

Physique Numérique - Exercice 7

Équation d'onde dans un milieu inhomogène : modes propres et propagation d'une vague en présence de hauts-fonds.

Jonas Gruetter, Chloé Mondon
jonas.grutter@epfl.ch, chloe.mondon@epfl.ch

17 août 2021

Table des matières

1	Introduction	2
2	Implémentation	3
2.1	Schéma explicite à 3 niveaux	3
2.2	Conditions aux bords	3
2.3	Quantité $E(t)$	4
3	Vitesse de propagation constante	4
3.1	Illustration du phénomène de réflexion au bord pour les conditions fixes et libres	4
3.2	Calcul analytique des fréquences propres ω_n et des modes propres $f_n(x)$. . .	6
3.3	Modes propres, vérification numérique	7
3.4	Excitation résonnante de modes propres	8
3.4.1	Maximum d' $E(t)$	9
3.4.2	Comparaison entre $f_{\text{num}}(x, t_{\text{fin}})$ et $f_{\text{ana}}(x, t_{\text{fin}})$	10
4	Application à la vague de Belharra	11
4.1	Hauteur atteinte par la vague	12
4.2	Vérification que la vitesse de la vague est donnée par $\sqrt{g \cdot h(x)}$	13
4.3	Vérification des facteurs de proportionnalités reliés à l'amplitude	15
4.4	Comportement de la vague pour des bas-fonds de plus en plus raides et comparaison avec la solution WKB	17
5	Facultatif	17
5.1	Effet de β_{CFL} sur la stabilité du schéma	17
5.2	Analyse WKB des cas A , B et C	19

1 Introduction

Dans cet exercice, on s'intéresse à la propagation d'ondes dans un milieu unidimensionnel à vitesse de propagation variable $u(x)$. Trois équations régissant l'évolution d'une perturbation $f(x, t)$ sont étudiées :

$$\text{Équation } A : \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a_{ext}(t) \quad (1)$$

$$\text{Équation } B : \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 \frac{\partial f}{\partial x} \right) + a_{ext}(t) \quad (2)$$

$$\text{Équation } C : \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^2 f) + a_{ext}(t) \quad (3)$$

Où $a_{ext}(t) = a_e \sin(\omega t)$ est une accélération extérieure avec une amplitude a_e et une fréquence ω données. Le domaine considéré est tel que $x \in [x_L, x_R]$. x_L et x_R sont donc les bords gauches et droites du domaine respectivement. Diverses conditions aux bords seront explicitées.

Le but final de l'exercice est d'étudier le comportement d'une vague, celle de Belharra. Belharra est un haut-fond se situant sur la côte basque en France. Suivant les conditions météorologiques, ce haut-de fond peut engendrer une vague puissante qui est guettée par les surfeurs les plus téméraires mais redoutée par les pêcheurs de la région. Pour parvenir à étudier cette vague il faut passer par différentes étapes intermédiaires. Tout d'abord, le schéma explicite à 3 niveaux et diverses conditions aux bords sont implémentés. Ensuite, des ondes à vitesse de propagation constante sont étudiées : Les phénomènes dus aux différentes conditions de bord sont illustrés, les modes propres $f_n(x)$ pour certaines conditions aux bords sont calculés et une étude de convergence est effectuée afin d'observer comment varie l'erreur entre la solution analytique et la solution numérique pour ces modes propres. De plus, l'évolution de la quantité $E(t)$ (définie en Section 2.3) en fonction de la fréquence est examinée. Ensuite, la vague de Belharra est étudiée. La hauteur de la vague au passage du haut fond, l'amplitude de la vague et sa vitesse sont analysés pour les équations A , B et C . De plus, dans le cas de l'équation B , le comportement de la vague dans des fonds de plus en plus raides est observé et comparé avec la solution WKB (voir Section 4.4). Enfin, comme partie facultative, les effets de β_{CFL} sur la stabilité du schéma sont étudiés et l'analyse WKB des cas A , B et C est réalisée.

2 Implémentation

2.1 Schéma explicite à 3 niveaux

Dans cette section, le schéma explicite à trois niveaux est implémenté pour les trois équations (1), (2) et (3). On va résoudre numériquement ces équations en discrétisant l'espace $x_j, j \in 1, 2, \dots, N_x$ et le temps $t_j, j \in 1, 2, \dots, N_t$. Les maillages en x et en t sont supposés équidistants.

Pour les dérivées en x , les différences finies centrées au points de maillage sont utilisées :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x_i) &\approx \frac{g(x_{i+1}) - g(x_{i-1}))}{2h} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_i) &\approx \frac{g(x_{i+1}) - 2g(x_i) + g(x_{i-1}))}{h^2}\end{aligned}\tag{4}$$

En appliquant la méthode des différences finies pour chaque perturbations on obtient :

Perturbation A

$$P_A := f(x_i, t_{n+1}) = 2(1 - \beta_{CFL}^2) \cdot f(x_i, t_n) - f(x_i, t_{n-1}) + \beta_{CFL}^2 \cdot [f(x_{i+1}, t_n) + f(x_{i-1}, t_n)] + a_{ext}(t)\tag{5}$$

où $\beta_{CFL} = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$ est le paramètre de Courant-Friedrichs-Lewy.

Perturbation B

$$P_B := P_A + \frac{(f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})))}{4} \cdot (\beta_{CFL}^2(i+1) - \beta_{CFL}^2(i-1))\tag{6}$$

Perturbation C

$$P_C := 2P_B - P_A + f(x_i, t_n)(\beta_{CFL}^2(i+1) - 2\beta_{CFL}^2(i) + \beta_{CFL}^2(i-1))\tag{7}$$

2.2 Conditions aux bords

Dans le cadre de cet exercice, différentes conditions aux bords sont implémentées. Soit x_e un bord du domaine ($x_e = x_l$ ou $x_e = x_r$).

1. Condition de bord fixe :

$$f(x_e, t) = 0 \quad \forall t\tag{8}$$

2. Condition de bord libre :

$$\frac{\partial f(x_e, t)}{\partial x} = 0 \quad \forall t \quad (9)$$

3. Condition au bord harmonique :

$$f(x_e, t) = A \cdot \sin \omega t \quad \forall t \quad (10)$$

A et ω sont une amplitude et une fréquence données.

4. Condition au bord d'impulsion : C'est un cas particulier de la condition harmonique. La condition d'impulsion permet de n'émettre qu'une seule onde. Une fois que l'onde est émise, le bord devient un bord fixe.
5. Condition au bord de sortie de l'onde : C'est une condition au bord qui laisse l'onde sortir du domaine par les bords. L'onde sort du domaine au bord droite si elle est purement progressive au voisinage de $x = x_r$. Elle sort du domaine au bord gauche si elle est purement rétrograde au voisinage de $x = x_l$.

2.3 Quantité $E(t)$

La quantité $E(t)$, définie par

$$E(t) = \int_{x_L}^{x_R} f^2(x, t) dx \quad (11)$$

est implémenté en C++ en utilisant les méthodes du trapèze et des différences finies :

$$E(t) = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^2(x, t_n) dx \approx \sum_{i=1}^{N-1} \frac{f(x_i, t_n)^2 + f(x_{i+1}, t_n)^2}{2} h \quad (12)$$

où N est le nombre de noeuds du maillage spatial (extrêmes inclus).

3 Vitesse de propagation constante

Dans cette section, le cas $u(x) = \text{const}$ est considéré. Les équations A , B et C sont donc identiques. Le système considéré est tel que $x_L = 0$, $x_R = L = 15 \text{ m}$ et $u = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3.1 Illustration du phénomène de réflexion au bord pour les conditions fixes et libres

Le but de cette sous-section est d'illustrer le phénomène de réflexion aux bords pour les conditions fixes [eq.\(8\)](#) et libres [eq.\(9\)](#) puis d'illustrer le cas de la condition "sortie de l'onde".

Afin d'avoir un rapport compact et une description claire de la situation, il a été décidé de montrer tous ces phénomènes en une seule figure, Fig.1. Ce type de figure montre l'amplitude de la perturbation en fonction du temps et de la position.

Afin d'observer clairement ce qu'il se passe, une perturbation d'une demie longueur d'onde est envoyée depuis le bord gauche. On a donc une condition au bord gauche du type impulsion légèrement modifiée. À la place d'envoyer une longueur d'onde complète, on envoie seulement une demie longueur d'onde afin de pouvoir illustrer plus clairement les effets de bords. Pendant que la perturbation est envoyée, on a une condition au bord gauche de type harmonique. Ensuite, une fois que la demie longueur d'onde est envoyée et pour le reste de la simulation, le bord gauche prend une condition type fixe. Concernant le bord droit, on a d'abord une condition au bord libre et après le premier rebond de l'onde à droite (donc après $t \simeq 3s$), le bord droit prend une condition de "sortie de l'onde".

