ \mathrm{d}x \int_{\mathbb{A}^I} f^I(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \prod_{\nu\in I}\int_{\mathbb{Q}_\nu} f_\nu(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \prod_{\nu\leq\infty}\int_{\mathbb{Q}_\nu} f_\nu(x)\ \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Sei $x \in \mathbb{Z}_p$. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{Z}, n > 0$ genau ein $\alpha_n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha_n < p^n$ mit

$$\begin{aligned} |x-\alpha_n|_p &\leq p^{n-} \\ \Leftrightarrow \alpha_n &\in x + K(0, p^{-n}) \\ \Leftrightarrow \alpha_n &\in x + p^n\mathbb{Z}_p. \end{aligned}$$

Theorem 4.20. *Sei nun $x \in \hat{Z}) = \prod_{\nu\leq\infty}\mathbb{Z}_p$. Dann existiert für jedes $N \in \mathbb{Z}$, $N > 0$ existiert ein eindeutiges $\alpha_N \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha < N$ mit*

$$\alpha_N \in x + N\hat{Z}.$$

Beweis. Sei $x = (x_p)_{p\leq\infty}$ mit $x_p = \sum_{n=0}^{\infty} x_p(n)p^n$ sowie $N = \prod_{p\leq\infty} p^{\nu_p}$. Dann gilt $\nu_p = 0$ für fast alle p und $N\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p<\infty} p^{\nu_p}\mathbb{Z}_p$. Der Chinesische Restsatz existiert ein eindeutiges $\alpha_N \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha < N$ mit

$$\alpha_N = \sum_{n=0}^{\nu_p-1} x_p(n)p^n \mod p^{\nu_p}$$

für alle $\nu_p \neq 0$. Für dieses α_N gilt $\alpha_N \in x + N\hat{Z}$. Diese Approximation werden für wachsendes N immer besser. Insbesondere gilt $\alpha_M = \alpha_N \mod N$ für alle Vielfachen M von N. Also definiert x eine Folge ganzer Zahlen $(\alpha_N)_{N>0}$ mit $0 \leq \alpha_N < N$ sowie $\alpha_M = \alpha_N \mod N$ falls $N \mid M$. □

Umgekehrt definiert eine solche Folge ein Element in $\hat{Z}$.

Definition 4.21. Eine Folge von Restklassen $(\alpha_N)_{N>0}$ mit $\alpha_N)\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, die die Kompatibilitätsbedingung $\alpha_M = \alpha_N \mod N$ für $N \mid M$ erfüllt, heißt *kompatibles System.* Der projektive Limes

$$\varprojlim \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{(\alpha_N) \in \prod_{N>0}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \mid (\alpha_N) \text{ ist kompatibel}\}$$

ist auf natürliche Art und Weise ein Ring. Wir können diesen mit der Topologie des projektiven Limes ausstatten.

Theorem 4.22. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \hat{Z} &\mapsto \varprojlim \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ x &\mapsto (\alpha_N \mod N) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus topologischer Ringe.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{Z}} &\to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ x &\mapsto \alpha_N \mod N \end{aligned}$$

ist surjektiv mit Kern $N\hat{Z}$. Also folgt

$$\hat{\mathbb{Z}}/N\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.$$

5 Idele

Definition 5.1. Die Einheitengruppe $\mathbb{A}^*$ von $\mathbb{A}$ heißt Gruppe der *Idele*. Es gilt

$$\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f, \mathbb{A}_f = \hat{\prod}_{p<\infty}^{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

$$\mathbb{A}^* = \mathbb{R}^* \times \mathbb{A}_f^*, \mathbb{A}_f^* = \{(a_p)_{p<\infty} \mid a_p \in \mathbb{Q}_p^* \forall p, a_p \in \mathbb{Z}_p^* \text{ a.e. } p\} = \hat{\prod}^{\mathbb{Z}_p^*} \mathbb{Q}_p^*.$$

Wir statten $\mathbb{A}_f^*$ mit der eingeschränkten Produkttopologie aus. $\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p$ ist offen und kompakt in $\mathbb{A}_f$, $\hat{\mathbb{Z}}^* = \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p^*$ ist offen und kompakt in $\mathbb{A}_f^*$ bezüglich der eingeschränkten Produkttopologie. $\hat{Z}^*$ ist nicht offen bezüglich der Topologie von $\mathbb{A}_f^*$, die von $\mathbb{A}_f$ induziert wird. Die eingeschränkte Produkttopologie auf $\mathbb{A}_f^*$ ist echt feiner als die Topologie, die von $\mathbb{A}_f$ induziert wird. Wir statten $\mathbb{A}^* = \mathbb{R}^* \times \mathbb{A}_f^*$ mit der Produkttopologie aus.

Theorem 5.2. *Dann sind $(A_f^*, \cdot)$ und $(\mathbb{A}^*, \cdot)$ lokal kompakte Hausdorffräume.*

Wir normieren das Haarmaß auf $\mathbb{A}_f^*$ sodass $\hat{\mathbb{Z}}^*$ Maß 1 hat und schreiben $\mathrm{d}^* x_f$ für dieses Maß. Auf $\mathbb{R}^*$ ist $\frac{\mathrm{d}t}{|t|}$ ein Haarmaß. Wir statten $\mathbb{A}^*$ mit dem Produktmaß aus, also mit dem Haarmaß

$$\mathrm{d}^* x = \frac{\mathrm{d}t}{|t|} \cdot \mathrm{d}^* x_f.$$