



Optimering

Lineær programmering

Jens Koldkur
Jonas Bach Christensen
Julie Havbo Lund
Mads Bjerregaard Kjær
Mathias Gammelgaard
Rasmus Jespersgaard

P2-Projekt, Gruppe B303c, Matematik



Institut for Matematiske Fag

Skjernvej 4A

DK-9220 Aalborg Ø

<http://math.aau.dk>

AALBORG UNIVERSITET

STUDENTERRAPPORT

Titel

Optimering

Tema

Lineær algebra

Projektperiode

Forårssemesteret 2020

Projektgruppe

Gruppe B303c

Deltagere

Jens Koldkur

Jonas Bach Christensen

Julie Havbo Lund

Mads Bjerregaard Kjær

Mathias Gammelgaard

Rasmus Jespersgaard

Vejleder

Horia Cornean

Sidetæl

100

Afleveringsdato

19. maj 2020

Abstract

This paper contains an examination of linear programming problems and their geometrical solutions in relation to the simplex method. The paper contains a theoretical introduction to linear algebra together with important definitions and theorems related to this field of study. Afterwards the solution of linear programming problems and notations are introduced, which leads into the geometrical representation of linear programming problems through polyhedrons. In this chapter it is proven that an optimal solution exists in a corner of such a geometrical figure. Lastly the report provides a link between the use of the simplex method, which is a solution algorithm for linear programming problems, and the geometrical representation, as well as the practical application of this. Different implementations of the simplex method are illustrated as well and discussed in regards to their time complexity.

Indhold

Forord	1
Indledning	2
1 Lineær algebra	4
1.1 Matricer og vektorer	4
1.1.1 Udvalgte matricer og vektorer	5
1.1.2 Matrixsum og skalering	5
1.1.3 Matrixtransponering	7
1.1.4 Linearkombination	8
1.1.5 Matrix-vektorprodukt	9
1.1.6 Matrixmultiplikation	11
1.2 Lineære ligningssystemer	14
1.2.1 Ligningssystemer og matricer	15
1.3 Løsning af lineære ligningssystemer	15
1.3.1 Elementære rækkeoperationer	16
1.3.2 Trappeform og reduceret trappeform	17
1.3.3 Pivotindgange	18
1.3.4 Gauss-elimination	19
1.3.5 Rang og nullitet	20
1.4 Span	22
1.5 Lineær uafhængighed	26
1.6 Lineær afbildning	31
1.7 Elementære og inverse matricer	34
1.7.1 Invertibilitet af funktioner	40
1.8 Underrum	41
1.8.1 Underrum for matricer	42
1.8.2 Basis	43
1.8.3 Dimension	44
2 Lineære optimeringsproblemer	45
2.1 Løsninger til lineære programmeringsproblemer	47
2.2 Standardform	50
2.3 Dualitet	52
3 Grafisk løsning	56
3.1 Konvekse mængder og konvekse funktioner	59
3.2 Ekstrema, hjørnepunkter og basale løsninger	63
3.3 Polyedre på standardform	67

3.4	Degenerering	70
3.5	Eksistens af ekstremumpunkter	71
3.6	Optimering af ekstremumpunkter	73
3.7	Repræsentation af begrænsede polyedre	76
4	Simplexmetoden	78
4.1	Praktisk anvendelse af simplexmetoden	78
4.2	Optimale betingelser	82
4.3	Implementering	86
4.3.1	Den naive implementering	87
4.3.2	Den reviderede implementering	88
4.3.3	Fuld-tabel implementeringen	89
4.4	Pivoteringsløkker	90
4.4.1	Lexicografi	90
4.5	Kompleksitet	92
5	Konklusion	94
	Appendicer	95
A	Entydigheden af en matrix på reduceret trappeform	96
B	Span og dimension	99

Forord

Nærværende rapport er udarbejdet af seks studerende på andet semester på bacheloruddannelsen Matematik på Aalborg Universitet. Rapporten er udarbejdet fra 3. februar til 27. maj 2020. Temaet for projektet er optimering, herunder mere specifikt lineær programmering. Formålet med rapporten er at få en forståelse for optimeringsmetoder, samt at formidle mere matematisk præcist. Rapporten er nummereret i afsnit, definitioner, figurer m.m. Beviser afsluttes med \square , der indikerer, at beviset er gennemført. Der skal lyde en tak til vores vejleder Horia Cornean, og vores bi-vejleder Maiken Winther, for at være behjælpelige gennem projektperioden.

Underskrifter

Jens Koldkur

Mads Bjerregaard Kjær

Jonas Bach Christensen

Mathias Gammelgaard

Julie Havbo Lund

Rasmus Jespersgaard

Indledning

I denne rapport afdækkes lineær optimering, også kaldet lineær programmering, med fokus på simplexmetoden. Optimeringsproblemer er en fundamental del af matematikken, og i den anvendte matematik udgør disse en vægtig del af matematikeres virke. Dele af forskningsfeltet betragter George Bernard Dantzig som værende ophavsmand til behandlingen af optimeringsproblemer, som de betragtes i dag, samt til udarbejdelsen af simplexmetoden i 1947 [Bixby, 2012, side 107]. Der er dog til stadighed diskussion om, hvor lineære programmeringsproblemer som matematisk felt stammer fra, da andre peger på Sovjetunionen og behovet for at optimere produktionen i en planøkonomisk kontekst som ophav [Schrijver, 2012, side 155]. Forudsætningen for Dantzigs arbejde med lineære programmeringsproblemer, var hans ansættelse ved Royal Airforce [Bixby, 2012, side 107].

En applikation af lineære programmeringsproblemer opstod i forbindelse med den vestligt kontrollerede sektor af Berlin. Vestberlin lå i Dantzigs samtid dybt inde i den sovjetisk kontrollerede sektor af Tyskland. Som følge af spændingerne mellem Vesteuropa og Sovjetunionen besluttede Josef Stalin at lukke for forsyninger via land til Berlin. Det blev derfor nødvendigt for vestmagterne at etablere en luftbro til Berlin, der gjorde det muligt, trods de sovjetiske restriktioner, at indføre basale fornødenheder til de 2.5 millioner mennesker, som levede i byen [Lay, 2016, Side 1]. Da en sådan måde at indføre varer på er ressourceintensiv, opstod der et behov for at gøre dette optimalt, underlagt de logistiske restriktioner. Det er derfor et matematisk felt, som i sin brug er nært bundet op på praktiske problemstillinger; dette værende økonomiske og logistiske. Det er ligeledes et felt, der har været nært knyttet op til militære problemstillinger, som Dantzigs ansættelsesforhold også antyder. Dantzigs bidrag til forskningsfeltet i form af simplexmetoden er dog stadig en fundamental del af løsning af lineære programmeringsproblemer i dag.

Projektets primære arbejdsområde vil derfor omhandle simplexmetoden, samt den geometriske fremstilling af lineære programmeringsproblemer. Det skal dog nævnes, at der ligeledes findes optimeringsproblemer, som ikke kan beskrives igennem lineære sammenhænge. Dog er indholdet af denne rapport afgrænset til at afdække løsning af lineære optimeringsproblemer. Problemformuleringen, der ligger til grundlag for udarbejdelsen af rapporten, er:

Hvordan kan lineære programmeringsproblemer ansues geometrisk, og hvordan kan disse løses ved hjælp af simplexmetoden?

Nedenstående er en oversigt over indholdet af nærværende rapport.

Kapitel 1 er en introduktion til lineær algebra. Afsnittet har til hensigt at indføre passende notation til anvendelse af matricer og vektorer, samt introducere væsentlige metoder og begreber til løsning af lineære ligningssystemer. Desuden belyses nogle essentielle egenskaber ved lineære ligningssystemer.

Kapitel 2 belyser lineære programmeringsproblemer og introducerer tilgange til løsning af disse, hvilket er projektets primære emneområde. Endvidere introduceres i dette kapitel, hvordan lineære programmeringsproblemer fremstilles matematisk, samt nogle interessante egenskaber ved dem.

Kapitel 3 afdækker, hvad en grafisk løsning af lineære programmeringsproblemer indebærer. Geometrisk fremstilling introduceres. Begreber og sætninger, der er nødvendige for simplexmetoden, forefindes ligeledes i dette kapitel.

Kapitel 4 er en undersøgelse og anvendelse af simplexmetoden. Kapitlet indeholder en beskrivelse af forskellige implikationer samt et eksempel på brug af simplexmetoden som løsningsalgoritme. Slutteligt forefindes en gennemgang af kompleksiteten.

Foruden ovennævnte kapitler findes appendicer slutteligt i denne rapport. Kilder til indholdet af de enkelte kapitler angives i starten af hvert kapitel. Alt i kapitlet er således udarbejdet med udgangspunkt i disse kilder, medmindre andet er angivet.

1 Lineær algebra

For at kunne behandle et optimeringsproblem undersøges først en række elementære begreber indenfor lineær algebra, der er anvendelige i forbindelse med problemet. Dette kapitel tager udgangspunkt i [Spence et al., 2014, side 3-188 og 227-259], hvis ikke andet er angivet.

1.1 Matricer og vektorer

I forbindelse med løsning af lineære ligningssystemer og optimeringsproblemer er det nødvendigt at introducere *matricer* og tilhørende notation.

Definition 1.1

En **matrix** er en rektangulær tabel, hvis elementer er **skalarer** tilhørende \mathbb{R} . En matrix med m **rækker** og n **søjler** har størrelsen $m \times n$. Hvis $m = n$, er matricen kvadratisk, noteret $n \times n$. Elementet $a_{i,j}$ i i 'te række og j 'te søjle kaldes den (i, j) 'te indgang i matricen.

På figur 1.1 ses en $m \times n$ matrix A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Figur 1.1: En $m \times n$ matrix A .

Enhver række i eller søjle j kan betragtes som en *vektor*. En matrix med én række kaldes en *rækkevektor*, og en matrix med én søjle kaldes en *søjlevektor*. Medmindre andet er angivet, opereres der med søjlevektorer. I denne rapport noteres vektorer med små, fede bogstaver, såsom **u** og **v**. Søjlevektorer fra matricer med flere end én søjle noteres ofte med et indeks

tilsvarende søjlen i matricen, eksempelvis:

$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix}.$$

Ligeledes kan rækkevektorene fra en matrix noteres $\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \end{bmatrix}$.

1.1.1 Udvalgte matricer og vektorer

Hvis alle indgange i en matrix er nul, kaldes dette for en *nulmatrix*, noteret O . En $m \times n$ nulmatrix noteres $O_{m,n}$. Et andet særtilfælde er *standardvektorerne* i \mathbb{R}^n , som er defineret ved

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sammensættes standardvektorer i en matrix opnås en *identitetsmatrix*.

Definition 1.2

En $n \times n$ **identitetsmatrix** I_n , hvor $n \in \mathbb{Z}^+$, består af alle standardvektorer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ i \mathbb{R}^n , således at

$$I_n = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix}.$$

1.1.2 Matrixsum og skalering

For at kunne bruge matricer som matematisk værktøj er det nødvendigt at kunne foretage operationer på disse. To operationer er *matrixsummering* og *skalering*.

Definition 1.3

Lad A og B være $m \times n$ matricer. **Matrixsummen** af A og B er $m \times n$ matricen $A + B$, hvor den (i, j) 'te indgang er $a_{i,j} + b_{i,j}$. **Matrixsubtraktion** mellem A og B resulterer i $m \times n$ matrixen $A - B$, hvor den (i, j) 'te indgang er $a_{i,j} - b_{i,j}$.

Lad nu c være en skalar. **Skalering**, også kaldet skalarmultiplikation, af A , noteret cA , er en $m \times n$ matrix, hvor den (i, j) 'te indgang er $ca_{i,j}$.

Bemærk, at $1A = A$, $-1A = -A$ og $0A = O$.

Eksempel 1.1

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jævnfør Definition 1.3 er

$$3A = \begin{bmatrix} 9 & -9 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \end{bmatrix}, \quad -B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

og

$$3A + B = \begin{bmatrix} 9 & -9 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 4 \\ 11 & 3 & 14 \end{bmatrix}.$$

Via disse operationer kan en række egenskaber ved matricer udledes, som beskrevet i Sætning 1.1.

Sætning 1.1

Lad A , B og C være $m \times n$ matricer, og lad c og k være skalarer. Så gælder følgende egenskaber:

- (a) $A + B = B + A$.
- (b) $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- (c) $A + O = A$.
- (d) $A + (-A) = O$.
- (e) $(ck)A = k(cA)$.
- (f) $c(A + B) = cA + cB$.
- (g) $(c + k)A = cA + kA$.

Bevis

Lad A , B og C være $m \times n$ matricer, og lad c og k være skalarer.

- (a) Betragt $A + B$ og $B + A$ og bemærk jævnfør Definition 1.3, at de (i, j) 'te indgange bliver henholdsvis $a_{i,j} + b_{i,j}$ og $b_{i,j} + a_{i,j}$.
- (b) Ligeledes ses det, at $(a_{i,j} + b_{i,j}) + c_{i,j} = a_{i,j} + (b_{i,j} + c_{i,j})$.
- (c) Da alle indgange i en nulmatrix er 0 haves $a_{i,j} + 0 = a_{i,j}$.
- (d) Endvidere kan 0 isoleres i $a_{i,j} + 0 = a_{i,j}$, således at $a_{i,j} + (-a_{i,j}) = 0$.

- (e) Betragt skaleringen af A med skalar ck , som er et produkt af skalarerne c og k , og skaleringen af A med c og herefter k . For indgangene i disse skaleringer findes ligheden $(ck)a_{i,j} = k(ca_{i,j})$.
- (f) Bemærk, at $c(a_{i,j} + b_{i,j}) = ca_{i,j} + cb_{i,j}$.
- (g) Det samme gøres for udsagnet i (g), hvor ligheden $(c + k)a_{i,j} = ca_{i,j} + ka_{i,j}$ opstilles.

□

Da vektorer er matricer med enten én række eller én søjle, er samme operationer mulige, og vektorer besidder derfor de samme egenskaber.

1.1.3 Matrixtransponering

Matrixtransponering er i nogen henseender brugbart, herunder i forbindelse med simplex-metoden.

Definition 1.4

Lad A være en $m \times n$ matrix. **Transponeringen** af A , er en $n \times m$ matrix, noteret A^T , hvor A 's (i, j) 'te indgang er den (j, i) 'te indgang i A^T .

En transponering af en matrix resulterer i en ny matrix, hvor rækkerne i den oprindelige matrix er søjlerne i den transponerede matrix.

Eksempel 1.2

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Så er

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad (A + B)^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Sætning 1.2 viser, at transponering bevarer summering og skalering af matricer.

Sætning 1.2

Lad A og B være $m \times n$ matricer, og lad c være en skalar. Så har matricerne følgende egenskaber:

- (a) $(A + B)^T = A^T + B^T$.
- (b) $(cA)^T = cA^T$.
- (c) $(A^T)^T = A$.

Bevis

Lad A og B være $m \times n$ matricer og lad c være en skalar.

- (a) Det vides, at indgangene i $A + B$ er $a_{i,j} + b_{i,j}$, og transponeringen af dette resulterer i en $n \times m$ matrix med indgangene $a_{j,i} + b_{j,i}$. Det ses, at $A^T + B^T$ også er en $n \times m$ matrix med indgangene $a_{i,j} + b_{i,j}$.
- (b) Ved skalering og transponering af en matrix ses, at operationernes rækkefølge er uden betydning for slutresultatet. Dette tydeliggøres ved at betragte cA^T og $(cA)^T$. For cA^T er indgangene $ca_{j,i}$, og indgangene i cA er $ca_{i,j}$, som efter transponering er $ca_{j,i}$.
- (c) Transponeres A to gange vil resultatet være A . Første transponering resulterer i en $n \times m$ matrix med indgangene $a_{j,i}$ og anden transponering resulterer i en $m \times n$ matrix med indgangene $a_{i,j}$.

□

1.1.4 Linearkombination

Linearkombinationer er en central del af lineær algebra, da det benyttes i forbindelse med løsning af ligningssystemer.

Definition 1.5

Givet vektorerne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ i \mathbb{R}^n , så er **linearkombinationen** af $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ en vektor \mathbf{v} på formen

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_k \mathbf{u}_k = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{u}_i = \mathbf{v},$$

i \mathbb{R}^n , hvor c_1, c_2, \dots, c_k er skalarerne. Skalarerne kaldes linearkombinationens koefficienter.

Bemærk, at en linearkombination af én vektor er blot en skalering af vektoren.

Eksempel 1.3

Lad

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix},$$

samt $c_u = -4$, $c_v = 100$ og $c_w = 2$. Jævnfør Definition 1.5 er linearkombinationen af \mathbf{u} , \mathbf{v} og \mathbf{w} :

$$(-4) \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} + 100 \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 780 \\ 1164 \\ 298 \end{bmatrix}.$$

Enhver vektor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

i \mathbb{R}^n kan skrives som linearkombination af I_n . Givet to ikke-parallelle vektorer \mathbf{u} og \mathbf{v} i \mathbb{R}^2 , så er enhver anden vektor i \mathbb{R}^2 en linearkombination af \mathbf{u} og \mathbf{v} .

1.1.5 Matrix-vektorprodukt

Hvis koefficienterne i en linearkombination er elementerne i en vektor, så er der tale om et *matrix-vektorprodukt*.

Definition 1.6

Lad A være en $m \times n$ matrix og \mathbf{u} være en $n \times 1$ vektor. **Matrix-vektorproduktet** af A og \mathbf{u} , noteret $A\mathbf{u}$, defineres som linearkombinationen af søjlerne i A , hvis koefficienter er de tilsvarende elementer i \mathbf{u} . Dermed er

$$A\mathbf{u} = u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + \cdots + u_n\mathbf{a}_n.$$

For at $A\mathbf{u}$ eksisterer, skal der være lige mange komponenter i \mathbf{u} , som der er søjler i A . Et eksempel på et matrix-vektorprodukt mellem en matrix A og en vektor \mathbf{u} ses i Eksempel 1.4.

Eksempel 1.4

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Eftersom A har 3 søjler og \mathbf{u} har 3 komponenter, så $A\mathbf{u}$ defineret og givet ved

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 \\ 9 \\ 3 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 39 \\ 15 \\ 38 \end{bmatrix}.$$

En række egenskaber ved matrix-vektorprodukt beskrives i Sætning 1.3.

Sætning 1.3

Lad A og B være $m \times n$ matricer, og lad \mathbf{u}, \mathbf{v} og \mathbf{w} være vektorer i \mathbb{R}^n . Så gælder det at

- (a) $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$.
- (b) $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u}) = (cA)\mathbf{u}$ for enhver skalar c .
- (c) $(A + B)\mathbf{u} = A\mathbf{u} + B\mathbf{u}$.
- (d) $A\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j$ for $j = 1, 2, \dots, n$, hvor \mathbf{e}_j er den j 'te standardvektor i \mathbb{R}^n .
- (e) Hvis B er en $m \times n$ matrix, der opfylder, at $B\mathbf{w} = A\mathbf{w}$ for alle \mathbf{w} i \mathbb{R}^n , så gælder, at $B = A$.
- (f) $A\mathbf{0}$ er $m \times 1$ nulvektoren.
- (g) Givet $O_{m,n}$, så gælder, at $O_{m,n}\mathbf{v}$ er $m \times 1$ nulvektoren.
- (h) $I_n\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Bevis

- (a) Da de i 'te komponenter af \mathbf{u} og \mathbf{v} er henholdsvis u_i og v_i , kan det opskrives som

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (u_1 + v_1)\mathbf{a}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{a}_2 + \dots + (u_n + v_n)\mathbf{a}_n \\ &= (u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + \dots + u_n\mathbf{a}_n) + (v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \dots + v_n\mathbf{a}_n) \\ &= A\mathbf{u} + A\mathbf{v}. \end{aligned}$$

- (b) $A(c\mathbf{u})$ kan opskrives som

$$\begin{aligned} A(c\mathbf{u}) &= \mathbf{a}_1(cu_1) + \mathbf{a}_2(cu_2) + \dots + \mathbf{a}_n(cu_n) \\ &= \mathbf{a}_1cu_1 + \mathbf{a}_2cu_2 + \dots + \mathbf{a}_ncu_n \\ &= c(\mathbf{a}_1u_1) + c(\mathbf{a}_2u_2) + \dots + c(\mathbf{a}_nu_n) = c(A\mathbf{u}) \\ &= (c\mathbf{a}_1)u_1 + (c\mathbf{a}_2)u_2 + \dots + (c\mathbf{a}_n)u_n = (cA)\mathbf{u}. \end{aligned}$$

(c) $(A + B)\mathbf{u}$ opskrives som

$$\begin{aligned}(A + B)\mathbf{u} &= (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1)u_1 + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2)u_2 + \cdots + (\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n)u_n \\ &= (\mathbf{a}_1u_1 + \mathbf{a}_2u_2 + \cdots + \mathbf{a}_nu_n) + (\mathbf{b}_1u_1 + \mathbf{b}_2u_2 + \cdots + \mathbf{b}_nu_n) \\ &= A\mathbf{u} + B\mathbf{u}.\end{aligned}$$

(d) Søjlen \mathbf{a}_j multipliceres med 1, mens de resterende multipliceres med 0. Derfor er resultatet af $A\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j$.

(e) Lad $B\mathbf{w} = A\mathbf{w}$ for alle $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Så gælder det, at $B = A$, da

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1w_1 + \mathbf{b}_2w_2 + \cdots + \mathbf{b}_nw_n &= \mathbf{a}_1w_1 + \mathbf{a}_2w_2 + \cdots + \mathbf{a}_nw_n \\ \downarrow \\ B &= A.\end{aligned}$$

(f) Dette kan opskrives som

$$0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \cdots + 0\mathbf{a}_n = \mathbf{0}_m.$$

Resultatet er $\mathbf{0}$ med m rækker.

(g) Produktet af en $n \times 1$ vektor og en $m \times n$ nulmatrix er en nulvektor på størrelsen $m \times 1$. Da alle indgange i matrixen er 0, bliver produktet netop en $m \times 1$ nulvektor.

(h) Værdien af komponenterne i produktet af $I_n\mathbf{v}$ har formen

$$\begin{bmatrix} 1v_1 \\ 1v_2 \\ \vdots \\ 1v_n \end{bmatrix}.$$

Det følger derfor, at $I_n\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

□

1.1.6 Matrixmultiplikation

Et nyttigt værktøj i arbejdet med lineær algebra er *matrixmultiplikation*.

Definition 1.7

Lad A være en $m \times n$ matrix og B være en $n \times p$ matrix. **Matrixproduktet** AB er en $m \times p$ matrix

$$AB = [\mathbf{Ab}_1 \quad \mathbf{Ab}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{Ab}_p],$$

hvor \mathbf{Ab}_j er den j 'te søjle i AB .

Som det fremgår af Definition 1.7, skal antallet af søjler i A tilsvare antallet af rækker i B , for at AB er defineret og matrixmultiplikation dermed er muligt. Bemærk, at selvom

AB er defineret, er BA ikke nødvendigvis defineret. Hvis både AB og BA er defineret, er de desuden ikke nødvendigvis lig hinanden. For at beregne værdien af komponenterne i matrixproduktet AB kan følgende sammenhæng mellem den i 'te række i A og den j 'te søjle i B betragtes:

$$ab_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j}.$$

Eksempel 1.5

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 5 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ved at betragte A og B vides det, AB er defineret og er en 3×2 matrix. Først findes søjlerne $A\mathbf{b}_1$ og $A\mathbf{b}_2$:

$$A\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 + 45 + 0 \\ 8 + 0 + 0 \\ 16 + 25 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59 \\ 8 \\ 41 \end{bmatrix}$$

og

$$A\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 + 9 + 1 \\ 12 + 0 + 0 \\ 24 + 5 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 12 \\ 34 \end{bmatrix}.$$

Dermed er

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59 & 31 \\ 8 & 12 \\ 41 & 34 \end{bmatrix}.$$

Da matricen B inddeles i søjlevektorer, er grundprincippet i matrixmultiplikation at finde matrix-vektorprodukter. En række egenskaber gælder for matrixmultiplikation, hvilket er summeret i Sætning 1.4.

Sætning 1.4

Lad A og B være $k \times m$ matricer, C være en $m \times n$ matrix, og P og Q være $n \times p$ matricer. Følgende udsagn er dermed sande:

- (a) $s(AC) = (sA)C = A(sC)$ for en vilkårlig skalar s .
- (b) $A(CP) = (AC)P$.
- (c) $(A + B)C = AC + BC$.
- (d) $C(P + Q) = CP + CQ$.
- (e) $I_k A = A = A I_m$.
- (f) Produktet af en nulmatrix og en vilkårlig matrix er altid O .
- (g) $(AC)^T = C^T A^T$.

Bevis

Lad A og B være $k \times m$ matricer, C være en $m \times n$ matrix, og P og Q være $n \times p$ matricer.

- (a) Den (i, j) 'te indgang i matrixprodukterne $s(AC)$ og $(sA)C$ har formen

$$sa_{i,1}c_{1,j} + sa_{i,2}c_{2,j} + \cdots + sa_{i,m}c_{m,j},$$

hvilket er det samme som

$$a_{i,1}sc_{1,j} + a_{i,2}sc_{2,j} + \cdots + a_{i,m}sc_{m,j},$$

der er en indgang i $A(sC)$. Da indgangene er ens, er matrixproduktet det samme i de tre tilfælde.

- (b) Bemærk, at A ikke kan multipliceres med P , mens C kan multipliceres med begge. Derfor kan matrixprodukterne AC og CP betragtes som to matricer, således at både $A(CP)$ og $(AC)P$ er $k \times p$ matricer. At komponenten i den (i, j) 'te indgang i $A(CP)$ er ækvivalent med komponenten i den (i, j) 'te indgang $(AC)P$ fås ved samme fremgangsmåde som vist i (a).
- (c) Lad \mathbf{c}_j være en vilkårlig søjle i C . Det følger deraf, at $(A + B)\mathbf{c}_j = A\mathbf{c}_j + B\mathbf{c}_j$ jævnfør Sætning 1.3(c).
- (d) Lad \mathbf{p}_j og \mathbf{q}_j være søjler i henholdsvis P og Q . Det følger deraf, at $C(\mathbf{p}_j + \mathbf{q}_j) = C\mathbf{p}_j + C\mathbf{q}_j$ jævnfør Sætning 1.3(a).
- (e) Da I_k og I_m henholdsvis korresponderer til antallet af rækker og søjler i A , er matrixprodukterne $I_k A$ og $A I_m$ defineret. Da $I_k \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j$ og $\mathbf{a}_i I_m = \mathbf{a}_i$, er $I_k A = A$ og $A I_m = A$, hvormed $I_k A = A I_m$.
- (f) Eftersom enhver komponent i en vilkårlig matrix multipliceret med 0 er 0, følger udsagnet trivielt.
- (g) Den (i, j) 'te indgang i $(AC)^T$ er den (j, i) 'te indgang i AC . De to udtryks ækvivalens vises ved samme fremgangsmåde som i (a).

□

1.2 Lineære ligningssystemer

En *lineær ligning* med variablene x_1, x_2, \dots, x_n er en ligning, som har formen

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = b,$$

hvor $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Definition 1.8

Et **lineært ligningssystem** er en mængde af m lineære ligninger med de samme n variable, hvor $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Dette kan skrives på formen

$$\begin{aligned} c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + \dots + c_{1,n}x_n &= b_1 \\ c_{2,1}x_1 + c_{2,2}x_2 + \dots + c_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ c_{m,1}x_1 + c_{m,2}x_2 + \dots + c_{m,n}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

hvor $c_{i,j}$ betegner koefficienten af x_j i ligning i .

Løsningen på et sådant system er en vektor

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

i \mathbb{R}^n , således at alle ligninger er opfyldt, når $x_i = v_i$.

Eksempel 1.6

Understående er et lineært ligningssystem, bestående af tre lineære ligninger.

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 - 2x_4 - 8x_5 &= -3 \\ -2x_1 + x_3 + 2x_4 + 9x_5 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_3 - 3x_4 - 15x_5 &= -9. \end{aligned}$$

Alle lineære ligningssystemer har enten ingen, én eller uendeligt mange løsninger. Ligninger i \mathbb{R}^2 kan repræsenteres ved linjer, og ligninger i \mathbb{R}^3 kan repræsenteres ved planer. Hvis disse ligninger er parallelle og forskellige, har systemet ingen løsning. Hvis ligningerne er forskellige og ikke parallelle, så har systemet præcis én løsning, hvor ligningerne er lig hinanden. Hvis ligningerne er ækvivalente, har systemet uendeligt mange løsninger.

Et system der har én eller flere løsninger kaldes *konsistent*; ellers kaldes det *inkonsistent*.

