Lektion 1 (Logik og beviser)

Kursets overordnede emner

- talfølger
- uendelige rækker
- kontinuerte funktioner
- differentiable funktioner
- partielle afledede

} inkl. eksempler fra økonomi

Eksamen: mundtlig individuel eksamen (bestået / ikke bestået)

Logiske udsagn (sand/falsk udsagn)

$P(x)$: "tallet x er større end 2"

$Q(x)$: "x er et heltal"

$R(f)$: "funktionen f er et heltal"

} eksempler

Givet x eller f kan vi afgøre objektivt om P, Q, R er sande eller falske:

$x = 3 \Rightarrow P(x)$ sand da $3 > 2$

$x = \{1,2\} \Rightarrow Q(x)$ falsk da mængden $\{1,2\}$ ikke er et heltal

Disse udsagn kaldes åbne da sandhedsværdien afhænger her af valget af x og f, hvorimod "2 er et heltal" ikke er åbent, da dette udsagn altid er sandt.

Syntaks

Symbol	betydning
$\neg$	ikke
$\wedge$	og
$\vee$	eller
$\Rightarrow$	medfører
$\Leftrightarrow$	hvis og kun hvis / ækvivalent med
$\forall$	for ethvert / for alle (al-kvantor)
$\exists$	der eksisterer (eksistens-kvantor)
:	således at / gælder at

eks

def. for kontinuitet af $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ i punktet $x \in [a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in [a,b] : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Læses:

"For ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$ så der for alle $y \in [a,b]$ gælder at $|x-y| < \delta$ medfører at $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$"

Vigtig bemærkning: Den ene skrivemåde er ikke bedre end den anden.

Negation af et logisk udsagn

$\neg P$ er sand $\Leftrightarrow$ P er falsk

$\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$, $\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

$\neg (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

findes fra sandhedstabeller (appendiks)

Negation af kvantorer: $\neg\forall$ svarer til $\exists\neg$
$\neg\exists$ svarer til $\forall\neg$

For negation af større udsagn "skubbes $\neg$ fra venstre mod højre".

eks

Udsagn: f er diskontinuert i x (ikke kontinuert i x):

$$\neg\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in [a,b] : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists y \in [a,b] : |x-y| < \delta \ \underset{\text{bemærk: og}}{\wedge} \ \underbrace{|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon}_{\neg(|f(x)-f(y)| < \varepsilon)}$$

"Der eksisterer et $\varepsilon > 0$ så der for alle $\delta > 0$ eksisterer et $y \in [a,b]$ således at $|x-y| < \delta$ og $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$."

Beviser

Formelt: undersøg om $\underset{\text{antagelser}}{P} \Rightarrow \underset{\text{matematisk resultat}}{Q}$

Direkte bevis

$$(P \Rightarrow R_1) \wedge (R_1 \Rightarrow R_2) \wedge \cdots \wedge (R_{k-1} \Rightarrow R_k) \wedge (R_k \Rightarrow Q)$$

$R_1, \ldots, R_k$ delresultater der leder til at P medfører Q

eks

def: Den absolutte/numeriske værdi af $x \in \mathbb{R}$ er

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

altså gælder $\pm x \leq |x|$.

sætning

Lad $x, y \in \mathbb{R}$ så gælder

(a) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (trekantsulighed)

(b) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$ (omvendt trekantsulighed)

bevis af (a)

$x + y \leq |x| + |y|$ da $x \leq |x|$ og $y \leq |y|$

$-(x+y) = -x-y \leq |x| + |y|$ da $-x \leq |x|$ og $-y \leq |y|$

delresultater

vi har altså

$$|x+y| \underset{\text{def.}}{=} \max\{x+y, -(x+y)\} \leq |x| + |y| \qquad \square$$

bevis af (b)

$$|x| = |x \underbrace{-y+y}_{0}| \underset{(a)}{\leq} |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x-y|$$

$$|y| = |y-x+x| \underset{(a)}{\leq} |y-x| + |x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |y-x| = |x-y|$$

Altså:

$$\big||x| - |y|\big| = \max\{|x|-|y|, |y|-|x|\} \leq |x-y| \qquad \square$$

Bemærk: efter (a) er bevist kan vi bruge det som et delresultat i (b).

Bevis ved kontraposition

$P \Rightarrow Q$ er ækvivalent med $\underbrace{\neg Q \Rightarrow \neg P}_{\text{(det kontraponerede udsagn)}}$

Nogle gange er $\neg Q \Rightarrow \neg P$ lettere at bevise end $P \Rightarrow Q$.

eks

Heltallene er $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Ulige heltal $\mathbb{Z}_{\text{ulige}} = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Lige heltal $\mathbb{Z}_{\text{lige}} = \mathbb{Z} / \mathbb{Z}_{\text{ulige}} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

I kan overveje dette

For $n \in \mathbb{Z}$ gælder det at

$$n^2 \in \mathbb{Z}_{lige} \Rightarrow n \in \mathbb{Z}_{lige} \qquad (P \Rightarrow Q)$$

"n^2 lige medfører n lige"

