

4.1 Løsninger til lineære programmeringsproblemer

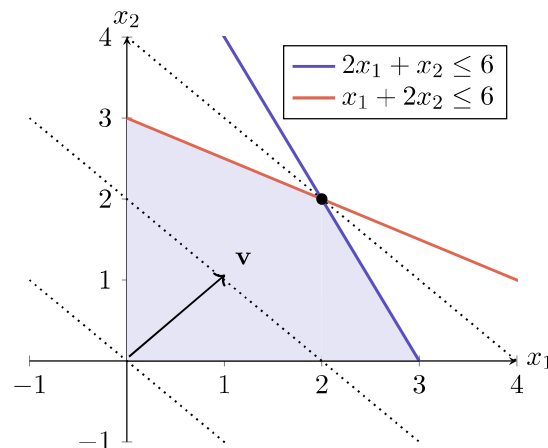
Eksempel eksempel 4.2 illustrerer, hvordan lineære programmeringsproblemer løses i nærværende rapport.

Eksempel 4.2

Betragt maksimumsproblemet

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimér} & x_1 + x_2 \\ \text{begrænset af} & x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{array}$$

Grafisk illustreret på figur 4.3.

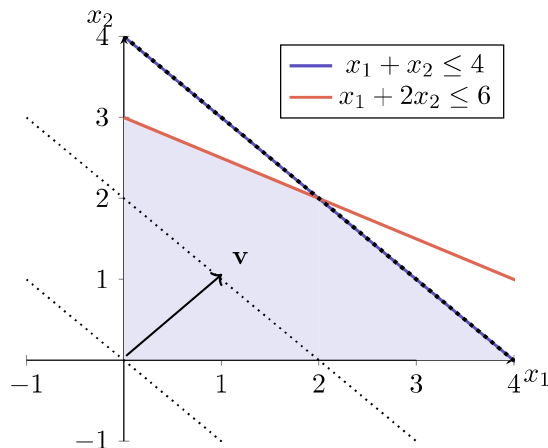


Figur 4.3: Grafisk illustration med én entydig løsning til problemet i eksempel 4.2, hvor løsningsmængden er markeret med blå.

Løsningsmængden er det markerede område på figur 4.3. For at finde den optimale løsning findes enhver given skalar k og løsningsmængden med alle punkter overvejes, hvor objektfunktionen $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ er lig med k . Ethvert punkt i en løsningsmængden, hvor objektfunktionen $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ er lig med k , undersøges for at finde den optimale løsning. Dette illustreres ved den linje, der er beskrevet af ligningen $-x_1 - \frac{1}{2}x_2 = k$. Dette betyder, at den optimale løsning, som enten maksimerer eller minimerer værdien af objektfunktionen kan findes grafisk ved at indtegne niveaukurver $f(x_1, x_2) = k$ og forskyde disse niveaukurver i den retning, der optimerer værdien af objektfunktionen, indtil den optimale løsning opnås. Bemærk, i det følgende eksempel, at denne linje er vinkelret på vektoren \mathbf{v} med koordinaterne $\mathbf{v} = (1, 1)$. Forskellige værdier for k fører til forskellige linjer, hvor alle linjer er parallelle med hinanden samt vinkelret på vektoren \mathbf{v} . Hvis værdien af k øges, svarer det til at bevæge linjen $z = x_1 + x_2$ langs retningen af vektoren \mathbf{v} . For at finde den optimale løsning for dette

eksempel, er det interessante at maksimere k , og dermed bevæge linjen så meget som muligt i retning af \mathbf{v} uden at forlade løsningsmængden. Den mest optimale er derfor $k = -4$, hvormed vektor $\mathbf{x} = (2, 2)$ er den mest optimale løsning i løsningsmængden. Derfor er det den entydige optimale løsning.

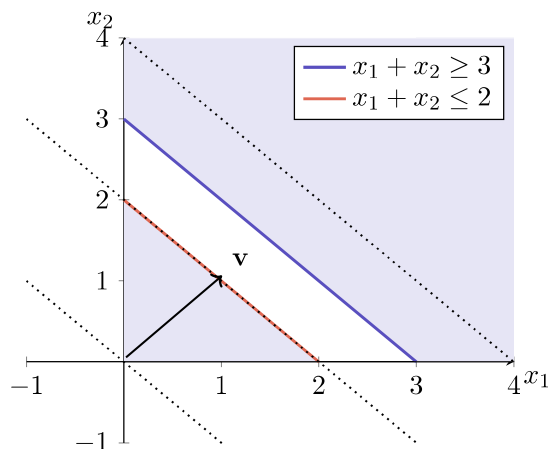
Betragt figur 4.4. I det hjørne, hvor den optimale løsning findes, maksimeres værdien af objektfunktionen, der repræsenterer præcis én løsning til maksimumsproblemet. På figur eksempel 4.2 introduceres et eksempel, hvor der matematisk set findes et uendeligt antal løsninger, der maksimerer værdien af objektfunktionen.