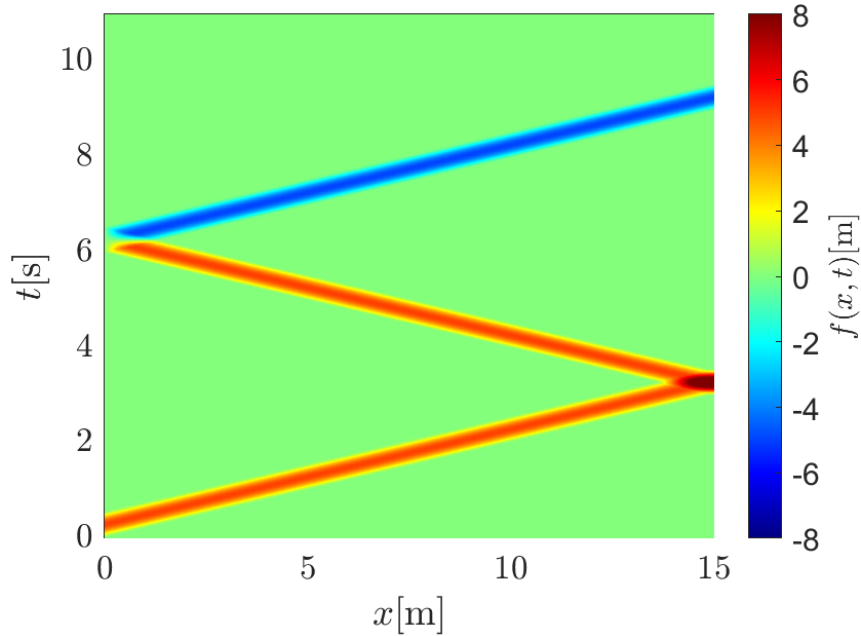


FIGURE 1 – Illustration du phénomène de réflexion pour les conditions fixes éq.(8), libres éq.(9) et illustration du cas de la condition "sortie de l'onde".

La Fig.1 montre bien que, pour la condition au bord fixe, il y a une réflexion de l'onde ($t \simeq 6s$). L'onde réfléchie se propage dans la même direction que l'onde incidente, mais dans le sens contraire. Il est encore possible d'observer que le signe de la perturbation change lors d'une réflexion au bord fixe. Pour la conditions au bord libre, il y aussi une réflexion de l'onde (à $t \simeq 3s$). Contrairement au bord fixe, il est possible d'observer qu'une réflexion sur un bord libre ne change pas le signe de la perturbation. Concernant la condition de "sortie de l'onde à droite", il est possible de voir très clairement que, à $t \simeq 9s$, lorsque l'onde se situe au voisinage de $x = x_R$, elle sort du domaine et ne revient plus.

3.2 Calcul analytique des fréquences propres ω_n et des modes propres $f_n(x)$

Dans cette sous-section, il s'agit de déterminer analytiquement les fréquences propres et les modes propres du système. On considère une condition au bord fixe à gauche éq.(8) (avec $x_e = x_l = 0$), une condition au bord libre à droite éq.(9) (avec $x_e = x_r = L$). Il n'y a pas d'accélération extérieur : $a_e = 0$.

Avec ces conditions, l'équation d'onde est donnée par :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (13)$$

Afin de résoudre l'éq.(13), la méthode de séparation des variables est utilisée. On cherche une solution de la forme $f(x, t) = g(x)h(t)$ tel que $g, h \neq 0$. En substituant l'Ansatz dans l'éq.(13) on obtient :

$$u^2 \frac{g''(x)}{g(x)} = \frac{h''(t)}{h(t)} = \lambda \quad (14)$$

où ' signifie que l'on dérive par rapport à la variable dont la fonction est dépendante. L'éq.(14) est obtenue en notant que $g(x)$ ne dépend pas de t et que $h(t)$ ne dépend pas de x , c'est pourquoi l'éq.(14) doit être égale à une constante $\lambda \in \mathbf{R}$. En utilisant la méthode générale de résolution d'équation linéaire du second degré on obtient :

$$g(x) = \beta \cos\left(\sqrt{\left|\frac{\lambda}{u^2}\right|}x\right) + \alpha \sin\left(\sqrt{\left|\frac{\lambda}{u^2}\right|}x\right) \quad (15)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. A présent l'éq.(15) est résolue en utilisant les conditions aux limites. La première condition implique :

$$g(0) = 0 \leftrightarrow \beta = 0 \quad (16)$$

La seconde condition implique :

$$g'(L) = 0 \leftrightarrow \cos\left(\sqrt{\left|\frac{\lambda}{u^2}\right|}L\right) = 0 \leftrightarrow |\lambda_n| = \frac{\pi^2(2n+1)^2}{4L^2}u^2 \quad (17)$$

où $L = x_R - x_L$ est la longueur du maillage. En combinant éq.(16) et éq.(17) l'équation pour $g(x)$ est obtenue :

$$g(x) = \alpha_n \sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2L}x\right) \quad (18)$$

En procédant de la même manière on obtient l'équation pour $h(t)$:

$$h(t) = \gamma_n \cos\left(\frac{\pi(2n+1)ut}{2L}\right) + \delta_n \sin\left(\frac{\pi(2n+1)ut}{2L}\right) \quad (19)$$

Où $\gamma_n, \delta_n \in \mathbf{R}$. Par le principe de superposition la solution générale de l'onde est obtenue :

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_n \sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2L}x\right) \left(\gamma_n \cos\left(\frac{\pi(2n+1)ut}{2L}\right) + \delta_n \sin\left(\frac{\pi(2n+1)ut}{2L}\right) \right) \right) \quad (20)$$

A présent nous pouvons déterminer les modes propres et les fréquences propres du système. Nous parlons ici de mode propre du type $f_n(x)$ et donc uniquement la partie dépendante en x nous intéresse. Les modes propres sont donnés par :

$$f_n(x) = \alpha_n \sin(k_n x) \quad (21)$$

avec $k_n = \frac{\pi(2n+1)}{2L}$. On peut donc déterminer les fréquences propres en utilisant la relation $\omega_n = uk_n$.

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}u \quad (22)$$

3.3 Modes propres, vérification numérique

Dans cette section, le but est de vérifier si les résultats numériques correspondent à la solution analytique trouvée en Section 3.2. Pour ce faire, on initialise, pour les mêmes conditions aux limites, un des modes propres calculés analytiquement, avec une amplitude arbitraire : $f(x, t \leq 0) = f_n(x) \forall x$. Ensuite, une étude de convergence est effectuée en variant Δt et Δx à $\beta_{CFL} = 1$ (constant). L'erreur est mesurée après une période d'oscillation. Dans notre cas, l'amplitude de l'harmonique initiale est de 2m, le mode initialisé correspond à $n = 0$.

Afin de faire varier Δt et Δx tout en maintenant β_{CFL} constant, il suffit de faire varier N , le nombre de node du maillage spatial (extrême inclus). En effet, faire varier N fait directement varier Δx et par l'implémentation du code C++, β_{CFL} est constant (rentré par l'utilisateur). Comme Δt est défini par rapport à Δx et β_{CFL} (Rappel : $\beta_{CFL} = u \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$, u est la vitesse de propagation), faire varier N revient à faire varier Δt et Δx à β_{CFL} constant. Le mode correspondant à $n = 0$ est initialisé car un mode correspondant à un ordre supérieur a une oscillation plus rapide. Par conséquent, l'imprécision sur la lecture de l'amplitude de la perturbation au temps final est accentuée. La convergence attendue (voir ci-dessous) n'est donc pas toujours lisible pour un mode correspondant à $n > 0$.

Dans ce cas, la solution analytique pour la perturbation $f(x, t)$ initialisée à un mode propre n est connue $\forall x$ et $\forall t$ éq.(21). La fréquence éq.(22) est utilisée pour déterminer la période de l'oscillation. Comme on a une solution analytique, il est possible de déterminer une erreur. L'erreur que nous appelons α est mesurée après une période d'oscillation T et est définie comme suit :

$$\alpha = \int_{x_L}^{x_R} |f_{num}(x, t = T) - f_{ana}(x, t = T)| dx \quad (23)$$

où x_L, x_R [m] sont les extrémités gauches et droites du maillage.

