

# Physique Numérique - Exercice 6

## Électrostatique : cylindre avec diélectrique variable et charges libres. Éléments finis

Jonas Gruetter, Chloé Mondon  
[jonas.grutter@epfl.ch](mailto:jonas.grutter@epfl.ch), [chloe.mondon@epfl.ch](mailto:chloe.mondon@epfl.ch)

17 août 2021

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Équation différentielle et forme variationnelle</b>	<b>2</b>
2.1	Équation différentielle pour le potentiel $\phi(\vec{x})$	2
2.2	Forme variationnelle	3
2.3	Forme variationnelle dans le cas d'un cylindre	4
<b>3</b>	<b>Éléments finis</b>	<b>4</b>
3.1	Écriture des éléments de la matrice et du membre de droite	4
3.2	Programmation	6
3.2.1	Implémentation de la matrice A et du vecteur $\vec{b}$ (membre de droite)	6
3.2.2	Implémentation du champs électrique $\vec{E}_r$ et du champ de déplacement $\vec{D}_r$	8
3.3	Cas trivial	8
3.3.1	Solution analytique	9
3.3.2	Test de l'algorithme	10
3.3.3	Etude de convergence	11
3.4	Cas non-trivial	12
3.4.1	Solution numérique pour $\phi(r)$ et $E_r(r)$	13
3.4.2	Convergence de $\phi(r=b)$ avec $N_2$ proportionnel à $N_1$	13
3.4.3	Vérification de $\text{div}(\vec{D})(x) = \rho_{lib}(\vec{x})$ et calcul de la densité des charges de polarisation $\rho_{pol}(\vec{x})$	15
<b>4</b>	<b>Facultatif</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Annexe</b>	<b>19</b>

# 1 Introduction

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement des charges dans un cylindre à diélectrique variable. On va d'abord considérer un diélectrique occupant un volume  $\Omega$ , avec un bord  $\partial\Omega$  au potentiel  $V_0$  donné. Le milieu est de constante diélectrique variable  $\epsilon_r(\vec{x})$  et contient des charges d'espace libres  $\rho_{libre}(\vec{x})$ . La première partie de ce rapport consiste à étudier l'aspect analytique de l'évolution d'une charge dans le domaine. L'équation différentielle de son potentiel  $\phi(\vec{x})$  ainsi que sa forme variationnelle seront données. Cette forme variationnelle sera encore explicitée dans le cas d'un cylindre de rayon  $R$ .

Ensuite, pour la deuxième partie de l'exercice, on considère notre domaine comme un cylindre de rayon  $R$ . Le problème en une dimension sera discrétisé en symétrie cylindrique avec la méthode des éléments finis linéaires avec  $N_1$  intervalles équidistants entre  $r = 0$  et  $r = b$  et  $N_2$  intervalles équidistants entre  $r = b$  et  $r = R$  avec  $b$  et  $R$  des rayons donnés tels que  $0 < b < R$ . La condition au bord est  $\phi(R) = V_0$  avec  $V_0$  donné. La méthode des éléments finis, qui est utilisée pour résoudre numériquement des équations physiques dépendant de dérivées partielles, est employée pour calculer le champ électrique  $E_r$  et le champ de déplacement  $D_r$ .

Ensuite, des tests de l'algorithme et études de convergences pour déterminer l'ordre de convergence de l'algorithme dans le cas trivial (Section 3.3) et dans le cas non-trivial (Section 3.4) seront présentés. Encore, dans le cas non-trivial, la relation  $\text{div}(\vec{D})(\vec{x}) = \rho_{lib}(\vec{x})$  sera vérifiée et le calcul de la densité des charges de polarisation  $\rho_{pol}(\vec{x})$  sera effectué. Pour finir, dans la partie facultative, une autre méthode d'intégration sera employée et l'impact de cette méthode sur les résultats sera étudiée.

