1. Übung zur Vorlesung MA 1

Aufgabe 1:
Seien A_1, A_2, B_1, B_2 (nicht leere) Mengen. Man beweise die Inklusion

$$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$$

und gebe ein Beispiel an, für das $\subset$ anstelle von $\subseteq$ steht.

Aufgabe 2:
Es sei $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen X und Y. Man zeige:

a) $M_1 \subset M_2 \subset X \;\Rightarrow\; f(M_1) \subset f(M_2)$;

$N_1 \subset N_2 \subset Y \;\Rightarrow\; f^{-1}(N_1) \subset f^{-1}(N_2)$;

b) $M \subset X \;\Rightarrow\; M \subset f^{-1}(f(M))$;

$N \subset Y \;\Rightarrow\; f(f^{-1}(N)) \subset N$;

c) $N \subset Y \;\Rightarrow\; f^{-1}(Y \setminus N) = X \setminus f^{-1}(N)$;

d) $M_1, M_2, \ldots, M_n \subset X$ und $N_1, N_2, \ldots, N_n \subset Y$ mit $n \in \mathrm{IN} \Rightarrow$

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f(M_i); \qquad f\left(\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^{n} f(M_i);$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} N_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(N_i); \qquad f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} N_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(N_i).$$

Man finde ein Beispiel, bei dem $f(M_1 \cap M_2) \neq f(M_1) \cap f(M_2)$ gilt.

Aufgabe 3:
Seien $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ und $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ Abbildungen und $g \circ f : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ die Komposition von f und g.

Man zeige:

a) Sind f und g injektiv (surjektiv), so ist auch $g \circ f$ injektiv (surjektiv);

b) Ist $g \circ f$ injektiv (surjektiv), so ist auch f injektiv (g surjektiv).

Aufgabe 4:
Für n $\in$ IN ist die **n-te harmonische Zahl** H_n definiert durch

$$H_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Man zeige mit Hilfe des **Beweisprinzips der vollständigen Induktion** die Gültigkeit der folgenden Aussage:

$$\boxed{\forall\, n \in \mathrm{IN}: \sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)\cdot H_n - n.}$$

Aufgabe 5:
Gegeben sei die Menge IR der reellen Zahlen. Man betrachte auf IR die Verknüpfung

$$\begin{aligned} \mathrm{IR} \times \mathrm{IR} &\to \mathrm{IR} \\ (x, y) &\mapsto x * y := \frac{x+y}{2} \end{aligned}$$

und untersuche, ob (IR, *) eine Gruppe ist.