On peut donc représenter l'erreur α en fonction de N sur un diagramme log-log. Ceci est réalisé par la Fig.2. La valeur opposée de celle de la pente représente m , l'ordre de

convergence du schéma. Grâce au fit linéaire effectué sur la Fig.2, il est possible de vérifier que la pente est de -2 . Le schéma converge donc à l'ordre $m = 2$. Ce résultat semble correct car, analytiquement, un schéma qui utilise des différences finies centrées d'ordre 2 converge à l'ordre 2 [1](Annexe A).

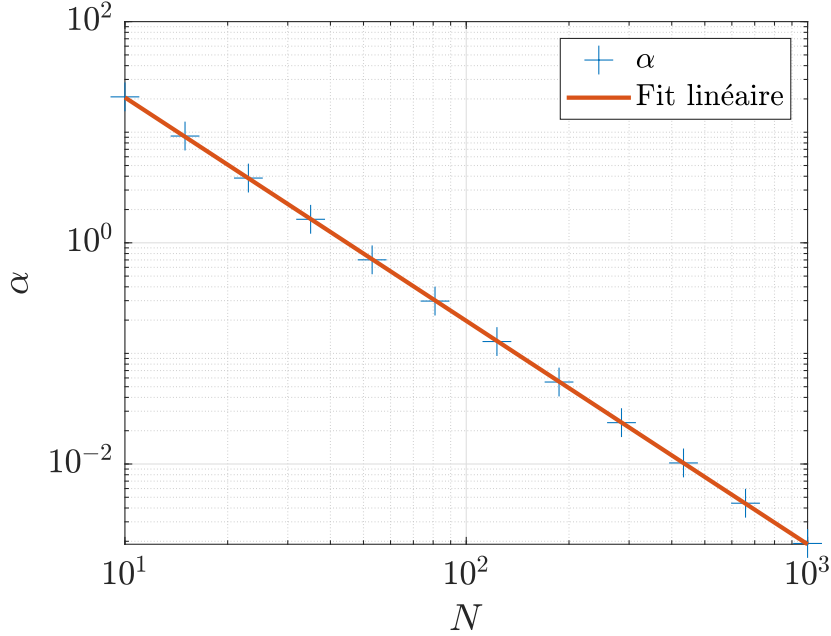


FIGURE 2 – Etude de convergence en variant Δt et Δx à $\beta_{CFL} = 1$ (constant). L'erreur α , définie par l'éq.(23), est mesurée après une période d'oscillation. Le mode initialisé correspond à $n = 0$. Fit linéaire : $y = -2.0 \cdot x + 3.3$

3.4 Excitation résonnante de modes propres

Le but de cette section est d'étudier le comportement de la grandeur $E(t)$ en fonction de ω . Pour une valeur définie de ω une simulation de longue durée avec un temps final, t_{fin} est réalisée et le maximum de $E(t)$ est noté :

$$\hat{E}(\omega) = \max_{t \in [0, t_{fin}]} E(t) \quad (24)$$

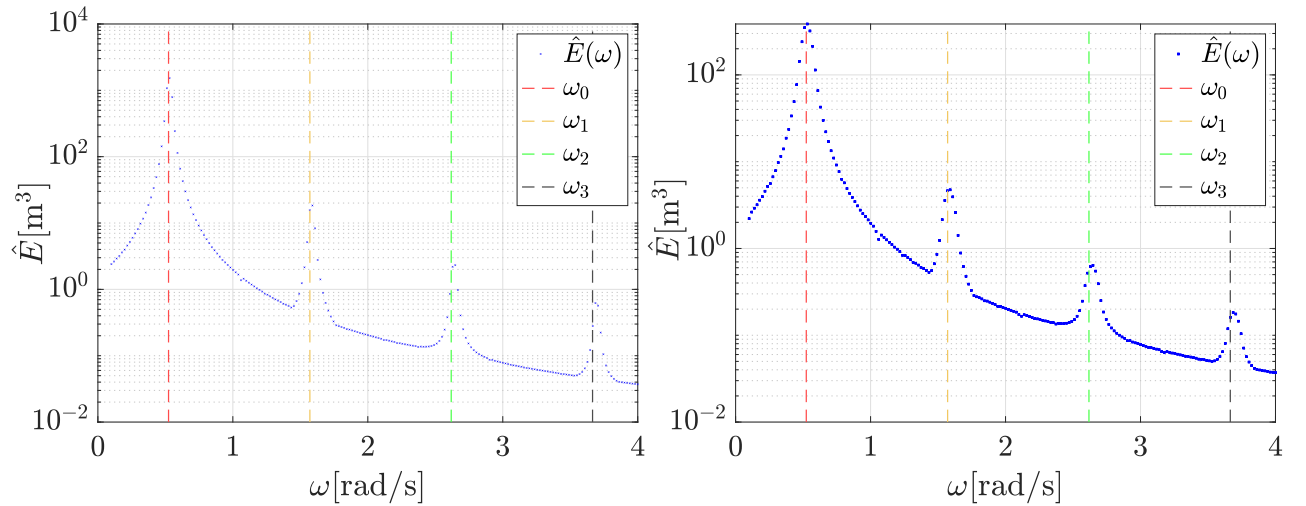
Cette simulation est répétée 200 fois en variant ω entre 0.1 et 4 $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Dans un second temps, une comparaison entre la solution analytique $f_{\text{ana}}(x, t_{fin})$ et la solution numérique $f_{\text{num}}(x, t_{fin})$ est réalisée pour $\omega \approx \omega_n$.

Les conditions aux limites sont les mêmes que dans la sous-section 3.2. Une accélération extérieure $a_e = 0.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ est présente. La condition initiale est au repos et non perturbée.

3.4.1 Maximum d' $E(t)$

La Fig.3 représente \hat{E} en fonction de ω . Sur la Fig.3a on distingue quatre pics pour la grandeur \hat{E} . Les pics surviennent lorsque $\omega \approx \omega_n$ où ω_n est une fréquence propre du système. Ceci est expliqué par le fait que le système est en résonance et donc le mouvement est amplifié. Sachant que $E(t)$ dépend de l'amplitude (voir éq.(11)) lorsque l'amplitude augmente, la grandeur $E(t)$ augmente aussi. Le maximum de \hat{E} apparaît à $\omega_0 = \frac{\pi}{6}$, cette fréquence correspond à celle de l'état fondamental du système.

La Fig.3a permet de mettre en exergue la diminution de la valeur \hat{E} lorsque n augmente. Cette diminution est dû à l'amortissement du système. Dans ce cas de figure, l'importance relative de l'amortissement s'accroît à mesure que s'élève l'ordre des modes. Par définition, l'amortissement est l'absorption de l'énergie des oscillations, par quelque moyen que ce soit. Généralement ce phénomène se traduit par une diminution de l'amplitude des ondes. C'est pourquoi, une diminution de \hat{E} est observée[2]. Il est à présent intéressant de comparer



(a) E_{max} en fonction de ω pour $t_{fin} = 120s$ sur une échelle semi-logarithmique (b) E_{max} en fonction de ω pour $t_{fin} = 60s$ sur une échelle semi-logarithmique

FIGURE 3 – E_{max} en fonction de ω , compris dans une plage allant de $(0.1 - 4)\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

la Fig.3a et la Fig.3b, pour lesquelles les simulations ont respectivement des durées de $t_{fin} = 120s$ et un $t_{fin} = 60s$. Ces deux figures ont exactement la même forme car les fréquences propres sont les mêmes dans les deux situations. Mais, la valeur \hat{E} est plus élevée lorsque $t_{fin} = 120s$. La Fig.4 représente $E(t)[\text{m}^3]$ pour le premier mode propre $\omega_1 = \frac{\pi}{2}(n = 1)$. Elle permet d'illustrer la croissance de $E(t)$ au cours du temps. Cette augmentation au cours du temps est dû à l'excitation des ventres puisque sous une fréquence propre le système est en résonance. Théoriquement, l'amplitude est infini lorsque la fréquence du système correspond à la fréquence propre.