## 2 Équation différentielle et forme variationnelle

Dans cette section il s'agit d'écrire l'équation différentielle pour le potentiel  $\phi(\vec{x})$  puis d'écrire la forme variationnelle du problème en coordonnées cartésiennes. Pour finir, la forme variationnelle sera explicitée dans le cas d'un cylindre.

### 2.1 Équation différentielle pour le potentiel $\phi(\vec{x})$

Afin d'obtenir l'équation différentielle du potentiel électrique  $\phi(\vec{x})$ , la loi de Gauss, donnée par l'équation (1), est utilisée.

$$\text{div}(\vec{D}) = \rho_{libre}(\vec{x}) \quad (1)$$

où  $\vec{D}$  représente le champs de déplacement et  $\rho_{libre}(\vec{x})$  représente les charges libres. Le champs de déplacement est donné par :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r(\vec{x}) \vec{E} \quad (2)$$

où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide,  $\epsilon_r(\vec{x})$  représente la constante diélectrique variable du milieu et  $\vec{E}$  est le champ électrique. De plus, on sait que le  $\vec{E}$  est relié au potentiel électrique  $\phi(\vec{x})$ , la relation est donnée par l'éq.(3).

$$\vec{E} = -\nabla\phi(\vec{x}) \quad (3)$$

En combinant les équations (1), (2) et (3) l'équation différentielle pour le potentiel  $\phi(\vec{x})$  est obtenue.

$$\text{div}(\epsilon_r(\vec{x})\nabla\phi(\vec{x})) = -\frac{\rho_{libre}(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad (4)$$

## 2.2 Forme variationnelle

Afin d'écrire la forme variationnelle du problème, la démarche formelle de la section 3.2.4 des notes de cours est suivie [1]. Pour trouver la forme variationnelle de ce problème, il faut considérer une fonction test arbitraire nulle sur le domaine, par exemple  $\eta(\vec{x})$  telle que  $\eta(\vec{x}) = 0 \ \forall \vec{x} \in \partial\Omega$ . En intégrant l'équation différentielle éq.(4) sur le domaine  $\Omega$ , on obtient l'équation éq.(5) qui définit la forme variationnelle de notre problème.

$$\iiint_{\Omega} \eta(\vec{x}) \cdot \text{div}(\epsilon_r(\vec{x})(\nabla\phi(\vec{x}))) d^3\vec{x} = - \iiint_{\Omega} \eta(\vec{x}) \frac{\rho_{lib}(\vec{x})}{\epsilon_0} d^3\vec{x} \quad (5)$$

où  $\eta(\vec{x})$  est la fonction test arbitraire.

Il faut à présent résoudre l'éq.(5). Afin de simplifier la notation et le calcul, posons  $\psi(\vec{x}) = \epsilon_r(\vec{x})\nabla\phi$ . L'éq.(5) est réécrite comme :

$$\iiint_{\Omega} \eta(\vec{x}) \cdot \text{div}(\psi(\vec{x})) d^3\vec{x} = - \iiint_{\Omega} \eta(\vec{x}) \frac{\rho_{lib}(\vec{x})}{\epsilon_0} d^3\vec{x} \quad (6)$$

À présent, pour pouvoir utiliser le fait que  $\eta$  soit construite telle que  $\eta(\vec{x}) = 0 \ \forall \vec{x} \in \partial\Omega$ , la relation éq.(7) est utilisée.

$$\eta(\vec{x})\text{div}(\psi(\vec{x})) = \text{div}(\eta\psi(\vec{x})) - \nabla\eta(\vec{x}) \cdot \psi(\vec{x}) \quad (7)$$

En insérant l'éq.(7) dans l'éq.(6) et en utilisant le théorème de la divergence il est possible de réécrire le membre de gauche de l'éq.(6) :

$$\iiint_{\Omega} \text{div}(\eta(\vec{x})\psi(\vec{x})) - \nabla\eta(\vec{x}) \cdot \psi(\vec{x}) d^3\vec{x} = \int_{\partial\Omega} (\eta\psi(\vec{x})) d\vec{\sigma} - \iiint_{\Omega} \nabla\eta(\vec{x}) \cdot \psi(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (8)$$