Figur 4.4: Grafisk illustration med uendeligt antal løsninger til problemet i eksempel 4.2.

Antag nu, at den ene koefficient i objektfunktionen er rykket eller at den ene begrænsning er skiftet, så den ligger parallelt med niveaukurven, som ligger vinkelret med vektoren \mathbf{v} , så betyder dette, at der findes uendeligt mange optimale løsninger til maksimumsproblemet på figur eksempel 4.2.

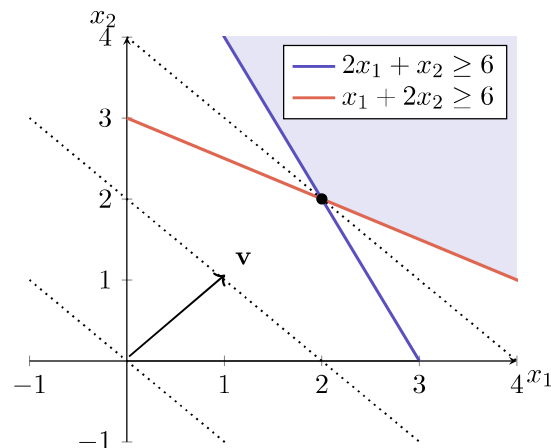
Forestil nu, at rent hypotetisk at løsningsområdet er en tom mængde, da der ikke findes en løsning, som opfylder betingelserne samtidig. Dette illustreres på figur 4.5.



Figur 4.5: Grafisk illustration, hvor løsningsmængden er tom til problemet i eksempel 4.2.

Dette betyder, at der ikke er nogle løsninger, som opfylder betingelserne, og dermed er der ingen optimal løsning til det lineære programmeringsproblem.

Antag nu, at det lineære programmeringsproblem i stedet er ubegrænset opadtil. Dette illustreres på figur 4.6.



Figur 4.6: Grafisk illustration, hvor den optimale løsning er ∞ til problemet i eksempel 4.2.

Dette betyder, at betingelserne ikke begrænser, hvor stor værdien af objektfunktionen kan blive. Derfor er den optimale maksimale løsning ∞ , hvilket betyder, at ingen optimal løsning ligger i løsningsområdet, som var givet af de to betingelser.

Som gennemgået i de forudgående eksempler, så findes følgende fire løsningsmuligheder, der er betinget af det lineære optimeringsproblems form.

1. Der findes én entydig optimal løsning.
2. Der findes flere optimale løsninger i løsningsmængden.
3. Løsningsmængden for det lineære optimeringsproblem er tom.
4. De optimale løsninger er ∞ , og ingen af de optimale løsninger ligger i løsningsmængden.

4.2 Standardform

Hvis et lineært optimeringsproblem er på formen

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimér} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{begrænset af} & A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

5 Grafisk løsning

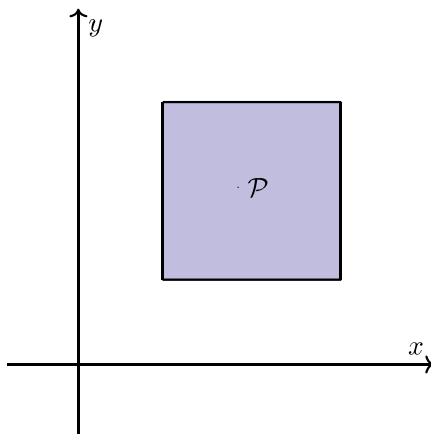
I henhold til geometriske fremstillinger af lineære programmeringsproblemer er det nødvendigt at definere en række begreber. Disse er *hyperplan*, *halvrum* og *polyeder*.

Definition 5.1

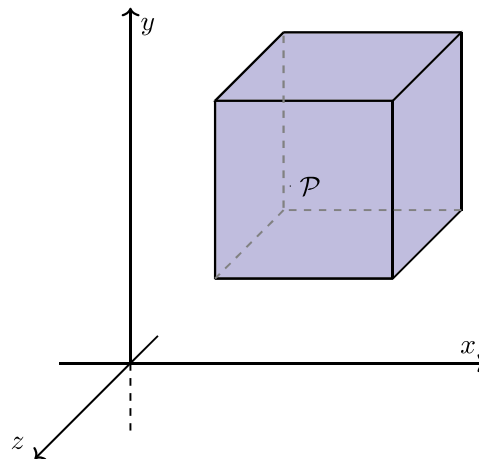


Lad A være en $m \times n$ matrix, og lad \mathbf{b} være en vektor i \mathbb{R}^m . En **polyede** \mathcal{P} er en mængde, der kan beskrives som $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$.

