løsning er der n lineære ulighedsbetingelser, som er bindende. Da n bindende lineære ulighedsbetingelser definerer et entydigt punkt, følger det, at en anden basal løsning må have en anden mængde af n bindende lineære ulighedsbetingelser. Dette betyder, at antallet af basale løsninger har en øvre begrænsning, som afhænger af mængden af forskellige måder, hvorpå n betingelser kan udvælges af de m betingelser. □

5.2.1 Tilstødende mulige løsninger

To forskellige basale løsninger til samme mængde af lineære betingelser i $\mathbb{R}^n$ siges at være tilstødende, hvis der findes $n-1$ lineært uafhængige betingelser, som er bindende ved begge. Hvis de to basale løsninger er basale mulige løsninger, så er det forbindende linjestykke en af løsningsmængdens kanter.

5.3 Polyeder på standardform

Som beskrevet i afsnit 4.2, kan optimeringsproblemer opskrives på standardform. Dette korresponderer med polyeder, der ligeledes kan opskrives på standardform: $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, hvor er A er en $m \times n$ matrix. $\mathcal{P}$ er her et *polyeder på standardform*. I de fleste tilfælde er det en fordel at antage, at de m rækker i A er lineært uafhængige. I sætning 5.6 vises endvidere, at antagelsen om, at rækkerne er uafhængige, kan foretages, da de svarer til overflødige betingelser, som kan udelades. Som det ses i definition 5.9, skal der være n aktive begrænsninger i spil for at finde en basal mulig løsning. Såfremt $m \neq n$, skal der derfor vælges $n - m$ variable x_i med henblik på, at sætte disse $x_i = 0$, hvilket gør begrænsningerne $x_i \geq 0$ aktive. Det er dog ikke uvæsentligt, hvilke af disse variable der omdannes til 0 hvilket belyses af sætning 5.5.

Sætning 5.5

Ved begrænsningerne $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ og $\mathbf{x} \geq 0$. Antag, at A er en $m \times n$ matrix og har lineært uafhængige rækker. Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ er en basal løsning, hvis og kun hvis $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, og der eksisterer indekser $B(1), \ldots, B(m)$, hvorom der gælder følgende:

(a) Søjlerne $\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}$ er lineært uafhængige.

(b) Hvis $i \neq B(1), \ldots, B(m)$, så er $x_i = 0$.

Bevis 5.6
Betragt et $x \in \mathbb{R}^n$ og antag, at der eksisterer indekser $\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}$, der opfylder (a) og (b). Det gælder således, at de aktive begrænsninger, at $x_i = 0$, når $i \neq B(1), \ldots, B(m)$, samt at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dette implicerer, da det forrige gælder, at

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_{B(i)} x_{B(i)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i x_i = A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Da søjlerne $\mathbf{A}_{B(i)} x_{B(i)}$ for $i = 1, \ldots, m$ er lineært uafhængige, kan $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$ bestemmes entydigt. Altså har ligningssystemet skabt af de aktive begrænsninger en entydig løsning. Jævnfør sætning 5.3, følger det, at der er n aktive begrænsninger, hvoraf $\mathbf{x}$ er en basal løsning.

Antag nu, at $\mathbf{x}$ er en basal løsning. Det skal nu vises, at (a) og (b) da er opfyldt. Lad $x_{B_1}, \ldots, x_{B_k}$ være ikke-nul komponenter i $\mathbf{x}$. Eftersom $\mathbf{x}$ er en basal løsning, følger nu, at ligningssysemet givet ved de aktive begrænsninger $x_i = 0$, når $i \neq B(1), \ldots, B(k)$, samt $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i x_i = \mathbf{b}$, har en entydig løsning. Det samme må derfor gøre sig gældende for $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{B(i)} x_{B(i)} = \mathbf{b}$. Det følger derfor, at søjlerne i $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(k)}$ er lineært uafhængige. Hvis dette ikke var tilfældet, ville der findes løsninger til $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{A}_{B(i)} \lambda_i = \mathbf{0}$ udover den trivielle, hvor $\lambda_i = 0$ for $i = 1, 2, \ldots, k$, hvilket ville betyder, at løsningen $\mathbf{x}$ ikke er entydig. Dette er i modstrid til at denne er en basal løsning. $\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(k)}$ er således lineært uafhængige og $k \leq m$. Da A har m lineært uafhængige rækker, er der ligeledes m lineært uafhængige søjler. Der kan derfor findes $m - k$ søjler $A_{B(k+1)}, \ldots, A_{B(m)}$, hvorom det gælder, at søjlerne $\mathbf{A}_{B(i)}$ med $i = 1, \ldots, m$, er lineært uafhængige. Da $k \leq m$ gælder det, hvis $i \neq B(1), \ldots, B(m)$, at $i \neq B(1), \ldots, B(k)$ og $x_i = 0$. □