1.2.1 Ligningssystemer og matricer

Et lineært ligningssystem kan opstilles som en *matrixligning* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A kaldes for *koefficientmatricen*. *Totalmatricen* $[A \mid \mathbf{b}]$ dannes ved at kombinere koefficientmatricen med vektoren \mathbf{b} . Totalmatricen indeholder alle informationer, der skal bruges til at løse det lineære ligningssystem. Totalmatricen opskrives på formen:

$$[A \mid \mathbf{b}] = \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & b \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}.$$

En matrixligning kan også opskrives ved

$$\sum_{i=1}^n A_i x_i = \mathbf{b}.$$

Eksempel 1.7

Med udgangspunkt i ligningssystemet fra Eksempel 1.6 følger det, at

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -8 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 0 & -2 & -3 & -15 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}$$

og

$$[A \mid \mathbf{b}] = \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -8 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & -3 & -15 & -9 \end{array}.$$

1.3 Løsning af lineære ligningssystemer

Disse ligningssystemer kan løses ved hjælp af forskellige operationer, som introduceres i følgende afsnit.

1.3.1 Elementære rækkeoperationer

Der eksisterer tre operationer, som kan udføres på rækkerne i matricen til et lineært ligningssystem.

Definition 1.9

Ved **ombytning** bytter rækkerne R_i og R_j plads i ligningssystemet, hvilket noteres

$$A \xrightarrow{R_i \leftrightarrow R_j} B,$$

hvor A er matricen før rækkeoperationen udføres, og B er matricen efter rækkeoperationen er udført.

Ved **skalering** multipliceres en række med en skalar c , hvor $c \neq 0$, hvilket noteres

$$A \xrightarrow{R_i \rightarrow cR_i} B.$$

Ved **udskiftning** udskiftes en række med rækken selv plus en skalering af en anden række, hvilket noteres

$$A \xrightarrow{R_i \rightarrow R_i + cR_h} B.$$

Rækkeoperationerne kan udføres, når ligningssystemet er skrevet som en matrix. Brug af de elementære rækkeoperationer kan ses i Eksempel 1.8.

Eksempel 1.8

Først ombyttes rækkerne R_1 og R_3 i matricen.

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Derefter skaleres R_2 med -2 .

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow (-2)R_2} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ -4 & -4 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Slutteligt udskiftes R_3 med skaleringen $3R_1$, adderet med R_3 .

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ -4 & -4 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 3R_1} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ -4 & -4 & -2 \\ 14 & 17 & 27 \end{bmatrix}$$

1.3.2 Trappeform og reduceret trappeform

En række i en matrix kaldes en *nulrække*, hvis alle indgange er nul, og en *ikke-nulrække*, hvis mindst én indgang i rækken er forskellig fra nul. Dette bruges til definitionen af *trappeform*.

Definition 1.10

En matrix er på **trappeform**, hvis den opfylder følgende kriterier:

- (a) Enhver ikke-nulrække ligger over alle nulrækker.
- (b) Den første ikke-nulindgang i en ikke-nulrække ligger i en søjle til højre for første ikke-nulindgang i forrige række.
- (c) Hvis en søjle har den første ikke-nulindgang i en række, så er alle understående indgange i søjlen nulindgange.

Eksempel 1.9

Betragt matricerne

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

A er på trappeform, mens B ikke er på trappeform. Hvis der foretages en ombytning på række to og tre, da vil B ligeledes være på trappeform.

Matricer kan yderligere reduceres til *reduceret trappeform*.

Definition 1.11

En matrix er på **reduceret trappeform**, hvis den opfylder følgende kriterier:

- (a) Matricen er på trappeform.
- (b) Hvis en søjle har den første ikke-nulindgang i en række, så er alle øvrige indgange i søjlen 0.
- (c) Den første ikke-nulindgang i hver ikke-nulrække er lig 1.

Bemærk, at den reducerede trappeform af en matrix A vil blive noteret A_R .

Eksempel 1.10

Jævnfør Definition 1.11 er

$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

på reduceret trappeform.

Et lineært ligningssystem, som ikke står på trappeform, kan omdannes til trappeform og derefter reduceret trappeform, hvilket gør løsningen af systemet mere simpel. Metoden til at gøre dette ses i afsnit 1.3.4.

1.3.3 Pivotindgange**Definition 1.12**

Pivotindgange betegnes som den første ikke-nulindgang i enhver række i en matrix på trappeform.

Eksempel 1.11

Betragt matrix A fra Eksempel 1.9. Pivotindgangene i A er her markeret med blå.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Pivotindgange markeres fremover med blå første gang en matrice er på trappeform eller reduceret trappeform, som set i Eksempel 1.11. Hvis der er pivotindgang i den sidste søjle, så har ligningssystemet ingen løsning. Variable tilhørende en søjle, som indeholder en pivotindgang, betegnes som *faste variable*. Hvis ikke betegnes disse variable som *frie variable*. Ligningssystemer kan løses for de faste variable udtrykt ved de frie variable.

1.3.4 Gauss-elimination

En algoritme til løsning af lineære ligningssystemer er *rækkereduktionsalgoritmen*, som reducerer en totalmatrix til reduceret trappeform. Når den bruges til at løse lineære ligningssystemer, kaldes denne proces for *Gauss-elimination*. I algoritmen bruges de elementære rækkeoperationer til at omdanne en matrix til trappeform. Herefter benyttes rækkeoperationerne til at reducere matricen til reduceret trappeform. Algoritmen gennemgår således følgende skridt:

1. Find første ikke-nulstøjle fra venstre i matricen.
2. Ved rækkeombytning placeres en ikke-nulindgang øverst i pivotsøjlen.
3. Skab nulindgange under pivotindgangen ved hjælp af rækkeudskiftning.
4. Øverste række markeres som afsluttet og trin 1 – 4, hvor afsluttede rækker ignoreres. Dette gentages, indtil alle rækker er markeret som afsluttet.
5. Alle rækker med pivotindgange skaleres, så alle pivotindgange er lig 1.
6. Ved rækkeudskiftning sikres nu nulindgange over og under pivotindgangene.

Eksempel 1.12

Betragt ligningssystemet fra Eksempel 1.6

$$\begin{aligned}x_1 - x_3 - 2x_4 - 8x_5 &= -3 \\ -2x_1 + x_3 + 2x_4 + 9x_5 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_3 - 3x_4 - 15x_5 &= -9.\end{aligned}$$

Ligningssystemet opskrevet som totalmatrix

$$[A \mid \mathbf{b}] = \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 1 & 0 & -1 & -2 & -8 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & -3 & -15 & -9 \end{array}.$$

De elementære rækkeoperationer benyttes nu med henblik på at reducere totalmatricen til trappeform.

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1} \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 1 & 0 & -1 & -2 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 1 & 0 & -1 & -2 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}$$

Algoritmen fortsættes nu med henblik på at reducere totalmatricen fra trappeform til reduceret trappeform.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_3} \\ \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2R_3} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad b \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow -1R_2} \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad b \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad b \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] \end{array}$$

Herefter kan følgende løsninger opskrives:

$$\begin{aligned} x_1 - x_5 &= -2 &\iff x_1 &= x_5 - 2 \\ x_3 + 3x_5 &= 3 &\iff x_3 &= -3x_5 + 3 \\ x_4 + 2x_5 &= -1 &\iff x_4 &= -2x_5 - 1. \end{aligned}$$

Løsningen, opskrevet som en parameterfremstilling, er dermed givet ved

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1.3.5 Rang og nullitet

For at beskrive matrixers egenskaber i forhold til pivotindgange er der brug for at definere *rang* og *nullitet*.

Definition 1.13

Rangen af en matrix A er antallet af pivotindgange, hvilket noteres $\text{rang}(A)$.
Nulliteten af A er antallet af søjler uden pivotindgang, hvilket noteres $\text{null}(A)$.

Bemærk, at der for en $m \times n$ matrix gælder, at $\text{rang}(A) + \text{null}(A) = n$.

Eksempel 1.13

Med udgangspunkt i matrix $[A \mid \mathbf{b}]$ på reduceret trappeform fra Eksempel 1.12 bliver rang og nullitet i således $\text{rang}(A) = 3$ og $\text{null}(A) = 2$.

Sætning 1.5

Følgende udsagn er ækvivalente:

- (a) Ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent.
- (b) Vektoren \mathbf{b} er en linearkombination af søjlerne i A .
- (c) Den reducerede trappeform af totalmatricen $[A \mid \mathbf{b}]$ har ingen rækker på formen $[0 \dots 0 \mid d]$, hvor $d \neq 0$.

Bevis

Lad A være en $m \times n$ matrix og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Jævnfør Definition 1.6 følger det, at der eksisterer en vektor

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

i \mathbb{R}^n , der opfylder $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$, hvilket er linearkombinationen

$$v_1 \mathbf{a}_1 + v_2 \mathbf{a}_2 + \dots + v_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

af A og \mathbf{v} . Det følger derfor, at (a) og (b) er ækvivalente.

Herefter bevises, at (a) og (c) er ækvivalente. Hvis (c) er falsk, følger det, at

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = d,$$

hvor $d \neq 0$. Da dette ikke har nogen løsning, følger det, at ligningssystemet således bliver inkonsistent. Såfremt (c) er sandt, gælder det, at alle rækker i den reducerede trappeform har en løsning, som også er løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Således er (a) og (c) ækvivalente. \square

Eksempel 1.14

Med udgangspunkt i Eksempel 1.12 ses derfor, at ligningssystemet for $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent, da der ikke er pivotindgang i sidste søjle. Såfremt ligningssystemet skulle være inkonsistent,

kunne den have formen

$$[B \mid \mathbf{b}] = \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array},$$

da der eksisterer en pivotindgang i sidste søjle.

1.4 Span

Spannet er den del af \mathbb{R}^n , som linearkombinationen af en given mængde vektorer dækker over.

Definition 1.14

For en ikke-tom mængde af vektorer i \mathbb{R}^n $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ er **spannet** af \mathcal{S} mængden af alle linearkombinationer af $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$. Denne mængde noteres $\text{span}\{\mathcal{S}\}$ eller $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$.

Mængden, som indeholder vektorerne, der udgør spannet, kaldes for *mængden af generatoren*.

Eksempel 1.15

Givet mængderne af vektorer \mathcal{S}_1 og \mathcal{S}_2 , kan $\text{span}\{\mathcal{S}_1\}$ og $\text{span}\{\mathcal{S}_2\}$ findes.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \\ \mathcal{S}_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \end{aligned}$$

Spannet for \mathcal{S}_1 bliver derfor:

$$\text{span}\{\mathcal{S}_1\} = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

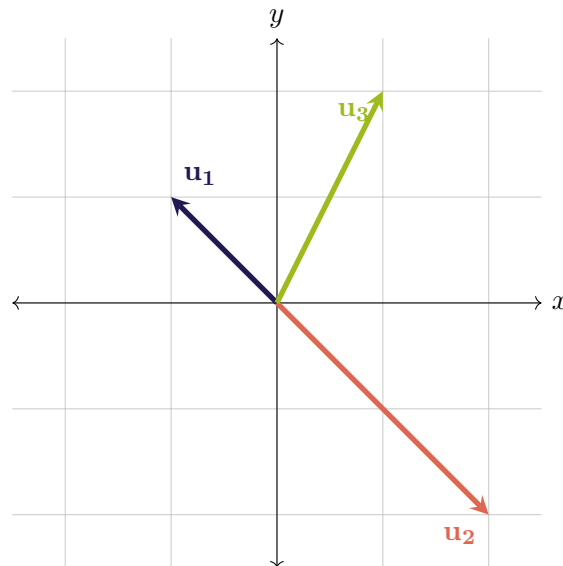
Som det fremgår geometrisk på figur 1.2, er $\text{span}\{\mathcal{S}_1\}$ en ret linje. Eftersom \mathbf{u}_2 er en linearkombination af \mathbf{u}_1 , kan dette reduceres til

$$\text{span}\{\mathcal{S}_1\} = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Mængden \mathcal{S}_2 kan derfor reduceres til $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}$. Spannet for \mathcal{S}_2 er derfor

$$\text{span}\{\mathcal{S}_2\} = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Eftersom spannet dækker alle punkter i planen er $\text{span}\{\mathcal{S}_2\} = \mathbb{R}^2$. Dette gør den, da det er muligt at besøge alle punkter ved at indføre passende værdier for x_1 og x_2 .



Figur 1.2: Grafisk repræsentation af vektorerne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

Rækkereduktionsalgoritmen kan bruges til at afgøre, hvorvidt en given vektor er en del af et givet span. Dette betyder, at rækkereduktionsalgoritmen kan bruges til at undersøge om en vektor er en linearkombination af en vektormængde.

Eksempel 1.16

Det skal undersøges, hvorvidt vektoren \mathbf{v} er i spannet for \mathcal{S}_1 . Givet

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ og } \text{span}\{\mathcal{S}_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\},$$

opskrives totalmatricen

$$[A \mid \mathbf{v}] = \left[\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & v \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right].$$

Totalmatricen omskrives nu til trappeform.

$$\begin{array}{c} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & v \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \end{array}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & v \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Da ligningssystemet er konsistent, haves, at \mathbf{v} er i $\text{span}\{\mathcal{S}\}$.

Sætning 1.6 beskriver ækvivalente udsagn om span.

Sætning 1.6

De følgende udsagn om en $m \times n$ matrix A er ækvivalente:

- (a) Spannet af søjlerne i A er \mathbb{R}^m .
- (b) Matricen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har mindst én løsning for alle \mathbf{b} i \mathbb{R}^m .
- (c) Rang af A er antallet af rækker m .
- (d) Den reducerede trappeform har ingen nulrækker.
- (e) Der er pivotindgang i hver række i A .

Bevis

Udsagn (a) og (b) er ækvivalente, eftersom det er en forudsætning, at der kan skabes en linearkombination af søjlerne i A for ethvert \mathbf{b} i \mathbb{R}^m , da det netop er definitionen af spannet, der dækker \mathbb{R}^m . Hvis der ikke er nogle nulrækker i den reducerede trappeform, følger det, at $\text{rang}\{A\} = m$, hvorfor (c) og (d) er ækvivalente. Eftersom matricen er på reduceret trappeform, er denne derfor ækvivalent med (e).

Det skal nu bevises at (b) og (c) er ækvivalente. Lad A_R være den reducerede trappeform af A og

$$\mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i \mathbb{R}^m . Gennem rækkereduktionsalgoritmen kan A transformeres til A_R . Da disse rækkeoperationer er reversible, følger det, at der findes en sekvens af rækkeoperationer, som

kan transformere A_R til A . Hvis disse operationer udføres på totalmatricen $[A_R \mid \mathbf{e}_m]$ for at konstruere matricen $[A \mid \mathbf{d}]$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, så følger det, at ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ er ækvivalent med $A_R\mathbf{x} = \mathbf{e}_m$.

Hvis (b) er sand, følger det, at de to ligningssystemer er konsistente. Det følger derfor af Sætning 1.5, at den sidste række i A og A_R ikke kan være en nulrække, da dette ellers medfører, at $\mathbf{b} = \mathbf{e}_m$ giver pivotindgang i sidste søjle, som medfører, at ligningssystemet er inkonsistent. Dermed er $\text{rang}(A) = m$, hvilket leder til (c).

Antag, at (c) er sand. Lad $[A_R \mid \mathbf{c}]$ være den reducerede trappeform af $[A \mid \mathbf{b}]$. Eftersom A har rangen m , følger det, at der ikke findes en nulrække i A_R . Derfor kan $[A_R \mid \mathbf{c}]$ ikke indeholde en nulrække, og der er derfor ikke pivot i sidste søjle. Det følger derfor jævnfør Sætning 1.5, at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent for alle \mathbf{b} , hvilket beviser, at (b) og (c) er ækvivalente. \square

Sætning 1.7 beskriver, hvornår en vektor tilhører et span.

Sætning 1.7

Lad $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ være en mængde vektorer i \mathbb{R}^n , og lad \mathbf{v} være en vektor i \mathbb{R}^n . Så er $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}\} = \text{span}\{\mathcal{S}\}$, hvis og kun hvis \mathbf{v} tilhører $\text{span}\{\mathcal{S}\}$.

Bevis

Antag, at \mathbf{v} er i $\text{span}\{\mathcal{S}\}$. Så er \mathbf{v} en linearkombination af \mathcal{S} , hvilket kan opskrives som $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_k\mathbf{u}_k$, hvor c_1, c_2, \dots, c_k er skalarer. Hvis en vektor \mathbf{w} er i $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}\}$, kan denne opskrives $\mathbf{w} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_k\mathbf{u}_k + b\mathbf{v}$, hvor c_1, c_2, \dots, c_k, b er skalarer. Ved substitution af \mathbf{v} med $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}\}$ vides det, at \mathbf{w} kan opskrives som en linearkombination af \mathcal{S} . Det gælder endvidere, at alle linearkombinationer i \mathcal{S} også kan dannes fra vektorerne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}$, hvis \mathbf{v} multipliceres med skalaren 0. Det følger derfor, at de to mængder har samme span.

Antag nu, at \mathbf{v} ikke er i $\text{span}\{\mathcal{S}\}$. Det vil stadig gælde, at \mathbf{v} er i spannet af

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}\},$$

da $\mathbf{v} = 0\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + \dots + 0\mathbf{u}_k + 1\mathbf{v}$. Derfor er

$$\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\} \neq \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}\},$$

da mængderne ikke er ækvivalente, idet kun én af dem indeholder \mathbf{v} . \square

Som det fremgår af ovenstående, gælder det derfor, at enhver løsning i et lineært optimeringsproblem skal findes i spannet for vektorerne i ligningssystemet.

1.5 Lineær uafhængighed

En mængde af vektorer i \mathbb{R}^n er enten *lineært afhængige* eller *lineært uafhængige*.

Definition 1.15

En mængde af vektorerne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ er **lineært uafhængige**, hvis der eksisterer skalarer x_1, x_2, \dots, x_k , sådan at ligningen

$$x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

kun har den trivielle løsning $x_1, x_2, \dots, x_k = 0$. Ellers er vektorerne **lineært afhængige**.

Eksempel 1.17

Givet

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\},$$

opstilles ligningen

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Denne ligning er kun opfyldt, hvis $x_1 = x_2 = 0$. Eftersom der kun eksisterer den trivielle løsning, er vektorerne i \mathcal{S}_1 lineært uafhængige.

Givet

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

ville ligningen

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

være opfyldt, hvis $x_1 = x_2 = 0$ eller $x_1 = -2$ og $x_2 = 1$. Vektorerne i \mathcal{S}_2 er derfor lineært afhængige, fordi der er flere løsninger end den trivielle.

Såfremt en mængde vektorer er lineært uafhængige, eksisterer der en række ækvivalente udsagn, som udtrykt i Sætning 1.8.

Sætning 1.8

Lad A være en $m \times n$ matrix. Følgende udsagn er ækvivalente:

- (a) A 's søjler er lineært uafhængige.
- (b) Ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har højst én løsning for alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
- (c) $\text{null}(A) = \mathbf{0}$.
- (d) $\text{rang}(A) = n$.
- (e) Søjlerne i A på reduceret trappeform er standardvektorer i \mathbb{R}^m .
- (f) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- (g) Der er pivotindgange i hver søjle i A .

Bevis

Lad A være en $m \times n$ matrix. Det følger direkte af Definition 1.15, at (a) og (f), samt (f) og (g) er ækvivalente, så for at færdiggøre beviset for denne sætning skal det vises, at (b) \rightarrow (c), (c) \rightarrow (d), (d) \rightarrow (e), (e) \rightarrow (f) og (f) \rightarrow (b).

Idet $\mathbf{0}$ er en løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, så forudsætter (b), at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har ikke-nul løsninger, da den generelle løsning ingen frie variable har. Eftersom antallet af frie variable er 0, og $\text{null}(A)$ dermed er nul, er (b) \rightarrow (c) hermed bevist.

Idet $\text{rang}(A) + \text{null}(A) = n$, så er (c) \rightarrow (d) bevist.

Hvis $\text{rang}(A) = n$, så indeholder enhver søjle i A en pivotindgang, hvormed den reducerede trappeform udelukkende indeholder standardvektorer. Disse standardvektorer er nødvendigvis forskellige, da hver søjle indeholder den første ikke-nul indgang i hver række. Dette beviser (d) \rightarrow (e).

Lad A_R være den reducerede trappeform af matricen A . Hvis søjlerne i A_R er forskellige standardvektorer i \mathbb{R}^m , så er $A_R = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]$. Det er givet, at den eneste løsning til $A_R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er $\mathbf{0}$, og idet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er ækvivalent med $A_R\mathbf{x} = \mathbf{0}$, så er $\mathbf{0}$ eneste løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dette beviser (e) \rightarrow (f).

Lad \mathbf{u} og \mathbf{v} være løsninger til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Jævnfør Sætning 1.3 følger det, at $A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = A\mathbf{u} - A\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, hvilket tilsvarende $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$. Dette beviser (f) \rightarrow (b). \square

Ligeså findes der en egenskab for lineært afhængige vektorer, som er belyst i Sætning 1.9.

Sætning 1.9

Vektorerne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ er lineært afhængige, hvis og kun hvis $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$, eller hvis der findes $i \geq 2$, således $\mathbf{u}_i \in \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{i-1}\}$.

Bevis

Antag, at $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$, da løsningen ellers er trivial. Der findes skalarer, som ikke alle er 0, således at

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \dots + x_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}.$$

Lad i være det største index i , hvor $x_i \neq 0$, sådan at

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \dots + x_i\mathbf{u}_i = \mathbf{0}.$$

Bemærk, at $i \geq 2$, da udtrykket ellers ville blive reduceret til

$$x_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{0},$$

hvilket går imod tidligere antagelser. Løses udtrykket i forhold til \mathbf{u}_i , ses det, at

$$\mathbf{u}_i = -\frac{x_1}{x_i}\mathbf{u}_1 - \frac{x_2}{x_i}\mathbf{u}_2 - \dots - \frac{x_{i-1}}{x_i}\mathbf{u}_{i-1}.$$

Hvilket vil sige, at

$$\mathbf{u}_i \in \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{i-1}\}.$$

Antag nu, at $\mathbf{u}_i \in \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{i-1}\}$ for $i \geq 2$. Da $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{i-1}\}$ er mængden af alle linearkombinationer af vektorerne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{i-1}$, eksisterer der skalarer x_1, x_2, \dots, x_{i-1} , således at

$$\mathbf{u}_i = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \dots + x_{i-1}\mathbf{u}_{i-1}.$$

For k haves, at $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ er lineært afhængige, da

$$\mathbf{u}_i - x_1\mathbf{u}_1 - x_2\mathbf{u}_2 - \dots - x_{i-1}\mathbf{u}_{i-1} = \mathbf{0}$$

er en løsning anderledes fra den trivielle løsning. □

Det kan i nogle tilfælde afgøres ved inspektion, hvorvidt en mængde vektorer $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ er lineært afhængige. En mængden af vektorer er lineært afhængige, hvis:

- $\mathbf{0}$ er i mængden.
- To af vektorerne er parallelle.
- Der er flere vektorer end komponenter i vektorerne.

Med udgangspunkt i Eksempel 1.17 ses det, at de to vektorer i \mathcal{S}_2 er parallelle og derfor er lineært afhængige.

Hvis det ikke ved inspektion kan afgøres, om en matrix er lineært afhængig eller lineært uafhængig, kan det undersøges ved at opstille en totalmatricen bestående af mængden af vektorer, hvor matricen derefter via rækkeoperationer omdannes til trappeform. Hvis der er pivotindgange i alle søjlerne, er mængden af vektorer lineært uafhængige. Hvis der er frie variable, er mængden af vektorer derimod lineært afhængige.

Eksempel 1.18

Lad

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Hvis vektorerne er lineært uafhængige, er den trivielle løsning den eneste løsning til

$$x_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Ved hjælp af rækkeoperationerne omskrives totalmatricen til reduceret trappeform:

$$\begin{aligned} [A \mid \mathbf{b}] &= \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline & 4 & -3 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & -2 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow[R_2 \rightarrow R_2 - 1R_1]{R_1 \rightarrow \frac{1}{4}R_1} \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{9}{4} & 0 \\ & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \\ &\xrightarrow[R_2 \rightarrow \frac{4}{3}R_2]{R_3 \rightarrow R_3 - 1R_1} \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ & 0 & 1 & -3 & 0 \\ & 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{array} \xrightarrow[R_3 \rightarrow \frac{1}{6}R_3]{R_3 \rightarrow R_3 - \frac{7}{4}R_2} \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ & 0 & 1 & -3 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \\ &\xrightarrow[R_1 \rightarrow R_1 - \frac{1}{4}R_3]{R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3} \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + \frac{3}{4}R_2} \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \end{aligned}$$

Eftersom totalmatricen ikke har nogle frie variable, har den kun en løsning, og er derfor lineært uafhængig.

Lad nu

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Nu afgøres, om den trivielle løsning er den eneste løsning til

$$x_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Ved hjælp af rækkeoperationer omskrives totalmatricen til trappeform:

$$[B \mid \mathbf{b}] = \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad b \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\xrightarrow[R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1]{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad b \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 + \frac{1}{3}R_2]{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1} \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad b \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Dette betyder, at der findes en ikke-triviel linearkombination, som resulterer i nulvektoren. Derfor er der mindst én ikke-triviel linearkombination, som opfylder $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og derfor er vektormængden lineært afhængig.

I forbindelse med en given mængde vektorer kan færre vektorer udvælges for at få en mere effektiv beskrivelse af spannet. Dette gøres ved at finde spannet af pivotsøjlerne i koefficientmatricen.

Eksempel 1.19

Givet

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\},$$

opstilles koefficientmatricen, som omdannes til reduceret trappeform.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{1}{7}R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 6R_3} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_3} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \\
\\
\begin{array}{c} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{4}R_2} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \\ \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix} \end{array}
\end{array}$$

Herved er den sidste vektor i spannet en linearkombination af de andre vektorer:

$$-1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Dermed haves, at

$$\text{span}\{\mathcal{S}\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

1.6 Lineær afbildning

En matrix kan betragtes som en funktion, der afbilder en vektor fra et rum til et andet.

Definition 1.16

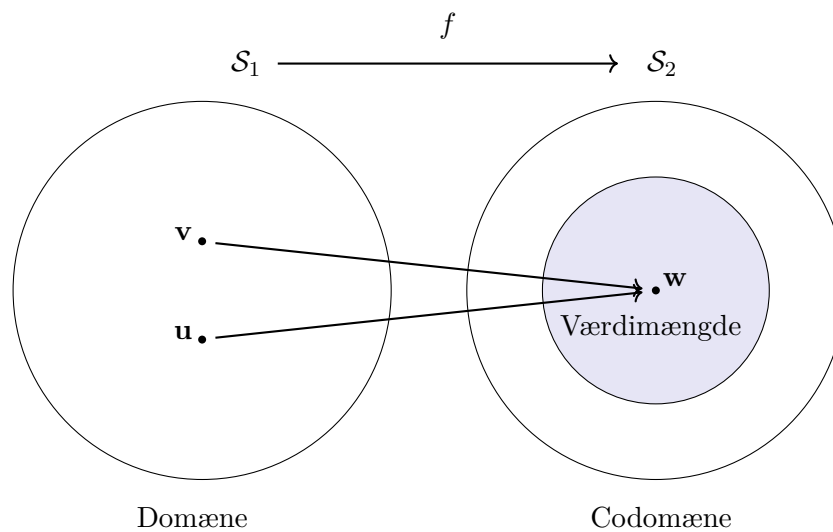
Lad $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathbb{R}^m$. En funktion f fra \mathcal{S}_1 til \mathcal{S}_2 , noteret $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$, tildeler enhver vektor \mathbf{v} i \mathcal{S}_1 en entydig vektor $f(\mathbf{v})$ i \mathcal{S}_2 . Vektoren $f(\mathbf{v})$ kaldes en **afbildning** af \mathbf{v} . \mathcal{S}_1 er **domænet** for funktionen f , mens \mathcal{S}_2 kaldes **codomænet** til f . **Værdimængden** for f er defineret som mængden af afbildninger $f(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{v} \in \mathcal{S}_1$.

Bemærk, afbildning også kaldes transformation. På figur 1.3 ses, at både \mathbf{u} og \mathbf{v} har \mathbf{w} som afbildning, da $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

For funktioner, som er matrix-vektorprodukter, introduceres notationen T_A .

Definition 1.17

Lad A være en $m \times n$ matrix. Funktionen $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, defineret ved $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, er en **matrixafbildning fremkaldt af A**.



Figur 1.3: En funktion f fra S_1 til S_2 , hvor $f(v) = w$ og $f(u) = w$.

Direkte fra Sætning 1.3 ses det, at T_A har egenskaberne $T_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T_A(\mathbf{u}) + T_A(\mathbf{v})$ og $cT_A(\mathbf{u}) = T_A(c\mathbf{u})$. Funktioner, der opfylder disse egenskaber, får deres egen definition.