Som det fremgår af definition 5.1, er en polyede mængden af mulige løsninger \mathbf{x} af et ligningssystem, hvilket også kaldes værdimængden. Det gælder endvidere, at en mængde af formen $\mathcal{P}\{x \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, x \geq 0\}$ kaldes en *polyede på standardform*, hvilket vil blive beskrevet yderligere i afsnit 5.3. Betragt eksempel 4.1. Her er det blå område på figur 4.1 en polyede. Ligeledes ses på figur 5.1 en polyede \mathcal{P} , der er markeret med blå i \mathbb{R}^2 , og på figur 5.2 ses en polyede \mathcal{P} , markeret med blå i \mathbb{R}^3 .



Figur 5.1: En polyede \mathcal{P} markeret med blå i \mathbb{R}^2 .



Figur 5.2: En polyede \mathcal{P} markeret med blå i \mathbb{R}^3 .

Polygonet er begrænsningerne, som afgrænser polyeden fra resten af rummet. Dermed er polygonet på figur 5.1 linjerne, der afgrænser \mathcal{P} fra resten af \mathbb{R}^2 . Polygonet på figur 5.2 er derimod udsnittet af fladerne, som udgør kuben, der afgrænser \mathcal{P} fra resten af \mathbb{R}^3 .

Det gælder endvidere for polyeder, at de enten kan være *begrænsede* eller *ubegrænsede*.

Definition 5.2

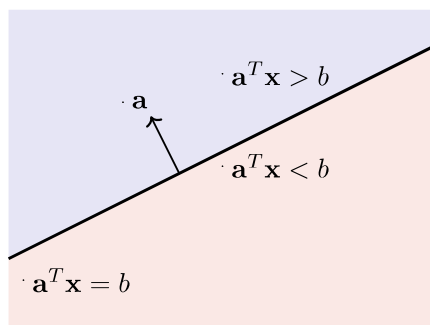
En mængde $S \subset \mathbb{R}^n$ er **begrænset**, såfremt der eksisterer en konstant c , således den absolutte værdi af alle komponenter i alle elementer i S er $\leq c$. Såfremt en sådan konstant ikke eksisterer, er mængden **ubegrænset**.

I henhold til lineære programmeringsproblemer vil dette ofte være begrænset. Endvidere er det en fordel at definere polyeder, der er begrænset af én lineær betingelse.

Definition 5.3

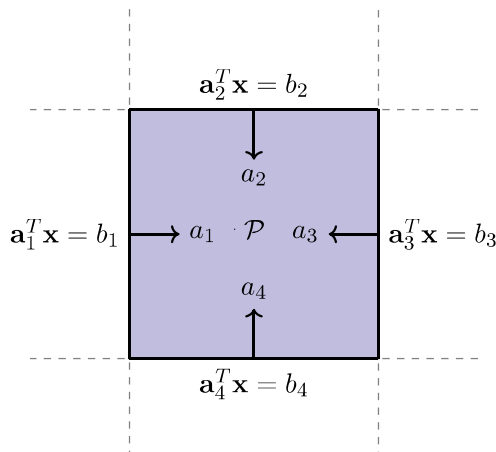
Lad \mathbf{a} være en vektor i \mathbb{R}^n , hvor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ og lad b være en skalar. Mængden $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$ kaldes et **hyperplan**. Mængden $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b\}$ kaldes det **øvre halvrum**, og mængden $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b\}$ kaldes det **nedre halvrum**.

Det gælder her, at hyperplanet er grænsen mellem de tilsvarende øvre og nedre halvrum. I \mathbb{R}^2 vil hyperplanet således være en ret linje, som afskærer en del af rummet. Der vil dermed være et halvrum på hver side af hyperplanet, hvilket er illustreret på figur 5.3, hvor det øvre halvrum er markeret med blå, og det nedre halvrum er markeret med rød.



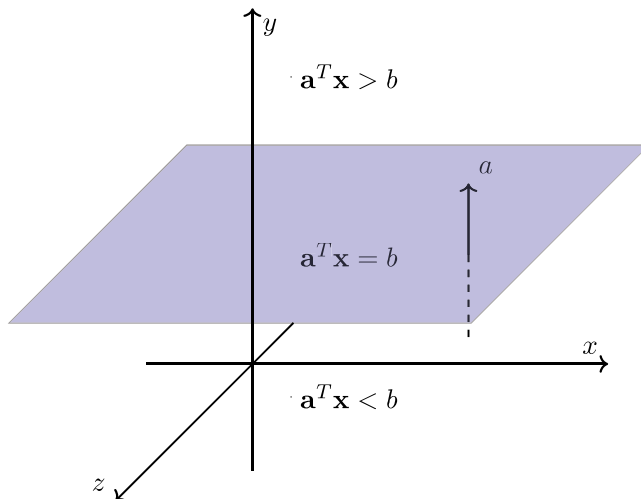
Figur 5.3: Et hyperplan $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$, og to halvrum, markeret med blå for den øvre halvrum $\mathbf{a}^T \mathbf{x} < b$ og rød for den nedre halvrum $\mathbf{a}^T \mathbf{x} > b$.