Pour finir, en utilisant les conditions sur le bords pour  $\eta$  on obtient l'équation final :

$$\iiint_{\Omega} \nabla \eta(\vec{x}) \cdot \epsilon_r(\vec{x}) \nabla \phi d^3 \vec{x} = \iiint_{\Omega} \eta(\vec{x}) \frac{\rho_{lib}(\vec{x})}{\epsilon_0} d^3 \vec{x} \quad (9)$$

### 2.3 Forme variationnelle dans le cas d'un cylindre

Dans cette sous-section, il s'agit d'expliciter la forme variationnelle trouvée précédemment éq.(9) dans le cas d'un cylindre. On considère ici un cylindre de rayon  $R$ , de longueur  $L_z$  avec (grâce aux symétries de la géométrie cylindrique)  $\phi(r)$ ,  $\epsilon_r(r)$  et  $\rho_{libre}(r)$ . De plus, le cylindre est considéré comme suffisamment long pour négliger les effets aux extrémités. On considère donc le domaine  $\Omega$  comme un cylindre et on intègre l'éq.(9) sur un cylindre :

$$\int_0^{L_z} \int_0^{2\pi} \int_0^R \nabla \eta(r) \cdot \epsilon_r(r) \nabla \phi r dz d\theta dr = \int_0^{L_z} \int_0^{2\pi} \int_0^R \eta(r) \frac{\rho_{libre}(r)}{\epsilon_0} r dz d\theta dr \quad (10)$$

La résolution de l'éq.10 est donnée par :

$$\int_0^R \nabla \eta(r) \cdot \epsilon_r(r) \nabla \phi r dr = \int_0^R \eta(r) \frac{\rho_{libre}(r)}{\epsilon_0} r dr \quad (11)$$

## 3 Éléments finis

Dans cette section le problème 1-D est discrétisé en symétrie cylindrique avec la méthode des éléments finis linéaires avec  $N_1$  intervalles équidistants entre  $r_0 = 0$  et  $r_b = b$ , et  $N_2$  intervalles équidistants entre  $r_b = b$  et  $r_R = R$  avec  $b$  et  $R$  des rayons donnés, tels que  $0 < b < R$ . La condition au bord est  $\phi(R) = V_0$  où  $V_0$  donné est le potentiel du bord du domaine  $\partial\Omega$ .

### 3.1 Écriture des éléments de la matrice et du membre de droite

Dans cette sous-section, il s'agit d'écrire l'éq.(11) sous forme matricielle et vectorielle. Premièrement, divisons l'intervalle  $[r_0, r_b]$  avec  $N_1$  points équidistants  $x_i$ , où  $i = 1, \dots, N_1$  et l'intervalle  $[r_b, r_R]$  avec  $N_2$  différents points équidistants  $x_i$ , où  $i = N_1, \dots, N$  avec  $N = N_1 + N_2$ . Il est à présent possible de définir  $N - 1$  fonction chapeau  $\Lambda_i$  linéairement indépendantes :

$$\Lambda_i(r) = \begin{cases} \frac{r}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq r \leq x_i \\ -\frac{r}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x_i \leq r \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En utilisant les fonctions chapeaux il est à présent possible d'approximer numériquement les fonctions  $\phi(r)$  et  $\eta(r)$  en employant la méthode de Galerkin.