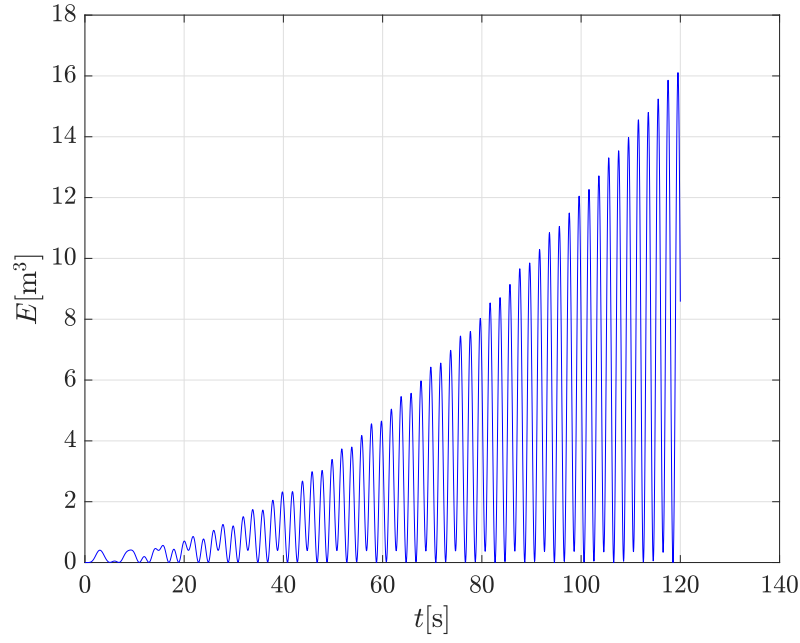
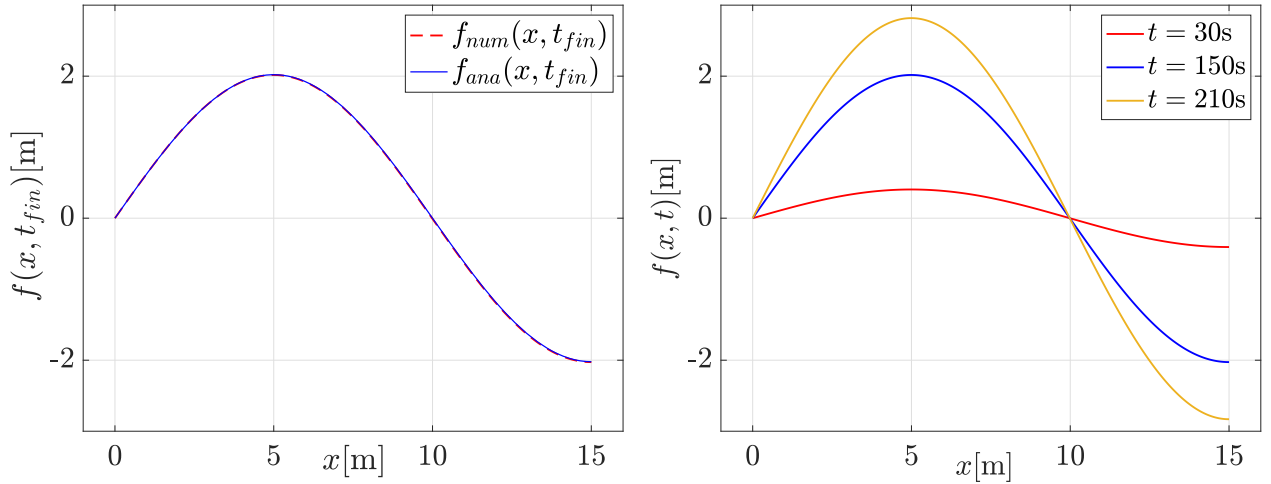


FIGURE 4 – E en fonction du temps pour la fréquence propre $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$

3.4.2 Comparaison entre $f_{\text{num}}(x, t_{\text{fin}})$ et $f_{\text{ana}}(x, t_{\text{fin}})$



(a) Comparaison entre la solution analytique $f_{\text{ana}}(x, t_{\text{fin}})$ et la solution numérique $f_{\text{num}}(x, t_{\text{fin}})$ à $t_{\text{fin}} = 150$.

(b) Position de l'onde a différents t_{fin}

FIGURE 5 – Étude de la position de l'onde pour le premier mode propre

Dans cette partie, le nombre de point de maillage est $N = 1000$. La Fig.5 représente la superposition de la solution numérique et de la solution analytique de $f(x, t)$ au temps

$t = t_{fin}$. La solution analytique doit être à nouveau calculée puisque au contraire de la section 3.2 l'accélération extérieure n'est pas nulle, $f_{ana}(x, t_{fin})$ est donnée par :

$$f_{ana}(x, t_{fin}) = f_n(x) = A \cdot \sin(k_n x) + \frac{a_e}{\omega_n^2} \sin(\omega_n t_{fin}) \quad (25)$$

où A est une constante arbitraire qui représente l'amplitude. Le temps finale correspond à plusieurs dizaine de période de transit de l'onde. Par conséquent le terme $\sin(\omega_n t_{fin})$ est toujours nul. La solution analytique étudiée correspond donc à l'éq.(21).

Le mode propre étudié est le premier mode propre soit $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$. On observe sur la Fig.5a que la solution analytique suit la même forme que la solution numérique. L'amplitude $A = -2.026\text{m}$ de l'éq.(25) a été choisi pour correspondre à l'amplitude numérique. Néanmoins, ce choix n'impacte pas la légitimité de la comparaison. En effet, sachant que l'amplitude varie en fonction du temps seul le fait que la forme soit respectée est important. La Fig.5b illustre ce phénomène. La Fig.5b représente $f_{num}(x, t_{fin})$ pour différents t_{fin} pour ω_1 . On remarque que les noeuds et le ventre de l'onde coïncident mais que l'amplitude évolue en fonction du temps.

4 Application à la vague de Belharra

En eau peu profonde, la vitesse de la vague peut être approximée par :

$$u(x) = \sqrt{gh(x)} \quad (26)$$

où $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ et $h(x)[\text{m}]$ est la profondeur de l'eau. Le haut-fond de Belharra peut être représenté par le profil suivant :

$$h(x) = h_L + (h_R - h_L) \frac{x - x_L}{x_R - x_L} - h_{hf} e^{-\left(\frac{x - x_{hf}}{\sigma_{hf}}\right)^4} \quad (27)$$

Où $h_L[\text{m}]$ est la profondeur maximale du fond marin et $h_R[\text{m}]$ la profondeur minimale. $x_L[\text{m}]$ et $x_R[\text{m}]$ sont les limites gauche et droite du fond marin respectivement. $h_{hf}[\text{m}]$, $x_{hf}[\text{m}]$ et $\sigma_{hf}[\text{m}]$ représentent la profondeur caractéristique, la position du maximum et l'ouverture de la bosse du fond marin respectivement. Ce profil peut être illustré par la Fig.6.

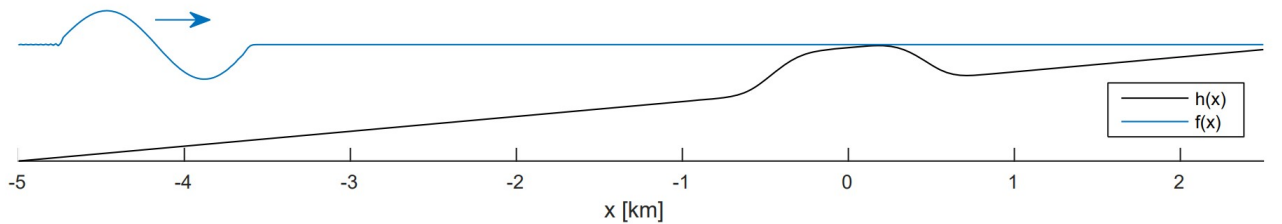


FIGURE 6 – Profile du fond de l'océan. Tirée de [3]

Les paramètres caractérisant le fond marin sont recensés dans le Tab.1.