Definition 1.18

Funktionen $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er en **lineær afbildning**, hvis følgende vilkår gør sig gældende for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og alle skalarer c :

- (a) $T_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T_A(\mathbf{u}) + T_A(\mathbf{v})$.
- (b) $cT_A(\mathbf{u}) = T_A(c\mathbf{u})$.

Da matrixafbildninger har disse egenskaber, er alle matrixafbildninger lineære afbildninger. Sætning 1.10 viser centrale egenskaber ved lineær afbildning.

Sætning 1.10

Lad $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og lad c og k være skalarer. For enhver lineær afbildning $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er følgende udsagn sande:

- (a) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
- (b) $T(-\mathbf{u}) = -T(\mathbf{u})$.
- (c) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$.
- (d) $T(c\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + kT(\mathbf{v})$.

Bevis

- (a) Lad \mathbf{u}, \mathbf{v} være vektorer i \mathbb{R}^n , c og k være skalarer og lad $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ være en lineær afbildning. Da T bevarer vektoraddition, haves, at

$$T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0}).$$

Trækkes $T(\mathbf{0})$ fra begge sider, haves, at $\mathbf{0} = T(\mathbf{0})$.

- (b) Da T bevarer skalering, haves

$$T(-\mathbf{u}) = T((-1)\mathbf{u}) = (-1)T(\mathbf{u}) = -T(\mathbf{u}).$$

- (c) Ved kombination af, at T bevarer vektoraddition og (b), haves, at

$$T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u} + (-\mathbf{v})) = T(\mathbf{u}) + T(-\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}).$$

- (d) Da T både bevarer vektoraddition og skalering, haves, at

$$T(c\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = T(c\mathbf{u}) + T(k\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + kT(\mathbf{v}).$$

□

Sætning 1.10(d) kan generaliseres til at vise, at lineær afbildning bevarer linearkombinationer.

Lemma 1.1

Lad $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ være en lineær afbildning, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ være vektorer i \mathbb{R}^n og lad c_1, c_2, \dots, c_k være skalarer. Så gælder, at

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k) = T(c_1\mathbf{v}_1) + T(c_2\mathbf{v}_2) + \dots + T(c_k\mathbf{v}_k).$$

Bevis

Lemmaet følger direkte af Sætning 1.10(d). □

Bemærk, at Sætning 1.10(a) i nogle tilfælde kan bruges til at vise, at en funktion ikke er lineær. Det kan dog forekomme, at en funktion opfylder betingelsen og stadig ikke er lineær.

Hvis afbildningen T er lineær, kan en tilsvarende matrix A opstilles, sådan at $T = T_A$, hvilket er belyst i Sætning 1.11.

Sætning 1.11

Lad $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ være lineær. Hvis der findes en entydig $m \times n$ matrix

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2) \ \dots \ T(\mathbf{e}_n)],$$

hvor søjlerne er afbildninger af T ud fra standardvektorene i \mathbb{R}^n , så gælder det, at $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Bevis

Lad $A = [T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2) \ \dots \ T(\mathbf{e}_n)]$. Den lineære afbildning af \mathbf{v} er

$$T(\mathbf{v}) = T(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \dots + v_n\mathbf{e}_n).$$

Jævnfør Sætning 1.10(d) er

$$T(\mathbf{v}) = v_1T(\mathbf{e}_1) + v_2T(\mathbf{e}_2) + \dots + v_nT(\mathbf{e}_n),$$

hvilket kan erstattes med elementerne i matrix A , således, at

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \dots + v_n\mathbf{a}_n \\ &= A\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Jævnfør Definition 1.17 beviser dette, at

$$T(\mathbf{v}) = T_A(\mathbf{v}).$$

Lad B være en $m \times n$ matrix. For at bevise entydigheden, lad da $T_A = T_B$. Jævnfør Sætning 1.3(e) gælder det, at $A = B$, eftersom $A\mathbf{v} = B\mathbf{v}$ for alle \mathbf{v} i \mathbb{R}^n . \square

Eksempel 1.20

Lad $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være defineret ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5x_1 + x_2 \\ 3x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}.$$

For at danne standardmatricen for T , dannes søjlerne

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Derfor er $T = T_A$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.7 Elementære og inverse matricer

At multiplicere en matrix A med en $n \times n$ *elementær matrix* E svarer til at udføre én rækkeoperation på A . Dermed kan enhver rækkeoperation udføres gennem matrixmultiplikation. En $n \times n$ matrix E er elementær, hvis én rækkeoperation udført på I_n resulterer i E .

Lad nu A være en $m \times n$ matrix og E en $m \times m$ elementær matrix. Matrixproduktet EA kan opnås ved at udføre én rækkeoperation på A . Enhver elementær matrix er desuden *invertibel*, og dens *invers* er også en elementær matrix.

Definition 1.19

En $n \times n$ matrix A er **invertibel**, hvis en $n \times n$ matrix B eksisterer, så $AB = BA = I_n$.

Det er endvidere relevant, hvorvidt inversen er entydig.

Sætning 1.12

Såfremt en matrix A er invertibel, findes der en entydig matrix B , som er dennes invers.

Bevis

Antag, at der findes to $n \times n$ matricer B og C , der er inverse til $n \times n$ matricen A . Det gælder derfor fra Definition 1.19, at A er inversen til B og C . Derfor haves at $AB = BA = I_n$, samt at $AC = CA = I_n$. Fra Sætning 1.4 haves derfor, at

$$\begin{aligned} B &= BI_n = B(AC) \\ &= (BA)C \\ &= I_n C = C. \end{aligned}$$

Dermed er $B = C$ og A 's invers er derfor entydig. \square

Da inversen er entydig, vil denne kaldes A^{-1} . Såfremt A er en invertibel $n \times n$ matrix, gælder det for ethvert $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har den entydige løsning $A^{-1}\mathbf{b}$. Inverse matricer har en række egenskaber, som er formuleret i Sætning 1.13.

Sætning 1.13

Givet to $n \times n$ matricer A og B , så gælder, at:

- (a) Hvis A er invertibel, så er A^{-1} invertibel, og $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (b) Hvis A og B er invertible, så er AB invertibel, og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- (c) Hvis A er invertibel, så er A^T invertibel, og $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Bevis

(a) Udsagnet følger direkte af Definition 1.19.

(b) Antag, at A og B er invertible matricer, så er

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

Det kan gennem lignende operationer vises, at $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$. Dermed er AB en invertibel matrix, hvis invers er $A^{-1}B^{-1}$. Dermed er $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- (c) Antag, at A er invertibel. Det følger af Definition 1.19, at $A^{-1}A = I_n$. Jævnfør Sætning 1.4(g) følger det hermed, at $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$. Ligeledes kan det vises, at $(A^{-1})^T A^T = I_n$. Derfor er A^T en invertibel matrix med inversen $(A^{-1})^T$ og $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

□

Som tidligere nævnt, kan enhver rækkeoperation udføres ved hjælp af matrixmultiplikation.

Sætning 1.14

Lad A være en $m \times n$ matrix, og A_R den reducerede trappeform af A . Så eksisterer der en invertibel $m \times m$ matrix $P = E_k E_{k-1} \cdots E_1$, så $PA = A_R$.

Bevis

Lad A være en $m \times n$ matrix og P være et $m \times m$ produkt af de elementære matricer, som skal til for at omdanne A til reduceret rækkeform, $E_k E_{k-1} \cdots E_1$. P er dermed invertibel, da enhver elementær matrix er invertibel og produktet af to invertible matricer også er invertibel. Det vides, at Gauss-elimination omdanner en matrix til reduceret trappeform ved hjælp af elementære rækkeoperationer. Så for hver af de operationer findes der en tilsvarende elementær matrix. □

Sætning 1.14 medfører desuden Korollar 1.1.

Korollar 1.1

Ligningssystemerne $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ og $A_R\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har samme løsninger, hvor $[A_R \mid \mathbf{c}]$ er den reducerede trappeform af totalmatricen $[A \mid \mathbf{b}]$.

Bevis

Lad P være en invertibel matrix, så $P[A \mid \mathbf{b}] = [A_R \mid \mathbf{c}]$. Så gælder det, at

$$P[A \mid \mathbf{b}] = [PA \mid P\mathbf{b}] = [A_R \mid \mathbf{c}],$$

hvormed $PA = A_R$ og $P\mathbf{b} = \mathbf{c}$. Heraf følger, at $A = P^{-1}A_R$ og $\mathbf{b} = P^{-1}\mathbf{c}$, da P er invertibel.

Antag, at \mathbf{v} er en løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Så er

$$A_R\mathbf{v} = (PA)\mathbf{v} = P(A\mathbf{v}) = P\mathbf{b} = \mathbf{c},$$

hvormed \mathbf{v} er en løsning til $A_R\mathbf{x} = \mathbf{c}$. Antag nu i stedet, at \mathbf{v} er en løsning til $A_R\mathbf{x} = \mathbf{c}$. Så er

$$A\mathbf{v} = (P^{-1}A_R)\mathbf{v} = P^{-1}(A_R\mathbf{v}) = P^{-1}\mathbf{c} = \mathbf{b},$$

hvormed \mathbf{v} er en løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dermed er det bevist, at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ og $A_R\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har samme løsning. □

Beviset for Korollar 1.1 følger af beviset for Sætning 1.14 med tilføjelsen, at hvis $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, så er $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, hvilket resulterer i nulvektoren i begge udtryk.

Sætning 1.15 en tilstrækkelig og nødvendig betingelse for, at A er invertibel.

Sætning 1.15

Lad A være en $n \times n$ matrix. A er invertibel, hvis og kun hvis den reducerede trappeform af A er I_n .

Bevis

Antag, at $n \times n$ matricen A er invertibel, og at der findes en vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, så $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Da A er en invertibel matrix, gælder det for ethvert $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsningen $A^{-1}\mathbf{b}$ og derfor er $\mathbf{u} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Den eneste løsning til problemet er derfor $\mathbf{0}$. Såfremt A er invertibel, følger det derfor fra Sætning 1.8, at $\text{rang}(A) = n$. Det følger derfor, at A på reduceret trappeform er I_n .

Antag nu, at den reducerede trappeform af $A = I_n$. Jævnfør Sætning 1.14 eksisterer der en invertibel $n \times n$ matrix P , hvorom det gælder, at $PA = I_n$.

$$A = I_n A = (P^{-1}P)A = P^{-1}(PA) = P^{-1}.$$

Fra Sætning 1.13 fremgår det, at P^{-1} er en invertibel matrix, og det er hermed bevist, at A er invertibel, da $A = P^{-1}$. \square

Det er fordelagtigt at benytte algoritmer til at invertere matricer. Jævnfør Definition 1.19 opfylder en $n \times n$ matrices inverse matrix $AA^{-1} = I_n$. Med dette kan ligningen $A[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n] = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_n]$ opstilles. Da den inverse matrix er entydig kan søjlerne findes ved at løse $A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$. Det gøres ved Gauss-elimination på $[A \mid \mathbf{e}_i]$. Kombinationen af rækkeoperationer for at få A på reduceret trappeform er kun afhængig af A . Dette betyder, at hver ligning løses med samme rækkeoperationer og alle søjler kan findes samtidigt. Dette gøres med Gauss-elimination på $[A \mid I_n]$, hvor resultatet bliver $[I_n \mid A^{-1}]$, hvis A er invertibel.

Eksempel 1.21

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

For at finde dennes invers A^{-1} opstilles totalmatricen

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Ved at udføre rækkeoperationer omdannes A til reduceret trappeform.

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow -1R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \\ \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right].$$

Det fremgår derfor, at A er invertibel, da dens reducerede trappeform er I_3 . Inversen kan nu aflæses til

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sætning 1.16 beskriver yderligere egenskaber for invertible matricer.

Sætning 1.16

Lad A være en $n \times n$ matrix. Da er følgende udsagn ækvivalente.

- (a) A er invertibel.
- (b) Den reducerede trappeform af A er I_n .
- (c) $\text{rang}(A) = n$.
- (d) Spannet af søjlerne i A er \mathbb{R}^n .
- (e) Ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent for alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
- (f) $\text{null}(A) = \mathbf{0}$.
- (g) Søjlerne i A er lineært uafhængige.
- (h) Den eneste løsning for $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er $\mathbf{0}$.
- (i) Der eksisterer en $n \times n$ matrix B , så $BA = I_n$.
- (j) Der eksisterer en $n \times n$ matrix C , så $AC = I_n$.
- (k) A er et produkt af elementære matricer.

Bevis

Lad A være en $n \times n$ matrix. Jævnfør Sætning 1.15 er (a) og (b) ækvivalente. Da A er kvadratisk, er (b) jævnfør Sætning 1.6 ligeledes ækvivalent med (c), (d) og (e). Jævnfør Sætning 1.8 er (b) desuden ækvivalent med (f), (g) og (h). Eftersom (a) er ækvivalent med (b), er (a) også ækvivalent med (c), (d), (e), (f), (g) og (h).

At (a) og (k) er ækvivalente, bevises i to skridt. Bemærk først, at hvis A er invertibel, så er I_n den reducerede trappeform af A . Jævnfør Sætning 1.14 og Sætning 1.15 eksisterer der en invertibel matrix P , så at $PA = I_n$, hvormed $A = P^{-1}$. Da $P = E_k E_{k-1} \cdots E_1$, så er $P^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$. A er dermed et produkt af elementære matricer, hvilket beviser, at (a) medfører (k).

Antag nu, at A er et produkt af elementære matricer. Elementære matricer er invertible, hvormed A er et produkt af invertible matricer. A er derfor invertibel og (k) medfører dermed (a), hvilket gør (a) og (k) ækvivalente.

At (a) medfører (i) er trivielt, da $B = A^{-1}$. Antag nu, at der eksisterer en $n \times n$ matrix B , så $BA = I_n$. Lad $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ være en vektor således, at $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Så gælder det, at

$$\mathbf{v} = I_n \mathbf{v} = (BA)\mathbf{v} = B(A\mathbf{v}) = B\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Så haves, at (i) medfører (h). Eftersom (h) er ækvivalent med (a), medfører (i) derfor også (a). Således er (i) og (a) ækvivalente.

At (a) medfører (j) er trivielt, da $C = A^{-1}$. Antag nu, at der eksisterer en $n \times n$ matrix C , så $AC = I_n$. Lad $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{v} = C\mathbf{b}$. Så gælder, at

$$A\mathbf{v} = A(C\mathbf{b}) = (AC)\mathbf{b} = I_n \mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Bemærk, at (j) dermed medfører (e). Eftersom (e) er ækvivalent med (a), medfører (j) derfor også (a). Således er (j) og (a) ækvivalente. \square

1.7.1 Invertibilitet af funktioner

Ligeså kan funktioner også være invertible, hvis den er *bijektiv*.

Definition 1.20

En funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ siges at være **surjektiv**, hvis dens værdimængde er hele \mathbb{R}^m , tilsvarende at alle vektorer i \mathbb{R}^m er en afbildning af mindst én vektor i \mathbb{R}^n . Funktionen siges at være **injektiv**, hvis hver entydig vektor i \mathbb{R}^n har en entydig vektor i \mathbb{R}^m , som afbildning. Hvis en funktion er både injektiv og surjektiv, så er funktionen **bijektiv**.

Bemærk, at for en bijektiv funktion er $m = n$. Hvis en funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ er bijektiv, vil det betyde, at der er en invers funktion $f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, hvorom det gælder, at $f^{-1}(f(x)) = x$. Dette gælder, da for hver vektor i \mathbb{R}^n afbilleder én vektor i \mathbb{R}^n , og det omvendte gælder også, da værdimængden er hele \mathbb{R}^n , så uanset, hvilken vektor i \mathbb{R}^n ville den have en tilsvarende vektor i \mathbb{R}^n . Bemærk, at

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f},$$

men blot notation for den *inverse funktion* til f . Illustrationen på figur 1.3, er dermed ikke injektiv, eftersom der til hvert y ikke kun er et x . Ligeså kan en funktion $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, som er en lineær afbildning med standardmatricen A , være invertibel, hvis og kun hvis A er invertibel. For en surjektiv funktion skal A have pivot i alle rækker og for en injektiv funktion skal A have pivot i alle søjler. Dermed skal A have pivot i alle rækker og søjler og dermed kvadratisk, for at funktionen er bijektiv. Lad A være en $n \times n$ invertibel matrix. Så haves for alle \mathbf{v} , at

$$T_A T_{A^{-1}}(\mathbf{v}) = T_A(T_{A^{-1}}(\mathbf{v})) = T_A(A^{-1}\mathbf{v}) = A(A^{-1}\mathbf{v}) = AA^{-1}\mathbf{v} = I_n\mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Det kan gennem lignende operationer vises, at

$$T_{A^{-1}} T_A(\mathbf{v}) = \mathbf{v}.$$

Dette medfører $T^{-1} = T_{A^{-1}}$. Som følge deraf er T^{-1} lineær og dens standardmatrix er A^{-1} .

Eksempel 1.22

Fra Eksempel 1.21 haves, at

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

så er

$$T_A \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}.$$

Og den inverse funktion er

$$T_{A^{-1}} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 1x_2 \\ -x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \end{bmatrix}.$$

1.8 Underrum

Det kan være brugbart at undersøge vektorer i en delmængde af \mathbb{R}^n . Denne delmængde kaldes et *underrum*.

Definition 1.21

En mængde \mathcal{S} , bestående af vektorer i \mathbb{R}^n , er et **underrum** af \mathbb{R}^n , hvis den opfylder følgende betingelser:

- (a) $\mathbf{0} \in \mathcal{S}$.
- (b) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{S}$.
- (c) $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ og c er en skalar, så er $c\mathbf{u} \in \mathcal{S}$.

Mængden \mathbb{R}^n er et underrum til sig selv, da summen af to vilkårlige vektorer i \mathbb{R}^n tilhører \mathbb{R}^n . Enhver vektor multipliceret med en skalar er i \mathbb{R}^n , og $\mathbf{0}$ er ligeledes i \mathbb{R}^n . Mængden $\{\mathbf{0}\}$ er ligeså et underrum til \mathbb{R}^n , kaldet *nul-underrummet*. Såfremt mængden ikke dækker hele rummet er mængden et *ægte underrum*.

Sætning 1.17

Spannet af en endelig ikke-tom mængde af vektorer i \mathbb{R}^n er et underrum af \mathbb{R}^n .

Bevis

Lad \mathcal{S} være spannet af en endelig ikke-tom mængde $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_j\}$. Eftersom der kan opskrives en linearkombination

$$0\mathbf{w}_1 + 0\mathbf{w}_2 + \dots + 0\mathbf{w}_j = \mathbf{0},$$

så er $\mathbf{0}$ i \mathcal{S} , hvilket opfylder betingelse (a) i Definition 1.21.

Lad \mathbf{u} og \mathbf{v} tilhøre \mathcal{S} . Så er

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= c_1 \mathbf{w}_1 + c_2 \mathbf{w}_2 + \cdots + c_j \mathbf{w}_j, \\ \mathbf{v} &= k_1 \mathbf{w}_1 + k_2 \mathbf{w}_2 + \cdots + k_j \mathbf{w}_j,\end{aligned}$$

for skalarerne c_1, c_2, \dots, c_j og k_1, k_2, \dots, k_j . Dette kan omskrives til linearkombinationen

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (c_1 \mathbf{w}_1 + c_2 \mathbf{w}_2 + \cdots + c_j \mathbf{w}_j) + (k_1 \mathbf{w}_1 + k_2 \mathbf{w}_2 + \cdots + k_j \mathbf{w}_j) \\ &= (c_1 + k_1) \mathbf{w}_1 + (c_2 + k_2) \mathbf{w}_2 + \cdots + (c_j + k_j) \mathbf{w}_j,\end{aligned}$$

hvilket viser, at $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{S}$, hvormed (b) i Definition 1.21 er opfyldt.

For enhver skalar h gælder, at

$$\begin{aligned}h\mathbf{u} &= h(c_1 \mathbf{w}_1 + c_2 \mathbf{w}_2 + \cdots + c_j \mathbf{w}_j) \\ &= (hc_1) \mathbf{w}_1 + (hc_2) \mathbf{w}_2 + \cdots + (hc_j) \mathbf{w}_j,\end{aligned}$$

og eftersom hc_1, hc_2, \dots, hc_j er skalarer, så er $h\mathbf{u} \in \mathcal{S}$, hvilket opfylder Definition 1.21(c). \square

1.8.1 Underrum for matricer

Der findes bestemte typer af underrum, som er relevante i forbindelse med matricer. Den første type, der beskrives, er *nulrummet*.

Definition 1.22

Nulrummet til en matrix A , noteret $\text{num}(A)$, er løsningsmængden til matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Et eksempel på nulrummet til en matrix ses i Eksempel 1.23.

Eksempel 1.23

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kan opskrives som ligningssystemet

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 1x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Nulrummet, $\text{num}(A)$, til matricen er dermed de vektorer \mathbf{x} , som opfylder ligningssystemet.

Sætning 1.18

Hvis A er en $m \times n$ matrix, så er nulrummet af A et underrum af \mathbb{R}^n .

Bevis

Eftersom A er en $m \times n$ matrix, er vektorerne indeholdt i nulrummet til \mathbb{R}^n , da det er løsninger til $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. $\mathbf{0}$ er en del af nulrummet, da $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Hvis \mathbf{u} og \mathbf{v} er i nulrummet, så er $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ og $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Deraf haves, at

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Deraf haves, at $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ er i nulrummet. For alle skalarer c haves, at

$$A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Dette viser, at $c\mathbf{u}$ er i nulrummet og dermed er nulrummet til A et underrum af \mathbb{R}^n . \square

Andre relevante typer underrum er *rækkerum* og *søjlerum*.

Definition 1.23

Rækkerum er spannet, som kommer af rækkerne i en matrix, og noteres $\text{row}(A)$.

Søjlerum er spannet af søjlerne i en matrix, og noteres $\text{col}(A)$.

Underrum med særegne karakteristika er også relevante i forbindelse med lineær afbildning. Værdimængden af en lineær afbildning er det samme som søjlerummet af dens standardmatrix.

1.8.2 Basis

Mens et underrum kan beskrives med en given mængde vektorer, så er det fordelagtigt at beskrive det med så få vektorer som muligt. Denne mængde kaldes en *basis* for underrummet.

Definition 1.24

Lad \mathcal{U} være et ikke-nul-underrum af \mathbb{R}^n . En **basis** for \mathcal{U} er en lineært uafhængig mængde af **generatorer** for \mathcal{U} .

Eksempelvis kan en mængde af standardvektorer $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ bruges som basis for \mathbb{R}^n . Denne type basis kaldes for en *standard basis*. Der findes dog flere mulige baser for det samme underrum. Pivotsøjlerne i en matrix udgør en basis for dens søjlerum. Dette følger af Lemma A.2 i appendicer.

Sætning 1.19

Lad \mathcal{U} være et ikke-nul-underrum af \mathbb{R}^n . Enhver to baser for \mathcal{U} indeholder det samme antal vektorer.

Bevis

Antag, at $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ og $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ er baser for \mathcal{U} og lad $A = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_k]$ og $B = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_p]$. Eftersom $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ er en mængde af generatorer for \mathcal{U} , så eksisterer der vektorer \mathbf{c}_i i \mathbb{R}^k , for $i = 1, 2, \dots, p$, så $A\mathbf{c}_i = \mathbf{v}_i$. Lad $C = [\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_p]$. C er dermed en $k \times p$ matrix, hvorom det gælder, at $AC = B$. Antag nu, at der for nogle vektorer \mathbf{x} i \mathbb{R}^p gælder, at $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Så er $B\mathbf{x} = AC\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Men da søjlerne af B er lineært uafhængige, følger det af Sætning 1.8, at $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Af samme sætning høves det, at søjlerne i C er lineært uafhængige vektorer i \mathbb{R}^k . Da en mængde af vektorer i \mathbb{R}^k med mere end k vektorer er lineært afhængig, høves det, at $p \leq k$. Ligeledes kan det vises, at $k \leq p$ for \mathbf{c}_i i \mathbb{R}^p , $i = 1, 2, \dots, k$, så $B\mathbf{c}_i = \mathbf{v}_i$. Deraf konkluderes det, at $k = p$. Dermed indeholder de to baser samme antal vektorer. \square

1.8.3 Dimension

I forlængelse af underrum og basis introduceres *dimension*.

Definition 1.25

Mængden af vektorer, der udgør en basis for et givent ikke-nul-underrum V i \mathbb{R}^n , betegnes som **dimensionen** af V , hvilket noteres $\dim(V)$.

Det betyder derfor generelt, at standardbasen for \mathbb{R}^n indeholder n vektorer, og derfor er $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. Dertil kan man betragte bestemte underrum associeret med matricer samt deres dimensioner. Der gælder for dimensionerne af underrummet for en $m \times n$ matrix, at pivotsøjlerne i enhver matrix danner en basis for dens søjlerum. Derfor er $\dim(\text{col}(A))$ lig med mængden af pivotsøjler i en matrix A og dermed lig med $\text{rang}(A)$. Nulrummets dimension for en matrix er givet ved nulliteten til A . I Tabel 1.1 ses en oversigt over sammenhæng mellem dimension og underrum.

Underrum	Rum	Dimension
$\text{col}(A)$	\mathbb{R}^m	$\text{rang}(A)$
$\text{nrum}(A)$	\mathbb{R}^n	$\text{null}(A) = n - \text{rang}(A)$
$\text{row}(A)$	\mathbb{R}^n	$\text{rang}(A)$

Tabel 1.1: Oversigt over dimensioner af bestemte underrum for en $m \times n$ matrix.

Slutteligt er det gældende for rækkerummet for en matrix A , at dens dimension ligeledes er lig med matricens rang. Da rækkerummet og søjlerummet har samme dimension gælder, at

$$\dim(\text{row}(A)) = \dim(\text{col}(A)) = \dim(\text{row}(A^T)).$$

Det følger derfor, at rangen af enhver matrix er lig med rangen af matricens transponerede.

2 Lineære optimeringsproblemer

I lineær programmering er målet at optimere en lineær funktion afgrænset af *lineære betingelser*. Dette kapitel tager udgangspunkt i [Bertsimas and Tsitsiklis, 1997, side 2-6, 21-24 og 139-146], hvis ikke andet er angivet. Funktionen, som optimeres, kaldes *objektfunktionen*. Objektfunktionen kan enten maksimeres eller minimeres, og er begrænset af de lineære betingelser. Findes henholdsvis et maksimum eller minimum inden for begrænsningerne, er dette problemets *optimale værdi*.

Et lineært maksimumsproblem kan opstilles som følgende:

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimér} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} = z \\ \text{begrænset af} & \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b_i, \quad i \in M_1, \\ & \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b_i, \quad i \in M_2, \\ & \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b_i, \quad i \in M_3, \\ & x_j \geq 0, \quad j \in N_1, \\ & x_j \leq 0, \quad j \in N_2, \end{array}$$

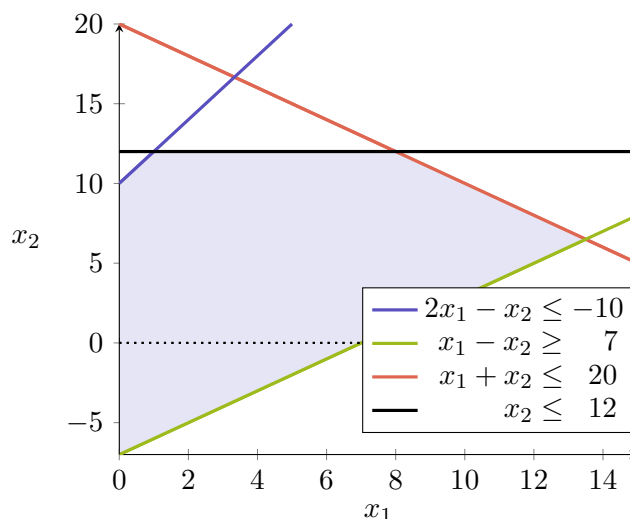
hvor $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ er objektfunktionen og $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ er de lineære betingelser, samt M_1, M_2, M_3, N_1, N_2 er endelige mængder med indekser. \mathbf{c} er *omkostningsvektoren* og z er *omkostningen*. *Løsningsmængden* betegner mængden af vektorer, som opfylder alle betingelserne. Vektorer indeholdt i løsningsmængden kaldes for *løsningsvektorer*. Hvis værdiområdet er uendeligt stort, er optimeringsproblemet *ubegrænset*; ellers er det *begrænset*.

Eksempel 2.1

Betragt minimumsproblemet

$$\begin{array}{ll} \text{Minimér} & 4x_1 - 3x_2 = z \\ \text{begrænset af} & 2x_1 - x_2 \leq -10, \\ & x_1 - x_2 \geq 7, \\ & x_1 + x_2 \leq 20, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \leq 12. \end{array}$$

På figur 2.1 kan løsningsmængden, markeret med blå, for minimumsproblemet ses.