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \sum_j \phi_j \Lambda_j(r) \\ \eta(r) &= \sum_i \eta_i \Lambda_i(r) \end{aligned} \tag{12}$$

La Fig.1 représente les fonctions  $\Lambda_i$  ainsi que les valeurs  $\phi_j$  sur les intervalles  $h_i = x_{i+1} - x_i$  pour  $i = 1, \dots, N - 1$ . En insérant les approximations de  $\eta$  et de  $\phi$  dans l'équation variationnelle éq.(11) on obtient :

$$\sum_j^N \sum_i^N \eta_i \phi_j \int_0^R \nabla \Lambda_j \nabla \Lambda_i \epsilon_r(r) r dr = \sum_i^N \eta_i \int_0^R \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0} \Lambda_i(r) r dr \tag{13}$$

Sachant que la fonction test  $\eta$  a été choisie arbitrairement l'éq.(13) doit être satisfaite  $\forall \eta_i$ , ce qui signifie que l'égalité doit être satisfaite pour chaque terme de la somme sur  $i$ . On peut donc la simplifier :

$$\sum_j^N \phi_j \int_0^R \nabla \Lambda_j \nabla \Lambda_i \epsilon_r(r) r dr = \int_0^R \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0} \Lambda_i(r) r dr \tag{14}$$

On obtient ainsi un système d'équation linéaire algébrique donnée par  $\mathbf{A}\Phi = \mathbf{b}$  où  $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)$ . Où  $\mathbf{A}$  est une matrice  $N \times N$  définit à l'éq.(15) et  $\mathbf{b}$  un N-vecteur dont la i-ème composante est définit à l'éq.(16).

$$A_{ij} = \int_0^R \epsilon_r(r) \frac{d\Lambda_i(r)}{dr} \frac{d\Lambda_j(r)}{dr} r dr \tag{15}$$

$$b_i = \int_0^R \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0} \Lambda_i(r) r dr \tag{16}$$

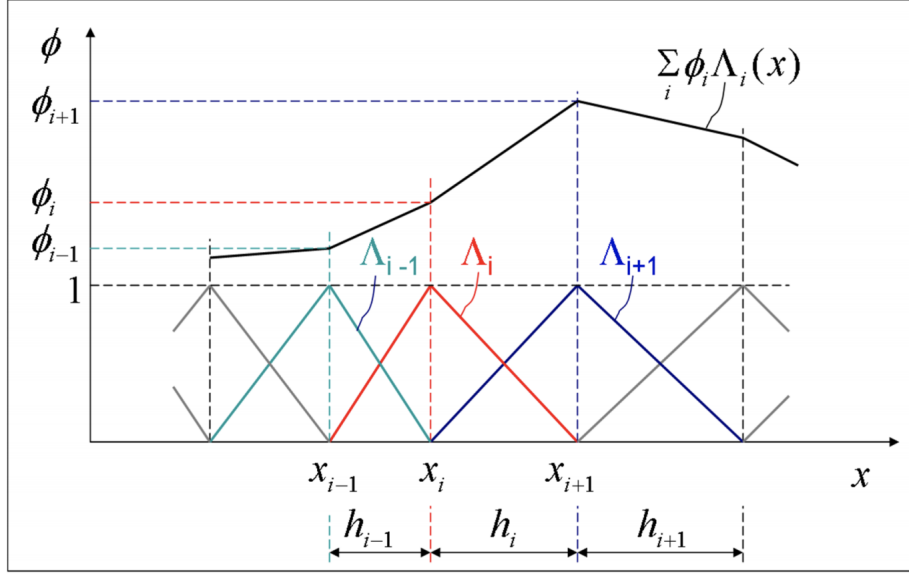


FIGURE 1 – Fonctions de base  $\Lambda(r)$  et représentation (approximation)d'une fonction  $\phi(r)$  par ces éléments finis [1]

## 3.2 Programmation

Dans cette sous-section il s'agit de programmer l'implémentation de l'éq.(13). Et donc de déterminer exactement les éléments de la matrice  $\mathbf{A}$  et du membre de droite  $\vec{b}$ . Pour ce faire, les dérivées de la fonction chapeaux doit être déterminées :

$$\frac{d\Lambda_i(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{h_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ -\frac{1}{h_i} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (17)$$

### 3.2.1 Implémentation de la matrice $\mathbf{A}$ et du vecteur $\vec{b}$ (membre de droite)

Dans cette partie, il s'agit de déterminer exactement les éléments de la matrice  $\mathbf{A}$  donnée par l'éq.(15). Pour cela la règle du trapèze, éq.(18), est employée sur l'éq.(15). L'équation obtenue est l'éq.(19).