Som følge af sætning 5.5 kan basale løsninger konstrueres ved hjælp af følgende procedure.

1. Vælg m lineært uafhængige søjler $\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}$.
2. Lad $x_i = 0$ for $i \neq B(1), \ldots, B(m)$.
3. Løs ligningssystemet med de m ligninger, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$.

Hvis løsningen, der er konstrueret af denne procedure, er ikke-negativ, så er løsningen en basal mulig løsning.

Det bevises nu, at antagelsen om at rækkerne var lineært uafhængige, kunne fortages.

Sætning 5.6

Lad $P = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, x \geq 0\}$ være et ikke-tom polyeder, hvor A er en $m \times n$ matrix med rækker $\mathbf{a}_1^T, \ldots, \mathbf{a}_m^T$. Antag, at $\text{rang}(A) = k < m$ og at rækkerne $\mathbf{a}_{i1}^T, \ldots, \mathbf{a}_{ik}^T$ er lineært uafhængige. Givet polyederet

$$Q = \{x \mid \mathbf{a}_{i1}^T x = b_{i1}, \ldots, \mathbf{a}_{ik}^T x = b_{ik}, x \geq 0\}$$

så er $Q = P$.

Bevis 5.7

Det bevises i tilfældet af $i_1 = 1, \ldots, i_k = k$, som er tilfældet, hvor de første k rækker er lineært uafhængige. Alle andre tilfælde kan omskrives til dette tilfælde ved rækkeombytning. Det gælder, at $\mathcal{P}$ er en delmængde af Q, da alle elementer i $\mathcal{P}$ opfylder Q's betingelser. Det skal dernæst vises, at Q er en delmængde af $\mathcal{P}$. Da $\text{rang}(A) = k$, har rækkerummet af A dimension k og et basis bestående af søjlerne $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$. Derfor kan kan alle rækker $\mathbf{a}_i$ af A blive udtrykt som linearkombination af de andre rækker ved $\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} \mathbf{a}_j$ for skalarer λ_{ij}. Lad x være et element i $\mathcal{P}$. Så gælder

$$b_i = \mathbf{a}_i x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} \mathbf{a}_j x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} b_j,$$

for $i = 1, \ldots, m$. Betragt nu et element y i Q. Dette vil også være tilhøre $\mathcal{P}$, da

$$\mathbf{a}_i y = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} \mathbf{a}_j y = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} b_j = b_i.$$

Dermed er det vist, at Q er en delmængde til $\mathcal{P}$. Dermed vist at $Q = \mathcal{P}$, da $\mathcal{P}$ ligeledes er en delmængde af Q. □

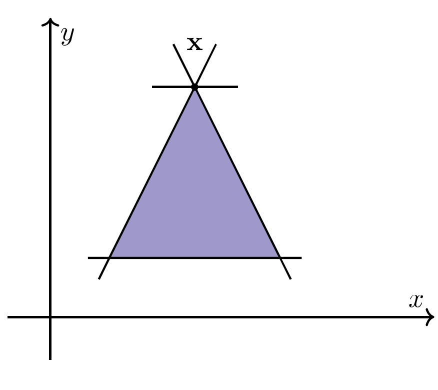
5.4 Degenerering

Fra definition 5.9 fremkommer det, at der skal være n aktive betingelser, for at $\mathbf{x}$ er en basal løsning. Nedenfor defineres tilfælde, hvor der er flere end n aktive betingelser.