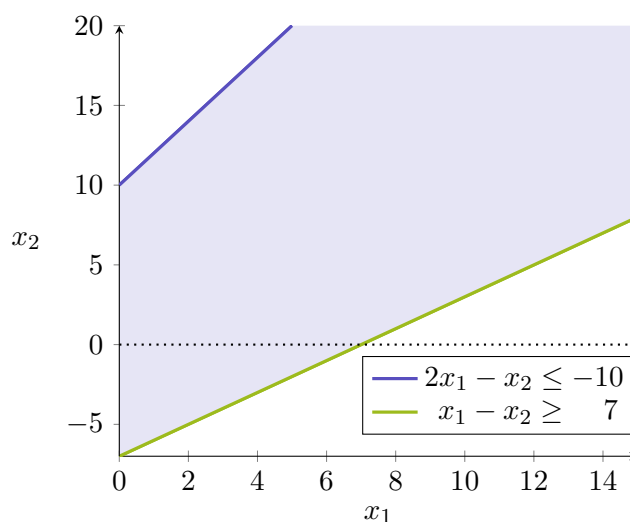


Figur 2.1: En begrænset løsningsmængde, markeret med blå, afgrænset af lineære betingelser.

Med udgangspunkt i figur 2.1 kan det ses, at løsningsmængden er begrænset. Løsningsmængden for minimumsproblemet

$$\begin{array}{llll} \text{Minimer} & 4x_1 - 3x_2 & = & z \\ \text{begrænset af} & 2x_1 - x_2 & \leq & -10, \\ & x_1 - x_2 & \geq & 7, \\ & x_1 & \geq & 0, \end{array}$$

er derimod ubegrænset, da x_1 og x_2 kan blive uendeligt store. Et udsnit af løsningsområdet for minimumsproblemet ses på figur 2.2, hvor det er markeret med blå.



Figur 2.2: Et udsnit af den ubegrænsede løsningsmængde, markeret med blå, afgrænset af lineære betingelser.

2.1 Løsninger til lineære programmeringsproblemer

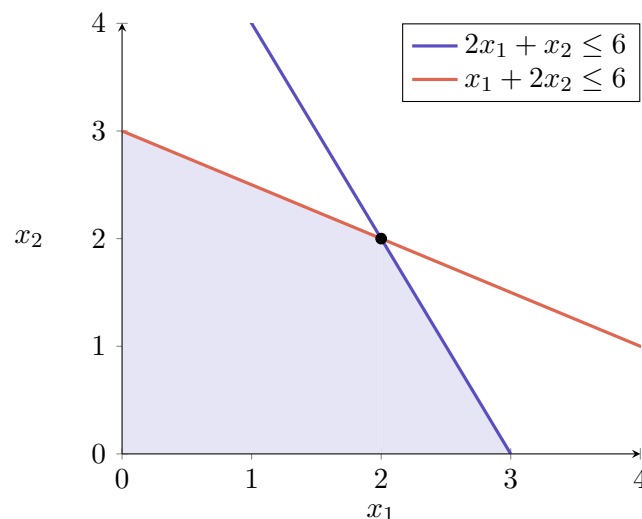
I følgende afsnit uddybes, hvordan et lineært programmeringsproblem kan løses grafisk med udgangspunkt i Eksempel 2.2.

Eksempel 2.2

Betragt maksimumsproblemet

$$\begin{array}{llll} \text{Maksimér} & x_1 + x_2 & = & z \\ \text{begrænset af} & x_1 + 2x_2 & \leq & 6, \\ & 2x_1 + x_2 & \leq & 6, \\ & x_1 & \geq & 0, \\ & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

På figur 2.3 kan løsningsmængden, markeret med blå, for maksimumsproblemet ses.



Figur 2.3: En begrænset løsningsmængde, markeret med blå, afgrænset af lineære betingelser.

Ethvert punkt i løsningsmængden, hvor objektfunktionen $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ er lig med k , undersøges for om disse er den optimale løsning. Dette illustreres ved en linje, der er beskrevet af ligningen $x_1 + x_2 = k$ for maksimumsproblemet i Eksempel 2.2. Dette betyder, at den optimale løsning, som enten maksimerer eller minimerer omkostningen kan findes grafisk ved at indtegne niveaukurver $f(x_1, x_2) = k$, og forskyde disse niveaukurver i den retning, der optimerer omkostningen, indtil den optimale løsning opnås. Med udgangspunkt i Eksempel

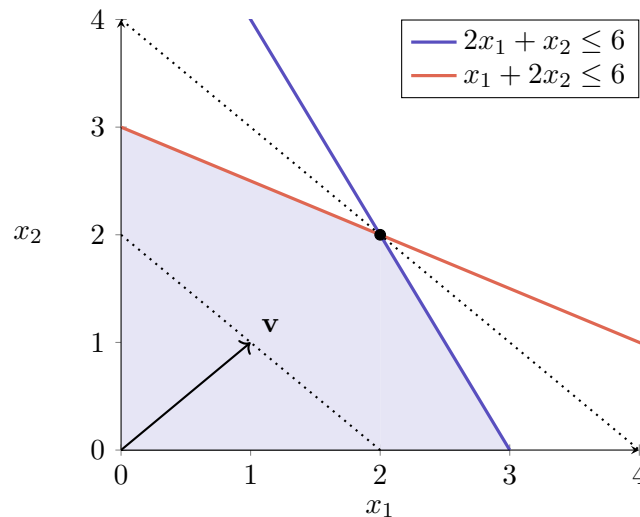
2.2, er denne linje vinkelret på vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Forskellige værdier for k fører til forskellige linjer, hvor alle linjer er parallelle med hinanden samt vinkelret på vektoren \mathbf{v} . Hvis værdien af k øges, svarer det til at bevæge niveaukurven $x_1 + x_2 = k$ i retning af \mathbf{v} . Eftersom Eksempel 2.2 er et maksimumsproblem, bevæges linjen i retningen af \mathbf{v} uden at forlade løsningsmængden. Den optimale niveaukurve er derfor $k = 4$, hvormed vektor

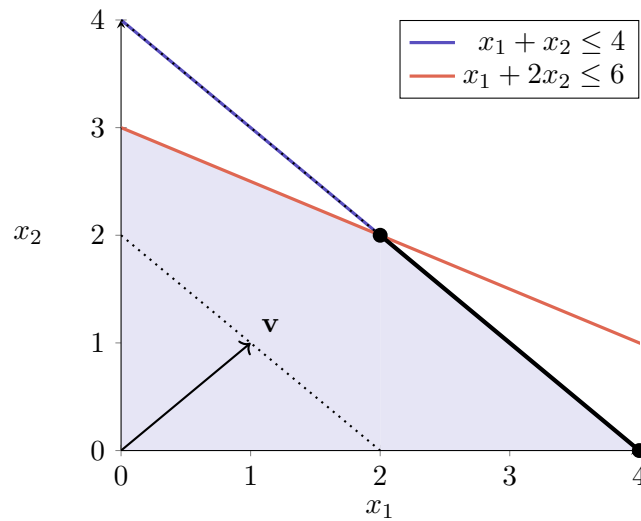
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er den optimale løsning i løsningsmængden, og dermed den entydige optimale løsning. På figur 2.4 er enkelte niveaukurver, vektoren \mathbf{v} , og den optimale løsning markeret.



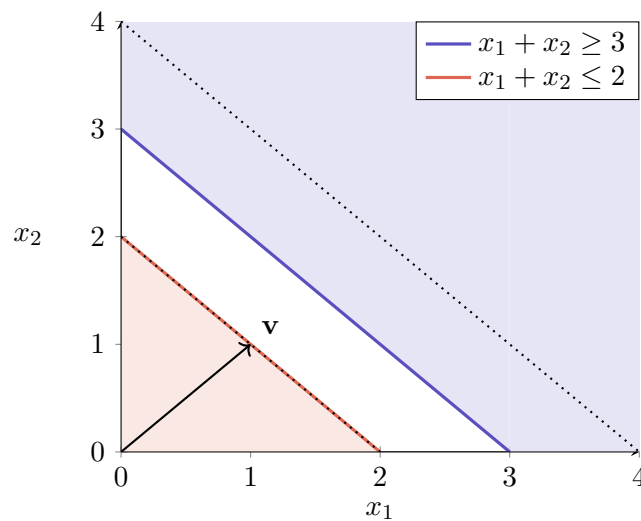
Figur 2.4: Løsningsmængden til Eksempel 2.2, markeret med blå, hvor \mathbf{v} , og enkelte niveaukurver er markeret, samt den entydige løsning til problemet.

Betragt figur 2.4. I det hjørne, hvor den optimale løsning findes, maksimeres omkostningen, der repræsenterer præcis én løsning til maksimumsproblemet. Antag nu, at den ene koefficient i objektfunktion er rykket, eller at den ene begrænsning er skiftet, så den ligger parallelt med niveaukurven, og vinkelret på vektoren \mathbf{v} . Dette medfører, at der findes uendeligt mange optimale løsninger til maksimumsproblemet, eftersom den optimale niveaukurve skærer løsningsmængden i uendeligt mange punkter. På figur 2.5 introduceres et eksempel, hvor der findes et uendeligt antal løsninger, der maksimerer omkostningen.



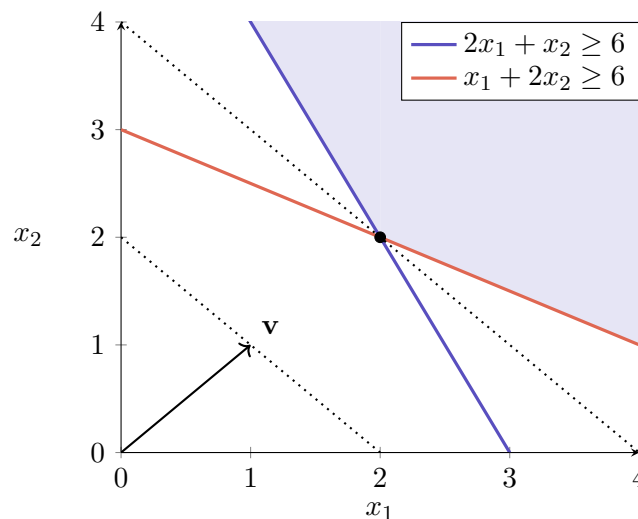
Figur 2.5: En begrænset løsningsmængde, markeret med blå, afgrænset af lineære betingelser, med uendeligt mange løsninger til problemet.

Betragt figur 2.6. Dette scenarie har ikke nogle løsninger, som opfylder betingelserne, og dermed er der ingen optimal løsning til det lineære programmeringsproblem.



Figur 2.6: Begrænsninger resulterende i en tom løsningsmængde, hvor områder, som opfylder én ulighedsbetingelse og ikke-negativsbetingelserne, er farvet.

Antag nu, at det lineære programmeringsproblem i stedet er ubegrænset opadtil. Dette scenarie er illustreret på figur 2.7. Dette betyder, at betingelserne ikke begrænser, hvor stor omkostningen kan blive. Derfor er den optimale løsning ∞ .



Figur 2.7: En begrænset løsningsmængde, markeret med blå, afgrænset af lineære betingelser, hvor den optimale løsning er ∞ til problemet.

Som gennemgået i de forudgående eksempler, så findes følgende fire løsningsmuligheder, der er betinget af det lineære optimeringsproblems form.

- Der findes en entydig optimal løsning.
- Der findes flere optimale løsninger i løsningsmængden.
- Løsningsmængden for det lineære optimeringsproblem er tom.
- Den optimale løsning er enten ∞ eller $-\infty$.

2.2 Standardform

Hvis et lineært optimeringsproblem er på formen

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimer} & z - \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0 \\ \text{begrænset af} & A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

eller

$$\begin{array}{ll} \text{Minimer} & z - \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0 \\ \text{begrænset af} & A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

er optimeringsproblemet på *standardform*. Bemærk, at problemet på standardform er et maksimumsproblem eller minimumsproblem, og betingelserne er lighedsbetingelser og ikke-negativsbetingelser.

Man kan dertil omskrives mellem dem. For at omskrive et minimumsproblem til et maksimumsproblem multipliceres objektfunktionen med -1 , og ulighedsbetingelserne ændres fra $\mathbf{A}_i \mathbf{x} \geq b_i$ til $-\mathbf{A}_i \mathbf{x} \leq -b_i$.

For at få et givet problem med ulighedsbetingelser på standardform tilføjes *slack-variable* til venstre side af ulighederne for at gøre dem til ligheder. Hvis optimeringsproblemet har m uligheder tilføjes m slack-variable. I denne rapport noteres slack-variable s_i , og markeres med blå. Variable, der ikke har en ikke-negativsbegrænsning, opdeles i x_i^+ og x_i^- , da alle reelle tal kan skrives som differencen mellem to positive tal. Dertil isoleres 0 i objektfunktionen, så z er positiv på venstre side af lighedstegnet. Med denne fremgangsmåde kan alle lineære optimeringsproblemer omskrives til standardform. Det er derfor kun nødvendigt med en metode til at løse optimeringsproblemer på denne form. Generelt er rapporten med udgangspunkt i minimumsproblemer, men ækvivalente udtalelser kan opstilles for maksimumsproblemer.

Eksempel 2.3

Med udgangspunkt i fremgangsmetoden ovenfor er minimumsproblemet fra Eksempel 2.1 omskrevet til et maksimumsproblem på standardform.

$$\begin{array}{rcll}
 \text{Maksimér} & z - 4x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \\
 \text{begrænset af} & 2x_1 & - & x_2^+ - x_2^- & + & s_1 & = & -10, \\
 & -x_1 & + & x_2^+ - x_2^- & & + & s_2 & = & -7, \\
 & x_1 & + & x_2^+ - x_2^- & & & + & s_3 & = & 20, \\
 & & & x_2^+ - x_2^- & & & & + & s_4 & = & 12, \\
 & x_1 & & & & & & & & \geq & 0, \\
 & & & x_2^+ & & & & & & \geq & 0, \\
 & & & x_2^- & & & & & & \geq & 0.
 \end{array}$$

2.3 Dualitet

Et vigtigt element af teorien vedrørende lineære optimeringsproblemer og simplexmetodens brug omhandler *dualproblemer*.

Definition 2.1

Givet maksimumsproblemet

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimér} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} = z \\ \text{begrænset af} & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i, \quad i \in M_1, \\ & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i, \quad i \in M_2, \\ & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i, \quad i \in M_3, \\ & x_j \geq 0, \quad j \in N_1, \\ & x_j \leq 0, \quad j \in N_2, \\ & x_j \text{ fri}, \quad j \in N_3. \end{array}$$

Da vil **dual minimumsproblemet** være

$$\begin{array}{ll} \text{Minimér} & \mathbf{p}^T \mathbf{b} = v \\ \text{begrænset af} & p_i \geq 0, \quad i \in M_1, \\ & p_i \leq 0, \quad i \in M_2, \\ & p_i \text{ fri}, \quad i \in M_3, \\ & \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j \leq c_j, \quad j \in N_1, \\ & \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j \geq c_j, \quad j \in N_2, \\ & \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j = c_j, \quad j \in N_3. \end{array}$$

Problemet

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimér} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} = z \\ \text{begrænset af} & \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

vil således have

$$\begin{array}{ll} \text{Minimér} & \mathbf{p}^T \mathbf{b} = v \\ \text{begrænset af} & \mathbf{p}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}, \\ & \mathbf{b} \leq \mathbf{0} \end{array}$$

som dualproblem.

For hver begrænsning i det oprindelige problem indføres således en variabel i dualproblemet. Tilsvarende indføres en begrænsning for hver variabel. Derudover skiftes fra et maksimums- til minimumsproblem. I tabel 2.1 ses en oversigt over egenskaber ved primærproblemet og dettes dualproblem.

Primær	Maksimér	Minimér	Dual
Begrænsninger	$\leq b_i$	≥ 0	Variable
	$\geq b_i$	≤ 0	
	$= b_i$	fri	
Variable	≥ 0	$\geq c_j$	Begrænsninger
	≤ 0	$\leq c_j$	
	fri	$= c_j$	

Tabel 2.1: Oversigt over egenskaber ved primærproblemet og dets dual.

Dualproblemet kan således opstilles som i Eksempel 2.4.

Eksempel 2.4

Betragt primærproblemet

$$\begin{array}{llll}
 \text{Maksimér} & 5x_1 + 4x_2 & = & z \\
 \text{begrænset af} & 3x_1 + 5x_2 & \leq & 78, \\
 & 4x_1 + x_2 & \leq & 36, \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0.
 \end{array}$$

Dualproblemet vil således have formen

$$\begin{array}{llll}
 \text{Minimér} & 78p_1 + 36p_2 & = & v \\
 \text{begrænset af} & 3p_1 + 4p_2 & \geq & 5, \\
 & 5p_1 + p_2 & \geq & 4, \\
 & p_1, p_2 & \geq & 0.
 \end{array}$$

Det gælder endvidere, at der fra dualproblemet kan vendes tilbage til det oprindelige problem, hvilket udtrykkes ved Sætning 2.1.

Sætning 2.1

Hvis dualproblemet omdannes til et ækvivalent minimumsproblem og dualproblemet af minimumsproblemet dannes, opnås primærproblemet.

Bevis

Betragt problemet

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimér} & \mathbf{p}^T \mathbf{b} = z \\
 \text{begrænset af} & p_i \geq 0, \quad i \in M_1, \\
 & p_i \leq 0, \quad i \in M_2, \\
 & p_i \text{ fri}, \quad i \in M_3, \\
 & \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j \leq c_j, \quad j \in N_1, \\
 & \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j \geq c_j, \quad j \in N_2, \\
 & \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j = c_j, \quad j \in N_3,
 \end{array}$$

og dets dualproblem

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maksimér} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} = v \\
 \text{begrænset af} & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i, \quad i \in M_1, \\
 & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i, \quad i \in M_2, \\
 & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i, \quad i \in M_3, \\
 & x_j \geq 0, \quad j \in N_1, \\
 & x_j \leq 0, \quad j \in N_2, \\
 & x_j \text{ fri}, \quad j \in N_3.
 \end{array}$$

Dualproblemet omdannes til det ækvivalente minimumsproblem

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimér} & -\mathbf{c}^T \mathbf{x} = -v \\
 \text{begrænset af} & -\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq -b_i, \quad i \in M_1, \\
 & -\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq -b_i, \quad i \in M_2, \\
 & -\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = -b_i, \quad i \in M_3, \\
 & x_j \geq 0, \quad j \in N_1, \\
 & x_j \leq 0, \quad j \in N_2, \\
 & x_j \text{ fri}, \quad j \in N_3.
 \end{array}$$

Dualproblemet til dette er

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maksimér} & -\mathbf{p}^T \mathbf{b} = -z \\
 \text{begrænset af} & p_i \geq 0, \quad i \in M_1, \\
 & p_i \leq 0, \quad i \in M_2, \\
 & p_i \text{ fri}, \quad i \in M_3, \\
 & -\mathbf{p}^T \mathbf{A}_j \geq -c_j, \quad j \in N_1, \\
 & -\mathbf{p}^T \mathbf{A}_j \leq -c_j, \quad j \in N_2, \\
 & -\mathbf{p}^T \mathbf{A}_j = -c_j, \quad j \in N_3,
 \end{array}$$

hvilket har det ækvivalente minimumsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{Minimér} & \mathbf{p}^T \mathbf{b} = z \\ \text{begrænset af} & p_i \geq 0, \quad i \in M_1, \\ & p_i \leq 0, \quad i \in M_2, \\ & p_i \text{ fri}, \quad i \in M_3, \\ & \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j \leq c_j, \quad j \in N_1, \\ & \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j \geq c_j, \quad j \in N_2, \\ & \mathbf{p}^T \mathbf{A}_j = c_j, \quad j \in N_3, \end{array}$$

som er identisk med primærproblemet.

□

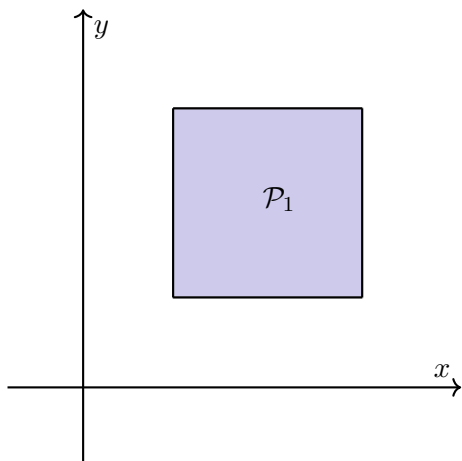
3 Grafisk løsning

I henhold til geometriske fremstillinger af lineære programmeringsproblemer er det nødvendigt at definere en række begreber. Disse er *polyeder*, *hyperplan* og *halvrum*. Dette kapitel tager udgangspunkt i [Bertsimas and Tsitsiklis, 1997, side 42-70], hvis ikke andet er angivet.

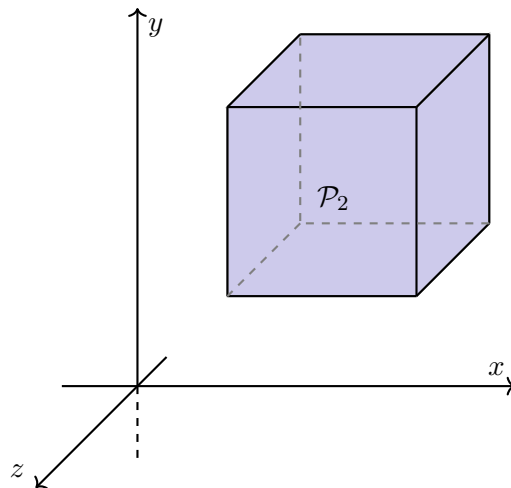
Definition 3.1

Lad A være en $m \times n$ matrix, og lad \mathbf{b} være en vektor i \mathbb{R}^m . Et **polyeder** \mathcal{P} er en mængde, der kan beskrives som $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$.

Som det fremgår af Definition 3.1, er et polyeder mængden af mulige løsninger \mathbf{x} til et ligningssystem, hvilket også kaldes værdimængden. Det gælder endvidere, at en mængde på formen $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ kaldes et *polyeder på standardform*, hvilket beskrives yderligere i afsnit 3.3. På figur 3.1 ses et polyeder \mathcal{P}_1 , der er markeret med blå i \mathbb{R}^2 , og på figur 3.2 ses et polyeder \mathcal{P}_2 , markeret med blå i \mathbb{R}^3 . Bemærk, at løsningsmængden på figur 2.1, som er markeret med blå, er et polyeder.



Figur 3.1: Et polyeder $\mathcal{P}_1 \in \mathbb{R}^2$ markeret med blå.



Figur 3.2: Et polyeder $\mathcal{P}_2 \in \mathbb{R}^3$ markeret med blå.

Randen er begrænsningerne, som afgrænser polyederet fra resten af rummet. Dermed er randen på figur 3.1 linjerne, der afgrænser \mathcal{P} fra resten af \mathbb{R}^2 . Randen på figur 3.2 er derimod udsnittet af fladerne, som udgør terningen, der afgrænser \mathcal{P} fra resten af \mathbb{R}^3 .

Det gælder endvidere for polyedre, at de enten kan være *begrænsede* eller *ubegrænsede*.

Definition 3.2

En mængde $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ er **begrænset**, såfremt der eksisterer en konstant c , således den absolutte værdi af alle komponenter i alle elementer i \mathcal{S} er mindre eller lig c . Såfremt en sådan konstant ikke eksisterer, er mængden **ubegrænset**.

I henhold til lineære programmeringsproblemer er løsningsmængden ofte begrænset. Endvidere er det en fordel at definere polyedre, der er begrænset af én lineær betingelse.

Definition 3.3

Lad \mathbf{a} være en vektor i \mathbb{R}^n , hvor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ og lad b være en skalar. Mængden

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$$

kaldes et **hyperplan**. Mængden

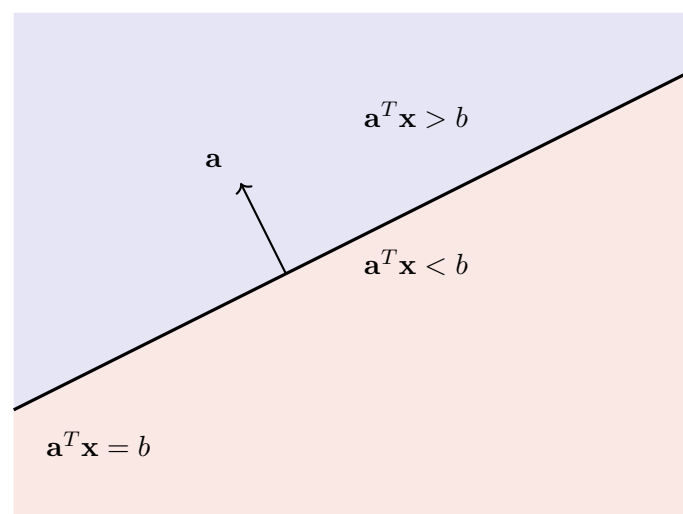
$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b\}$$

kaldes det **øvre halvrum**, og mængden

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b\}$$

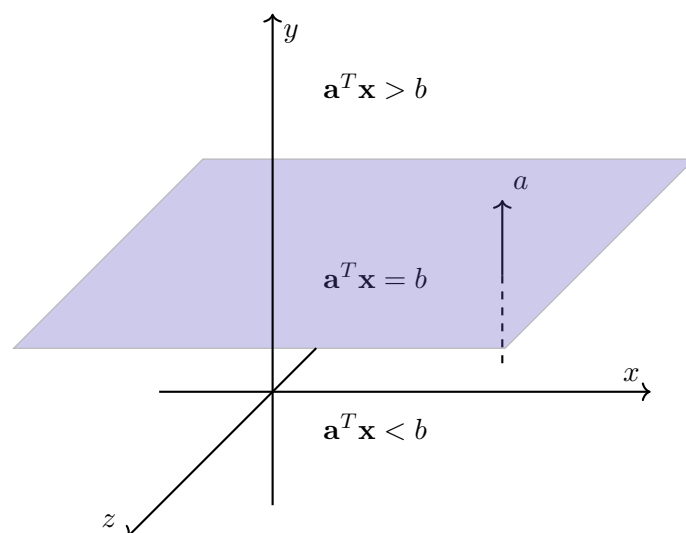
kaldes det **nedre halvrum**.

Det gælder her, at hyperplanet er grænsen mellem et øvre og et nedre halvrum. I \mathbb{R}^2 er hyperplanet således en ret linje, som deler rummet. Der er dermed et halvrum på hver side af hyperplanet, hvilket er illustreret på figur 3.3, hvor det øvre halvrum er markeret med blå, og det nedre halvrum er markeret med rød.



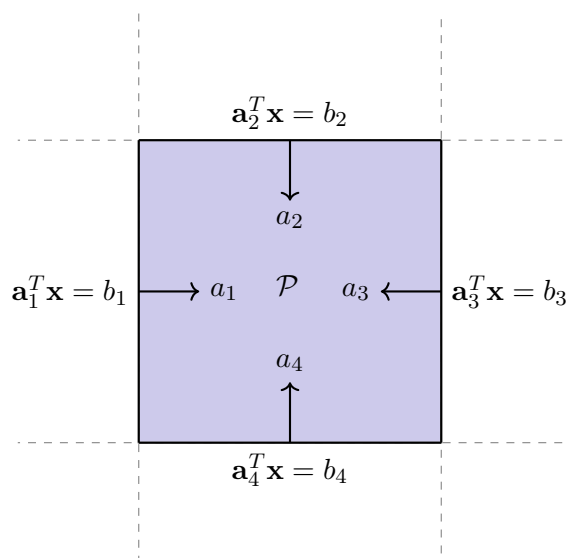
Figur 3.3: Et hyperplan $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$ og to halvrum markeret med blå for det øvre halvrum $\mathbf{a}^T \mathbf{x} < b$ og rød for det nedre halvrum $\mathbf{a}^T \mathbf{x} > b$.

Ligeledes ses et hyperplan i \mathbb{R}^3 på figur 3.4, der afskærer det øvre og nedre halvrum.



Figur 3.4: Et hyperplan $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$ i \mathbb{R}^3 , markeret med blå, det øvre halvrum $\mathbf{a}^T \mathbf{x} > b$ og det nedre halvrum $\mathbf{a}^T \mathbf{x} < b$.

Betragt polyederet \mathcal{P} på figur 3.1. Randen består af fire hyperplaner. Fællesmængden for de øvre halvrum udgør polyederet. På figur 3.5 er de fire hyperplaner markeret.



Figur 3.5: Fællesmængden af de fire hyperplaners øvre halvrum udgør polyederet $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^2$ markeret med blå.

Hyperplanerne på figur 3.2 danner dermed randen, og fællesmængden for det øvre halvrum udgør polyederet.

