

Rapport de physique numérique : Pluie de météores

Chloé Mondon, Jonas Gruetter
chloe.mondon@epfl.ch, jonas.grutter@epfl.ch

17 août 2021

Table des matières

1	Introduction	1
2	Calculs analytiques	2
2.1	Système différentiel	2
2.2	Solutions analytiques et vitesse d'impact au sol	2
3	Simulations et Analyses	3
3.1	Sans force de trainée ($C_T = 0$)	3
3.2	Avec force de trainée ($C_T = 0.2$)	4
3.3	Avec Abrasion ($\kappa = 6.25 \times 10^{-8}$)	4
4	Discussion et Conclusion	5

1 Introduction

Dans ce rapport, nous étudions l'évolution de la masse, du rayon, de la vitesse et de l'accélération d'un météore sphérique lorsqu'il chute dans l'atmosphère terrestre. La chute est supposée verticale et la courbure de la terre est négligée.

Les différents paramètres utilisés dans ce problème sont :

m_0	100	kg	Masse initiale du météore
r		m	Rayon du météore
v_0	1×10^4	ms^{-1}	Vitesse initiale du météore
ρ_M	2×10^3	kg m^{-3}	Densité du météore
C_T	0.2		Coefficient de trainée
ρ_0	1.3	kgm^{-3}	Densité utile au calcul de la densité de l'air
κ	6.25×10^{-8}	kgJ^{-1}	Coefficient d'abrasion

Nous calculons tout d'abord la valeur analytique de la vitesse d'impact au sol, puis nous approchons par la suite cette valeur par un schéma numérique simple, le schéma d'Euler. Les approximation numériques sont calculées avec $C_T = 0$, $C_T = 0.2$, $C_T = 0.2$ et $\kappa = 6.25 \times 10^{-8} \text{kgJ}^{-1}$.

2 Calculs analytiques

Le météore subit deux forces différentes :

- La force de gravitation : $\mathbf{F}_t = -mg \cdot \vec{e}_z$
- La force de traînée aérodynamique : $\mathbf{F}_p = -\left(\frac{1}{2}\right)\rho_{air}\pi r^2 C_T v^2 \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$
Où $\rho_{air}(z) = \rho_0 \exp\left(\frac{-z}{\lambda}\right)$

2.1 Système différentiel

La deuxième loi de Newton nous donne le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{dz}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dr}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -g + \frac{3}{8}\rho_{air}C_T v^2 \\ -\frac{1}{8\rho_M}\kappa\rho_{air}C_T \|v\|^3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

2.2 Solutions analytiques et vitesse d'impact au sol

Dans le cas où le coefficient de traînée est nul ($C_T = 0$), le système d'équation est :

$$\begin{pmatrix} \frac{dz}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dr}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Pour calculer la vitesse d'impact au sol, on utilise la conservation de l'énergie mécanique. On sait qu'ici $E_{mec} = E_{cin} + E_{pot}$ est une constante du mouvement. on a donc,

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 + \frac{1}{2}mv_f^2 \Rightarrow v_f = \pm\sqrt{2gh_0 + v_0^2} \quad (3)$$

Ce qui nous mène à $v_f = 10097.623 \text{ms}^{-1}$

3 Simulations et Analyses

Nous utilisons la méthode d'Euler, pour calculer numériquement les valeurs de la masse $m(t)$, la position $z(t)$ et de la vitesse $v(t)$.

Etablissons le développement limité de $f(t + \Delta(t))$ lorsque $\Delta(t)$ tend vers 0 à l'ordre 1 :

$$f(t + \Delta(t)) = f(t) + \frac{df}{dt}(t)\Delta(t) + O(\Delta(t)) \quad (4)$$

Et donc : $f(t + \Delta(t)) \approx f(t) + \frac{df}{dt}(t)\Delta(t)$

En posant $t_i = i\Delta(t)$, $0 \leq i \leq N$, on obtient le schéma numérique d'Euler :

$$\left(f(t_{i+1}) \approx f(t_i) + \frac{df}{dt}(t_i)\Delta(t) \right) \quad (5)$$

3.1 Sans force de trainée ($C_T = 0$)

La vitesse numérique d'impact est $V_{numérique} = -1.00976e + 04$. Ce résultat est similaire à la vitesse analytique. En effet, l'erreur absolue est de : $V_{numérique} - v_{analytique} = 0.4m^{-1}$. L'étude de convergence est donnée par le graphique 1.

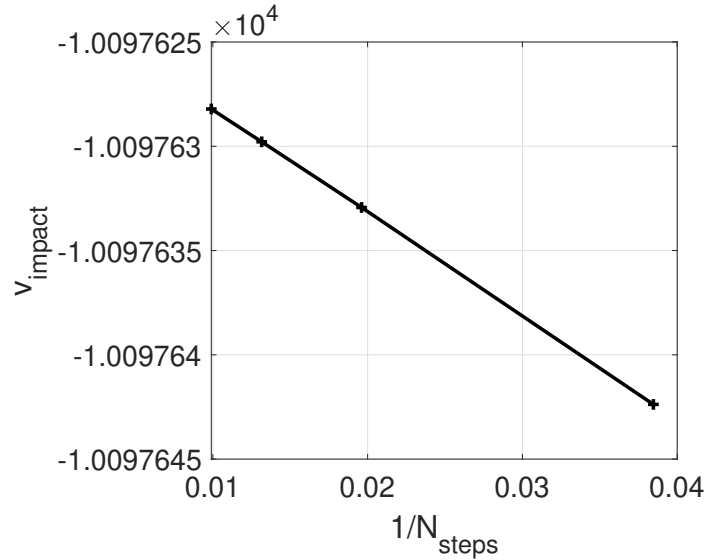


FIGURE 1 – Graphique représentant la vitesse d'impact numérique en fonction de $\Delta(t)$ lorsque $C_T = 0$. Il permet de réaliser une étude de convergence en $\Delta(t)$