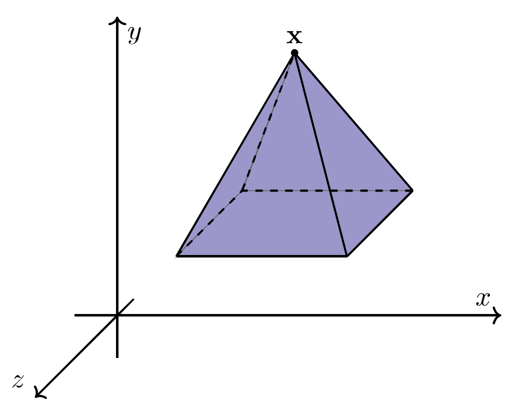
Definition 5.10

En basal løsning $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kaldes **degenereret**, hvis der er mere end n aktive betingelser for $\mathbf{x}$.

En degenereret basal løsning har altså mere end de nødvendige n aktive betingelser. I $\mathbb{R}^2$ findes en degenereret løsning i et skæringspunkt af tre eller flere linjer. Til sammenligning findes en degenereret løsning i $\mathbb{R}^3$ i et skæringspunkt af fire eller flere flader. På figur 5.13 ses $\mathbf{x}$, som er en degenereret basal løsning i $\mathbb{R}^2$, og på figur 5.14 ses $\mathbf{x}$, som er en degenereret basal løsning i $\mathbb{R}^3$. Generelt vil en degenereret løsning opstå i skæringspunktet med mindst $n+1$ hyperplaner i $\mathbb{R}^n$.



Figur 5.13: *Et polyeder med en degenereret basal løsning* $\mathbf{x}$ *i* $\mathbb{R}^2$.



Figur 5.14: *Et polyeder med en degenereret basal løsning* $\mathbf{x}$ *i* $\mathbb{R}^3$.

Ligeledes findes en definition for en degenereret basal løsning for polyeder på standardform. Jævnfør definition 5.3 skal der være m aktive betingelser og $n - m$ aktive ikke-negativitetsbetingelserne. Dermed skal et polyeder på standardform have flere end $m - n$ ikke-negativitetsbetingelserne for at have en degenereret basal løsning, hvilket er formuleret i definition 5.11.

Definition 5.11

Lad $\mathcal{P}$ være et polyeder på standardform $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, x \geq 0\}$, og lad m være antallet af rækker i A. En basal løsning $\mathbf{x}$ for $\mathcal{P}$ kaldes degenereret, hvis der er mere end $n - m$ af komponenterne i $\mathbf{x}$, der er lig 0.

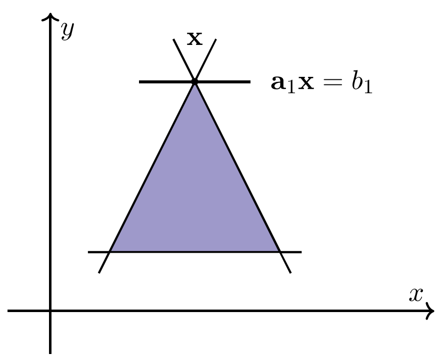
Eksempel 5.1

Betragt et polyeder $\mathcal{P}$ på standardform:

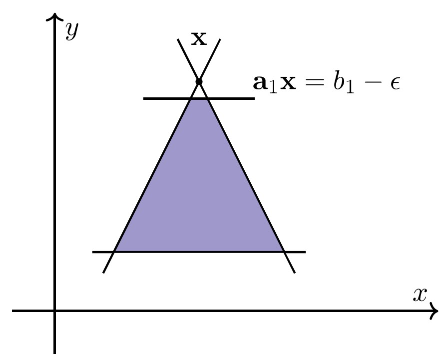
$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 4x_2 = 0,\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 16,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$

For $\mathcal{P}$ er $n = 3$ dimensionen og $m = 2$ aktive betingelser. Løsningen $\mathbf{x}$ kaldes degenereret, hvis flere end $n - m = 1$ af komponenterne i $\mathbf{x}$ er lig nul. Løsningen $\mathbf{x} = [\ 0\ 0\ 4\ ]^T$ er en degenereret basal løsning, da der er flere end ét komponent i $\mathbf{x}$, som er lig nul. Derimod er $\mathbf{x} = [\ 4\ 2\ 0\ ]^T$ en basal løsning, da der er kun er ét komponent i $\mathbf{x}$, som er lig 0.