Vektoren \mathbf{a} er ortogonal med hele hyperplanet $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$, hvilket vises i Sætning 3.1.

Sætning 3.1

Lad \mathbf{a} være en vektor i \mathbb{R}^n , hvor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. For hyperplanet $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$, vil \mathbf{a} være ortogonal med hyperplanet.

Bevis

Lad \mathbf{u} og \mathbf{v} tilhøre det samme hyperplan. Så er $\mathbf{a}^T \mathbf{u} = \mathbf{a}^T \mathbf{v}$. Dermed er $\mathbf{a}^T (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0$, derfor er \mathbf{a} ortogonal med alle vektorer i hyperplanet. \square

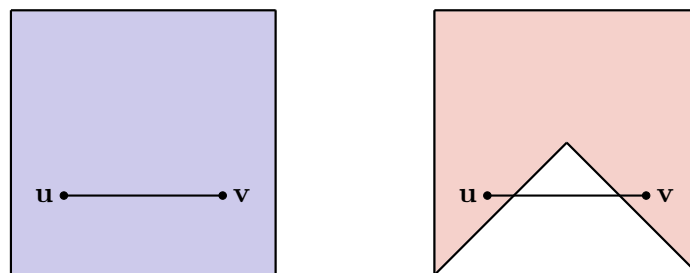
3.1 Konvekse mængder og konvekse funktioner

I forbindelse med mængder af vektorer er det vigtigt at definere *konvekse mængder*.

Definition 3.4

En mængde $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ er **konveks**, hvis $\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v} \in \mathcal{S}$ for ethvert $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{S}$ og ethvert $\lambda \in [0, 1]$.

En mængde er med andre ord konveks, hvis ethvert element på en ret linje mellem to vilkårlige elementer i mængden også tilhører mængden. På figur 3.6 ses et eksempel på en konveks mængde, markeret med blå, og ikke-konveks mængde, markeret med rød. Den blå mængde er en konveks mængde grundet, at alle elementer mellem et vilkårligt \mathbf{u} og \mathbf{v} er indeholdt i mængden. Tilsvarende er den røde mængde ikke en konveks mængde grundet, at ikke alle elementer mellem et vilkårligt \mathbf{u} og \mathbf{v} er indeholdt i mængden.



Figur 3.6: En konveks mængde markeret med blå, der indeholder alle elementer mellem et vilkårligt \mathbf{u} og \mathbf{v} og en ikke-konveks mængde markeret med rød, som ikke indeholder alle elementer mellem et vilkårligt \mathbf{u} og \mathbf{v} .

Definition 3.5

Lad $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$, og $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ være ikke-negative skalarer, hvis sum er 1. Da gælder:

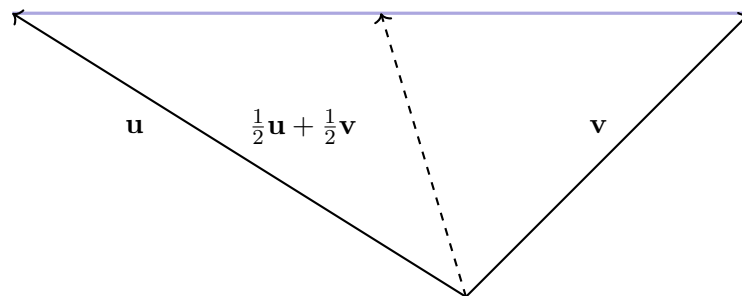
(a) Vektoren

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i$$

kaldes en **konveks kombination** af vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$.

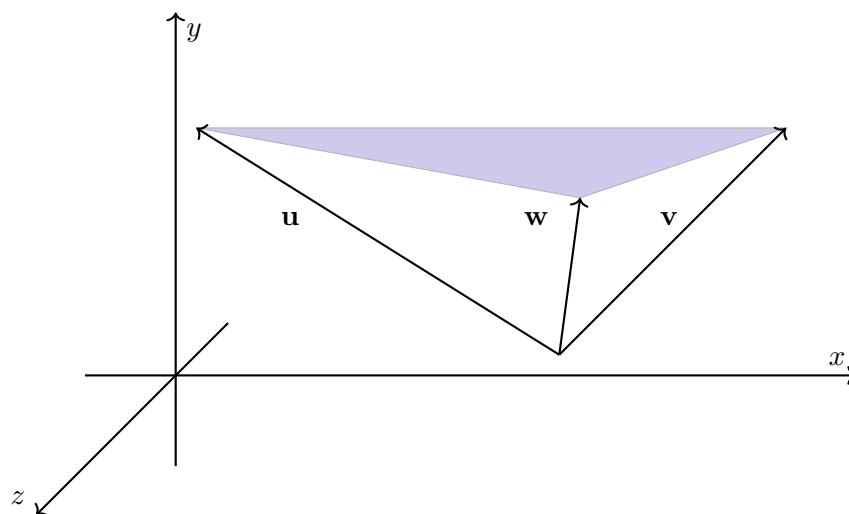
(b) Det **konvekse hylster** af vektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ er mængden af alle konvekse kombinationer af disse vektorer.

På figur 3.7 ses to vektorer \mathbf{u} og \mathbf{v} i \mathbb{R}^n og den konvekse kombination $\frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$, hvor $\lambda_{\mathbf{u}} = \lambda_{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}$. Det konvekse hylster af vektorerne er en ret linje, der er markeret med blå.



Figur 3.7: Vektorerne \mathbf{u} og \mathbf{v} , samt den konvekse kombination af dem, hvor $\lambda_{\mathbf{u}} = \lambda_{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}$, og det konvekse hylster af vektorerne, markeret med blå.

På figur 3.8 ses derimod tre vektorer \mathbf{u} , \mathbf{v} og \mathbf{w} i \mathbb{R}^3 . Det konvekse hylster af vektorerne er på figuren markeret med blå.



Figur 3.8: Vektorerne \mathbf{u} , \mathbf{v} og \mathbf{w} i \mathbb{R}^3 , og det konvekse hylster af vektorerne, markeret med blå.

Af Definition 3.5 følger Sætning 3.2.

Sætning 3.2

- (a) Fællesmængden for konvekse mængder er konveks.
- (b) Ethvert polyeder er en konveks mængde.
- (c) En konveks kombination af et endeligt antal elementer fra en konveks mængde tilhører også den mængde.
- (d) Det konvekse hylster af et endeligt antal vektorer er en konveks mængde.

Bevis

- (a) Lad I være en indeksmængde, lad \mathcal{S}_i , $i \in I$, være konvekse mængder, og lad $\lambda \in [0, 1]$. Antag nu, at vektorerne \mathbf{u} og \mathbf{v} tilhører fællesmængden $\bigcap_{i \in I} \mathcal{S}_i$. Det haves, at $\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v} \in \mathcal{S}_i$, eftersom enhver \mathcal{S}_i er konveks og indeholder \mathbf{u} og \mathbf{v} . Derfor er $\bigcap_{i \in I} \mathcal{S}_i$ konveks, da $\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v} \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{S}_i$, hvilket beviser (a).

- (b) Lad \mathbf{a} være en vektor, lad b være en skalar, og lad $\lambda \in [0, 1]$. Antag, at \mathbf{u} og \mathbf{v} henholdsvis opfylder, at $\mathbf{a}^T \mathbf{u} \geq b$ og $\mathbf{a}^T \mathbf{v} \geq b$, således de tilhører samme halvrum. Så er

$$\mathbf{a}^T (\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v}) \geq \lambda b + (1 - \lambda) b = b,$$

hvilket beviser, at $\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v}$ tilhører samme halvrum, hvormed halvrummet er konvekst. Bemærk, at et polyeder er fællesmængden af et endeligt antal halvrum, og at (b) dermed er bevist jævnfør (a).

- (c) Dette bevises ved induktion. Jævnfør Definition 3.5 ligger en konveks kombination af to elementer i en konveks mængde i mængden. Som induktionsantagelse antages det, at en konveks kombination af k elementer i en konveks mængde også er i mængden. Dernæst undersøges om en konveks kombination af $k + 1$ elementer $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k+1}$ i en konveks mængde \mathcal{S} også er i mængden. Lad $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ være ikke-negative skalarer, hvis sum er 1. Det antages, at $\lambda_{k+1} \neq 1$. Så haves, at

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \mathbf{u}_i = \lambda_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} + (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} \mathbf{u}_i.$$

Koefficienterne

$$\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}}, \quad \text{for } i = 1, \dots, k,$$

er ikke-negative og summerer til 1. Ved induktionsantagelsen gælder, at

$$\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i \mathbf{u}_i}{1 - \lambda_{k+1}} \in \mathcal{S}.$$

Da \mathcal{S} er konveks, fås $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \mathbf{u}_i \in \mathcal{S}$, hvormed (c) er bevist.

(d) Lad \mathcal{S} være et konvekst hylster af $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$, og lad

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k \zeta_i \mathbf{u}^i \text{ og } \mathbf{w} = \sum_{i=1}^k \theta_i \mathbf{u}^i$$

være to elementer i \mathcal{S} , hvor $\zeta_i \geq 0$, $\theta_i \geq 0$, og

$$\sum_{i=1}^k \zeta_i = \sum_{i=1}^k \theta_i = 1.$$

Lad $\lambda = [0, 1]$. Så er

$$\lambda \mathbf{v} + (1 - \lambda) \mathbf{w} = \lambda \sum_{i=1}^k \zeta_i \mathbf{u}^i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^k \theta_i \mathbf{u}^i = \sum_{i=1}^k (\lambda \zeta_i + (1 - \lambda) \theta_i) \mathbf{u}^i.$$

Bemærk, at koefficienterne $\lambda \zeta_i + (1 - \lambda) \theta_i$, $i = 1, \dots, k$, summerer til 1 og ikke er negative. Dermed er $\lambda \mathbf{v} + (1 - \lambda) \mathbf{w}$ en konveks kombination af vektorerne $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$, og tilhører derfor mængden \mathcal{S} , hvormed (d) er bevist.

□

Envidere kan en funktion også være konveks.

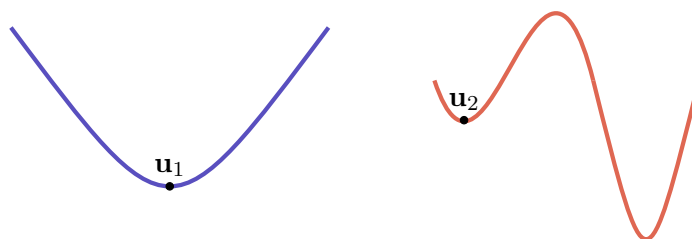
Definition 3.6

En funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ er **konveks**, hvis

$$f(\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v}) \leq \lambda f(\mathbf{u}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{v})$$

for ethvert $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og ethvert $\lambda \in [0, 1]$.

Hvis $f(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{v})$ for \mathbf{v} i nærheden af \mathbf{u} , siges \mathbf{u} at være et *lokalt minimum* af f , og \mathbf{u} siges at være et *globalt minimum*, hvis $f(\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{v})$ for alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Konvekse funktioner har dermed ikke et lokalt minimum, som ikke er et globalt minimum. På figur 3.9 ses to funktioner. En blå konveks funktion, hvor \mathbf{u}_1 er et globalt minimum, da $f(\mathbf{u}_1) \leq f(\mathbf{v})$ for alle \mathbf{v} , og en rød funktion, hvor \mathbf{u}_2 er et lokalt minimum, da $f(\mathbf{u}_2) \leq f(\mathbf{v})$ for i nærheden af \mathbf{u}_2 .



Figur 3.9: En konveks funktion markeret med blå, hvor \mathbf{u}_1 er et globalt minimum, og en ikke-konveks funktion markeret med rød, hvor \mathbf{u}_2 er et lokalt minimum.

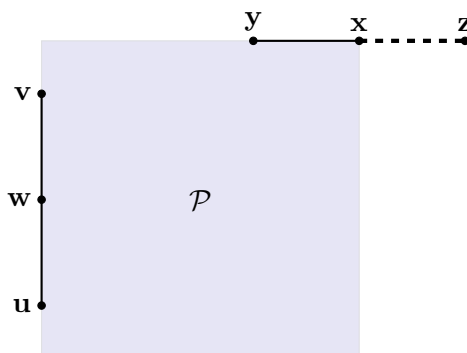
3.2 Ekstrema, hjørnepunkter og basale løsninger

Som det fremgår i afsnit 2.1, vil en optimal løsning oftest ligge i et hjørne på et polyeder. Det er derfor hensigtsmæssigt at definere disse hjørner.

Definition 3.7

Lad \mathcal{P} være et polyeder. En vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{P}$ kaldes et **ekstremumspunkt** i \mathcal{P} , hvis der ikke eksisterer to vektorer $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \neq \mathbf{u}$, samt en skalar $\lambda \in [0, 1]$, hvorom det gælder, at $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v} + (1 - \lambda) \mathbf{w}$.

Et hjørne kan beskrives ud fra Definition 3.7, idet der, såfremt $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v} + (1 - \lambda) \mathbf{w}$, og alle vektorene findes i \mathcal{P} , gælder, at \mathbf{u} er en konveks kombination af \mathbf{v} og \mathbf{w} . Hvis $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v} + (1 - \lambda) \mathbf{w}$ og \mathbf{u} er et ekstremumspunkt, må det derfor gælde, at $\mathbf{v} \notin \mathcal{P}$ eller $\mathbf{w} \notin \mathcal{P}$ eller $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ eller $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Bemærk, at Definition 3.7 er strengt geometrisk. På figur 3.10 ses et polyeder \mathcal{P} , hvor \mathbf{x} er et ekstremumspunkt, da der ikke findes vektorer \mathbf{y} og \mathbf{z} , sådan at $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{z}$. Vektor \mathbf{w} er derimod ikke et ekstremumspunkt, da der findes \mathbf{v} og \mathbf{u} , sådan at $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v} + (1 - \lambda) \mathbf{u}$.



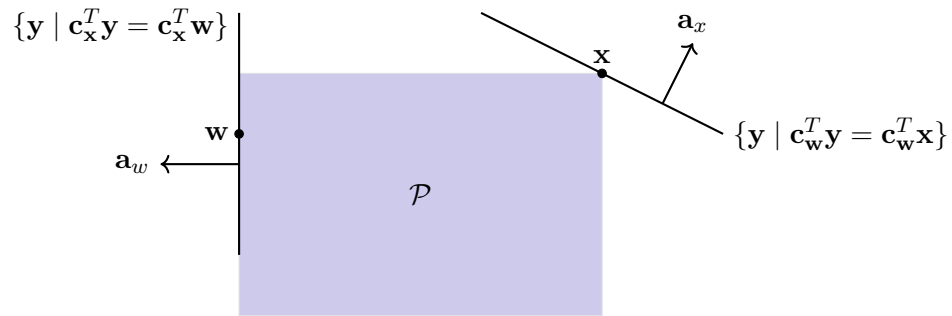
Figur 3.10: Et polyeder \mathcal{P} , hvor \mathbf{x} er et ekstremumspunkt, da der ikke findes vektorer \mathbf{y} og \mathbf{z} , sådan at $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{z}$. Vektor \mathbf{w} er derimod ikke et ekstremumspunkt, da der findes \mathbf{v} og \mathbf{u} , sådan at $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v} + (1 - \lambda) \mathbf{u}$.

En alternativ geometrisk definition relaterer sig til *hjørnepunkter*. For et givet lineært programmeringsproblem er den optimale løsning i et af hjørnepunkterne.

Definition 3.8

Lad \mathcal{P} være et polyeder. En vektor $\mathbf{u} \in \mathcal{P}$ siges at være et **hjørnepunkt**, hvis der eksisterer en vektor \mathbf{c} , hvorom det gælder, at $\mathbf{c}^T \mathbf{u} < \mathbf{c}^T \mathbf{v}$ for alle \mathbf{v} , som opfylder $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$ samt $\mathbf{v} \neq \mathbf{u}$.

På figur 3.11 ses et eksempel på et polyeder \mathcal{P} , hvor \mathbf{x} er et hjørnepunkt, da det er det eneste punkt, som både er i hyperplanet og \mathcal{P} . Vektoren \mathbf{w} er i modsætning ikke et hjørnepunkt, da hyperplanet skærer \mathcal{P} i flere punkter end \mathbf{w} .

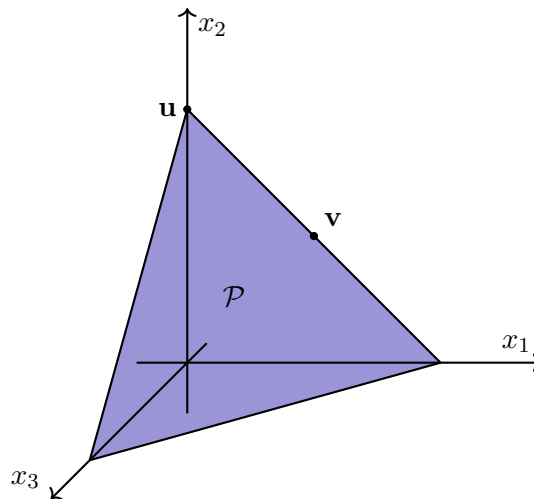


Figur 3.11: Et polyeder \mathcal{P} , hvor \mathbf{x} er et hjørnepunkt, da det er det eneste punkt, som både er i hyperplanet og \mathcal{P} . Vektoren \mathbf{w} er derimod ikke et hjørnepunkt, da hyperplanet skærer \mathcal{P} i flere punkter end \mathbf{w} .

Definition 3.9

Hvis en vektor \mathbf{v} opfylder $\mathbf{a}_i^T \mathbf{v} = b_i$ for $i \in M_1, M_2$ eller M_3 , så er den tilsvarende betingelse **bindende** eller **aktive** i \mathbf{v} .

Bemærk, at M_1, M_2 og M_3 er indeksmængder for henholdsvis lighedsbetingelser og de to typer ulighedsbetingelser. På figur 3.12 ses et polyeder $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$. Punktet \mathbf{u} har tre aktive betingelser $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1 = 0$ og $x_3 = 0$, og \mathbf{v} har to aktive betingelser $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ og $x_3 = 0$.



Figur 3.12: Et polyeder $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$. Punktet \mathbf{u} har tre aktive betingelser $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1 = 0$ og $x_3 = 0$, og \mathbf{v} har to aktive betingelser $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ og $x_3 = 0$.

Sætning 3.3 giver anledning til, at disse bindende betingelser kan føres i relation til løsninger af lineære optimeringsproblemer.

Sætning 3.3

Lad \mathbf{v} være et element i \mathbb{R}^n og lad $I = \{i \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{v} = b_i\}$ være en mængde af indekser på betingelser, der er bindende ved \mathbf{v} . Så er følgende udsagn ækvivalente:

- (a) Der eksisterer n vektorer i mængden $\{\mathbf{a}_i \mid i \in I\}$, som er lineært uafhængige.
- (b) Spannet af vektorerne \mathbf{a}_i , for $i \in I$, dækker hele \mathbb{R}^n .
- (c) Ligningssystemet $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$, for $i \in I$, har en entydig løsning.

Bevis

Antag, at $\text{span}\{\mathbf{a}_i \mid i \in I\} = \mathbb{R}^n$. Dette span har dimension n , og jævnfør Sætning B.1 kan en basis for spannet dannes med n af vektorerne, som er lineært uafhængige. Hvis der ligeledes eksisterer n vektorer i $\{\mathbf{a}_i \mid i \in I\}$, som er lineært uafhængige, må disse udspænde hele \mathbb{R}^n . Dette viser, at (a) og (b) er ækvivalente.

Antag, at ligningssystemet $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$, $i \in I$, har løsninger \mathbf{u} og \mathbf{v} . Så skal ikke-nulvektoren $\mathbf{d} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ opfylde, at $\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} = 0$ for alle $i \in I$. Dette kræver, at \mathbf{d} er ortogonal med alle \mathbf{a}_i , $i \in I$ og dermed ikke er en linearkombination af disse vektorer. Dette medfører, at $\text{span}\{\mathbf{a}_i \mid i \in I\} \neq \mathbb{R}^n$. Antag nu, at vektorerne \mathbf{a}_i , $i \in I$, ikke spænder over \mathbb{R}^n . Så er det muligt at vælge en ikke-nulvektor \mathbf{d} , der er ortogonal med underrummet, som vektorerne spænder over. Hvis \mathbf{v} opfylder $\mathbf{a}_i^T \mathbf{v} = b_i$, for alle $i \in I$, så haves, at $\mathbf{a}_i^T (\mathbf{v} + \mathbf{d}) = b_i$, for alle $i \in I$, og der er dermed adskillige løsninger. Dermed er det vist, at (b) og (c) er ækvivalente. \square

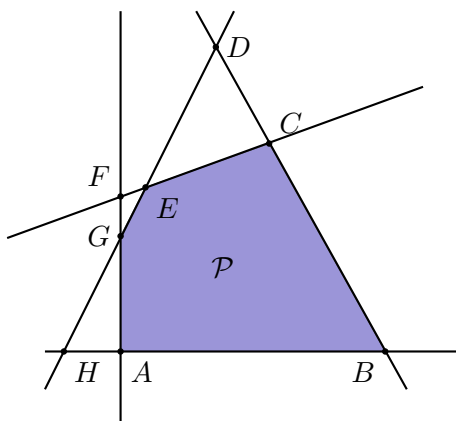
Hvis \mathbf{a}_i for en given mængde betingelser er lineært uafhængige, siges betingelserne at være lineært uafhængige. Med dette og Sætning 3.3(a) kan hjørnepunkterne defineres som *basale mulige løsninger*, hvor n lineært uafhængige betingelser er bindende.

Definition 3.10

Lad \mathcal{P} være et polyeder defineret ved lineære ligheds- og ulighedsbetingelser og lad \mathbf{v} være en vektor i \mathbb{R}^n .

- (a) Vektoren \mathbf{v} er en **basal løsning**, hvis:
 - (i) Alle lighedsbetingelser er opfyldt.
 - (ii) Der er n af de bindende betingelser, som er lineært uafhængige.
- (b) Vektoren \mathbf{v} er en **basal mulig løsning**, hvis \mathbf{v} er en *basal løsning*, og alle betingelser er opfyldt.

Bemærk, at hvis et polyeder er defineret med m lineære betingelser, og $m < n$, så eksisterer der ikke et punkt med n bindende betingelser. Dette medfører, at der hverken er basale løsninger eller basale mulige løsninger. På figur 3.13 ses punkterne A til H , som er basale løsninger, hvor A, B, C, E og G også er basale mulige løsninger.



Figur 3.13: Punkterne A, B, C, D, E, F, G og H er basale løsninger, hvoraf A, B, C, E og G alle er basale mulige løsninger.

Tre definitioner, som ønsker at beskrive det samme, er blevet givet. Det er muligt at skifte mellem definitionerne efter behov, da de er ækvivalente.

Sætning 3.4

Lad \mathcal{P} være et ikke-tomt polyeder og lad vektoren $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$. Så er følgende udsagn ækvivalente:

- (a) \mathbf{v} er et ekstremumpunkt.
- (b) \mathbf{v} er et hjørnepunkt.
- (c) \mathbf{v} er en basal mulig løsning.

Bevis

Lad \mathcal{P} være et polyeder defineret ved betingelser på formen $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i$ og $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$.

Lad $\mathbf{u} \in \mathcal{P}$ være et hjørnepunkt. Jævnfør Definition 3.8 eksisterer der så et $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, således at $\mathbf{c}^T \mathbf{u} < \mathbf{c}^T \mathbf{v}$ for alle \mathbf{v} , som opfylder $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$ og $\mathbf{v} \neq \mathbf{u}$. Hvis $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{u}$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{u}$ og $0 \leq \lambda \leq 1$, så er $\mathbf{c}^T \mathbf{u} < \mathbf{c}^T \mathbf{v}$ og $\mathbf{c}^T \mathbf{u} < \mathbf{c}^T \mathbf{w}$. Dette medfører, at $\mathbf{c}^T \mathbf{u} < \mathbf{c}^T(\lambda \mathbf{v} + (1 - \lambda)\mathbf{w})$, som betyder, at $\mathbf{u} \neq \lambda \mathbf{v} + (1 - \lambda)\mathbf{w}$. Derfor kan \mathbf{u} ikke udtrykkes som en kombination af to andre elementer i \mathcal{P} , hvilket betyder, at \mathbf{u} er et ekstremumpunkt ifølge Definition 3.7. (b) medfører hermed (a).

Antag, at $\mathbf{u} \in \mathcal{P}$ ikke er en basal mulig løsning og lad $I = \{i \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{u} = b_i\}$. Da \mathbf{u} ikke er en basal mulig løsning, må der ikke eksistere n lineært uafhængige vektorer af typen \mathbf{a}_i , $i \in I$. Derfor må vektorerne \mathbf{a}_i , $i \in I$, ligge i et ægte underrum af \mathbb{R}^n og der eksisterer derfor en ikke-nulvektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, således at $\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} = 0$ for alle $i \in I$. Lad ε være et lille, positivt tal, og betragt vektorerne $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{d}$ og $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \varepsilon \mathbf{d}$. Bemærk, at $\mathbf{a}_i^T \mathbf{v} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{u} = b_i$, for $i \in I$. Endvidere haves, at $\mathbf{a}_i^T \mathbf{u} > b_i$ for $i \notin I$ og givet, at ε er småt nok, haves $\mathbf{a}_i^T \mathbf{v} > b_i$ for $i \notin I$. Det er her tilstrækkeligt at vælge ε , således at $\varepsilon \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{d} \mid < \mathbf{a}_i^T \mathbf{u} - b_i$ for alle $i \notin I$. Når ε er lille nok, haves det, at $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$, og med samme argumentation haves, at $\mathbf{w} \in \mathcal{P}$. Dette betyder, at \mathbf{u} ikke er et ekstremumpunkt, da $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{w}}{2}$. Ved kontraposition ses (a) medfører (c).

Lad \mathbf{u} være en basal mulig løsning, lad $I = \{i \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{u} = b_i\}$ og lad $\mathbf{c} = \sum_{i \in I} \mathbf{a}_i$. Så haves, at

$$\mathbf{c}^T \mathbf{u} = \sum_{i \in I} \mathbf{a}_i^T \mathbf{u} = \sum_{i \in I} b_i.$$

Yderligere haves, at $\mathbf{a}_i^T \mathbf{u} \geq b_i$ for ethvert $\mathbf{u} \in \mathcal{P}$ og ethvert i , og

$$\mathbf{c}^T \mathbf{u} = \sum_{i \in I} \mathbf{a}_i^T \mathbf{u} \geq \sum_{i \in I} b_i. \quad (3.1)$$

Dette viser, at \mathbf{u} er en optimal løsning til minimumsproblemet $\mathbf{c}^T \mathbf{u}$ over \mathcal{P} . Yderligere holder uligheden i ligning 3.1, hvis og kun hvis $\mathbf{a}_i^T \mathbf{u} = b_i$ for alle $i \in I$. Da \mathbf{u} er en basal mulig løsning, er der n lineært uafhængige betingelser, som er bindende i \mathbf{u} , og \mathbf{u} er en entydig løsning til ligningssystemet $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i$, $i \in I$. Det følger derfor, at \mathbf{u} er entydigt minimum til $\mathbf{c}^T \mathbf{u}$ over \mathcal{P} og dermed et hjørnepunkt til \mathcal{P} . (c) medfører hermed (b). \square

Eftersom en vektor er en basal mulig løsning, hvis og kun hvis det er et ekstremumpunkt og da definitionen på et ekstremumpunkt ikke refererer til en specifik repræsentation af polyederet, kan det konkluderes, at basale mulige løsninger er uafhængige af den valgte repræsentation.

Korollar 3.1

Der kan kun være et endeligt antal af basale løsninger og basale mulige løsninger, givet der er et endeligt antal af lineære ulighedsbetingelser.

Bevis

Betragt et system af m lineære ulighedsbetingelser for vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Ved enhver basal løsning er der n lineære ulighedsbetingelser, som er bindende. Da n bindende lineære ulighedsbetingelser definerer et entydigt punkt, følger det, at en anden basal løsning må have en anden mængde af n bindende lineære ulighedsbetingelser. Dette betyder, at antallet af basale løsninger har en øvre begrænsning, som afhænger af mængden af forskellige måder, hvorpå n betingelser kan udvælges af de m betingelser. \square

To forskellige basale løsninger til samme mængde af lineære betingelser i \mathbb{R}^n siges at være *tilstødende*, hvis der findes $n - 1$ lineært uafhængige betingelser, som er bindende ved begge. Hvis de to basale løsninger er basale mulige løsninger, så er det forbindende linjestykke en af løsningsmængdens kanter. På figur 3.13 er A og B et eksempel på tilstødende basale mulige løsninger.