L'évolution d'une vague de 2m d'amplitude arrivant à gauche et d'une période de 15s est simulée. Le condition au bord gauche est du type impulsion. Pour rappel, c'est un cas particulier de la condition harmonique éq.(10) ($x_e = x_L$). Concernant le bord droit, une condition du type sortie de l'onde est employée. Les simulations ont été effectuées avec une résolution spatiale élevée, le nombre de node du maillage spatial est de 5000. Le paramètre CFL est de $\beta_{CFL} = 1.0$.

h_L [m]	h_R [m]	h_{hf} [m]	x_L [km]	x_R [km]	x_{hf} [m]	σ_{hf} [m]
750	28	230	-5	2.5	0	500

TABLE 1 – Paramètres caractérisant le fond marin

4.1 Hauteur atteinte par la vague

Le but de cette partie est de trouver numériquement quelle est la hauteur atteinte par la vague dans les cas A , B et C et de comparer les résultats. La Fig.7 représentent l'amplitude maximale¹ de la vague pour les différentes équations d'évolution (éq.(1), éq.(2), éq.(3)). Comme attendu à $x = -5000$ m, l'amplitude est la même pour chaque équation $A = 2$ m. En effet, cela correspond à l'amplitude initiale imposée au programme. Puis, les courbes évoluent de manière similaire jusqu'au passage du haut-fond en $x_{hf} = 0$ m. Dans les cas B et C l'amplitude la vague est maximale après le passage du haut-fond. L'amplitude de la vague en $x_{hf} = 0$ m correspondant à l'éq.(3) vaut $A_C = 17.992$ m. Elle est environ 4 fois plus grande que celle correspondant à l'éq.(2) valant $A_B = 4.229$ m. Le comportement de la vague représentant la perturbation A est différent. En effet, au passage du haut-fond l'amplitude est minimale de l'ordre de 0.84m. On constate donc que la vague se comporte de manière complètement différente à l'approche du haut-fond selon l'équation utilisée.

1. Lorsque l'on parle ici d'amplitude maximale cela signifie que pour chaque x_i le maximum de $f(x_i, t)$ au cours du temps est représenté.

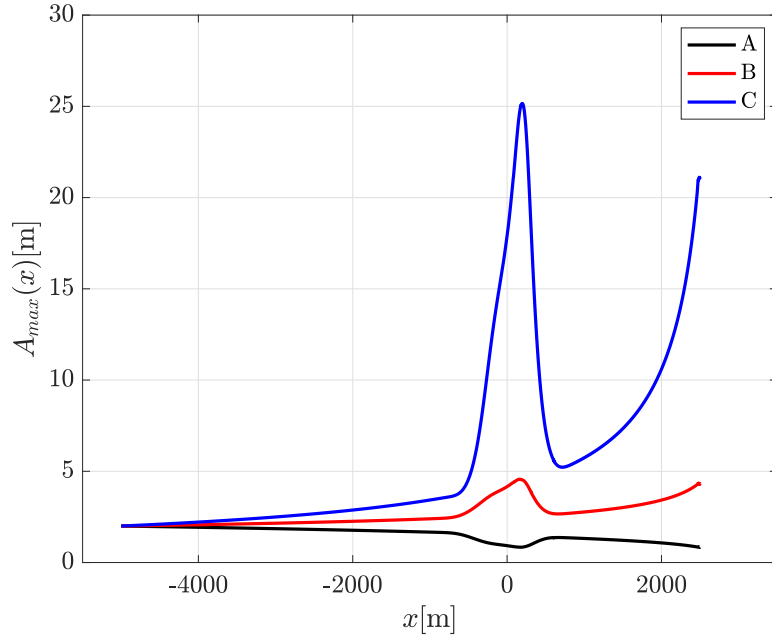


FIGURE 7 – Amplitude maximale de la vague pour chaque x_i pour le cas A , le B et le C

4.2 Vérification que la vitesse de la vague est donnée par $\sqrt{g \cdot h(x)}$

Par le cours, on a vu que pour les ondes en eaux peu profondes, la vitesse de propagation des ondes est donnée par [eq.\(26\)](#). Les différentes hypothèses physiques pour arriver à ce résultat sont les suivantes :

- Le fluide est considéré comme parfait et incompressible.
- On travaille en une dimension.
- Limite des eaux peu profondes : $h(x) \ll \lambda$ ou $h(x)$ est la profondeur et λ la longueur d'onde.
- Les petites perturbations sont linéarisées.

Ensuite, en partant de de l'équation du mouvement pour une particule fluide sur la surface de l'eau et de l'équation de continuité exprimant la conservation de la masse au cours du mouvement, on finit par obtenir que la vitesse de propagation des ondes en eaux peu profondes est donnée par l'[eq.\(26\)](#). Le développement est donné dans l'Annexe E des notes de cours [\[1\]](#).

Le but de cette sous-section est de vérifier que la vitesse de propagation est bien donnée par l'[eq.\(26\)](#) dans les cas A , B et C . Pour calculer numériquement la vitesse de propagation (et l'amplitude voir [Section 4.3](#)), on trouve d'abord le premier temps pour lequel f est maximum à $x = x_i$ fixé pour tous les points de de maillage spatial. Cela permet d'obtenir le mouvement de la crête de la vague. Comme le système est discrétisé, ce maximum n'est qu'une approximation du maximum effectif. Donc en effectuant une interpolation quadratique de $f(x_i, t)$

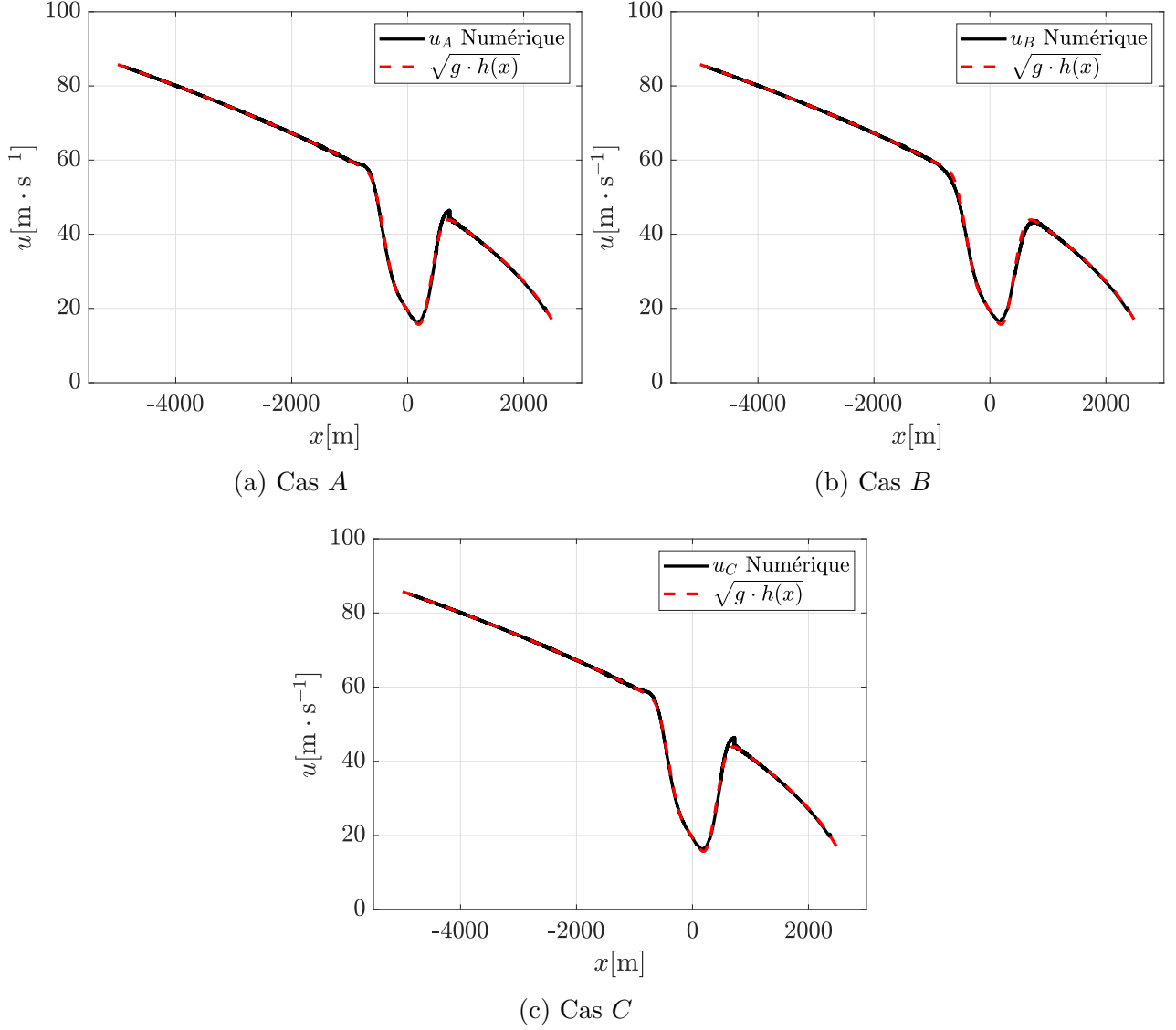


FIGURE 8 – Comparaison entre la solution analytique pour la vitesse donnée par l'éq.(26) et la solution numérique pour les cas A , B et C .