I forbindelse med simplex-metoden har det vist sig at være problematisk med basale løsninger, der er degenererede, hvorfor disse vil forsøges undgået. Dette vil blive belyst i afsnit 6. Ved en mindre ændring ϵ i en overflødig aktiv betingelse vil en degenereret basal løsning kunne undgås. På figur 5.15 ses $\mathbf{a}_1\mathbf{x} = b_1$, som er en overflødig aktiv betingelse, der medfører en degenereret basal løsning $\mathbf{x}$. En lille ændring ϵ vil ændre den degenererede basale løsning til en basal løsning, hvilket kan ses på figur 5.16, hvor $\mathbf{a}_1\mathbf{x} = b_1 - \epsilon$.



Figur 5.15: *En overflødig aktiv betingelse $\mathbf{a}_1\mathbf{x} = b_1$, der gør at $\mathbf{x}$ er en degenereret basal løsning.*



Figur 5.16: *En lille ændring i den aktive betingelse $\mathbf{a}_1\mathbf{x} = b_1 - \epsilon$, der gør at $\mathbf{x}$ ikke er en degenereret basal løsning.*

I praktiske problemer, hvor A og $\mathbf{b}$ har specifikke værdier , viser det sig dog ofte at der opstår degenererede basale løsninger.

5.5 Eksistens af ekstremumspunkter

Dette afsnit belyser tilstrækkelige og nødvendige betingelser for, at et polyeder har mindst ét ekstremumspunkt, da dette ikke er tilfældet for alle polyedre. Dette gøres ved at undersøge, om polyederet indeholder en *uendelig linje*.

Definition 5.12

Et polyeder $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^n$ indeholder en **uendelig linje**, hvis der eksisterer en vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ og en ikke-nulvektor $\mathbf{d} \in \mathcal{P}$, således at $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \in \mathcal{P}$ for alle skalarer λ.

Af denne definition kommer følgende sætning.

Sætning 5.7

Lad $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i, i = 1, 2, \ldots, m\}$ være et ikke-tomt polyeder. Så er følgende udsagn ækvivalente.

(a) $\mathcal{P}$ har mindst ét ekstremumspunkt.

(b) $\mathcal{P}$ indeholder ikke en uendelig linje.

(c) Der eksisterer n vektorer i mængden $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, som er lineært uafhængige.

Bevis 5.8

Lad $\mathbf{x}$ være et element i $\mathcal{P}$ og lad $I = \{i \mid \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i\}$. Hvis n af vektorerne $\mathbf{a}_i, i \in I$, svarende til de bindende betingelser, er lineært uafhængige, så er $\mathbf{x}$ en basal mulig løsning, og der eksisterer et ekstremumspunkt. Hvis dette ikke er tilfældet, ligger alle vektorerne $\mathbf{a}_i, i \in I$, i et ægte underrum af $\mathbb{R}^n$, og der eksisterer en ikke-nulvektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, således at $\mathbf{a}_i^T\mathbf{d} = 0$ for alle $i \in I$. Betragt linjen bestående af alle punkter på formen $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}$, hvor λ er en vilkårlig skalar. For $i \in I$ haves, at $\mathbf{a}_i^T\mathbf{y} = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} + \lambda\mathbf{a}_i^T\mathbf{d} = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i$. De betingelser, der er bindende i $\mathbf{x}$, er således også bindende i alle punkter på linjen. Antages det, at $\mathcal{P}$ ikke indeholder en uendelig linje, må der eksisterer et λ, hvor en af betingelser ikke længere er opfyldt. I punktet, hvor betingelsen er ved at blive brudt, må en ny betingelse blive bindende. Derfor må der eksistere et λ_j og et $j \notin I$, således at $\mathbf{a}_j^T(\mathbf{x}+\lambda_j\mathbf{d}) = b_j$.