3.3 Polyedre på standardform

Som beskrevet i afsnit 2.2, kan optimeringsproblemer opskrives på standardform. Dette korresponderer med polyedre, der ligeledes kan opskrives på standardform:

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

hvor A er en $m \times n$ matrix. \mathcal{P} er et *polyeder på standardform*. I de fleste tilfælde er det fordelagtigt at antage, at m rækker i A er lineært uafhængige. I Sætning 3.6 vises endvidere,

at antagelsen om, at rækkerne er lineært uafhængige, er gældende, da lineært afhængige rækker svarer til overflødige betingelser, som kan udelades. Som det ses i Definition 3.10, skal der være n aktive begrænsninger i spil for at finde en basal mulig løsning. Såfremt $m \neq n$, skal der derfor vælges $n - m$ variable x_i med henblik på, at sætte disse $x_i = 0$, hvilket gør begrænsningerne $x_i \geq 0$ aktive. Det er dog ikke uvæsentligt, hvilke af disse variable der omdannes til 0, hvilket belyses i Sætning 3.5.

Sætning 3.5

Lad begrænsningerne $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ og $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Antag, at A er en $m \times n$ matrix, som har lineært uafhængige rækker. Vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ er en basal løsning, hvis og kun hvis $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$, og der eksisterer indekser $B(1), \dots, B(m)$, hvorom der gælder følgende:

- (a) Søjlerne $\mathbf{a}_{B(1)}, \dots, \mathbf{a}_{B(m)}$ er lineært uafhængige.
- (b) Hvis $i \neq B(1), \dots, B(m)$, så er $x_i = 0$.

Bevis

Betragt et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ og antag, at der eksisterer indekser $\mathbf{a}_{B(1)}, \dots, \mathbf{a}_{B(m)}$, der opfylder (a) og (b). Det gælder således for de aktive begrænsninger, at $v_i = 0$, når $i \neq B(1), \dots, B(m)$, samt at $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$. Dette medfører, at

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{a}_{B(i)} v_{B(i)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i v_i = A\mathbf{v} = \mathbf{b}.$$

Da søjlerne $\mathbf{a}_{B(i)}$ for $i = 1, \dots, m$ er lineært uafhængige, kan $v_{B(1)}, \dots, v_{B(m)}$ bestemmes entydigt. Dermed har ligningssystemet, som er skabt af de aktive begrænsninger, en entydig løsning. Jævnfør Sætning 3.3, følger det, at der er n aktive begrænsninger, hvoraf \mathbf{v} er en basal løsning.

Antag nu, at \mathbf{v} er en basal løsning. Det skal nu vises, at (a) og (b) da er opfyldt. Lad $v_{B(1)}, \dots, v_{B(k)}$ være ikke-nul komponenter i \mathbf{v} . Eftersom \mathbf{v} er en basal løsning, følger nu, at ligningssystemet givet ved de aktive begrænsninger $v_i = 0$, når $i \neq B(1), \dots, B(k)$, samt

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i v_i = \mathbf{b},$$

har en entydig løsning. Det samme må derfor gøre sig gældende for

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{a}_{B(i)} v_{B(i)} = \mathbf{b}.$$

Det følger derfor, at søjlerne i $\mathbf{a}_{B(1)}, \dots, \mathbf{a}_{B(k)}$ er lineært uafhængige. Hvis dette ikke var tilfældet, ville der findes løsninger til

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{a}_{B(i)} \lambda_i = \mathbf{0}$$

udover den trivielle, hvor $\lambda_i = 0$ for $i = 1, 2, \dots, k$, hvilket ville betyde, at løsningen \mathbf{v} ikke er entydig. Dette er i modstrid til, at denne er en basal løsning. $\mathbf{a}_{B(1)}, \dots, \mathbf{a}_{B(k)}$ er således

lineært uafhængige og $k \leq m$. Da A har m lineært uafhængige rækker, er der ligeledes m lineært uafhængige søjler. Der kan derfor findes $m - k$ søjler $\mathbf{a}_{B(k+1)}, \dots, \mathbf{a}_{B(m)}$, hvorom det gælder, at søjlerne $\mathbf{a}_{B(i)}$ med $i = 1, \dots, m$, er lineært uafhængige. Da $k \leq m$ gælder det, hvis $i \neq B(1), \dots, B(m)$, at $i \neq B(1), \dots, B(k)$ og $v_i = 0$. \square

Som følge af Sætning 3.5 kan basale løsninger konstrueres ved hjælp af følgende procedure.

1. Vælg m lineært uafhængige søjler $\mathbf{a}_{B(1)}, \dots, \mathbf{a}_{B(m)}$.
2. Lad $v_i = 0$ for $i \neq B(1), \dots, B(m)$.
3. Løs ligningssystemet med de m ligninger, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for $x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)}$.

Findes en ikke-negativ løsning ved denne procedure, så er løsningen en basal mulig løsning. Søjlerne $\mathbf{a}_{B(1)}, \dots, \mathbf{a}_{B(m)}$ kaldes for *basale søjler*, og variableerne $x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)}$ kaldes for *basale variable*. De resterende søjler i A kaldes *ikke-basale søjler* og de resterende variable kaldes *ikke-basale variable*. Mængden $\{B(1), \dots, B(m)\}$ kaldes løsningens *base*, hvor elementerne kaldes for *basale index*. Dertil kaldes B *basismatricen*, hvor $B = [\mathbf{a}_{B(1)}, \dots, \mathbf{a}_{B(m)}]$. Hertil defineres basisvektoren $\mathbf{x}_B = [x_{B(1)}, \dots, x_{B(m)}]^T$. Eftersom de basale søjler er lineært uafhængige, har B en invers matrix B^{-1} . Hvert valg af de lineært uafhængige søjler svarer til forskellige baser for rummet.

Antagelsen om, at rækkerne er lineært uafhængige belyses i Sætning 3.6.

Sætning 3.6

Lad $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, x \geq 0\}$ være et ikke-tomt polyeder, hvor A er en $m \times n$ matrix med rækker $\mathbf{a}_1^T, \dots, \mathbf{a}_m^T$. Antag, at $\text{rang}(A) = k < m$ og at rækkerne $\mathbf{a}_{i_1}^T, \dots, \mathbf{a}_{i_k}^T$ er lineært uafhængige. Givet polyederet

$$Q = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_{i_1}^T \mathbf{x} = b_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_k}^T \mathbf{x} = b_{i_k}, \mathbf{x} \geq 0\}$$

så er $Q = \mathcal{P}$.

Bevis

Det bevises i tilfældet af $i_1 = 1, \dots, i_k = k$, som er tilfældet, hvor de første k rækker er lineært uafhængige. Alle andre tilfælde kan omskrives til dette tilfælde ved rækkeombytning. Det gælder, at \mathcal{P} er en delmængde af Q , da alle elementer i \mathcal{P} opfylder Q 's betingelser. Det skal dernæst vises, at Q er en delmængde af \mathcal{P} . Da $\text{rang}(A) = k$, har rækkerummet af A dimension k , $\dim(\text{row}(A)) = k$, og et basis bestående af søjlerne $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$. Derfor kan alle rækker \mathbf{a}_i af A udtrykkes som en linearkombination af de andre rækker ved $\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^k \lambda_{i,j} \mathbf{a}_j$ for skalarer $\lambda_{i,j}$. Lad \mathbf{v} være et element i \mathcal{P} . Så gælder

$$b_i = \mathbf{a}_i \mathbf{v} = \sum_{j=1}^k \lambda_{i,j} \mathbf{a}_j \mathbf{v} = \sum_{j=1}^k \lambda_{i,j} b_j,$$

for $i = 1, \dots, m$. Betragt nu et element \mathbf{u} i Q . Dette vil også tilhøre \mathcal{P} , da

$$\mathbf{a}_i \mathbf{u} = \sum_{j=1}^k \lambda_{i,j} \mathbf{a}_j \mathbf{u} = \sum_{j=1}^k \lambda_{i,j} b_j = b_i.$$

Dermed er det vist, at Q er en delmængde til \mathcal{P} . Hermed er $Q = \mathcal{P}$, da \mathcal{P} ligeledes er en delmængde af Q . \square

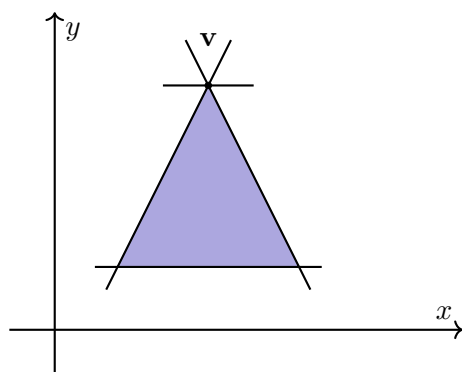
3.4 Degenerering

Af Definition 3.10 fremgår det, at der skal være n aktive betingelser, for at \mathbf{v} er en basal løsning. I Definition 3.11 defineres tilfælde, hvor der er flere end n aktive betingelser.

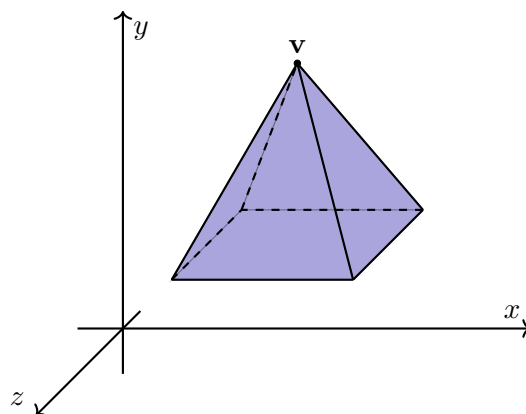
Definition 3.11

En basal løsning $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ kaldes **degenereret**, hvis der er mere end n aktive betingelser for \mathbf{v} .

En degenereret basal løsning har altså flere end de nødvendige n aktive betingelser. I \mathbb{R}^2 findes en degenereret løsning i et skæringspunkt mellem tre eller flere linjer. Til sammenligning findes en degenereret løsning i \mathbb{R}^3 i et skæringspunkt mellem fire eller flere planer. På figur 3.14 ses \mathbf{v} , som er en degenereret basal løsning i \mathbb{R}^2 , og på figur 3.15 ses \mathbf{v} , som er en degenereret basal løsning i \mathbb{R}^3 . Generelt vil en degenereret løsning opstå i skæringspunktet med mindst $n + 1$ hyperplaner i \mathbb{R}^n .



Figur 3.14: Et polyeder med en degenereret basal løsning \mathbf{v} i \mathbb{R}^2 .



Figur 3.15: Et polyeder med en degenereret basal løsning \mathbf{v} i \mathbb{R}^3 .

Ligeledes findes en definition for en degenereret basal løsning for polyeder på standardform. Jævnfør afsnit 3.3 skal der være m aktive betingelser og $n - m$ aktive ikke-negativitetsbetingelser. Dermed skal et polyeder på standardform have flere end $m - n$ ikke-negativitetsbetingelser for at have en degenereret basal løsning, hvilket er formuleret i Definition 3.12.

Definition 3.12

Lad \mathcal{P} være et polyeder på standardform $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, x \geq 0\}$, og lad m være antallet af rækker i A . En basal løsning \mathbf{v} for \mathcal{P} kaldes degenereret, hvis der er flere end $n - m$ af komponenterne i \mathbf{v} , der er lig 0.

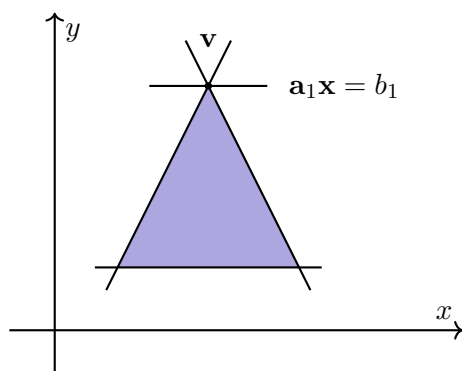
Eksempel 3.1

Betragt et polyeder \mathcal{P} på standardform:

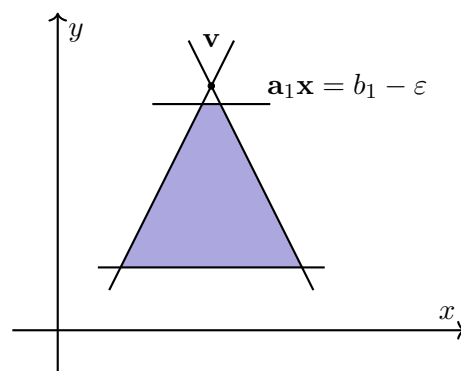
$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 4x_2 = 0, 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 16, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$$

For \mathcal{P} er dimensionen $n = 3$ og $m = 2$ aktive betingelser. Løsningen \mathbf{v} kaldes degenereret, hvis flere end $n - m = 1$ af komponenterne i \mathbf{v} er lig nul. Løsningen $\mathbf{v} = [0 \ 0 \ 4]^T$ er en degenereret basal løsning, da der er flere end ét komponent i \mathbf{v} , som er lig nul. Derimod er $\mathbf{u} = [4 \ 2 \ 0]^T$ en basal løsning, da der er kun ét komponent i \mathbf{u} , som er lig 0.

For løsningsalgoritmer viser det sig at være problematisk med degenererede basale løsninger, hvorfor disse vil forsøges undgået. Ved en mindre ændring ε i en overflødig aktiv betingelse kan en degenereret basal løsning undgås. På figur 3.16 ses $\mathbf{a}_1\mathbf{x} = b_1$, som er en overflødig aktiv betingelse, der medfører en degenereret basal løsning \mathbf{v} . En lille ændring ε vil ændre den degenererede basale løsning til en basal løsning, hvilket kan ses på figur 3.17, hvor $\mathbf{a}_1\mathbf{x} = b_1 - \varepsilon$.



Figur 3.16: En overflødig aktiv betingelse $\mathbf{a}_1\mathbf{x} = b_1$, som medfører, at \mathbf{v} er en degenereret basal løsning.



Figur 3.17: En lille ændring ε i den aktive betingelse sådan, at $\mathbf{a}_1\mathbf{x} = b_1 - \varepsilon$, hvilket medfører, at \mathbf{v} ikke er en degenereret basal løsning.

I praktiske problemer, hvor A og \mathbf{b} har specifikke værdier, viser det sig ofte, at der opstår degenererede basale løsninger.

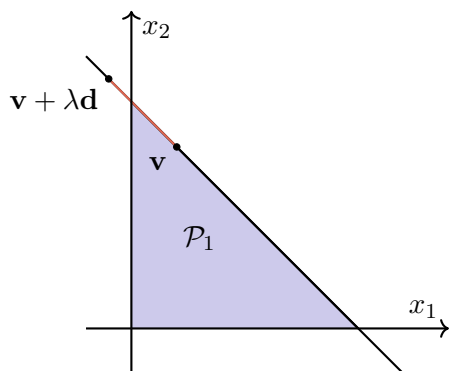
3.5 Eksistens af ekstremumpunkter

Dette afsnit belyser tilstrækkelige og nødvendige betingelser for, at et polyeder har mindst ét ekstremumpunkt, da dette ikke er tilfældet for alle polyedre. Dette gøres ved at undersøge, om polyederet indeholder en *linje*.

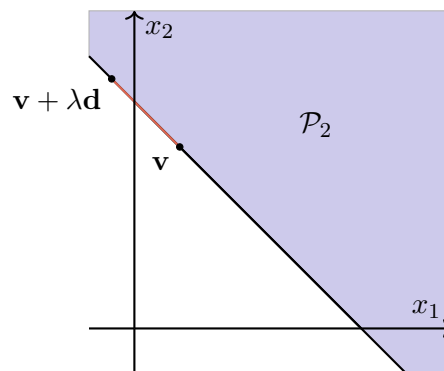
Definition 3.13

Et polyeder $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^n$ indeholder en **linje**, hvis der eksisterer en vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$ og en ikke-nulvektor $\mathbf{d} \in \mathcal{P}$, således at $\mathbf{v} + \lambda\mathbf{d} \in \mathcal{P}$ for alle skalarer λ .

På figur 3.18 ses et polyeder \mathcal{P}_1 , hvor $\mathbf{v} + \lambda \mathbf{d}$ ikke tilhører \mathcal{P}_1 , hvormed polyederet ikke indeholder en linje. På figur 3.19 ses et polyeder \mathcal{P}_2 , hvor $\mathbf{v} + \lambda \mathbf{d}$ derimod tilhører \mathcal{P}_2 , således polyederet indeholder en linje.



Figur 3.18: Illustration af et polyeder \mathcal{P}_1 , hvor $\mathbf{v} + \lambda \mathbf{d}$ ikke tilhører \mathcal{P}_1 , og dermed indeholder polyederet ikke en linje.



Figur 3.19: Illustration af et polyeder \mathcal{P}_2 , hvor $\mathbf{v} + \lambda \mathbf{d}$ tilhører \mathcal{P}_2 , og dermed indeholder polyederet en linje.

Af Definition 3.13 kan Sætning 3.7 udledes.

Sætning 3.7

Lad $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ være et ikke-tomt polyeder, som ikke er på standardform. Så er følgende udsagn ækvivalente.

- (a) \mathcal{P} har mindst ét ekstremumpunkt.
- (b) \mathcal{P} indeholder ikke en linje.
- (c) Der eksisterer n vektorer i mængden $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$, som er lineært uafhængige.

Bevis

Lad \mathbf{v} være et element i \mathcal{P} og lad $I = \{i \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{v} = b_i\}$. Hvis n af vektorerne $\mathbf{a}_i, i \in I$, svarende til de aktive betingelser, er lineært uafhængige, så er \mathbf{v} en basal mulig løsning, og der eksisterer et ekstremumpunkt. Hvis dette ikke er tilfældet, ligger alle vektorerne $\mathbf{a}_i, i \in I$, i et ægte underrum af \mathbb{R}^n , og der eksisterer en ikke-nulvektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, således at $\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} = 0$ for alle $i \in I$. Betragt linjen bestående af alle punkter på formen $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \lambda \mathbf{d}$, hvor λ er en vilkårlig skalar. For $i \in I$ haves, at

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{u} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{v} + \lambda \mathbf{a}_i^T \mathbf{d} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{v} = b_i.$$

De betingelser, der er aktive i \mathbf{v} , er således også aktive i alle punkter på linjen. Antages det, at \mathcal{P} ikke indeholder en linje, så må der eksistere et λ , hvor en af betingelserne ikke længere er opfyldt. I punktet, hvor betingelsen er ved at blive brudt, må en ny betingelse blive aktiv. Derfor må der eksistere et $\lambda_j, j \notin I$, således at $\mathbf{a}_j^T (\mathbf{v} + \lambda_j \mathbf{d}) = b_j$.

Det haves, at $\mathbf{a}_j^T \mathbf{v} \neq b_j$, da $j \notin I$, og $\mathbf{a}_i^T (\mathbf{v} + \lambda_j \mathbf{d}) = b_j$. Derfor er $\mathbf{a}_j^T \mathbf{d} \neq 0$ og $\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} = 0$ for alle $i \in I$. Derfor er \mathbf{d} ortogonal med alle linearkombinationer af vektorerne $\mathbf{a}_i, i \in I$. Da \mathbf{d} ikke er ortogonal med \mathbf{a}_j , konkluderes det, at \mathbf{a}_j ikke er en linearkombination af vektorerne $\mathbf{a}_i, i \in I$. Det er derfor muligt at forøge antallet af aktive lineært uafhængige betingelser med mindst én ved at gå fra \mathbf{v} til $\mathbf{v} + \lambda_j \mathbf{d}$. Dette argument gentages indtil et punkt er nået, hvor der er n lineært uafhængige betingelser, som er aktive. Dette punkt vil således være en basal mulig løsning, da der er n aktive betingelser og punktet er inde for \mathcal{P} , hvilket viser, at (b) medfører (a).

Hvis \mathcal{P} har et ekstremumpunkt \mathbf{v} , så er \mathbf{v} en basal mulig løsning og der eksisterer n betingelser, som er aktive ved \mathbf{v} . Betingelsernes tilsvarende vektorer \mathbf{a}_i er lineært uafhængige, hvilket giver, at (a) medfører (c).

Lad n af vektorerne \mathbf{a}_i være lineært uafhængige og antag, at det er $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, som er lineært uafhængige. Antag, at \mathcal{P} indeholder en linje $\mathbf{v} + \lambda \mathbf{d}$, hvor \mathbf{d} ikke er en nulvektor. Så haves, at $\mathbf{a}_i^T (\mathbf{v} + \lambda \mathbf{d}) \geq b_i$ for alle i og alle λ . Det konkluderes, at $\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} = 0$ for alle i , da både $\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} < 0$ og $\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} > 0$ medfører, at der eksisterer et λ , som bryder betingelsen. Da vektorerne $\mathbf{a}_i, i = 1, 2, \dots, n$, er lineært uafhængige, medfører det, at $\mathbf{d} = \mathbf{0}$. Dette giver en modstrid og derfor må (c) medføre (b). \square

Bemærk, at begrænsede polyedre ikke indeholder en linje. Ligeledes indeholder den positive kvadrant $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ ikke uendelige linjer og da polyedre på standardform befinder sig i den positive kvadrant, indeholder disse heller ikke uendelige linjer. Dette giver Korollar 3.2.

Korollar 3.2

Ethvert begrænset ikke-tomt polyeder og ethvert ikke-tomt polyeder på standardform har mindst én basal mulig løsning.

3.6 Optimering af ekstremumpunkter

Så længe en optimal løsning til et lineært optimeringsproblem eksisterer, og løsningsmængden indeholder ét eller flere ekstremumpunkter, så findes en optimal løsning til det lineære programmeringsproblem blandt ekstremumpunkterne i løsningsmængden. Sætning 3.8 fastslår dette for polyedre på standardform og begrænsede polyedre.

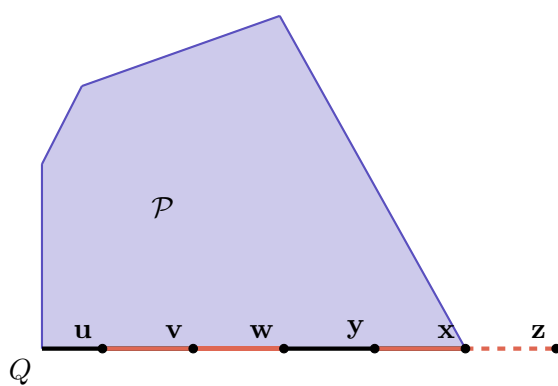
Sætning 3.8

Lad et lineært optimeringsproblem være, at en objektfunktion $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ skal minimeres over et polyeder \mathcal{P} . Antag, at der i \mathcal{P} er mindst ét ekstremumpunkt, samt at en optimal løsning eksisterer. Så eksisterer der en optimal løsning, som er et ekstremumpunkt i \mathcal{P} .

Bevis

Lad et lineært optimeringsproblem være, at $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ skal minimeres over et polyeder \mathcal{P} . Antag, at der i \mathcal{P} er mindst ét ekstremumpunkt, samt at en optimal løsning eksisterer. Lad $Q \neq \emptyset$

være mængden af optimale løsninger, lad $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\}$, og lad y være den optimale værdi for $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$. Da \mathcal{P} er løsningsmængden, og $Q \subset \mathcal{P}$, så er $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{c}^T \mathbf{x} = y\}$ og dermed også et polyeder. Jævnfør Sætning 3.7 indeholder \mathcal{P} ingen linjer, hvormed Q ikke indeholder linjer. Jævnfør Sætning 3.7 indeholder Q dermed et ekstremumpunkt. Lad nu den optimale løsning \mathbf{v} være et ekstremumpunkt i Q . Ved hjælp af modstrid vises nu, at \mathbf{v} også er et ekstremumpunkt i \mathcal{P} . Antag derfor, at \mathbf{v} ikke er et ekstremumpunkt i \mathcal{P} . Så eksisterer der $\mathbf{u} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, og $\mathbf{w} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{v}$, samt et $\lambda \in [0, 1]$, således $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{w}$. Deraf følger, at $y = \mathbf{c}^T \mathbf{v} = \lambda \mathbf{c}^T \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{c}^T \mathbf{w}$. Desuden må det gælde, at $\mathbf{c}^T \mathbf{u} \geq y$ og $\mathbf{c}^T \mathbf{w} \geq y$, da y er den optimale værdi. Dette medfører dog, at $\mathbf{c}^T \mathbf{u} = \mathbf{c}^T \mathbf{w} = y$, samt at $\mathbf{u} \in Q$ og $\mathbf{w} \in Q$. Derved opstår modstriden, da \mathbf{v} er et ekstremumpunkt i Q . Således er det ved modstrid vist, at \mathbf{v} er et ekstremumpunkt i \mathcal{P} , samt at det er en optimal løsning, da $\mathbf{v} \in Q$. \square



Figur 3.20: Polyederne \mathcal{P} og Q , hvor \mathbf{x} er et ekstremumpunkt i Q , da der ikke findes vektorer \mathbf{y} og \mathbf{z} , sådan at $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda) \mathbf{z}$. Vektor \mathbf{w} er derimod ikke et ekstremumpunkt i Q , da der findes \mathbf{v} og \mathbf{u} , sådan at $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v} + (1 - \lambda) \mathbf{u}$.

På figur 3.20 ses en grafisk repræsentation af idéen i beviset. Som nævnt gælder Sætning 3.8 kun for polyedre på standard form og begrænsede polyedre. Sætning 3.9 kan betragtes som en udvidelse af Sætning 3.8 og viser, at der findes en optimal løsning, så længe den optimale omkostning ikke er $-\infty$.

Sætning 3.9

Lad et lineært optimeringsproblem være, at $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ skal minimeres over et polyeder \mathcal{P} . Antag, at der i \mathcal{P} er mindst ét ekstremumpunkt. Så er den optimale omkostning lig $-\infty$, eller også findes et optimalt ekstremumpunkt.

Bevis

Bemærk indledningsvist, at et element \mathbf{v} i et polyeder \mathcal{P} har $\text{rang}(\mathbf{v}) = k$, hvis der findes præcis k lineært uafhængige betingelser, som er aktive ved \mathbf{v} . Antag, at den optimale omkostning ikke er $-\infty$.

Lad et polyeder $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\}$ og bemærk, at $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$, hvor $\text{rang}(\mathbf{v}) = k$, $k < n$. Lad $I = \{i \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{v} = b_i\}$, hvor \mathbf{a}_i^T er den i 'te række af A . Da $k < n$, ligger vektorerne \mathbf{a}_i , $i \in I$, i et ægte underrum af \mathbb{R}^n , og der kan vælges en ikke-nul vektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, som er

ortogonal til hver \mathbf{a}_i . Det kan desuden antages, at $\mathbf{c}^T \mathbf{d} \leq 0$, ved at tage negationen af \mathbf{d} , såfremt det er nødvendigt.

Antag nu, at $\mathbf{c}^T \mathbf{d} < 0$, og lad $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \lambda \mathbf{d}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, være en halvlinje. Alle punkter på denne halvlinje opfylder $\mathbf{a}_i^T \mathbf{u} = b_i$, som i beviset for Sætning 3.7. Hvis hele halvlinjen var indeholdt i \mathcal{P} , havde den optimale omkostning været $-\infty$; men det antages indledningsvist, at denne værdi er endelig. Så er ikke hele halvlinjen indeholdt i \mathcal{P} , og den udgår dermed fra \mathcal{P} på et tidspunkt. Når halvlinjen er på grænsen af \mathcal{P} , lige inden dens udgang derfra, er der et optimalt $\lambda^* > 0$ og et $j \notin I$, således at $\mathbf{a}_j^T (\mathbf{v} + \lambda^* \mathbf{d}) = b_j$.

Lad nu $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \lambda^* \mathbf{d}$ og bemærk, at $\mathbf{c}^T \mathbf{u} < \mathbf{c}^T \mathbf{v}$, da $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Det vides fra beviset for Sætning 3.7, at \mathbf{a}_j er lineært uafhængig af \mathbf{a}_i , samt at rangen af \mathbf{u} minimum er $k + 1$.

Antag nu, at $\mathbf{c}^T \mathbf{d} = 0$, og lad en linje være $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \lambda \mathbf{d}$, hvor λ er en arbitrær skalar. Eftersom \mathcal{P} ikke indeholder uendelige linjer, må linjen nødvendigvis udgå fra \mathcal{P} på et tidspunkt. Som før haves nu igen en vektor \mathbf{u} , hvis rang er højere end rangen af \mathbf{v} . Da $\mathbf{c}^T \mathbf{d} = 0$, haves desuden, at $\mathbf{c}^T \mathbf{u} = \mathbf{c}^T \mathbf{v}$. Det er nu vist, at der i begge tilfælde findes et punkt \mathbf{u} med højere rang end \mathbf{v} , således $\mathbf{c}^T \mathbf{u} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{v}$. Antag, at denne proces nu fortsættes. Så findes en vektor \mathbf{w} med $\text{rang}(\mathbf{w}) = n$, hvormed den er en basal mulig løsning, således at $\mathbf{c}^T \mathbf{w} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{v}$. Lad $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r$ være de basale mulige løsninger i \mathcal{P} , og lad \mathbf{w}^* være en basal mulig løsning, således at $\mathbf{c}^T \mathbf{w}^* \leq \mathbf{c}^T \mathbf{w}_i$ for alle i . Eftersom der for alle \mathbf{v} findes et i , således at $\mathbf{c}^T \mathbf{w}_i \leq \mathbf{c}^T \mathbf{v}$, følger det, at $\mathbf{c}^T \mathbf{w}^* \leq \mathbf{c}^T \mathbf{v}$ for alle $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$, hvormed vektoren \mathbf{w}^* er den optimale løsning. \square

Eftersom ethvert lineært optimeringsproblem kan omskrives til et tilsvarende problem på standardform, kan Sætning 3.9 siges at gælde generelt. Deraf haves Korollar 3.3.