à $x = x_i$ fixé au voisinage du maximum sur la grille temporelle, on obtient le maximum effectif et la valeur du temps pour lequel ce maximum est atteint. Un ensemble de valeur $(x_i, t_{crete,i})$ est alors obtenu.

La vitesse u_j $j = A, B, C$ est ensuite obtenue par différences finies :

$$u_j = \frac{(x_{i+k} - x_{i-k})}{(t_{crete,i+k} - t_{crete,i-k})} \quad (28)$$

où $k \geq 1$ est un nombre entier choisi pour minimiser les oscillations de u_j .

La Fig.8 sert à comparer la vitesse de propagation analytique donnée par l'éq.(26) et la vitesse trouvée par la méthode expliquée ci-dessus. Les Fig.8a, 8b et 8c montrent une superposition

de la solution analytique et numérique pour la vitesse dans les cas des équations A , B et C respectivement. Ces figures montrent que, dans les trois cas, la vitesse de propagation de la vague est bien donnée par l'éq.(26) car les courbes correspondant à la solution analytique et numérique se superposent bien. Pour faire en sorte que les courbes se superposent mieux, il faudrait encore augmenter les nombres de noeuds de maillages spatiale et temporel.

4.3 Vérification des facteurs de proportionnalités reliés à l'amplitude

Le but de cette sous-section est de vérifier que l'amplitude de la vague est proportionnelle à $h(x)^{\frac{1}{4}}$ dans le cas A , $h(x)^{-\frac{1}{4}}$ dans le cas B et $h(x)^{-\frac{3}{4}}$ dans le cas C .

Afin de calculer numériquement l'amplitude, on procède comme expliqué dans la Section 4.2. Une fois que l'ensemble de valeur $(x_i, t_{crete,i})$ est obtenu, il suffit de calculer $f(x_i, t_{crete,i})$ qui est le maximum effectif de f pour $x = x_i$ fixé. Cela donne l'amplitude.

La Fig.9 permet de comparer la solution analytique pour l'amplitude avec la solution numérique pour les cas A , B , C . Dans chacun des cas la solution numérique doit être proportionnelle à la solution analytique donnée². La relation de proportionnalité est trouvée en divisant en chaque x_i la valeur de la solution numérique par la valeur de la solution analytique. Le résultats de cette division est noté p_{x_i} . Le coefficient de proportionnalité p_X est donc calculé en établissant une moyenne des p_{x_i} jusqu'à $x_i \approx 1000\text{m}$.³

La Fig.9a représente la superposition de la solution analytique et numérique de l'amplitude dans le cas A . La solution numérique est comparée avec la solution analytique donnée par $p_A \cdot h^{1/4}(x)$, le coefficient de proportionnalité vaut $p_A = 0.382$. On observe que les deux solutions ont la même forme mais ne se confondent pas. En effet, après le pic d'amplitude la solution numérique est plus faible que la solution analytique.

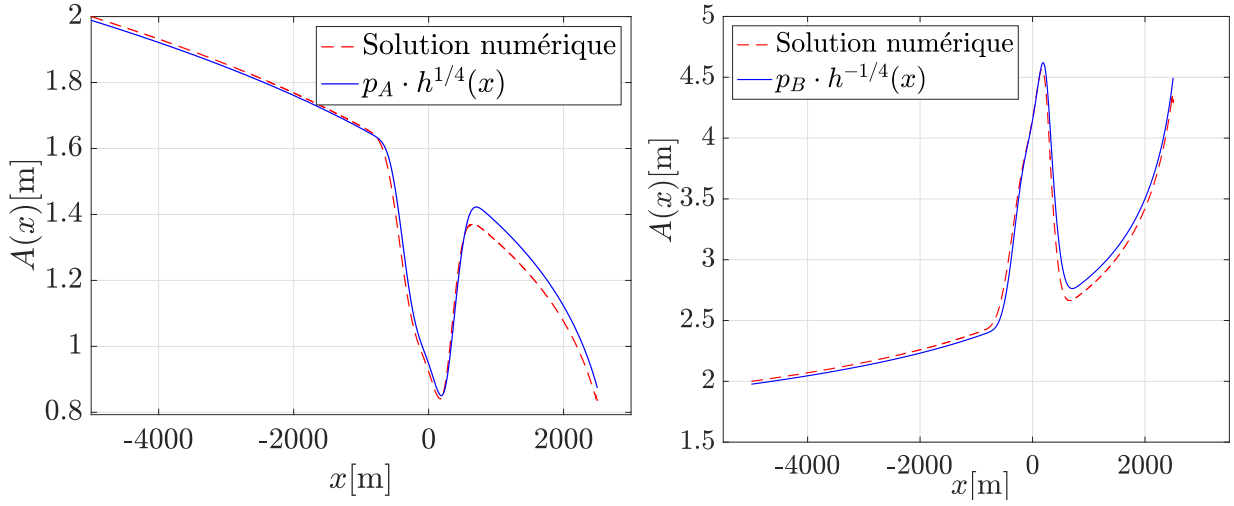
Sur la Fig.9b une comparaison est faite entre la solution numérique de l'équation B et l'équation $p_B \cdot h^{-1/4}(x)$ où $p_B = 10.34$. Comme dans le cas A les deux solutions ne sont pas parfaitement identiques. A nouveau, l'amplitude de la solution numérique est plus faible après le pic. La différence entre les deux courbes est néanmoins plus petite que dans le cas A .

Sur la Fig.9c une comparaison est réalisée entre représente la solution numérique dans le cas C et l'équation analytique donnée par $p_C \cdot h^{-3/4}(x)$ où $p_C = 281.87$. On remarque que la solution analytique et la solution numérique se superposent parfaitement. Bien que la superposition des deux courbes ne soit pas parfaite nous pouvons conclure que dans chacun des cas la solution numérique vérifie la solution analytique.

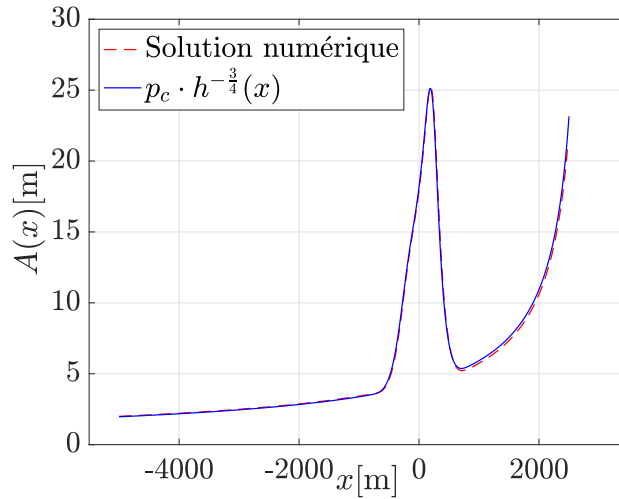
2. On parle ici de solution numérique et de solution analytique. Mais il est important de rappeler que ces deux solutions sont approximatives

3. La moyenne est établit uniquement jusqu'à $x_i \approx 1000\text{m}$ puisque la valeur des p_{x_i} est plus ou moins constante et varie ensuite.

Après avoir étudié les différents comportements de la vague dans le cas A , B et C il est intéressant de discuter de la validité des modèles. Le modèle A et le modèle C ne sont pas physiques car ils ne conservent pas la masse. Au contraire, l'éq.(2) a été obtenue à partir de la 2ème loi de Newton pour une particule fluide à la surface de l'eau et de l'équation de continuité exprimant la conservation de la masse. On peut donc conclure que seul l'équation B est un modèle valable pour approximer la vague Belharra.



(a) Cas A avec comme solution analytique $p_A \cdot h^{\frac{1}{4}}$ où p_A correspond au coefficient de proportionnalité
(b) Cas B avec comme solution analytique $p_B \cdot h^{-\frac{1}{4}}$ où p_B correspond au coefficient de proportionnalité



(c) Cas C avec comme solution analytique $p_C \cdot h^{-\frac{3}{4}}$ où p_C correspond au coefficient de proportionnalité

FIGURE 9 – Comparaison entre la solution analytique pour l'amplitude et la solution numérique pour les cas A, B et C

4.4 Comportement de la vague pour des bas-fonds de plus en plus raides et comparaison avec la solution WKB

Dans cette partie, il s'agit d'étudier ce qu'il se passe pour des bas fonds de plus en plus raides dans le cas de l'éq.(2) et de comparer la solution WKB avec la solution numérique. L'analyse WKB du schéma B est réalisée dans la sous-section 5.2. La solution WKB est donnée par :

$$A(x) = \frac{A_0}{\sqrt{u(x)}} \quad (29)$$

où $A_0 = A(0)\sqrt{u(0)}$ est une constante, $A(0) = 2\text{m}$ et $u(0) \approx 85.78\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ correspondent à la l'amplitude et la vitesse initiale de la vague.