Det haves, at $\mathbf{a}_j^T\mathbf{x} \neq b_j$, da $j \notin I$, og $\mathbf{a}_i^T(\mathbf{x} + \lambda_j\mathbf{d}) = b_j$. Derfor er $\mathbf{a}_j^T\mathbf{d} \neq 0$ og $\mathbf{a}_i^T\mathbf{d} = 0$ for alle $i \in I$. Derfor er $\mathbf{d}$ ortogonal med alle linearkombinationer af vektorerne $\mathbf{a}_i, i \in I$. Da $\mathbf{d}$ ikke er ortogonal med $\mathbf{a}_j$, konkluderes det, at $\mathbf{a}_j$ ikke er en linearkombination af vektorerne $\mathbf{a}_i, i \in I$. Det er derfor muligt at forøge antallet af bindende lineært uafhængige betingelser med mindst én ved at gå fra $\mathbf{x}$ til $\mathbf{x} + \lambda_j\mathbf{d}$. Dette argument gentages indtil et punkt er nået, hvor der er n lineært uafhængige betingelser, som er bindende. Dette punkt vil således være en basal mulig løsning, da der er n bindende betingelser og punktet er inde for $\mathcal{P}$, hvilket viser, at (b) $\to$ (a).

Hvis $\mathcal{P}$ har et ekstremumspunkt $\mathbf{x}$, så er $\mathbf{x}$ en basal mulig løsning og der eksisterer n betingelser, som er bindende ved $\mathbf{x}$. Betingelsernes tilsvarende vektorer $\mathbf{a}_i$ er lineært uafhængige, hvilket giver, at (a) $\to$ (c).

Lad n af vektorerne $\mathbf{a}_i$ være lineært uafhængige og antag, at det er $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, som er lineært uafhængige. Antag, at $\mathcal{P}$ indeholder en linje $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}$, hvor $\mathbf{d}$ ikke er en nulvektor. Så haves, at $\mathbf{a}_i^T(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}) \geq b_i$ for alle i og alle λ. Det konkluderes, at $\mathbf{a}_i^T\mathbf{d} = 0$ for alle i, da både $\mathbf{a}_i^T\mathbf{d} < 0$ og $\mathbf{a}_i^T\mathbf{d} > 0$ medfører, at der eksisterer et λ, som bryder betingelsen. Da vektorerne $\mathbf{a}_i, i = 1, 2, \ldots, n$, er lineært uafhængige, medfører det, at $\mathbf{d} = \mathbf{0}$. Dette giver en modstrid og derfor må (c) $\rightarrow$ (b). $\square$

Bemærk, at begrænsede polyeder ikke indeholder en uendelig linje. Ligeledes indeholder den positive kvadrant $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ ikke uendelige linjer og da polyeder på standardform befinder sig i den positive kvadrant, indeholder disse heller ikke uendelige linjer.

Korollar 5.2

Ethvert begrænset ikke-tomt polyeder og ethvert ikke-tomt polyeder på standardform har mindst én basal mulig løsning.

Bevis 5.9
Bevis udelades. $\square$

5.6 Optimering af ekstremumspunkter

Så længe en optimal løsning til et lineært optimeringsproblem eksisterer, og løsningsmængden indeholder ét eller flere ekstremumspunkter, så findes en optimal løsning til det lineære programmeringsproblem blandt ekstremumspunkterne i løsningsmængden. Sætning 5.8 fastslår dette for polyedre på standardform og begrænsede polyedre.

Sætning 5.8

Lad et lineært optimeringsproblem være, at en objektfunktion $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ skal minimeres over et polyeder $\mathcal{P}$. Antag, at der i $\mathcal{P}$ er mindst ét ekstremumspunkt, samt at en optimal løsning eksisterer. Så eksisterer der en optimal løsning, som er et ekstremumspunkt i $\mathcal{P}$.