Korollar 3.3

Lad et lineært optimeringsproblem være, at $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ skal minimeres over et ikke-tomt polyeder. Så er den optimale omkostning lig $-\infty$, eller også findes en optimal løsning.

Bemærk, at der kan opstilles ækvivalente sætninger, såfremt objektfunktionen skulle maksimeres.

3.7 Repræsentation af begrænsede polyedre

Et polyeder har i rapporten været defineret ved uligheder. I dette afsnit introduceres et alternativ til dette. Det vises, at et begrænset polyeder kan repræsenteres som et konvekst hylster af dets ekstremumpunkter. Dette er givet ved Sætning 3.10.

Sætning 3.10

Et ikke-tomt og begrænset polyeder er givet ved det konvekse hylster af dets ekstremumpunkter.

Bevis

Enhver konveks kombination af ekstremumpunkterne er et element i polyederet, eftersom polyederet er en konveks mængde. Derfor ønskes nu bevist, at ethvert element i et begrænset polyeder kan repræsenteres ved en konveks kombination af ekstremumpunkterne.

For at bevise dette defineres dimensionen af et polyeder $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ som det mindste heltal k , så polyederet \mathcal{P} er betinget af k -dimensionelle tilgrænsende underrum af \mathbb{R}^n . Beviset fortsættes dernæst ved at bevise dimensionen af \mathcal{P} ved induktion. Antag, at \mathcal{P} er nul-dimensionel, så polyederet indeholder et enkelt punkt. Punktet er et ekstremumpunkt i \mathcal{P} og resultatet er derfor sandt.

Induktionsskridtet er dernæst at bevise, at det er sandt for alle polyedre med færre dimensioner end k . Lad derfor $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i, i = 1, \dots, m\}$ være et ikke-tomt begrænset k -dimensionelt polyeder. Så er \mathcal{P} indrammet i et tilgrænset underrum \mathcal{S} i \mathbb{R}^n , som er givet ved følgende:

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_0 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\},$$

hvor $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ er vektorer i \mathbb{R}^n . Lad $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-k}$ være lineært uafhængige vektorer, der er ortogonale med vektorerne $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. Lad dernæst $g_i = \mathbf{f}_i^T \mathbf{v}_0$, gældende for $i = 1, \dots, n-k$, således at ethvert element \mathbf{v} i \mathcal{S} opfylder

$$\mathbf{f}_i^T \mathbf{v} = g_i, \text{ for } i = 1, \dots, n-k.$$

Siden $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$, så skal det være sandt for ethvert element i \mathcal{P} . Lad \mathbf{w} være et arbitrært element i \mathcal{P} . Hvis det gælder for \mathbf{w} , at punktet er et ekstremumpunkt i \mathcal{P} , så er \mathbf{w} en trivial konveks kombination af ekstremumpunkterne i \mathcal{P} , og beviset er derfor færdigt. Hvis \mathbf{w} derimod ikke er et ekstremumpunkt i \mathcal{P} , skal det bevises, at \mathbf{w} er en konveks kombination af ekstremumpunkterne i \mathcal{P} . Lad derfor \mathbf{v} være et arbitrært ekstremumpunkt og dan derfor en halvlinje indeholdende alle punkter af formen $\mathbf{w} + \lambda(\mathbf{w} - \mathbf{v})$, hvor λ angiver en ikke-negativ skalar. Da det gælder, at \mathcal{P} er et begrænset polyeder, vil denne halvlinje nødvendigvis forlade \mathcal{P} og derfor overskride en vilkårlig begrænsning, $\mathbf{a}_{i^*}^T \mathbf{x} \geq b_{i^*}$. Ved at anskue hvad det vil resultere i at bryde denne begrænsning, vil der findes et $\lambda^* \geq 0$ og $\mathbf{u} \in \mathcal{P}$, så følgende gælder:

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \lambda^*(\mathbf{w} - \mathbf{v}), \text{ og } \mathbf{a}_{i^*}^T \mathbf{u} = b_{i^*}.$$

Eftersom begrænsningen $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i$ overskrides, hvis λ vokser større end λ^* , så følger det, at $\mathbf{a}_{i^*}^T(\mathbf{w} - \mathbf{v}) < 0$. Da dette gælder, lad derfor Q være et polyeder defineret ved

$$Q = \{\mathbf{x} \in \mathcal{P} \mid \mathbf{a}_{i^*}^T \mathbf{x} = b_{i^*}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i, i = 1, \dots, m, \mathbf{a}_{i^*}^T \mathbf{x} = b_{i^*}\}.$$

Da $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathcal{P}$, så følger at $\mathbf{f}_i^T \mathbf{w} = g_i = \mathbf{f}_i^T \mathbf{v}$, hvilket viser, at $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ er ortogonal med enhver vektor \mathbf{f}_i , for alle $i = 1, \dots, n - k$. På den anden side er det vist, at $\mathbf{a}_{i^*}^T (\mathbf{w} - \mathbf{v}) < 0$, så det gælder, at vektoren \mathbf{a}_{i^*} ikke er en lineær kombination af vektorerne \mathbf{f}_i , og derfor ikke er lineært uafhængige. Bemærk derfor, at

$$Q \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_{i^*}^T \mathbf{x} = b_{i^*}, \mathbf{f}_i^T \mathbf{x} = g_i, i = 1, \dots, n - k\},$$

gældende for ethvert element i \mathcal{P} . Mængden på højresiden er defineret ved $n - k + 1$ lineært uafhængige lighedsbetingelser. Dette betyder derfor, at det tilgrænsede underrum har dimensionen givet ved $k - 1$, hvormed polyederet Q højst har dimensionen $k - 1$.

Ved afslutningsvis at benytte induktionshypotesen på Q og \mathbf{u} , kan \mathbf{u} udtrykkes ved den konvekse kombination

$$\mathbf{u} = \sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i$$

af ekstremumpunkterne \mathbf{v}_i i polyederet Q , hvor λ_i er ikke-negative skalarer, som summerer til én. Bemærk dernæst, at i et ekstremumpunkt \mathbf{v} skal $\mathbf{a}_i^T \mathbf{v} = b_i$ for n antal lineært uafhængige vektorer \mathbf{a}_i . Derfor er \mathbf{v} også et ekstremumpunkt i \mathcal{P} . Ved brug af definitionen for λ^* have derfor, at

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u} + \lambda^* \mathbf{v}}{1 + \lambda^*}.$$

Dermed er det bevist, at \mathbf{w} er en konvex kombination af ekstremumpunkter i \mathcal{P} , da det have, at

$$\mathbf{w} = \frac{\lambda^* \mathbf{v}}{1 + \lambda^*} + \sum_i \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} \mathbf{v}_i.$$

□

4 Simplexmetoden

Som vist i afsnit 3.6, findes der en optimal løsning til et lineært ligningssystem på standardform, så længe der findes mindst én basal mulig løsning. *Simplexmetoden* benytter sig af denne egenskab og søger at finde den optimale løsning. Dette kapitel tager udgangspunkt i [Lay, 2016, side 25-34] og [Bertsimas and Tsitsiklis, 1997, side 82-87 og 94-100], hvis ikke andet er angivet. Bemærk, at afsnit 4.1 tager afsæt i et maksimumsproblem, imens øvrige afsnit tager udgangspunkt i minimumsproblemer. Afsnittet indledes med et eksempel på brug af simplexmetoden. Herefter beskrives hvordan den er udviklet og forskellige implementeringer.

4.1 Praktisk anvendelse af simplexmetoden

Simplexmetoden foretager som udgangspunkt følgende seks trin, inden den afsluttes:

Simplexmetoden

1. Omskriv optimeringsproblemet til standardform med slack-variable.
2. Opstil *simplextabellen* for optimeringsproblemet.
3. Kontroller for optimalitet ellers identificér en pivoteringsindgang.
4. Opstil en ny tabel ved hjælp af pivotering.
5. Gentag trin 3 og 4, indtil den optimale løsning er fundet.
6. Identificér den optimale løsning.

I følgende afsnit uddybes ovenstående punkter, samt tilhørende teori, med udgangspunkt i Eksempel 4.1.

Eksempel 4.1

Haribo har to typer slikblandinger, x_1 og x_2 , hvor profitten for disse henholdsvis er 5 og 4 valutaenheder. Disse er begrænset af produktionskapaciteten af lakrids og vingummi. Lakridsproduktion har en begrænsning på 78 enheder, hvor der skal 3 enheder lakrids i x_1 blandingen og 5 enheder lakrids i x_2 blandingen. Vingummiproduktionen har en begrænsning på 36 enheder, hvor der skal 4 enheder vingummi i x_1 blandingen og 1 enhed

vingummi i x_2 blandingen. Disse betingelser danner optimeringsproblemet

$$\begin{array}{llll} \text{Maksimer} & z = 5x_1 + 4x_2 & & \\ \text{begrænset af} & 3x_1 & +5x_2 & \leq 78, \\ & 4x_1 & +x_2 & \leq 36, \\ & x_1, & x_2 & \geq 0. \end{array}$$

1. Opskriv optimeringsproblemet på standardform med slack-variable.

Generelt tager simplexmetoden udgangspunkt i, at alle variable er positive. Jævnfør afsnit 2.2 tilføjes x_i^+ og x_i^- , hvis der i optimeringsproblemet ikke eksisterer ikke-negativitetsbetingelser for variablene. I dette tilfælde er begge variable positive, og det er derfor ikke nødvendigt at opdele variablene. Med udgangspunkt i metoden fra afsnit 2.2 opstilles optimeringsproblemet derfor på standardform som

$$\begin{array}{llllllll} \text{Maksimer} & -5x_1 & -4x_2 & & +z & = & 0 \\ \text{begrænset af} & 3x_1 & +5x_2 & +s_1 & & = & 78, \\ & 4x_1 & +x_2 & & +s_2 & = & 36. \\ & x_1, & x_2 & & & \geq & 0. \end{array}$$

Slack-variablene s_1 og s_2 er her markeret med blå, da de ikke indgår i den endelige løsning.

2. Opstil simplextabellen for optimeringsproblemet

Nu opstilles simplextabellen for optimeringsproblemet. Med udgangspunkt i et generelt lineært optimeringsproblem på formen

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimer} & z - \mathbf{c}^T \mathbf{x} = 0 \\ \text{begrænset af} & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

er simplextabellen en matrix, som indeholder de lineære betingelser, slack-variablene og objektfunktionen. Matricen \mathbf{A} opskrives først, og derefter opskrives identitetsmatricen I_{m+1} , hvor m er antallet af slack-variable, samt den optimale omkostning z , og til sidst opskrives \mathbf{b} . Under \mathbf{A} tilføjes omkostningsvektoren $-\mathbf{c}^T$. Identitetsmatricen I_m , som dannes med udgangspunkt i antallet af slack-variable danner basismatricen B . En general form for simplextabellen ser ud som følger:

$$\begin{array}{cccc|cccc|c|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & s_1 & s_2 & \cdots & s_m & z & b \\ \hline a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & b_m \\ \hline -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & z \end{array}.$$

Optimeringsproblemet fra Eksempel 4.1 har dermed følgende simplextabel:

$$\begin{array}{cc|cc|c|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & z & b \\ \hline 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 78 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 36 \\ \hline -5 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

3. Kontroller for optimalitet ellers identificér en pivoteringsindgang

Først kontrolleres for optimalitet ved at kontrollere for negative koefficienter i omkostningsvektoren, hvilket findes i nederste række i simplextabellen. Såfremt en negativ koefficient eksisterer, findes den mindste af disse.

$$\begin{array}{cc|cc|c|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & z & b \\ \hline 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 78 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 36 \\ \hline -5 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

Søjlen, hvori denne værdi er, kaldes *pivotsøjlen*. Herefter findes *pivotrækken* og *pivoteringsindgangen*, ved at finde den mindste u_i -værdi ud fra

$$u_i = \frac{a_{i,j}}{b_j}$$

i pivotsøjlen. Pivoteringsindgangen findes ved at betragte

$$u_1 = \frac{78}{3} = 26 \quad \text{og} \quad u_2 = \frac{36}{4} = 9.$$

Eftersom 9 er den laveste værdi, er den 2. række pivotrækken og $a_{2,1}$ er dermed pivoteringsindgangen. I nedenstående er pivoteringsindgangen markeret.

$$\begin{array}{cc|cc|c|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & z & b \\ \hline 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 78 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 36 \\ \hline -5 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

4. Opstil en ny tabel ved hjælp af pivotering

Ved brug af de elementære rækkeoperationer jævnfør Definition 1.9, skaleres pivoteringsindgangen til 1, og der skabes nulindgange under og over pivoteringsindgangen ved hjælp

af rækkeudskiftning. Nedenfor ses dette gjort for eksemplet.

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{4}R_2} \begin{array}{c|cccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & z & b \\ \hline 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 78 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 9 \\ \hline -5 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3R_2} \\ \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2} \end{array} \begin{array}{c|cccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & z & b \\ \hline 0 & \frac{17}{4} & 1 & \frac{-3}{4} & 0 & 51 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 9 \\ \hline 0 & \frac{-11}{4} & 0 & \frac{5}{4} & 1 & 45 \end{array}.$$

5. Gentag trin 3 og 4 indtil den optimale løsning er fundet

Denne proces fortsættes nu, indtil der ikke er flere negative tal i omkostningsvektoren. Bemærk, at *pivoting* er processen fra valget af den mindste negative værdi i omkostningsvektoren indtil en ny værdi i omkostningsvektoren kan vælges. Der kontrolleres for optimalitet igen, og en ny pivoteringsindgang er valgt ved den mindste negative værdi. Denne er markeret i nedenstående matrix.

$$\begin{array}{c|cccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & z & b \\ \hline 0 & \frac{17}{4} & 1 & \frac{-3}{4} & 0 & 51 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 9 \\ \hline 0 & \frac{-11}{4} & 0 & \frac{5}{4} & 1 & 45 \end{array}$$

Pivoteringsindgangen findes ved at betragte

$$u_1 = \frac{51}{\frac{17}{4}} = 12 \quad \text{og} \quad u_2 = \frac{9}{\frac{1}{4}} = 36.$$

Pivoteringsindgangen er $a_{1,2}$, da denne giver den mindste værdi på 12, hvilket er markeret i nedenstående matrix.

$$\begin{array}{c|cccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & z & b \\ \hline 0 & \frac{17}{4} & 1 & \frac{-3}{4} & 0 & 51 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 9 \\ \hline 0 & \frac{-11}{4} & 0 & \frac{5}{4} & 1 & 45 \end{array}$$

Pivotindgangen skaleres til 1, og der skabes nulindgange under og over pivotindgangen:

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{4}{17} R_1} \begin{array}{c|ccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & z & b \\ \hline 0 & 1 & \frac{4}{17} & \frac{-3}{17} & 0 & 12 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 9 \\ \hline 0 & \frac{-11}{4} & 0 & \frac{5}{4} & 1 & 45 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \frac{11}{4} R_1} \\ \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + \frac{11}{4} R_2} \end{array} \begin{array}{c|ccc|c} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & z & b \\ \hline 0 & 1 & \frac{4}{17} & \frac{-3}{17} & 0 & 12 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{17} & \frac{20}{17} & 0 & 6 \\ \hline 0 & 0 & \frac{11}{17} & \frac{52}{17} & 1 & 78 \end{array}.$$

6. Identificér den optimale løsning

Eftersom der ikke er flere negative værdier i omkostningsvektoren, er den optimale løsning nu fundet. Denne løsning kan aflæses direkte af simplextabellen, og den optimale løsning for eksemplet er dermed

$$\begin{aligned} x_1 &= 6, \\ x_2 &= 12, \\ z &= 78. \end{aligned}$$

Haribos profit vil derfor være størst ved produktion af 6 enheder af x_1 blandingen og 12 enheder af x_2 blandingen. Dette giver en profit på 78 valutaenheder.

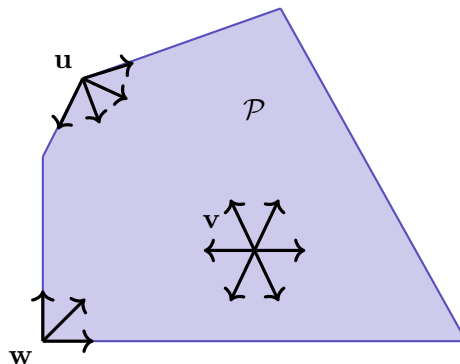
4.2 Optimale betingelser

For at finde den optimale løsning kan der udvælges en basal mulig løsning og undersøges, hvorvidt der findes andre løsninger, som er bedre, end den valgte. Hvis der ikke findes bedre løsninger, er den valgte basale mulig løsning den optimale løsning. Eftersom der jævnfør afsnit 3.1 optimeres for en konveks funktion over en konveks mængde, vil den lokale optimale løsning være den globale optimale løsning.

Definition 4.1

Lad \mathbf{v} være et element af et polyeder \mathcal{P} . En vektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ siges at være en **mulig retning** fra \mathbf{v} , hvis der eksisterer en positiv skalar θ , således at $\mathbf{v} + \theta \mathbf{d} \in \mathcal{P}$.

På figur 4.1, ses vektorerne \mathbf{u} , \mathbf{v} og \mathbf{w} i polyederet \mathcal{P} , samt tilhørende forskellige mulige retninger, som stadig er indeholdt i \mathcal{P} .



Figur 4.1: Vektorerne \mathbf{u} , \mathbf{v} og \mathbf{w} , samt tilhørende forskellige mulige retninger, som stadig er indeholdt i polyederet \mathcal{P} .

For at finde en ny mulig retning \mathbf{d} bevæges der i en retning, hvor værdien af en ikke-basal variable x_j øges, og andre ikke-basale variable fastholdes. Dermed vil indgangen $d_j = 1$, og $d_i = 0$ for henholdsvis den ikke-basale variable x_j og de andre ikke-basale variable x_i , hvor $i \neq j$. Vektoren

$$\mathbf{d}_B = [d_{B(1)}, d_{B(2)}, \dots, d_{B(m)}]^T,$$

bestående af de mulige retninger for de basale index, kontureres. Da \mathbf{v} er en basal mulig løsning, gælder det, at $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$. Eftersom $\mathbf{v} + \theta\mathbf{d}$ skal være en mulig løsning, gælder det, at $A(\mathbf{v} + \theta\mathbf{d}) = \mathbf{b}$. Deraf haves, at

$$\begin{aligned} A(\mathbf{v} + \theta\mathbf{d}) &= A\mathbf{v} + \theta A\mathbf{d} = \mathbf{b} \\ &\Updownarrow \\ \mathbf{b} + \theta A\mathbf{d} &= \mathbf{b} \\ &\Updownarrow \\ \theta A\mathbf{d} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Bemærk, at θ er en positiv skalar. Dermed skal \mathbf{d} tilhøre $\text{num}(A)$. Eftersom $d_j = 1$ og $d_i = 0$, så er

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = A\mathbf{d} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i d_i \\ &= \mathbf{A}_j + \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_{B(i)} d_{B(i)} \\ &= \mathbf{A}_j + B\mathbf{d}_B. \end{aligned}$$

Da basismatricen B er invertibel, haves at

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_j + B\mathbf{d}_B &= \mathbf{0} \\ &\Updownarrow \\ B\mathbf{d}_B &= -\mathbf{A}_j \\ &\Updownarrow \\ \mathbf{d}_B &= -B^{-1}\mathbf{A}_j. \end{aligned}$$

Denne mulige retning \mathbf{d} , tilhørende v_j , kaldes den j 'te basale retning.

Definition 4.2

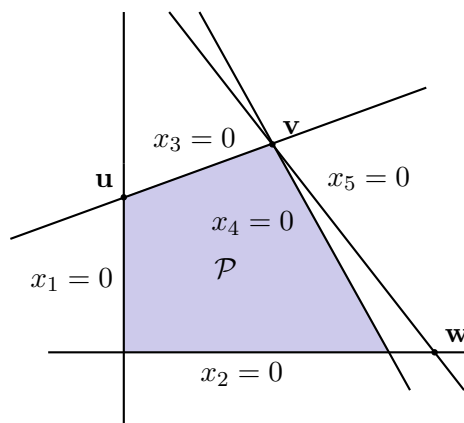
Lad \mathbf{v} være en basal mulig løsning. Den j 'te basale retning \mathbf{d} , fra \mathbf{v} , for en ikke-basal variabel v_j , har komponenterne

$$\begin{aligned} d_j &= 1, \\ d_i &= 0 \quad \text{for } i \neq B(1), \dots, B(m) \wedge i \neq j, \\ \mathbf{d}_B &= -B^{-1}\mathbf{A}_j. \end{aligned}$$

Bemærk, at overstående sikrer lighedsbegrænsningerne, men det sikrer ikke ikke-negativitetsbetingelserne. Eftersom v_j øges, og de andre ikke-basale variable fastholdes, kan følgende scenarier opstå.

- Antag, at \mathbf{v} er en ikke-degenereret basal mulig løsning. Dermed er $\mathbf{v}_B > \mathbf{0}$. Hvis θ er små nok, vil $\mathbf{v}_B + \theta \mathbf{d}_B \geq 0$, og \mathbf{d} er dermed en mulig retning.
- Antag, at \mathbf{v} er en degenereret basal mulig løsning. Dermed er \mathbf{d} ikke altid en mulig retning. Eftersom \mathbf{d} er degenereret, er det muligt, at en basal variabel $v_{B(i)} = 0$, og den tilsvarende komponent $d_{B(i)}$ er negativ. I dette tilfælde vil en bevægelse i den j 'te mulige retning forlade polyederet, da en ikke-negativitetsbetingelse brydes af $\mathbf{v} + \theta \mathbf{d}$ for alle positive θ .

På figur 4.2 ses de to scenarier. Bemærk, at \mathbf{u} har de to ikke-basale variable x_1 og x_3 imens x_2 , x_4 og x_5 er basale variable. I hjørnet \mathbf{u} fastholdes den ikke-basale variable x_3 , og x_1 øges. Dermed traverseres der mod \mathbf{v} langs linjen mellem \mathbf{u} og \mathbf{v} . Bemærk, at \mathbf{v} har de to ikke-basale variable x_3 og x_5 og x_1 , x_4 er basale variable. I hjørnet \mathbf{v} fastholdes den ikke-basale variabel x_5 , og x_3 øges. Dermed traverseres der langs linjen \mathbf{v} og \mathbf{w} , hvilket bryder en ikke-negativitetsbetingelse, og dermed ikke en mulig retning.



Figur 4.2: Illustration af en mulig retning, der svarer til linjen mellem \mathbf{u} og \mathbf{v} , og en ikke-mulig retning, der svarer til linjen mellem \mathbf{v} og \mathbf{w} , som bryder en ikke-negativitetsbetingelse.

Heraf opstår et problem med degenererede løsninger, og af den grund forsøges disse undgået.

Ved en bevægelse i en mulig retning medfører det, at

$$\mathbf{c}^T \mathbf{d} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{d}_B + c_j,$$

hvor

$$\mathbf{c}_B = [c_{B(1)}, c_{B(2)}, \dots, c_{B(m)}]^T.$$

Bemærk, at da $\mathbf{d}_B = -B^{-1}\mathbf{a}_j$, er

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^T \mathbf{d} &= \mathbf{c}_B^T (-B^{-1}\mathbf{a}_j) + c_j \\ &= c_j - \mathbf{c}_B^T (B^{-1}\mathbf{a}_j).\end{aligned}$$

For, at omkostningen minimeres, skal $c_j - \mathbf{c}_B^T (B^{-1}\mathbf{a}_j) < 0$, da

$$\mathbf{c}^T (\mathbf{x} + \theta \mathbf{d}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \theta \mathbf{c}^T \mathbf{d} = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \theta (c_j - \mathbf{c}_B^T (B^{-1}\mathbf{a}_j)) < \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

for alle positive θ . Størrelsen for reduktionen for hvert θ kaldes *den reducerede omkostning*.

Definition 4.3

Lad \mathbf{v} være en basal løsning til en basismatrix B med den tilhørende omkostningsvektor

$$\mathbf{c}_B = [c_{B(1)}, c_{B(2)}, \dots, c_{B(m)}]^T.$$

For hver j 'te basale retning defineres den **reducerede omkostning** c_j^* som

$$c_j^* = c_j - \mathbf{c}_B^T (B^{-1}\mathbf{a}_j).$$

Den reducerede omkostningsvektor \mathbf{c}^* indeholder alle de reducerede omkostninger, hvor den k 'te række betegner den reducerede omkostning for den k 'te basale retning.

$$\mathbf{c}^* = (\mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T B^{-1} A)^T = \begin{bmatrix} c_1 - \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ c_k - \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_k \\ \vdots \\ c_n - \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

Betragt de indgange, for de basale variable i den reducerede omkostningsvektor

$$\begin{aligned}c_{B(j)}^* &= c_{B(j)} - \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_{B(j)} \\ &= c_{B(j)} - \mathbf{c}_B^T \mathbf{e}_j \\ &= c_{B(j)} - c_{B(j)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dermed er indgangene til de basale variable lig nul, da de mulige retninger er nulvektoren. Det kan derfor ikke betale sig at øge basale variable.

Hvis den reducerede omkostningsvektor $\mathbf{c}^* \geq \mathbf{0}$, er den basale mulige løsning et lokalt minimum i objektfunktionen og dermed et globalt minimum. Heraf er den optimale løsning fundet. Dette tilfælde belyses i sætning Sætning 4.1.

Sætning 4.1

Lad \mathbf{v} være en basal mulig løsning til en basismatrix B , og lad \mathbf{c}^* være den reducerede omkostningsvektor.

- (a) Hvis $\mathbf{c}^* \geq \mathbf{0}$, så er \mathbf{v} optimal.
- (b) Hvis \mathbf{v} er optimal og ikke-degenereret, så er $\mathbf{c}^* \geq \mathbf{0}$.

Beviset udelades. Se [Bertsimas and Tsitsiklis, 1997, Side 86].

Dermed er alle basale retninger, for en basal mulig løsning, mulige retninger, hvis problemet er givet uden degenererede løsninger. For ikke-degenererede problemer bevæger simplexmetoden sig dermed fra et ekstremumpunkt til et af dets tilstødende ekstremumpunkter og forbedrer omkostningen. Heraf defineres en *optimal basismatrix*, for at have optimale betingelser i forbindelse med simplexmetoden.

Definition 4.4

En basismatrix B kaldes **optimal**, hvis

- (a) $B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, og
- (b) $\mathbf{c}^* \geq \mathbf{0}$.

Simplexmetoden finder basale retninger, som reducerer omkostningerne i objektfunktionen. Med optimale betingelser undersøges nu, hvilken basal retning, der skal vælges. Omkostningsvektoren \mathbf{c}^* udregnes for en given basal mulig løsning. Hvis ingen basale retninger kan reducere omkostningen, er løsningen optimal. Hvis den reducerede omkostning c_j^* er negativ for en basal retning \mathbf{d} , vælges denne retning. Hermed vil x_j stige, og de resterende ikke-basale variable fastholdes. Eftersom der søges at minimere omkostningen, bevæges der så langt i retning af \mathbf{d} som muligt, så omkostningen falder mest muligt. Det ønskes dermed at finde den største skalar

$$\theta^* = \max\{\theta \geq 0 \mid \mathbf{x} + \theta\mathbf{d} \in \mathcal{P}\},$$

der opfylder, at $\mathbf{x} + \theta^*\mathbf{d}$ er en mulig løsning. Herefter beregnes omkostningsvektoren for den nye mulige løsning, og samme procedure gentages. Dette forsættes, indtil ingen basale retninger reducerer omkostningen, og en optimal løsning er fundet.

4.3 Implementering

En måde at traversere fra en basal mulig løsning til en ny basal mulig løsning er ved simplexmetoden, hvor omkostningen minimeres ved hjælp af basale retninger i polyederet. Der findes forskellige implementeringer af simplexmetoden. Tre, som bliver uddybet er henholdsvis den *naive*, den *reviderede*, og *fuld-tabel* implementeringen.