Betragt polyeden \mathcal{P} på figur 5.1. Polygonen består af fire hyperplaner. Fællesmængden for de øvre halvrum udgør polyeden. På figur 5.4 er de fire hyperplaner markeret.



Figur 5.4: Fællesmængden for det øvre halvrum, for de fire hyperplaner, der udgør polyeden \mathcal{P} markeret med blå i \mathbb{R}^2 .

Ligeledes ses et hyperplan i \mathbb{R}^3 på figur 5.5, der afskærer den øvre og nedre halvrum.



Figur 5.5: Et hyperplan $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$ i \mathbb{R}^3 , markeret med blå, det øvre halvrum $\mathbf{a}^T \mathbf{x} > b$ og det nedre halvrum $\mathbf{a}^T \mathbf{x} < b$.

Hyperplanerne på figur 5.2 danner dermed polygonen, og fællesmængden for det øvre halvrum udgør polyeden.

Sætning 5.1 beskriver, hvornår en vektor er ortogonal med et hyperplan.

Sætning 5.1

Lad \mathbf{a} være en vektor i \mathbb{R}^n , hvor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. For hyperplanet $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$, vil \mathbf{a} være ortogonal med hyperplanet.



Bevis 5.1

Lad \mathbf{x} og \mathbf{y} tilhøre det samme hyperplan. Så er $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{a}^T \mathbf{y}$. Dermed er $\mathbf{a}^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$, og så er \mathbf{a} ortogonal til alle vektorer i hyperplanet. \square

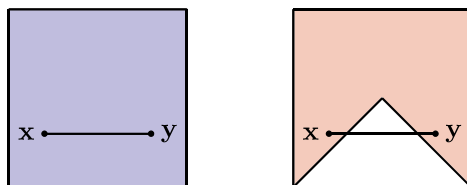
5.1 Konvekse mængder

I forbindelse med mængder af vektorer er det vigtigt at definere *konvekse mængder*.

Definition 5.4

En mængde $S \subset \mathbb{R}^n$ er **konveks**, hvis $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in S$ for ethvert $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ og ethvert $\lambda \in [0, 1]$.

En mængde er med andre ord konveks, hvis ethvert element på en ret linje mellem to vilkårlige punkter x og y i mængden også tilhører mængden. På figur 5.6 ses eksempler på en konveks mængde, markeret med blå og ikke-konveks mængde markeret med rød.



Figur 5.6: En konveks mængde markeret med blå og en ikke-konveks mængde markeret med rød.

Definition 5.5

Lad $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, og $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ være ikke-negative skalarer, hvis sum er 1. Da gælder:

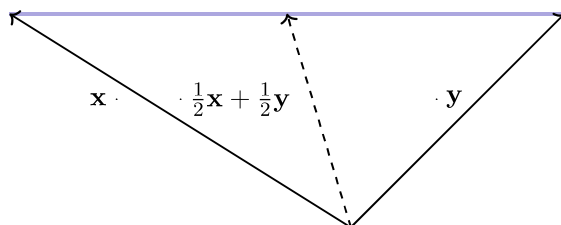
- (a) Vektoren

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i$$

kaldes en **konveks kombination** af vektorerne $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$.

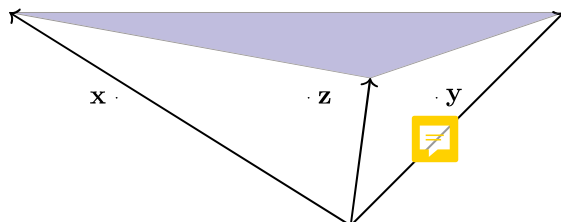
- (b) Det **konvekse hylster** af vektorerne $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ er mængden af alle konvekse kombinationer af disse vektorer.

På figur 5.7 ses to vektorer \mathbf{x} og \mathbf{y} i \mathbb{R}^n og den konvekse kombination $\frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y}$, hvor $\lambda_x = \lambda_y = \frac{1}{2}$. Det konvekse hylster af vektorerne er en ret linje, der er markeret med blå.



Figur 5.7: Vektorerne \mathbf{x} og \mathbf{y} , samt den konvekse kombination af dem, hvor $\lambda_x = \lambda_y = \frac{1}{2}$, og det konvekse hylster af vektorerne, der er markeret med blå.

På figur 5.8 ses derimod tre vektorer \mathbf{x} , \mathbf{y} og \mathbf{z} i \mathbb{R}^n . Det konvekse hylster af vektorerne er en afgrænset flade, der på figuren er markeret med blå.