Bevis 5.10
Lad et lineært optimeringsproblem være, at $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ skal minimeres over et polyeder $\mathcal{P}$. Antag, at der i $\mathcal{P}$ er mindst ét ekstremumspunkt, samt at en optimal løsning eksisterer. Lad $Q \neq \emptyset$ være mængden af optimale løsninger, lad $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$, og lad v være den optimale værdi for $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Da $\mathcal{P}$ er løsningsmængden, og $Q \subset \mathcal{P}$, så er $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{c}^T\mathbf{x} = v\}$ og dermed også et polyeder. Jævnfør sætning 5.7 indeholder $\mathcal{P}$ ingen linjer, hvormed Q ikke indeholder linjer. Jævnfør sætning 5.7 indeholder Q dermed et ekstremumspunkt.
Lad nu den optimale løsning $\mathbf{x}^*$ være et ekstremumspunkt i Q. Ved hjælp af modstrid vises nu, at $\mathbf{x}^*$ også er et ekstremumspunkt i P. Antag derfor, at $\mathbf{x}^*$ *ikke* er et ekstremumspunkt i $\mathcal{P}$. Så eksisterer der $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}^*$, og $\mathbf{z} \in P$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}^*$, samt et $\lambda \in [0, 1]$, således $\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}$. Deraf følger, at $v = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{c}^T\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{c}^T\mathbf{z}$. Desuden må det gælde, at $\mathbf{c}^T\mathbf{y} \geq v$ og $\mathbf{c}^T\mathbf{z} \geq v$, da v er den optimale værdi. Dette medfører dog, at $\mathbf{c}^T\mathbf{y} = \mathbf{c}^T\mathbf{z} = v$, samt at $\mathbf{y} \in Q$ og $\mathbf{z} \in Q$. Derved opstår modstriden, da $\mathbf{x}^*$ er et ekstremumspunkt i Q. Således er det ved modstrid vist, at $\mathbf{x}^*$ er et ekstremumspunkt i $\mathcal{P}$, samt at det er en optimal løsning, da $\mathbf{x}^* \in Q$. $\square$

Som nævnt gælder sætning 5.8 kun for polyedre på standard form og begrænsede polyedre. Sætning 5.9 kan betragtes som en udvidelse af sætning 5.8 og viser, at der findes en optimal løsning, så længe den optimale værdi af objektfunktionen er endelig.

Sætning 5.9

Lad et lineært optimeringsproblem være, at $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ skal minimeres over et polyeder P. Antag, at der i P er mindst ét ekstremumspunkt. Så er den optimale værdi af objektfunktionen lig $-\infty$, eller også findes et optimalt ekstremumspunkt.

Bevis 5.11
Bemærk indledningsvist, at et element $\mathbf{x}$ i et polyder $\mathcal{P}$ har rang$(\mathbf{x}) = k$, hvis der findes præcis k lineært uafhængige betingelser, der er aktive ved $\mathbf{x}$. Antag, at den optimale værdi af objektfunktionen er endelig.

Lad et polyeder $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\}$ og bemærk, at $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, hvor $\mathbf{x}$ har rang$(\mathbf{x}) = k$, $k < n$. Lad $i = \{i \mid \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i\}$, hvor $\mathbf{a}_i^T$ er den i'te række af A. Da $k < n$, ligger vektorerne $\mathbf{a}_i$, $i \in I$, i et ægte underrum af $\mathbb{R}^n$, og der kan vælges en ikke-nul vektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}$, som er ortogonal til hver $\mathbf{a}_i$. Det kan desuden antages, at $\mathbf{c}^T\mathbf{d} \leq \mathbf{0}$, ved muligvis at tage negationen af $\mathbf{d}$.

Antag nu, at $\mathbf{c}^T\mathbf{d} < 0$, og lad $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, være en halvlinje. Alle punkter på denne halvlinje opfylder $\mathbf{a}_i^T\mathbf{y} = b_i$, som i beviset for sætning 5.7. Hvis hele halvlinjen var indeholdt i $\mathcal{P}$, havde den optimale værdi for objektfunktionen været $-\infty$; men det antages indledningsvist i dette bevis, at denne værdi er endelig. Så er ikke hele halvlinjen indeholdt i $\mathcal{P}$, og den udgår dermed fra $\mathcal{P}$ på et tidspunkt. Når halvlinjen er på grænsen af $\mathcal{P}$, lige inden dens udgang derfra, er der et optimalt $\lambda^* > 0$ og et $j \in I$, således at $\mathbf{a}_i^T(\mathbf{x}+\lambda^*\mathbf{d}) = b_j$.

Lad nu $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda^*\mathbf{d}$ og bemærk, at $\mathbf{c}^T\mathbf{y} < \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, da $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Det vides fra beviset for sætning 5.7, at $\mathbf{a}_j$ er lineært uafhængig af $\mathbf{a}_i$, samt at rangen af $\mathbf{y}$ minimum er $k+1$.