Sachant que l'échelle de l'axe des abscisses est en Δt_1 et que la courbe est linéaire, l'ordre de convergence du schéma d'Euler est de 1.

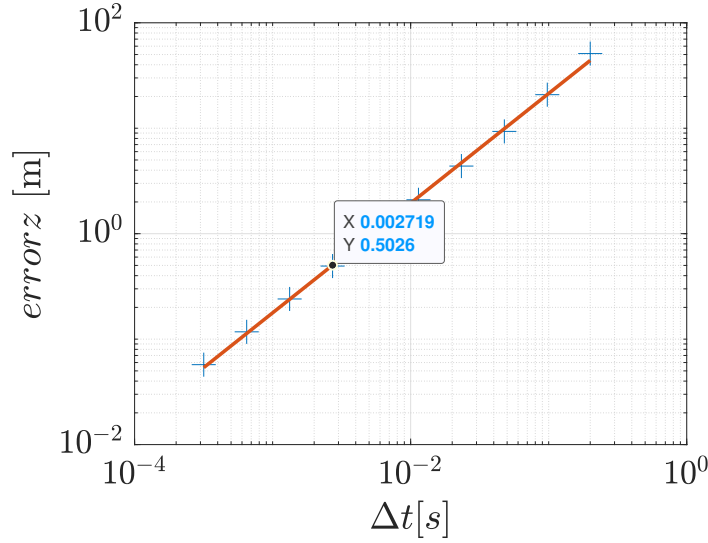


FIGURE 2 – Graphique représentant la vitesse d’impact numérique en fonction de $\Delta(t)$ lorsque $C_T = 0.2$. Il permet de réaliser une étude de convergence en $\Delta(t)$

3.2 Avec force de trainée ($C_T = 0.2$)

Lorsqu’on introduit un coefficient de trainée de 0.2 ($C_T = 0.2$). La vitesse numérique d’impact au sol est $V_{numérique} = -1.00976e + 04 \text{ms}^{-1}$.

Pour les mêmes raisons que pour la figure 1, l’ordre de convergence du schéma d’Euler est de 1.

3.3 Avec Abrasion ($\text{kappa} = 6.25 \times 10^{-8}$)

En tenant compte de l’abrasion ainsi que du coefficient de trainée ($C_T = 0.2$), la vitesse numérique est $V_{numérique} = -2.0546 \times 10^2 \text{ms}^{-1}$. La masse du météore est $mf = 7.589 \text{kg}$.

A présent, selon les conditions précédentes on inclut dans le programme le calcul de la puissance de la force de trainée aérodynamique.

Pour que le météore ait une masse de 1kg en arrivant au sol, sa masse initiale doit être de $m_0 = 26.38 \text{kg}$. La vitesse d’impact est alors de $V_{numérique} = -1.0233 \times 10^2 \text{ms}^{-1}$.

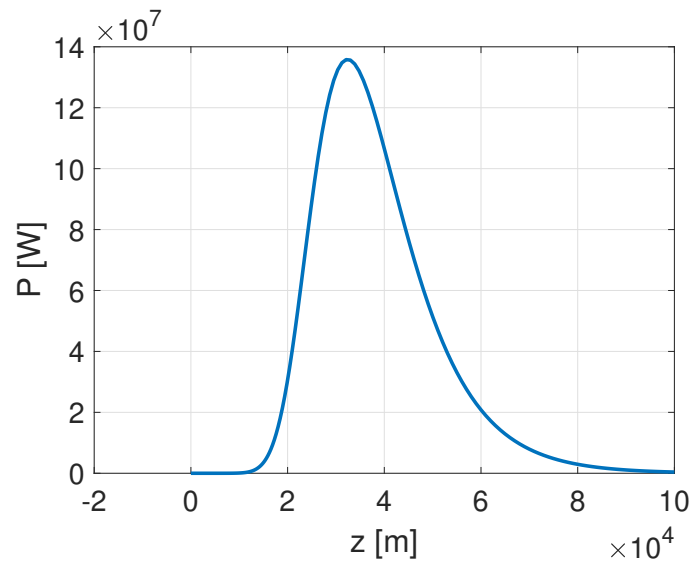


FIGURE 3 – Puissance de la force de traînée aérodynamique en fonction de l'altitude

4 Discussion et Conclusion

On remarque une nette diminution de la vitesse d'impact au sol selon les conditions évaluées. On constate donc que la force de traînée et le coefficient d'abrasion joue un rôle important dans la chute du métore.

Ce Tp nous a permis de mettre en application et de comprendre le schéma d'Euler.