Figur 5.8: Vektorerne \mathbf{x} , \mathbf{y} og \mathbf{z} , og det konvekse hylster af vektorerne, der er markeret med blå.

Af definition 5.5 følger sætning 5.2.

Sætning 5.2

- (a) Fællesmængden for konvekse mængder er konvekst.
- (b) Enhver polyhedron er en konveks mængde.
- (c) En konveks kombination af et endeligt antal elementer fra en konveks mængde tilhører også den mængde.
- (d) Det konvekse hylster af et endeligt antal vektorer er en konveks mængde.

Bevis 5.2

- (a) Lad I være en indeksmængde, lad S_i , $i \in I$, være et antal konvekse mængder, og lad $\lambda \in [0, 1]$. Antag nu, at vektorerne \mathbf{x} og \mathbf{y} tilhører fællesmængden $\bigcap_{i \in I} S_i$. Det haves, at $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in S_i$, eftersom enhver S_i er konveks og indeholder \mathbf{x} og \mathbf{y} . Derfor er $\bigcap_{i \in I} S_i$ konveks, da $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in \bigcap_{i \in I} S_i$, hvilket beviser (a).
- (b) Lad \mathbf{a} være en vektor, lad b være en skalar, og lad $\lambda \in [0, 1]$. Antag, at \mathbf{x} og \mathbf{y} henholdsvis opfylder, at $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b$ og $\mathbf{a}^T \mathbf{y} \geq b$, således de tilhører samme halvrum. Så er $\mathbf{a}^T (\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \geq \lambda b + (1 - \lambda) b = b$, hvilket beviser, at $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}$ tilhører samme halvrum, hvormed halvrummet er konvekst. Bemærk, at en polyede er fællesmængden af et endeligt antal halvrum, og at (b) dermed er bevist jævnfør (a).
- (c) Dette punkt bevises ved induktion. Per definition 5.5 ligger en konveks kombination af to elementer i en konveks mængde i mængden. Som induktionsantagelse antages det, at en konveks kombination af c elementer i en konveks mængde også er i mængden. Dernæst undersøges $c + 1$ elementer x_1, x_2, \dots, x_{c+1} i en konveks mængde S . Lad $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ være ikke-negative skalarer, hvis sum er 1. Det antages, at $\lambda_{k+1} \neq 1$. Så haves, at

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \mathbf{x}_i = \lambda_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} \mathbf{x}_i.$$

Koefficienterne $\lambda_i / (1 - \lambda_{k+1})$, for $i = 1, \dots, k$, er ikke-negative og summerer til 1. Ved induktionsantagelsen gælder, at $\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i / (1 - \lambda_{k+1}) \in S$. Da S er konveks, fås $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \mathbf{x}_i \in S$, hvormed (c) er bevist.

- (d) Lad S være et konvekst hylster af $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$, samt lad $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \zeta_i \mathbf{x}^i$, $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^k \theta_i \mathbf{x}^i$ være to elementer i S , hvor $\zeta_i \geq 0$, $\theta_i \geq 0$, og $\sum_{i=1}^k \zeta_i = \sum_{i=1}^k \theta_i = 1$. Lad $\lambda \in [0, 1]$. Så er

$$\lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{z} = \lambda \sum_{i=1}^k \zeta_i \mathbf{x}^i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^k \theta_i \mathbf{x}^i = \sum_{i=1}^k (\lambda \zeta_i + (1 - \lambda) \theta_i) \mathbf{x}^i.$$

Bemærk, at koefficienterne $\lambda\zeta_i + (1 - \lambda)\theta_i$, $i = 1, \dots, k$, summerer til 1 og ikke er negative. Dermed er $\lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}$ en konveks kombination af vektorerne $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k$, og tilhører derfor mængden S , hvormed (d) er bevist.

□

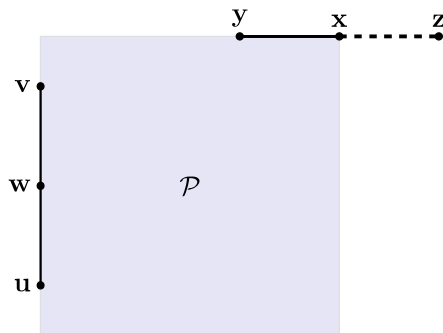
5.2 Ekstremer, hjørnepunkter og basale løsninger

Som det fremgår af afsnit 4.1, vil en optimal løsning være tilbøjelige til at ligge i hjørnerne af en polyede. Der er derfor behov for måder at definere disse hjørner på.

Definition 5.6

Lad \mathcal{P} være en polyede. En vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ kaldes et **ekstremumspunkt** i \mathcal{P} , hvis der ikke eksisterer to vektorer $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{y} \wedge \mathbf{z} \neq \mathbf{x}$, samt en skalar $\lambda \in [0, 1]$, hvormod det gælder, at $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}$.