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^N \frac{(f(x_i) + f(x_{i+1})))}{2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (18)$$

$$A_{i,j} = \sum_{k=1}^N \frac{h_k}{2} \left( r_{k+1} \epsilon_0 \epsilon_r(r_{k+1}) \frac{d\Lambda_i(r)}{dr} \Big|_{r=r_{k+1}} - \frac{d\Lambda_j(r)}{dr} \Big|_{r=r_{k+1}} + r_k \epsilon_0 \epsilon_r(r_k) \frac{d\Lambda_i(r)}{dr} \Big|_{r=r_k} - \frac{d\Lambda_j(r)}{dr} \Big|_{r=r_k} \right) \quad (19)$$

L'implémentation en C++ est donnée par :

$$A_{i,i} = \frac{r_{i+1} \epsilon_r(r_{i+1}) + r_i \epsilon_r(r_i)}{2h_i} \quad (20)$$

$$A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = - \frac{r_{i+1} \epsilon_r(r_{i+1}) + r_i \epsilon_r(r_i)}{2h_i} \quad (21)$$

$$A_{i,j} = 0 \quad \forall j \neq i, i-1, i+1 \quad (22)$$

On remarque que la matrice  $\mathbf{A}$  est une matrice tri-diagonale éq.(23), avec  $d_i = A_{ii}$ ,  $c_i = A_{i,i+1}$  et  $a_i = A_{i+1,i}$ .

$$\begin{pmatrix} d_1 & c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_1 & d_2 & c_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_2 & d_3 & c_3 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{N-3} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{N-3} & d_{N-2} & c_{N-2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{N-2} & d_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{N-1} & d_N \end{pmatrix} \quad (23)$$

On procède de la même manière pour le vecteur  $\vec{b}$

$$b_i = \sum_{k=1}^N \frac{h_k}{2} (r_{k+1} \Lambda_i(r_{k+1}) \rho_{lib}(r_{k+1}) + r_k \Lambda_i(r_k) \rho_{lib}(r_k)) . \quad (24)$$

L'implémentation en C++ est donnée par :

$$b_i = \frac{h_i}{2} (r_i \rho_{lib}(r_i)) \quad (25)$$

$$b_{i+1} = \frac{h_i}{2} (r_{i+1} \rho_{lib}(r_{i+1})) \quad (26)$$

En posant les conditions de bord nécessaire, le problème linéaire éq.(27) peut être résolu numériquement. Pour satisfaire les conditions  $\phi(R) = V_0$ , il faut poser  $d_N = 1$ ;  $a_{N-1} = 0$ ;  $b_N = V_0$ .

$$\begin{pmatrix} d_1 & c_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_1 & d_2 & c_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_2 & d_3 & c_3 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{N-3} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{N-3} & d_{N-2} & c_{N-2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_{N-2} & d_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{N-2} \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{N-2} \\ b_{N-1} \\ V_0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

### 3.2.2 Implémentation du champs électrique $\vec{E}_r$ et du champ de déplacement $\vec{D}_r$

Pour représenter le champs électrique dans le code, la méthode des différences finies est utilisée.

$$(E_r)_i = -\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h_i} \quad (28)$$

À l'aide de l'éq.(29) le champ de déplacement peut être défini :

$$(D_r)_i = \epsilon_0 \epsilon_r(r_{mid}^i) (E_r)_i \quad (29)$$

où  $r_{mid}^i = 0.5 \cdot r_i + 0.5 \cdot r_{i+1}$ .<sup>1</sup>

## 3.3 Cas trivial

Dans cette section, le cas trivial est étudié. c'est à dire que les relations suivantes sont imposées :

$$\begin{aligned} \rho_{libre}(r) &= \epsilon_0 \\ \epsilon_r &= 1 \end{aligned} \quad (30)$$

Le but de cette partie est de trouver un résultat analytique pour une équation qui régit le potentiel et ensuite comparer cette solution analytique avec le potentiel numérique. Cette solution analytique permettra ensuite d'effectuer une étude de convergence. Les paramètres imposés dans cette section sont recensés dans le Tab.1.