La Fig.10 permet de comparer la solution analytique WKB avec la solution numérique pour trois différentes valeurs de $\sigma_{hf} = (700, 80, 1)\text{m}$. Globalement, on observe que plus la valeur de σ_{hf} diminue plus l'amplitude de la vague et la largeur du pic diminuent. Cette diminution de l'amplitude était attendue. En effet, par l'éq.(29) on a que $A(x) = \frac{A_0}{\sqrt{gh(x)}}$. De plus, $h(x)$ dépend de σ_{hf} par l'éq.(27) et diminue avec l'augmentation de σ_{hf} .

On observe des différences majeures entre les Fig.10a, 10b et 10c. Dans le cas de la Fig.10a, les deux courbes ne se superposent pas parfaitement. Néanmoins, on peut affirmer qu'il y a un très bon accord entre l'approximation analytique (solution WKB) et l'approximation numérique. Ce qui n'est plus le cas sur la Fig.10b. En effet, les deux courbes se superposent parfaitement avant le pic mais l'amplitude de la solution numérique est plus faible au pic. L'amplitude de la solution numérique diminue drastiquement après le pic. Cette différence est difficile à expliquer. La solution WKB semble être plus correct que la solution numérique, l'amplitude de la vague a diminué par rapport au cas précédent mais la courbe a la même forme. Il est important de rappeler que ces deux solutions sont approximatives et que la solution analytique ne représente pas la trajectoire exacte. L'analyse de la Fig.10c montre que lorsque $\sigma_{hf} = 1\text{m}$, on se trouve dans un cas limite. Le bas-fond est trop raide pour observer une solution numérique correct, l'amplitude est minimale en $x_{hf} = 0\text{m}$. Au contraire l'amplitude de la vague pour la solution WKB est toujours maximal en $x_{hf} = 0\text{m}$. L'approximation analytique et l'approximation numérique ne sont pas en accord dans ce cas.

5 Facultatif

5.1 Effet de β_{CFL} sur la stabilité du schéma

Le but de ce premier travail facultatif est d'étudier l'effet du paramètre $\beta_{CFL} = u \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$ (u est la vitesse de propagation de l'onde) sur la stabilité du schéma. Il a été vu en cours que, pour $\beta_{CFL} \leq 1$, le schéma numérique à trois niveaux est stable pour toute longueur d'onde [1].

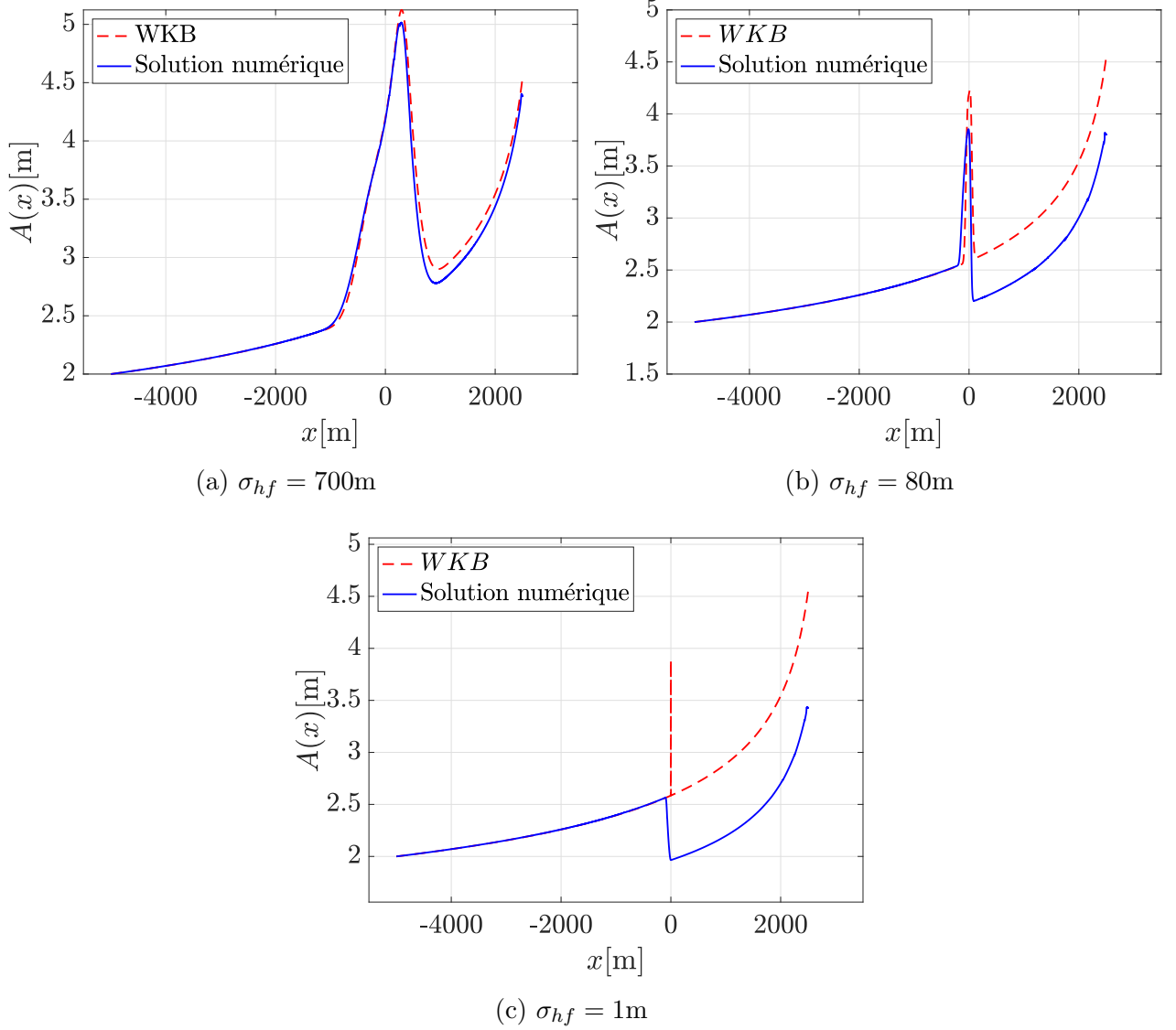


FIGURE 10 – Comparaison entre la solution analytique WKB et la solution numérique de l’amplitude de la vague pour différents σ_{hf}

Afin de vérifier cela numériquement, 50 simulations ont été effectuées dans les mêmes conditions que dans la section 3 pour différentes valeurs de β_{CFL} . On a des conditions de bords harmonique à gauche éq.(10) ($x_e = x_L$) et fixe à droite éq.(8) ($x_e = x_R$). Le nombre de noeuds du maillage est de $N = 500$. Des simulations de très courte durée ($t_{fin} = 2\text{s}$) ont été effectuées. La Fig.11 représente le maximum de la quantité $E(t)$ (définie en section 2.3) au cours de la simulation en fonction du paramètre β_{CFL} . La quantité $\gamma = \max_{t \in [0, t_{fin}]} E(t) [\text{m}^3]$ est donc représentée sur l’axe des ordonnées. Cette figure permet d’observer que la condition de stabilité trouvée analytiquement est très bien respectée numériquement. La quantité $E(t)$ est bien conservée lorsque $\beta_{CFL} \leq 1$. Lorsque $\beta_{CFL} > 1$, le maximum de cette quantité croît exponentiellement sur une très courte simulation et prend ainsi des valeurs n’ayant aucun sens physiquement parlant.