Et hjørne kan beskrives ud fra denne definition, idet der, såfremt $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}$, og alle vektorerne findes i \mathcal{P} , gælder, at \mathbf{x} er en konveks kombination af \mathbf{y} og \mathbf{z} . Hvis $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}$ og \mathbf{x} er et ekstremumspunkt, må det derfor gælde, at $\mathbf{y} \notin \mathcal{P}$ eller $\mathbf{z} \notin \mathcal{P}$ eller $\mathbf{x} = \mathbf{z}$ eller $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Det skal her nævnes, at denne definition er strengt geometrisk. På figur 5.9 ses en afgrænset polyede \mathcal{P} , hvor \mathbf{x} er et ekstremumspunkt, da der ikke findes vektorer \mathbf{y} og \mathbf{z} sådan at $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}$. Vektor \mathbf{w} er i modsætning ikke et ekstremumspunkt, da der findes \mathbf{v} og \mathbf{u} , sådan at $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v} + (1 - \lambda)\mathbf{u}$.



Figur 5.9: En afgrænset polyede \mathcal{P} , hvor \mathbf{x} er et ekstremumspunkt, da der ikke findes vektorer \mathbf{y} og \mathbf{z} sådan at $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}$. Vektor \mathbf{w} er i modsætning ikke et ekstremumspunkt, da der findes \mathbf{v} og \mathbf{u} , sådan at $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v} + (1 - \lambda)\mathbf{u}$.

En alternativ geometrisk definition relaterer sig til *hjørne punkter*, som er den entydige optimale løsning til et givet lineært programmeringsproblem med den mulige løsningsmængde \mathcal{P} .

Definition 5.7

Lad \mathcal{P} være en polyede. En vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ siges at være et **hjørne punkt**, hvis der eksisterer en vektor \mathbf{c} , hvorom det gælder, at $\mathbf{c}^T \mathbf{x} < \mathbf{c}^T \mathbf{y}$ for alle \mathbf{y} , som opfylder $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$ samt $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$.

Dette kan ligeledes beskrives som, at \mathbf{x} er et hjørne i \mathcal{P} , såfremt \mathcal{P} er på den ene side af et hyperplan, der skærer \mathcal{P} i \mathbf{x} . Jævnfør definition 5.6 har dette hyperplan ligningen $\mathbf{y} \mid \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{y}$.

Definition 5.8

Hvis en vektor \mathbf{x} opfylder $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$ for $i \in M_1, M_2$ eller M_3 , så siges den tilsvarende betingelse at være **bindende** eller **aktive** ved \mathbf{x} .

Følgende sætning giver anledning til, at disse bindende betingelser kan føres i relation til løsninger af lineære optimeringsproblemer.

Sætning 5.3

Lad \mathbf{x} være et element i \mathbb{R}^n og lad $I = \{i \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i\}$ være en mængde af indekser på betingelser, der er bindende ved \mathbf{x} . Så er følgende udsagn ækvivalente:

- (a) Der eksisterer n vektorer i mængden $\{\mathbf{a}_i \mid i \in I\}$, som er lineært uafhængige.
- (b) Spannet af vektorerne \mathbf{a}_i , for $i \in I$, dækker hele \mathbb{R}^n .
- (c) Ligningssystemet $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$, for $i \in I$, har en entydig løsning.

Bevis 5.3

Antag, at $\text{span}\{\mathbf{a}_i \mid i \in I\} = \mathbb{R}^n$. Dette span har dimensionen n og jævnfør sætning ?? kan en basis for spannet dannes med n af vektorerne, som vil være lineært uafhængige. Hvis der ligeledes eksisterer n vektorer i $\{\mathbf{a}_i \mid i \in I\}$, som er lineært uafhængige, må disse udspænde hele \mathbb{R}^n . Dette viser, at (a) og (b) er ækvivalente.

Antag at ligningssystemet $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$, $i \in I$, har løsningerne \mathbf{x}_1 og \mathbf{x}_2 . Så skal ikke-nulvektoren $\mathbf{d} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ opfylde, at $\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} = 0$ for alle $i \in I$. Dette kræver, at \mathbf{d} er ortogonal med alle \mathbf{a}_i , $i \in I$ og dermed ikke er en linearkombination af disse vektorer. Dette medfører, at $\text{span}\{\mathbf{a}_i \mid i \in I\} \neq \mathbb{R}^n$. Antag nu, at vektorerne \mathbf{a}_i , $i \in I$ ikke spænder over \mathbb{R}^n . Så er det muligt at vælge en ikke-nulvektor \mathbf{d} , der er ortogonal med underrummet, som vektorerne spænder over. Hvis \mathbf{x} opfylder $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$, for alle $i \in I$, så haves, at $\mathbf{a}_i^T (\mathbf{x} + \mathbf{d}) = b_i$, for alle $i \in I$, og der er dermed adskillige løsninger. Dermed er det vist, at (b) og (c) er ækvivalente. \square