Hvad er lettest at vise? $P \Rightarrow Q$ eller $\neg Q \Rightarrow \neg P$?

$$\begin{aligned} n^2 \text{ lige} &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n^2 = 2k \\ &\Rightarrow n = \sqrt{2k} \quad (\text{eller } -\sqrt{2k}\ ?) \\ &\Rightarrow \exists \tilde{k} \in \mathbb{Z} : n = 2\tilde{k} \\ &\ \ \uparrow \\ &\ \ ?? \end{aligned}$$

kontraponerede udsagn:

$$n \in \mathbb{Z}_{ulige} \Rightarrow n^2 \in \mathbb{Z}_{ulige}$$

<u>bevis</u>

$$\begin{aligned} n \text{ ulige} &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k-1 \\ &\Rightarrow n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2 - 2k + 1)}_{\tilde{k} \in \mathbb{Z}} - 1 \\ &\Rightarrow n^2 \text{ ulige} \end{aligned}$$

$\square$

<u>Indirekte bevis / modstridsbevis</u>

Bevis $P \Rightarrow Q$ ved at antage at det modsatte er sandt:

$$\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$$

antagelser og modsatte resultat

Herefter udledes en <u>modstrid</u> (udsagn som <u>vides</u> er falsk)

<u>eks</u>

For $n \in \mathbb{Z}$ gælder det at

$$3n + 2 \text{ ulige} \Rightarrow n \text{ ulige}$$

<u>bevis</u> (modstridsbevis)

Antag $3n+2$ ulige <u>og</u> n er <u>lige</u>

Vi har altså:

$$\begin{aligned} n \text{ lige} &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k \\ &\Rightarrow 3n + 2 = 6k + 2 = 2\underbrace{(3k+1)}_{\tilde{k} \in \mathbb{Z}} \\ &\Rightarrow 3n + 2 \text{ lige} \end{aligned}$$

Dette er en <u>modstrid</u> da vi antog at $3n+2$ var ulige.

$\square$

Induktionsbevis

Et induktionsbevis anvendes til at bevise uendeligt mange udsagn $U_1, U_2, U_3, \dots$ som på en naturlig måde indekseres ved brug af naturlige tal $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

(f.eks. sum formlen:
$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \text{for } n \in \mathbb{N}$$
)

Idéen er:

(a) Vis at U_1 er sand (induktionsstart)

(b) Vis for $m \in \mathbb{N}$ gælder $U_m \Rightarrow U_{m+1}$ (induktionsskridt)

Fra (a) og (b):

$$(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{sand af (a)}}}{U_1} \Rightarrow U_2) \wedge (U_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(b)}}}{\Rightarrow} U_3) \wedge (U_3 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(b)}}}{\Rightarrow} U_4) \wedge \cdots$$

Altså U_n er sand for alle $n \in \mathbb{N}$.

---

eks

For $n \in \mathbb{N}$ gælder det at
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \qquad (U_n).$$

bevis (ved induktion)

induktionsstart: $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \quad (U_1)$ ✓

induktionsskridt: Antag $\underbrace{\sum_{k=1}^{m} k = \frac{1}{2}m(m+1)}_{(U_m)\text{ induktionshypotesen}}$ er sand for et $m \in \mathbb{N}$

Vi skal nu vise at U_{m+1} er sand:
$$\sum_{k=1}^{m+1} k = m+1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} k}_{\text{hypotese}} = m+1+\frac{1}{2}m(m+1)$$
$$= \left(\frac{1}{2}m+1\right)(m+1) = \frac{1}{2}(m+2)(m+1) \quad ✓$$

$\square$

eks

For $n \in \mathbb{N}$ gælder det at

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad (U_n)$$

Bevis (ved induktion)

U_1: $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ ✓

Antag U_m: $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m}{m+1}$ hvor $m \in \mathbb{N}$

Bevis $U_m \Rightarrow U_{m+1}$:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\underset{(U_m)}{=} \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{m}{m+1}$$

$$= \frac{1 + m(m+2)}{(m+1)(m+2)}$$

$$= \frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)} = \frac{m+1}{m+2} \qquad ✓$$

$\square$

---

eks

bemærk: induktionsstart her for $n=2$

Lad $x>0$, $n \in \mathbb{N}$ og $n \geq 2$ så gælder det at

$$(1+x)^n > 1 + nx \qquad (U_n)$$

bevis (ved induktion)

U_2: $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 \underset{x>0 \Rightarrow x^2>0}{>} 1+2x$ ✓

Antag U_m: $(1+x)^m > 1+mx$ hvor $m \in \mathbb{N}$ og $m \geq 2$.

Bevis $U_m \Rightarrow U_{m+1}$:

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)^m \underbrace{(1+x)}_{>0}$$

$$\underset{(U_m)}{>} (1+mx)(1+x)$$

$$= 1+x+mx+mx^2$$

$$= 1+(m+1)x + \underbrace{mx^2}_{>0 \text{ da } m\geq 2 \text{ og } x>0}$$

$$> 1+(m+1)x \qquad ✓$$

$\square$