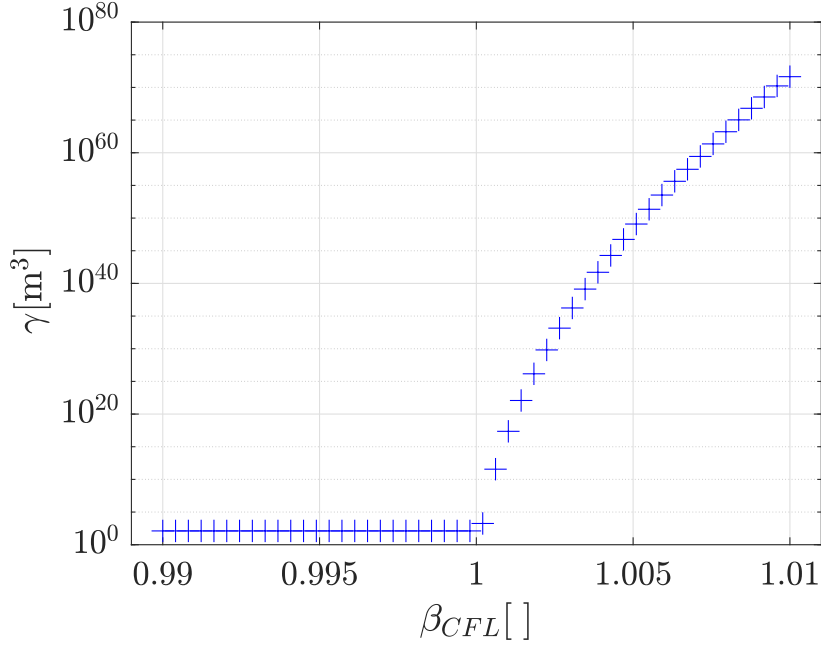


FIGURE 11 – Maximum de la quantité $E(t)$ en fonction du paramètre β_{CFL} sur une échelle semi-logarithmique pour l'axe y . γ représente donc le maximum de l'énergie pour une simulation : $\gamma = \max_{t \in [0, t_{fin}]} E(t) [\text{m}^3]$.

5.2 Analyse WKB des cas A , B et C

Comme second travail facultatif, l'analyse WKB des cas A , B et C est effectuée. La méthode WKB est une méthode permettant d'approximer les solutions d'équations différentielles linéaires ou du deuxième ordre. Le principe de cette méthode consiste à résoudre l'équation ordre par ordre. Le paramètre d'ordre dépend de la vitesse de variation de la vitesse de variation des termes.

On considère des ondes sinusoïdales du temps $f(x, t) = \hat{f}(x)e^{-i\omega t}$. On fait l'ansatz suivant :

$$\hat{f}(x) = A(x)e^{iS(x)} \quad (30)$$

Où $A(x)$ est l'amplitude et $S(x)$ est la phase. Les équations sont résolues par approximations successives, on définit le paramètre d'ordre ϵ . Les différents termes dans l'équation seront classés selon leur ordre en ϵ . Pour les règles de calculs concernant les ordres, voir [1] (Section 4.2.4). Pour plus de clarté, on ne note plus la dépendance en x des fonctions et les dérivées selon x seront dénotées par des $'$. On fait les hypothèses suivantes :

- A est une fonction lentement variable : $A \sim \epsilon^0$
- u^2 est une fonction lentement variable : $u^2 \sim \epsilon^0$
- S est une fonction rapidement variable : $S' \sim \epsilon^0$

Il faut maintenant résoudre cas par cas pour chaque équation. On explicite avant les dérivées qui seront utiles :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= -\omega^2 A e^{i(S-\omega t)} \\
f' &= (A' + iAS') e^{i(S-\omega t)} \\
f'' &= (A'' + 2iA'S' + iAS'' - A(S')^2) e^{i(S-\omega t)}
\end{aligned}$$

Cas A : La substitution de l'ansatz dans l'éq.(1) donne :

$$-\omega^2 A = u^2(A'' + 2iA'S' + iAS'' - A(S')^2) \quad (31)$$

On résout maintenant ordre par ordre en utilisant les règles de calculs pour les ordres et les hypothèses évoquées ci-dessus. On trouve à l'ordre 0 :

$$S' = \frac{\omega}{u} \quad (32)$$

En substituant cette solution dans l'équation donnée par l'ordre 1, on a :

$$2A'u - Au' = 0 \quad (33)$$

La résolution de l'équation différentielle éq.(33) puis la substitution de l'expression pour la vitesse pour le cas des vagues dans des eaux peu profondes éq.(26) donne :

$$A(x) = A_0 h(x)^{\frac{1}{4}} \quad (34)$$

Cas B : En injectant à nouveau l'ansatz dans l'éq.(2). On trouve :

$$-\omega^2 A = u^2(A'' + 2iA'S' + iAS'' - A(S')^2) + (u^2)'(A' + iAS') \quad (35)$$

Les étapes effectuées pour le cas A sont répétées. On trouve à l'ordre 0 :

$$S' = \frac{\omega}{u} \quad (36)$$

A nouveau, en substituant cette solution dans l'équation donnée par l'ordre 1, on a :

$$2A'u + Au' = 0 \quad (37)$$

La résolution de l'équation différentielle éq.(37) puis la même substitution pour la vitesse que dans le cas A donne :

$$A(x) = A_0 h(x)^{-\frac{1}{4}} \quad (38)$$

Cas C : La substitution de l'ansatz dans l'éq.(3) donne :

$$-\omega^2 A = u^2(A'' + 2iA'S' + iAS'' - A(S')^2) + 2(u^2)'(A' + iAS') + (u^2)''A \quad (39)$$

En résolvant ordre par ordre. On trouve à l'ordre 0 :

$$S' = \frac{\omega}{u} \quad (40)$$

En substituant cette solution dans l'équation donnée par l'ordre 1, on a :

$$2uA' + 3Au' = 0 \quad (41)$$

En résolvant l'équation différentielle éq.(41) et en substituant l'expression de vitesse pour les vagues en eaux peu profondes on obtient la solution :

$$A(x) = A_0 h(x)^{-\frac{3}{4}} \quad (42)$$

Cet effort supplémentaire permet de comprendre analytiquement pourquoi on a dû vérifier dans la Section 4.3 que l'amplitude de la vague est proportionnelle à $h(x)^{\frac{1}{4}}$ dans le cas *A*, $h(x)^{-\frac{1}{4}}$ dans le cas *B* et $h(x)^{-\frac{3}{4}}$ dans le cas *C*. Il a pu être vu que les approximations analytiques et numériques sont en accords. Ces approximations étant de nature différente, leur accord permet de vérifier à la fois le schéma numérique et l'approximation analytique.

6 Conclusion

Pour conclure, ce travail a été composé en deux parties majeures. La première partie a consisté en une étude d'un cas physique "scolaire" de la propagation d'ondes à vitesse constante. Les phénomènes de réflexions aux bords d'une onde sous différentes conditions ont été observés. Puis, les solutions analytiques pour les fréquences propres et les modes propres du système ont été calculés. Ainsi, une étude de convergence sur l'erreur entre la solution analytique et la solution numérique a permis de vérifier que le schéma explicite à trois niveaux utilisé converge à l'ordre 2 dans ce cas. Pour finir, l'excitation résonnante des modes propres a été étudiée. Il a été observé que la grandeur $E(t)$ est maximale lorsque ω correspond à une fréquence propre et que la valeur de $E(t)$ diminue avec l'augmentation de n .

La seconde partie a consisté à étudier la vague de Belharra. Pour ce faire, trois équations régissant l'évolution d'une perturbation $f(x, t)$ ont été analysées et comparées. Nous avons pu vérifier que la solution numérique pour l'amplitude et la solution analytique WKB coïncide. On a pu en conclure que l'équation *B* est celle qui permet le mieux de représenter le comportement des vagues en eaux peu profondes. Pour finir, dans le cas de l'équation *B* le comportement de la solution numérique pour des bas-fonds de plus en plus raides a été observé. On a pu constater que la solution numérique et l'approximation analytique WKB coïncident pour des valeurs élevées de σ_{hf} mais divergent pour des valeurs faibles de $\sigma_{hf} \leq 100$.

Dans un travail supplémentaire une étude concernant l'effet du paramètre β_{CFL} sur la stabilité du schéma a permis de constater que la condition de stabilité calculée analytiquement

est respectée numériquement. Pour finir, l'analyse WKB a été réalisée pour les équations A, B et C . Ceci a permis de comprendre l'origine des relations de proportionnalité entre $A(x)$ et $h(x)$ pour les trois schémas.

7 Annexe

Références

- [1] Physique Numérique I-II, Laurent Villars, EPFL, 26 août 2019, Version 19.1
- [2] <https://derangedphysiology.com/main/cicm-primary-exam/required-reading/cardiovascular-system/Chapter%207.3.4/resonance-damping-and-frequency-response>
- [3] Énoncé de l'exercice 7, Physique Numérique II, Semestre de printemps 2020, Laurent Villars