Med udgangspunkt i betingelsers tilsvarende vektorer kan givne betingelser siges at være lineært uafhængige, hvis de tilsvarende vektorer er lineært uafhængige. Med dette og sætning 5.3(a) kan hjørnepunkterne defineres som mulige løsninger, hvor n lineært uafhængige

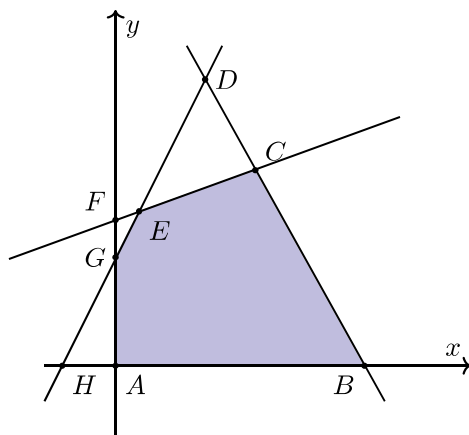
betingelser er bindende. Bemærk, at alle betingelser skal være opfyldt, for at et givent punkt kan være en mulig løsning, samt at et punkt ikke behøver at opfylde alle betingelser for at kunne have n bindende betingelser.

Definition 5.9

Lad \mathcal{P} være en polyede defineret med lineære ligheds- og ulighedsbetingelser og lad \mathbf{x} være en vektor i \mathbb{R}^n .

- (a) Vektoren \mathbf{x} er en **basal løsning**, hvis:
 - (i) Alle lighedsbetingelser er opfyldt.
 - (ii) Af de bindende betingelser er der n af dem, som er lineært uafhængige.
- (b) Vektoren \mathbf{x} er en **basal mulig løsning**, hvis \mathbf{x} er en *basal løsning*, og alle betingelser er opfyldt.

Bemærk, at hvis en polyede er defineret med m lineære betingelser og $m < n$, så eksisterer der ikke et punkt med n bindende betingelser. Dette medfører, at der hverken er basale løsninger eller basale mulige løsninger.



Figur 5.10: Punkterne A, B, C, D, E, F, G og H er basal løsninger, hvoraf A, B, C, E og G alle er basal mulige løsninger.

Tre definitioner, som ønsker at beskrive det samme, er blevet givet. Det er muligt at skifte mellem definitionerne efter ønske, da de er ækvivalente.

Sætning 5.4

Lad \mathcal{P} være en ikke-tom polyede og lad vektoren $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$. Så er følgende udsagn ækvivalente:

- (a) \mathbf{x} er et *ekstremumpunkt*.
- (b) \mathbf{x} er et *hjørnepunkt*.
- (c) \mathbf{x} er en *basal mulig løsning*.

Bevis 5.4

Lad P være en polyede defineret ved betingelser på formen $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i$ og $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$.

Lad $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ være et hjørnepunkt. Jævnfør definition 5.7 eksisterer der så et $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, således at $\mathbf{c}^T \mathbf{x} < \mathbf{c}^T \mathbf{y}$ for alle \mathbf{y} , som opfylder $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$ og $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. Hvis $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$ og $0 \leq \lambda \leq 1$, så $\mathbf{c}^T \mathbf{x} < \mathbf{c}^T \mathbf{y}$ og $\mathbf{c}^T \mathbf{x} < \mathbf{c}^T \mathbf{z}$. Dette medfører, at $\mathbf{c}^T \mathbf{x} < \mathbf{c}^T (\lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{z})$, som betyder, at $\mathbf{x}^T \neq \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{z}$. Derfor kan \mathbf{x} ikke blive udtrykt som en kombination af to andre elementer i \mathcal{P} , hvilket betyder, at \mathbf{x} er et ekstremumpunkt ifølge definition 5.6. Hermed (b) \Rightarrow (a).