4.3.1 Den naive implementering

I den naive implementering af simplexmetoden overgår ingen af de bærende elementer fra en iteration til den næste iteration. For den indledende iteration, haves de basale indeks $B(1), \dots, B(m)$ for de givne basale variable $v_{B(i)}$. Derudfra kan der dannes en basismatrix B og beregnes $\mathbf{p}^T = \mathbf{c}_B^T B^{-1}$ ved at løse det lineære ligningssystem $\mathbf{p}^T B = \mathbf{c}_B^T$ for den ukendte vektor \mathbf{p} . Den reducerede omkostning $c_j^* = c_j - \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_j$ for enhver variabel v_j , er derfor givet ved formelen

$$c_j^* = c_j - \mathbf{p}^T \mathbf{a}_j.$$

Afhængigt af hvilken pivoteringsregel, der benyttes, er det nødvendigt at udregne alle de mulige reducerede omkostninger, eller indtil en negativ reduceret omkostning opstår. Når en søjle \mathbf{a}_j er valgt til at være en del af basen, løses det lineære ligningssystem $B\mathbf{u} = \mathbf{a}_j$ for at bestemme vektoren $\mathbf{u} = B^{-1}\mathbf{a}_j$. Ved hjælp af dette vil der kunne konstrueres den basal retning, hvor man bevæger sig væk fra de nuværende basale mulige løsninger. Endeligt kan

$$\theta^* = \max\{\theta \geq 0 \mid \mathbf{v} + \theta^* \mathbf{d} \in \mathcal{P}\}$$

bestemmes, samt den variabel der gør, at basen forlades, og derved kan en ny basal mulig løsning konstrueres. En iteration af den naive simpleximplementering gennemløber følgende punkter:

Den naive implementering

1. Start med en basismatrix B bestående af de basale søjler $\mathbf{a}_{B(1)}, \dots, \mathbf{a}_{B(m)}$ og den tilhørende basale mulige løsning \mathbf{v} .
2. Beregn den reducerede omkostning

$$c_j^* = c_j - \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{a}_j$$

for alle ikke-basale indekser j . Hvis alle er ikke-negative, så er den nuværende basale mulige løsning optimal; ellers vælges et indeks j , hvorom det gælder, at $c_j^* < 0$.

3. Udregn $\mathbf{u} = B^{-1}\mathbf{a}_j$. Hvis ingen komponent i \mathbf{u} , er positiv, så er $\theta^* = \infty$, den optimale løsningsværdi er $-\infty$, og algorithmen stopper.
4. Hvis en komponent i \mathbf{u} er positiv, så lad

$$\theta^* = \min_{\{i=1, \dots, m \mid u_i > 0\}} \frac{v_{B(i)}}{u_i}.$$

5. Lad l være indekset for

$$\theta^* = \frac{v_{B(l)}}{u_l}.$$

Dan en ny basismatrix \bar{B} ved at udskifte $\mathbf{a}_{B(l)}$ med \mathbf{a}_j . Den nye basale mulige løsning, \mathbf{w} , har så de nye basale variable $w_j = \theta^*$ og $w_{B(i)} = v_{B(i)} - \theta^* u_i$ for $i \neq l$.

4.3.2 Den reviderede implementering

Problemet ved den naive implementering er dens potentielt høje tidskompleksitet, da den er nødsaget til at løse to lineære ligningssystemer. En alternativ implementering til dette er den reviderede implementering, som benytter matricen B^{-1} ved hver iteration. Vektorerne $\mathbf{c}_B^T B^{-1}$ og $B^{-1} \mathbf{a}_j$ udregnes ved hjælp af matrix-vektor multiplikation. Den naive implementering udregner B^{-1} i starten af hver iteration på traditionelt vis, hvorimod den reviderede implementering udregner den i slutningen ved elementære rækkeoperationer på $[B \mid I]$. En iteration af den reviderede simpleximplementering gennemløber følgende punkter:

Den reviderede implementering

1. Start med en basismatrix B bestående af de basale søjler $\mathbf{a}_{B(1)}, \dots, \mathbf{a}_{B(m)}$, dens invers B^{-1} og en tilhørende basal mulig løsning \mathbf{v} .
2. Udregn rækkevektoren $\mathbf{p}^T = \mathbf{c}_B^T B^{-1}$, og udregn dernæst den reducerede omkostning

$$c_j^* = c_j - \mathbf{p}^T \mathbf{a}_j,$$

for alle ikke-basale indekser j . Hvis resultaterne alle er ikke-negative, vil det resultere i at den givne basal mulige løsning \mathbf{v} er optimal, og algoritmen vil slutte ved dette punkt. Hvis dette ikke er tilfældet, så vælg et j , hvor $c_j^* < 0$.

3. Udregn $\mathbf{u} = B^{-1} \mathbf{a}_j$. Hvis intet komponent i \mathbf{u} er positivt, så er den optimale omkostning $-\infty$, og algoritmen vil slutte ved dette trin.
4. Hvis mindst en komponent i \mathbf{u} er positivt, lad

$$\theta^* = \min_{\{i=1, \dots, m \mid u_i > 0\}} \frac{v_{B(i)}}{u_i}.$$

5. Bestem l , så

$$\theta^* = \frac{v_{B(l)}}{u_l}$$

er gældende. Bestem dernæst en ny basismatrix \bar{B} ved at udskifte $\mathbf{a}_{B(l)}$ med \mathbf{a}_j . Hvis \mathbf{w} er den nye basal mulige løsning, så er værdierne for de nye basale værdier $w_j = \theta^*$ samt $w_{B(i)} = v_{B(i)} - \theta^* u_i$, hvor $i \neq l$.

6. Endeligt bestem $m \times (m + 1)$ matricen $[B^{-1} \mid \mathbf{u}]$. Tilføj enhver række et multiplum af den l 'te række for at få den sidste søjle til at være lig med enhedsvektoren \mathbf{e}_l . De første m søjler er resultatet af matricen \bar{B}^{-1} .

4.3.3 Fuld-tabel implementeringen

Slutteligt er det interessant at beskrive fuld-tabel implementeringen. Det er gældende for fuld-tabel implementeringen, at den i stedet for at opretholde og opdatere matricen B^{-1} ved hver iteration, som i den reviderede implementering; så opretholder og opdaterer den $m \times (n+1)$ matricen, givet ved $[B^{-1}A \mid B^{-1}\mathbf{b}]$, med søjlerne $B^{-1}\mathbf{a}_1, \dots, B^{-1}\mathbf{a}_n$ og $B^{-1}\mathbf{b}$. Denne matrix betegnes som en simplextabel. Søjlen $B^{-1}\mathbf{b}$ indeholder værdierne for de basale variable. Søjlen $B^{-1}\mathbf{a}_i$ betegnes som den i 'te søjle af tabellen. Søjlen $\mathbf{u} = B^{-1}\mathbf{a}_j$ er svarende til den variabel, der er i basen, er betegnet som pivotsøjlen. Hvis den l 'te basale variabel udgår fra basen, så er den l 'te række, betegnet som pivotrækken. Endelig er elementet, der tilhører både pivotrækken og pivotsøjlen, betegnet ved pivoteringsindgangen. Bemærk desuden, at dette element er u_l og altid er positivt, da algoritmen ellers var stoppet i trinnet før. For at klarlægge hvordan fuld-tabel implementeringen fungerer, vil der i følgende blive gennemgået en iteration:

Fuld-tabel implementering

1. Start med at opstille en simplextabel med en tilhørende basismatrix B , omkostningsvektoren $-\mathbf{c}^T$ og en tilsvarende basal mulig løsning \mathbf{v} .
2. Dernæst undersøges den reducerede omkostning i simplextabellen. Hvis alle indgange er ikke-negative, så er den nuværende basal mulige løsning den optimale, og algoritmen vil slutte ved dette punkt. Hvis dette ikke er tilfældet, så vælg j , hvor $c_j^* < 0$.
3. Betragt vektoren $\mathbf{u} = B^{-1}\mathbf{a}_j$, hvor den j 'te søjle er pivotsøjlen, i tabellen. Hvis $\mathbf{u} > \mathbf{0}$, så er den optimale omkostning $-\infty$, og algoritmen vil slutte ved dette trin.
4. For hvert i , hvor u_i er positivt, udregn forholdet

$$\frac{v_{B(i)}}{u_i}.$$

Lad l være det index af en række, som tilsvarende det laveste forhold,

$$\frac{v_{B(l)}}{u_l} \leq \frac{v_{B(i)}}{u_i}.$$

Søjlen $\mathbf{a}_{B(l)}$ forlader basen og søjlen \mathbf{a}_j indtræder i basen.

5. Tilføj for hver række i tabellen en konstant multiplum af den l 'te række, som er pivotrækken, så u_l , der er pivoteringsindgangen, bliver lig med 1 og alle andre indgange i pivotsøjlen bliver 0.

Bemærk, at det er denne implementering, som er brugt i afsnit 4.1.

4.4 Pivoteringsløkker

Ved degenererede basale løsninger er der en risiko for, at simplexmetoden blot skifter variable ind og ud af basen, således at den sidder fast i en uendelig *pivoteringsløkke*. For at garantere at simplexmetoden stopper ved en optimal værdi og ikke fortsætter med at pivotere uendeligt, kan der indføres forskellige regler for, hvilken variabel, der bringes ind i løsningen.

4.4.1 Lexicografi

Før den *lexicografiske metode* til at vælge pivotsøjler introduceres, er det nødvendigt at definere *lexicografi*.

Definition 4.5

En vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ er **lexicografisk større**, eller mindre end en vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, hvis $\mathbf{v} \neq \mathbf{u}$ og den første ikke-nul indgang i $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ er henholdsvis positiv eller negativ. Dette noteres

$$\mathbf{u} >^L \mathbf{v} \quad \text{eller} \quad \mathbf{u} <^L \mathbf{v}.$$

Hvis det første ikke-nul element af en vektor er positiv, siges vektoren at være lexicografisk positiv. Modsat siges den at være lexicografisk negativ, hvis det første ikke-nul element af en vektor er negativt. Et eksempel på lexicografi ses i Eksempel 4.2.

Eksempel 4.2

Givet vektorerne

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Så er \mathbf{u} lexicografisk større end \mathbf{v} , $\mathbf{u} >^L \mathbf{v}$, da den første ikke-nul værdi af $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ er 2. Til gengæld er \mathbf{u} lexicografisk mindre end \mathbf{z} , $\mathbf{u} <^L \mathbf{z}$, da den første ikke-nul værdi er -1 . Bemærk, at alle tre vektorer er lexicografisk positive.

Følgende er en lexicografisk metode til at udvælge de rækker, der skal pivoteres.

1. Vælg en arbitrær søjle \mathbf{a}_j til at indtræde i basen, så længe dens reducerede omkostning c_j^* er negativ. Lad \mathbf{v} være den j 'te søjle i simplextabellen.
2. For hvert i , hvor $u_i > 0$, divideres den i 'te række med u_i , og den lexicografisk mindste række vælges. Hvis rækken L er den lexicografisk mindste række, så forlader den L 'te basale variabel, $v_{B(L)}$, basen.

Det følger, at ethvert valg af pivotering via den lexicografiske metode er entydig, da der ellers ville være en anden række, som var proportional med den valgte række. Dette er i strid med antagelsen om, at rækkerne er lineært uafhængige.

Sætning 4.2

Antag, at simplexmetoden starter med, at alle rækker i en $m \times n$ simplextabel foruden rækken med omkostningsvektoren, den m 'te række, er lexicografisk positive. Hvis den lexicografiske metode til at vælge pivotering er fulgt, så gælder det, at

- (a) Alle rækkerne foruden den m 'te række forbliver lexicografiske positive gennem algoritmen.
- (b) Den m 'te række vokser strengt lexicografisk for hver iteration.
- (c) Simplexmetoden stopper efter et endeligt antal iterationer.

Bevis

- (a) Antag, at alle rækkerne af en simplextabel, udover den m 'te række, er lexicografisk positive i begyndelsen af en iteration af simplex. Antag dernæst, at v_j indtræder i løsningen, og at pivotrækken er den l 'te række. Så gælder der jævnfør den lexicografiske metode, at

$$\frac{l\text{'te række}}{u_l} <^L \frac{i\text{'te række}}{u_i}, \text{ hvis } i \neq l \text{ og } u_i > 0.$$

For at bestemme den nye tabel divideres den l 'te række med den positive variabel u_l og forbliver dermed lexicografisk positiv. For rækker i , hvor $u_i < 0$, skal der lægges et positivt multiplum af pivotrækken til, således at den (i, j) 'te indgang bliver nul. Grundet begge rækkers lexicografiske positivitet er den resulterende række også lexicografisk positiv. For rækker i , hvor $u_i > 0$ og $i \neq l$, haves, at

$$(\text{nye } i\text{'te række}) = (\text{gamle } i\text{'te række}) - \frac{u_i}{u_l}(\text{gamle } l\text{'te række}).$$

Grundet den tidligere ulighed, som opfyldes af de gamle rækker, vides det, at den nye i 'te række også er lexicografisk positiv.

- (b) I begyndelsen af hver iteration, er pivotværdien i den m 'te række negativ, så der skal ligges et positivt multiplum af pivotrækken til. Da pivotrækken er lexicografisk positiv, stiger den m 'te række lexicografisk.
- (c) Eftersom den m 'te række stiger lexicografisk for hver iteration, kan den aldrig returnere til en tidligere værdi. Da den m 'te række er bestemt entydig ud fra nuværende basis, så kan intet basis gentage sig selv, og derfor må simplexmetoden stoppe efter et endeligt antal iterationer.

□

4.5 Komplexitet

Et vigtigt kriterium for valg af simplexmetoden er tidskompleksitet. Til beskrivelse af dette benyttes *store-O* notation [Rosen, 2013, side 205].

Definition 4.6

Lad $f(x)$ og $g(x)$ være vilkårlige funktioner. $f(x)$ er **store-O** af $g(x)$, hvis der eksisterer et C og k , således at $|f(x)| \leq C|g(x)|, x \geq k$. C og k kaldes **vidner**.

Som beskrevet i afsnit 4.3 findes der forskellige implementeringer af simplexmetoden. Disse har hver deres tidskompleksitet og rumkompleksitet.

Fuld-tabel metoden kræver et konstant antal af operationer for at opdatere indgangene i simplextabellen. Derfor er antallet af operationer proportionelt med størrelsen på tabellen, og dermed er tidskompleksiteten og rumkompleksiteten $O(mn)$.

Den naive implementering behøver $O(m^3)$ aritmetiske operationer for at løse systemerne $\mathbf{p}^T B = \mathbf{c}_B^T$ og $B\mathbf{u} = \mathbf{A}_j$. Ydermere kræver udregningen af den reducerede objektfunktion $O(mn)$ aritmetiske operationer, da det er nødvendigt at udregne det indre produkt af vektoren \mathbf{p} for alle ikke-basisøjler i \mathbf{A}_j . Derfor er den samlede tidskompleksitet $O(m^3 + mn) = O(m^3)$ for den naive implementering.

Den reviderede metode bruger samme operationer som fuld-tabel implementeringen, men opdaterer kun $O(m^2)$ indgange og har derfor tidskompleksiteten $O(m^2)$. Det kan dog forekomme, at metoden skal opdatere alle variable. Hver udregning af en variabel kræver $O(m)$ operationer, hvilket medfører, at der i værste tilfælde bruges $O(mn)$ operationer. Da $m \leq n$, er tidskompleksiteten i værste tilfælde $O(mn)$. Med dette konkluderes, at den reviderede metode aldrig vil køre langsommere end fuld-tabel og den naive implementering. Samtidigt vil en iteration fra den reviderede metode være hurtigere end fuld-tabel i alle andre tilfælde end det værste. Endnu et vigtigt element, som er tiltalende ved den reviderede metode, er rumkompleksiteten på $O(m^2)$. Her kan der igen være en ret betydelig forskel, afhængigt af størrelsen på n .

Selvom antallet af basale mulige løsninger kan stige eksponentielt med antallet af variable og betingelser, så har simplexmetoden typisk fundet en optimal løsning efter $O(m)$ iterationer. Dog eksisterer der polyedre, hvor antallet af påkrævede pivoteringer stiger eksponentielt. For ikke-degenererede problemer bevæger simplexmetoden sig altid fra et ekstremumpunkt til et af dets tilstødende ekstremumpunkter og forbedrer omkostningen. Lad et polyeder have et eksponentielt antal af ekstremumpunkter, og lad en sti besøge alle disse. Denne sti er konstrueret ved, fra et ekstremumpunkt, at besøge et ekstremumpunkt med mindre omkostning. Med sådan et polyeder vil simplexmetoden, med en pivoteringsregel, som følger stien, kræve et eksponentielt antal af pivoteringer.

Sætning 4.3

Betragt det lineære optimeringsproblem, hvor objektfunktionen $\mathbf{c}_n^T \mathbf{x} = -x_n$ minimeres med betingelserne $\varepsilon \leq x_1 \leq 1$ og $\varepsilon x_{i-1} \leq x_i \leq 1 - \varepsilon x_{i-1}$ for $i = 2, 3, \dots, n$ og $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Så gælder det, at

- (a) Løsningsmængden har 2^n ekstremumpunkter.
- (b) Ekstremumpunkterne kan arrangeres således, at hvert tilstødende ekstremumpunkt har lavere omkostning end det forrige ekstremumpunkt.
- (c) Der eksisterer en pivoteringsregel til simplexmetoden, således at den kræver $2^n - 1$ pivoteringer, før algoritmen afsluttes.

Bevis

Lad \mathcal{P}_n være et polyeder i \mathbb{R}^n , begrænset af betingelserne $\varepsilon \leq x_1 \leq 1$ og

$$\varepsilon x_{i-1} \leq x_i \leq 1 - \varepsilon x_{i-1}$$

for $i = 2, 3, \dots, n$ og $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

- (a) Ved induktion vises, at \mathcal{P}_n har 2^n ekstremumpunkter. Basistrinnet, hvor $n = 1$, følger trivielt. Antag nu, at resultatet gælder for $n = k$. Polyederet \mathcal{P}_{k+1} er begrænset af samme betingelser som \mathcal{P}_k med tilføjelse af betingelsen $\varepsilon x_k \leq x_{k+1} \leq 1 - \varepsilon x_k$. Den øvre og nedre begrænsning i $\varepsilon x_k \leq x_{k+1} \leq 1 - \varepsilon x_k$ skærer ikke hinanden, mens $x_{k-1} \leq x_k \leq 1 - \varepsilon x_{k-1}$ er opfyldt. Dette medfører, at hvert ekstremumpunkt i \mathcal{P}_k giver anledning til to entydige ekstremumpunkter i \mathcal{P}_{k+1} , hvilket viser (a).
- (b) Med induktion vises det, at ekstremumpunkterne $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{2^n}$ i \mathcal{P}_n kan arrangeres således, at hvert ekstremumpunkt tilstøder det forrige og $\mathbf{c}_n^T \mathbf{p}_1 > \dots > \mathbf{c}_n^T \mathbf{p}_{2^n}$, når $\mathbf{c}_n^T \mathbf{x} = -x_n$. Basistrinnet for $n = 1$ følger trivielt. Antag nu, at resultatet gælder for $n = k$. Da et polyeder er afgrænset af polyedre i en dimension lavere, kan to \mathcal{P}_k afgrænse polyederet \mathcal{P}_{k+1} . Disse to afgrænsende polyedre vil henholdsvis have $\varepsilon x_k \leq x_{k+1}$ eller $x_{k+1} \leq 1 - \varepsilon x_k$ som aktiv betingelse i alle ekstremumpunkter. Da ekstremumpunkterne i \mathcal{P}_k er arrangeret således, at $\mathbf{c}_n^T \mathbf{p}_1 > \dots > \mathbf{c}_n^T \mathbf{p}_{2^n}$, kan den ønskede sti findes. Ekstremumpunkterne i \mathcal{P}_{k+1} skal således arrangeres sådan, at

$$1 - \varepsilon \mathbf{c}_n^T \mathbf{p}_{2^n} > \dots > 1 - \varepsilon \mathbf{c}_n^T \mathbf{p}_1 > \varepsilon \mathbf{c}_n^T \mathbf{p}_1 > \dots > \varepsilon \mathbf{c}_n^T \mathbf{p}_{2^n},$$

hvilket viser (b).

- (c) Jævnfør afsnit 4.2 bevæger simplexmetoden sig altid til et tilstødende ekstremumpunkt, når problemet ikke er degenereret. Med udgangspunkt i (b) vides det, at der eksisterer en udspændende sti, som ender i problemets optimale løsning og $\mathbf{c}^T \mathbf{x}_i < \mathbf{c}^T \mathbf{x}_{i-1}$ for $i = 2, 3, \dots, n$. Dette medfører, at en pivoteringsregel, som mindsker omkostningen mindst muligt pr. pivotering, følger den udspændende sti og besøger alle 2^n ekstremumpunkter, hvilket viser (c).

□

Således er kompleksitet et vigtigt kriterium for valg af simplexmetode. Ligeledes er valg af pivoteringsregel afgørende, eftersom det i praktiske applikationer er de afgørende faktorer for algoritmens brugbarhed.

5 Konklusion

Ud fra arbejdet med lineære programmeringsproblemer kan det konkluderes, at disse kan repræsenteres geometrisk gennem polyedre, som er geometriske figurer der afgrænser de mulige løsninger til et lineært optimeringsproblem. Endvidere kan det konkluderes, at lineære programmeringsproblemer har en optimal løsning, og at disse findes i hjørnerne i et polyeder. En måde at finde den optimale løsning på er ved brug af simplexmetoden, som ved hjælp af elementære rækkeoperationer på problemet opstillet som en simplextabel, afsøger hjørnerne i et polyeder, og derved finder den optimale løsning.

Appendicer

A Entydigheden af en matrix på reduceret trappeform

Sætning A.1

Lad A være en matrix med den reducerede trappeform A_R . Så er følgende sandt:

- (a) Hvis en søjle j i A er en linearkombination af andre søjler i A , så er søjlen i A_R en linearkombination af de tilsvarende søjler i A_R med de samme koefficienter.
- (b) Hvis en søjle j i A_R er en linearkombination af andre søjler i A_R , så er søjlen i A en linearkombination af de tilsvarende søjler i A med de samme koefficienter.

Bevis

Jævnfør Sætning 1.14 så gælder det, at der findes en invertibel matrix P , så $PA = A_R$. Deraf gælder $P\mathbf{a}_i = \mathbf{r}_i$ for alle i . Antag, at søjlen j i A er en linearkombination af de andre søjler i A . Så findes skalarer c_1, c_2, \dots, c_k , så det gælder, at

$$\mathbf{a}_j = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_k\mathbf{a}_k. \quad (\text{A.1})$$

Derfor

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_j = P\mathbf{a}_j &= P(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_k\mathbf{a}_k) \\ &= c_1P\mathbf{a}_1 + c_2P\mathbf{a}_2 + \dots + c_kP\mathbf{a}_k \\ &= c_1\mathbf{r}_1 + c_2\mathbf{r}_2 + \dots + c_k\mathbf{r}_k. \end{aligned}$$

Beviset for (b) gør brug af sammen fremgangsmåde, men benytter dog $\mathbf{r}_i = P^{-1}\mathbf{a}_i$. \square

Heraf kan der udledes en række egenskaber for en matrix på reduceret trappeform.

Lemma A.1

Lad A_R være en $m \times n$ matrix på reduceret trappeform. Så gælder, at

- (a) En søjle i A_R er en pivotsøjle, hvis og kun hvis den er ikke-nul og ikke er en linearkombination af de foregående søjler i A_R .
- (b) Den j 'te pivotsøjle i A_R er $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^m$ og derfor er pivotsøjlerne i A_R lineært uafhængige.
- (c) Antag, at \mathbf{r}_j ikke er en pivotsøjle i A_R , og at der er k pivotsøjler i A_R før \mathbf{r}_j . Så gælder det, at \mathbf{r}_j er en linearkombination af de k forudgående pivotsøjler og koefficienterne er de k første indgange i \mathbf{r}_j .

Lemma A.1 følger direkte af Definition 1.10 og Definition 1.11 og kan generaliseres til Lemma A.2, som bruges til Sætning A.2.

Lemma A.2

Følgende udsagn er sande for enhver matrix A :

- (a) Pivotsøjlerne i A er lineært uafhængige.
- (b) Enhver ikke-pivotsøjle i A er en linearkombination af de forrige pivotsøjler i A , hvor koefficienterne i linearkombinationen er indgangene i den tilsvarende søjle i den reducerede trappeform af A .

Sætning A.2

Enhver matrix kan, ved hjælp af elementære rækkeoperationer, kun blive omdannet til en entydig matrix på reduceret trappeform.

Bevis

Lad A være en matrix og A_R være den reducerede trappeform af A . Jævnfør Lemma A.1(a) gælder det, at en søjle i A_R er en pivotsøjle i A_R , hvis og kun hvis den er en ikke-nulsøjle og ikke er en linearkombination af de forudgående pivotsøjler i A_R . Jævnfør Sætning A.1 gælder det, at hvis en søjle i A_R er en pivotsøjle, så er den ikke en linearkombination af de forudgående søjler i A_R og deraf er søjlen i A heller ikke en linearkombination af de forudgående søjler i A , hvilket betyder at positionerne af pivotsøjlerne i A_R er entydigt bestemt af søjlerne i A . Endvidere gælder det, jævnfør Lemma A.1(b), at den j 'te pivotsøjle i A_R er den j 'te standardvektor i \mathbb{R}^m , og derfor er pivotsøjlerne i A_R endvidere entydigt bestemt af søjlerne i A .

Dernæst bevises, at ikke-pivotsøjlerne i A_R også er bestemt af søjlerne i A . Antag, at \mathbf{r}_j ikke er en pivotsøjle i A_R . Hvis $\mathbf{r}_j = \mathbf{0}$ medfører det, at $\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$ jævnfør Sætning A.1. Antag nu, at $\mathbf{r}_j \neq \mathbf{0}$. Så gælder det jævnfør Lemma A.1(c), at \mathbf{r}_j er en linearkombination af de forudgående pivotsøjler i A_R , som er lineært uafhængige. Det gælder endvidere, at koefficienterne i linearkombinationen er indgangene i \mathbf{r}_j , hvor indgangene, som ville være

rækkens første ikke-nul-indgang, er nulindgange. Jævnfør Sætning A.1 er \mathbf{a}_j ligeledes en linearkombination af de forudgående pivotsøjler i A , som er lineært uafhængige og har de samme koefficienter, der afhænger af A . Derfor er \mathbf{r}_j entydigt bestemt af A og det konkluderes deraf, at A_R er entydig bestemt af A . \square

B Span og dimension

Sætning B.1, der omhandler spannet og dimensionen, er vigtig i forhold til visse egenskaber nævnt i rapporten.

Sætning B.1

Antag, at spannet \mathcal{S} af vektorene $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_c$ har dimension m . Så gælder, at

- (a) Der eksisterer en basis af \mathcal{S} bestående af m af vektorene $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_c$.
- (b) Hvis $k \leq m$ og $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ er lineært uafhængige, kan der skabes en basis \mathcal{S} ved $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, hvor der ligeledes vælges $m - k$ af vektorene $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_c$.

Bevis

Da (a) er et tilfælde af (b), hvor $k = 0$, er beviset for (b) tilstrækkeligt. Hvis alle vektorer $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_c$ kan opnås som linearkombination af $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, så er alle vektorer i $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_c$ ligeledes en linearkombination af $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, hvor $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ udgør en basis. Såfremt dette ikke er tilfældet, gælder det, at en eller flere vektorer i $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_c$ ikke er linearkombination af $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. Der udvælges nu en lineært uafhængig vektor blandt $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_c$. Derved opnås der en mængde bestående af $k + 1$ lineært uafhængige vektorer fra $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_c$. Den proces gentages $m - k$ gange og derved opnås en basis til \mathcal{S} . \square

Litteratur

- Bertsimas, D. and Tsitsiklis, J. N. (1997). *Introduction to linear optimization*. Publisher's Cataloging-in-Publication Data, 1st edition.
- Bixby, R. E. (2012). *A Brief History of Linear and Mixed-Integer Programming Computation*. Documenta Mathematica. https://www.math.uni-bielefeld.de/documenta/vol-ismmp/25_bixby-robert.pdf.
- Lay, D. C. (2016). *Linear Algebra an Its Applications*. Pearson, 3rd edition.
- Rosen, K. H. (2013). *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill, 7th edition.
- Schrijver, A. (2012). *On the History of the Shortest Path Problem*. Documenta Mathematica. https://www.math.uni-bielefeld.de/documenta/vol-ismmp/32_schrijver-alexander-sp.pdf.
- Spence, L., Insel, A., and Friedberg, S. (2014). *Elementary Linear Algebra: A Matrix Approach*. Pearson, 2nd edition.