Antag nu, at $\mathbf{c}^T\mathbf{d} = 0$, og lad en linje være $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}$, hvor λ er en arbitrær skalar. Eftersom $\mathcal{P}$ ikke indeholder linjer, må linjen nødvendigvis udgå fra P på et tidspunkt. Som før haves nu igen en vektor $\mathbf{y}$, hvis rang er højere end rangen af $\mathbf{x}$. Da $\mathbf{c}^T\mathbf{d} = 0$, haves desuden, at $\mathbf{c}^T\mathbf{y} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Det er nu vist, at der i begge tilfælde findes et punkt $\mathbf{y}$ med højere rang end $\mathbf{x}$, således $\mathbf{c}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Antag, at denne proces nu fortsættes. Så findes en vektor $\mathbf{w}$ med rang$(\mathbf{w}) = n$, hvormed den er en basal mulig løsning, således at $\mathbf{c}^T\mathbf{w} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Lad $w_1, w_2, \ldots, w_r$ være de basale mulige løsninger i $\mathcal{P}$, og lad $\mathbf{w}^*$ være en basal mulig løsning, således at $\mathbf{c}^T\mathbf{w}^* \leq \mathbf{c}^T\mathbf{w}_i$ for alle i. Eftersom der for alle $\mathbf{x}$ findes et i, således at $\mathbf{c}^T\mathbf{w}_i \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, følger det, at $\mathbf{c}^T\mathbf{w}^* \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, hvormed vektoren $\mathbf{w}^*$ er den optimale løsning. $\square$

Eftersom ethvert lineært optimeringsproblem kan omskrives til et tilsvarende problem på standardform, kan sætning 5.9 siges at gælde generelt. Deraf haves korollar 5.3.

Korollar 5.3

Lad et lineært optimeringsproblem være, at $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ skal minimeres over et ikke-tomt polyeder. Så er den optimale værdi af objektfunktionen lig $-\infty$, eller også findes en optimal løsning.

5.7 Repræsentation af begrænsede polyedre

Et polyeder har indtil videre i nærværende rapport været defineret ved uligheder. I dette afsnit introduceres et alternativ til dette. Det vises, at et begrænset polyeder kan repræsenteres som et konvekst hylster af dets ekstremumspunkter. Dette er givet ved sætning 5.10.

Sætning 5.10

Et ikke-tomt og begrænset polyeder er givet ved det konvekse hylster af dets ekstremumspunkter.

Bevis 5.12
Enhver konveks kombination af ekstremumspunkterne er et element i polyederet, eftersom polyederet er en konveks mængde. Derfor ønskes nu at bevise at ethvert element i et begrænset polyeder kan repræsenteres ved en konveks kombination af ekstremumspunkterne.

For at bevise dette defineres dimensionen af et polyeder $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ som det mindste heltal k, så polyederet $\mathcal{P}$ er betinget af k-dimensionelle tilgrænsede underrum af $\mathbb{R}^n$. Beviset fortsættes dernæst ved at bevise dimensionen af $\mathcal{P}$ ved induktion. Antag, at $\mathcal{P}$ er nul-dimensionel, så polyederet indeholder et enkelt punkt. Punktet er et ekstremumspunkt i $\mathcal{P}$ og resultatet er derfor sandt.

Induktionsskridtet er dernæst at bevise, at det er sandt for alle polyedre med færre dimensioner end k. Lad derfor $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i, i = 1, \ldots, m\}$ være et ikke-tom begrænset k-dimensionelt polyeder. Så er $\mathcal{P}$ indrammet i et tilgrænset underrum S i $\mathbb{R}^n$, som er givet ved følgende:

$$S = \{\mathbf{x}_0 + \lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{x}_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\},$$

hvor $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ er vektorer i $\mathbb{R}^n$. Lad $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-k}$ være lineært uafhængige vektorer, der er ortogonale med vektorerne $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$. Lad dernæst $g_i = \mathbf{f}_i^T\mathbf{x}_0$, gældende for $i = 1, \ldots, n-k$, således at ethvert element $\mathbf{x}$ i S opfylder