Antag, at $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ ikke er en basal mulig løsning og lad $I = \{i \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i\}$. Da \mathbf{x} ikke er en basal mulig løsning, må der ikke eksistere n lineært uafhængige vektorer af typen \mathbf{a}_i , $i \in I$. Derfor må vektorerne \mathbf{a}_i , $i \in I$, ligge i et ægte underrum af \mathbb{R}^n og der eksisterer derfor en ikke-nulvektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, således at $\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} = 0$ for alle $i \in I$. Lad ϵ være et lille, positivt tal, og betragt vektorerne $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \epsilon \mathbf{d}$ og $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \epsilon \mathbf{d}$. Bemærk, at $\mathbf{a}_i^T \mathbf{y} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$, for $i \in I$. Endvidere haves, at $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} > b_i$ for $i \notin I$ og givet, at ϵ er lille nok, haves $\mathbf{a}_i^T \mathbf{y} > b_i$ for $i \notin I$. Det er her tilstrækkeligt at vælge ϵ , således at $\epsilon |\mathbf{a}_i^T \mathbf{d}| < \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i$ for alle $i \notin I$. Når ϵ er lille nok, haves det, at $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$, og med samme argumentation haves, at $\mathbf{z} \in \mathcal{P}$. Dette betyder, at \mathbf{x} ikke er et ekstremumpunkt, da $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{y} + \mathbf{z}}{2}$. Ved kontraponering ses (a) \Rightarrow (c).

Lad \mathbf{x} være en basal mulig løsning, lad $I = \{i \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i\}$ og lad $\mathbf{x} = \sum_{i \in I} \mathbf{a}_i$. Så haves, at

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{i \in I} \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = \sum_{i \in I} b_i.$$

Yderligere haves, at $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i$ for ethvert $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ og ethvert i , og

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \sum_{i \in I} \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq \sum_{i \in I} b_i. \quad (5.1)$$

Dette viser, at \mathbf{x} er en optimal løsning til minimumsproblemet $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ over \mathcal{P} . Yderligere holder uligheden i ligning 5.1, hvis og kun hvis $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$ for alle $i \in I$. Da \mathbf{x} er en basal mulig løsning, er der n lineært uafhængige betingelser, som er bindende i \mathbf{x} , og \mathbf{x} er en entydig løsning til ligningssystemet $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$, $i \in I$. Det følger derfor, at \mathbf{x} er entydigt minimum til $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ over \mathcal{P} og dermed et hjørnepunkt til \mathcal{P} . Hermed (c) \Rightarrow (b). \square

Da en vektor er en basal mulig løsning, hvis og kun hvis det er et ekstremumpunkt og da definitionen på et ekstremumpunkt ikke refererer til en specifik repræsentation af

polyeden, kan det konkluderes, at basale mulige løsninger er uafhængige af den valgte repræsentation.

Korollar 5.1

Der kan kun være et endeligt antal af basale løsninger og basale mulige løsninger, givet der er et endeligt antal af lineære ulighedsbetingelser.

Bevis 5.5

Betragt et system af m lineære ulighedsbetingelser for vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ved enhver basal løsning er der n lineære ulighedsbetingelser, som er bindende. Da n bindende lineære ulighedsbetingelser definerer et entydigt punkt, følger det, at en anden basal løsning må have en anden mængde af n bindende lineære ulighedsbetingelser. Dette betyder, at antallet af basale løsninger har en øvre begrænsning, som afhænger af mængden af forskellige måder, hvorpå n betingelser kan udvælges af de m betingelser. \square

5.2.1 Tilstødende mulige løsninger

To forskellige basale løsninger til samme mængde af lineære betingelser i \mathbb{R}^n siges at være tilstødende, hvis der findes $n - 1$ lineært uafhængige betingelser, som er bindende ved begge. Hvis de to basale løsninger er basale mulige løsninger, så er det forbindende linjestykke en af løsningsmængdens kanter.

5.3 Polyeder på standardform

Som beskrevet i afsnit 4.2, kan optimeringsproblemer opskrives på standardform. Dette korresponderer med polyeder, der ligeledes kan opskrives på standardform: $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, x \geq 0\}$, hvor A er en $m \times n$ matrix. \mathcal{P} er her et *polyede på standardform*. I de fleste tilfælde er det en fordel at antage, at de m rækker i A er lineært uafhængige. I sætning ?? vises endvidere, at antagelsen om, at rækkerne er uafhængige, kan foretages, da de svarer til overflødige betingelser, som kan udelades. Som det ses i definition ??, skal der være n aktive begrænsninger i spil for at finde en basal mulig løsning. Såfremt $m \neq n$, skal der derfor vælges $n - m$ variable x_i med henblik på, at sætte disse $x_i = 0$, hvilket gør begrænsningerne $x_i \geq 0$ aktive. Det er dog ikke uvæsentligt hvilke af disse variable der omdannes til 0 hvilket belyses af sætning 5.5.

Sætning 5.5

Ved begrænsningerne $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ og $\mathbf{x} \geq 0$. Antag at A er en $m \times n$ matrix og har lineært uafhængige rækker. Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ er en basal løsning, hvis og kun hvis: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ og der eksisterer indexer $B(1), \dots, B(m)$ hvorom det gælder:

- (a) Søjlernerne $\mathbf{A}_{B(1)}, \dots, \mathbf{A}_{B(m)}$ er lineært uafhængige.
- (b) Hvis $i \neq B(1), \dots, B(m)$, så er $x_i = 0$.