$$\mathbf{f}_i^T\mathbf{x} = g_i, \text{ for } i = 1, \ldots, n-k.$$

Siden $\mathcal{P} \subset S$, så skal det være sandt for ethvert element i $\mathcal{P}$. Lad $\mathbf{z}$ være et arbitrært element i $\mathcal{P}$. Hvis det gælder for $\mathbf{z}$, at punktet er et ekstremumspunkt i $\mathcal{P}$, så er $\mathbf{z}$ en triviel konveks kombination af ekstremumspunkterne i $\mathcal{P}$, og beviset er derfor færdigt. Hvis $\mathbf{z}$ derimod ikke er et ekstremumspunkt i $\mathcal{P}$, skal det bevises, at $\mathbf{z}$ er en konveks kombination af ekstremumspunkterne i $\mathcal{P}$. Lad derfor $\mathbf{y}$ være et arbitrært ekstremumspunkt og dan derfor en halvlinje indeholdende alle punkter af formen $\mathbf{z} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{y})$, hvor λ angiver en ikke-negativ skalar. Da det gælder, at $\mathcal{P}$ er et begrænset polyeder, vil denne halvlinje nødvendigvis forlade $\mathcal{P}$ og derfor overskride en vilkårlig begrænsning, $\mathbf{a}_{i^*}^T\mathbf{x} \geq b_{i^*}$. Ved at anskue hvad det vil resultere i at bryde denne begrænsning, vil der findes et $\lambda^* \geq 0$ og $\mathbf{u} \in \mathcal{P}$, så følgende gælder:

$$\mathbf{u} = \mathbf{z} + \lambda^*(\mathbf{z} - \mathbf{y}), \text{ og } \mathbf{a}_{i^*}^T\mathbf{u} = b_{i^*}$$

Eftersom begrænsningen $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i$ overskrides, hvis λ vokser større end λ^*, så følger det, at $\mathbf{a}_{i^*}^T(\mathbf{z} - \mathbf{y}) < 0$. Da dette gælder, lad derfor Q være et polyeder defineret ved

$$Q = \{\mathbf{x} \in \mathcal{P} \mid \mathbf{a}_{i^*}^T\mathbf{x} = b_{i^*}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i, i = 1, \dots, m, \ \mathbf{a}_{i^*}^T\mathbf{x} = b_{i^*}\}.$$

Da $\mathbf{z}, \mathbf{y} \in P$, så følger at$\mathbf{f}_i^T\mathbf{z} = g_i = \mathbf{f}_i^T\mathbf{y}$, hvilket viser, at $\mathbf{z} - \mathbf{y}$ er ortogonal med enhver vektor $\mathbf{f}_i$, for alle $i = 1, \dots, n-k$. På den anden side er det vist, at $\mathbf{a}_{i^*}^T(\mathbf{z} - \mathbf{y}) < 0$, så det gælder, at vektoren $\mathbf{a}_{i^*}$ ikke er en linear kombination af vektorerne $\mathbf{f}_i$, og derfor ikke er lineært uafhængige. Bemærk derfor, at

$$Q \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_{i^*}^T\mathbf{x} = b_{i^*}, \ \mathbf{f}_i^T\mathbf{x} = g_i, \ i = 1, \dots, n-k\},$$

gældende for ethvert element i $\mathcal{P}$. Mængden på højresiden er defineret ved $n - k + 1$ lineært uafhængige lighedsbegrænsninger. Dette betyder derfor, at det tilgrænsede underrum har dimensionen givet ved $k-1$, hvormed polyederet Q højst har dimensionen $k-1$.

Ved afslutningsvis at benytte induktionshypotesen på Q og $\mathbf{u}$ kan udtrykkes ved den konvekse kombination

$$\mathbf{u} = \sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i$$

af ekstremumspunkterne $\mathbf{v}_i$ i polyederet Q, hvor λ_i er ikke-negative skalarer, som summerer til én. Bemærk dernæst, at i et ekstremumspunkt $\mathbf{v}$ skal $\mathbf{a}_i^T\mathbf{v} = b_i$ for n antal lineært uafhængige vektorer $\mathbf{a}_i$. Derfor er $\mathbf{v}$ også et ekstremumspunkt i $\mathcal{P}$. Ved brug af definitionen for λ^* haves derfor, at

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{u} + \lambda^*\mathbf{y}}{1 + \lambda^*}.$$

Dermed er det bevist, at $\mathbf{z}$ er en konveks kombination af ekstremumspunkter i $\mathcal{P}$, da det haves, at

$$\mathbf{z} = \frac{\lambda^*\mathbf{y}}{1 + \lambda^*} + \sum_i \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i}\mathbf{v}_i.$$

□