---

1. Par un soucis de clarté l'indice  $i$  est situé au dessus lorsque l'on parlera de  $r_{mid}$  et de  $r_{midmid}$



$V_0[\text{V}]$	$b[\text{m}]$	$R[\text{m}]$	$N_1$	$N_2$
10	0.8	2	$N$	$N$

TABLE 1 – Paramètres utilisés pour les simulations dans le cas trivial.  $N$  est un nombre entier strictement positif arbitraire.

### 3.3.1 Solution analytique

Afin de tester l'algorithme, il faut quelque chose pour le comparer. Pour ce faire, on calcule une solution analytique qui décrit le potentiel pour pouvoir ensuite la comparer avec le résultat numérique pour le potentiel. Pour trouver cette solution, il faut partir de l'équation différentielle pour le potentiel  $\phi(\vec{x})$  éq.(4). En tenant compte des relations imposées éq.(30), éq.(4) revient simplement à écrire :

$$\text{div}(\nabla\phi) = -1 \quad (31)$$

Donc :

$$\Delta\phi = -1 \quad (32)$$

Compte tenu des symétries de la géométrie cylindrique du problème, le potentiel  $\phi$  ne dépend que de la composante radiale  $r$  ( $\phi = \phi(r)$ ) et compte tenu de l'expression du Laplacien dans les coordonnées cylindriques. Il est possible d'écrire l'éq.(32) comme suit :

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -1 \quad (33)$$

En multipliant l'éq.(33) par  $r$  puis en effectuant deux intégrations successives selon  $r$ , on obtient :

$$\phi(r) = \frac{-r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2 \quad (34)$$

Où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes à déterminer selon les conditions initiales. En posant  $r = 0$  dans éq.(34), on obtient un potentiel qui tend vers  $-\infty$  au milieu du cylindre pour tout  $C_1 \neq 0$ . Ce résultat n'est bien sûr pas physique, on pose donc  $C_1 = 0$ . Ensuite, par la donnée du problème, on sait que la valeur du potentiel sur les bords du domaine vaut  $V_0$ , donc  $\phi(R) = V_0$ . Ceci nous permet d'obtenir (après avoir imposé  $C_1 = 0$ ) que  $C_2 = V_0 + \frac{R^2}{4}$ . Donc l'éq.(34) revient à :

$$\phi(r) = \frac{R^2 - r^2}{4} + V_0 \quad (35)$$

### 3.3.2 Test de l'algorithme

Afin de comparer le résultat numérique obtenu pour le potentiel avec le résultat analytique éq.(35), le graphe du résultat numérique et de la résultat analytique sont superposés pour deux nombre d'intervalles  $N_1 = N_2 = N$  différents. Ceci est représenté dans la Fig.2. Les paramètres utilisés sont recensés dans le Tab.1.

Ces graphes permettent de voir que, visuellement, la solution numérique correspond bien avec la solution analytique. De plus, on peut constater que, plus le nombre d'intervalles  $N$  augmente, plus l'erreur entre la solution analytique et le potentiel obtenu numériquement en  $r = 0$  diminue (les deux courbes se superposent mieux dans le graphe de droite que sur celui de gauche). En effet, ceci est le résultat escompté car en augmentant  $N$ , on s'attend à une précision numérique plus importante. Pour pouvoir analyser le comportement de l'erreur sur le potentiel en  $r = 0$  de manière plus poussée, une étude de convergence en  $\phi(r = 0)$  en fonction de  $N$  est effectuée dans la section 3.3.3.

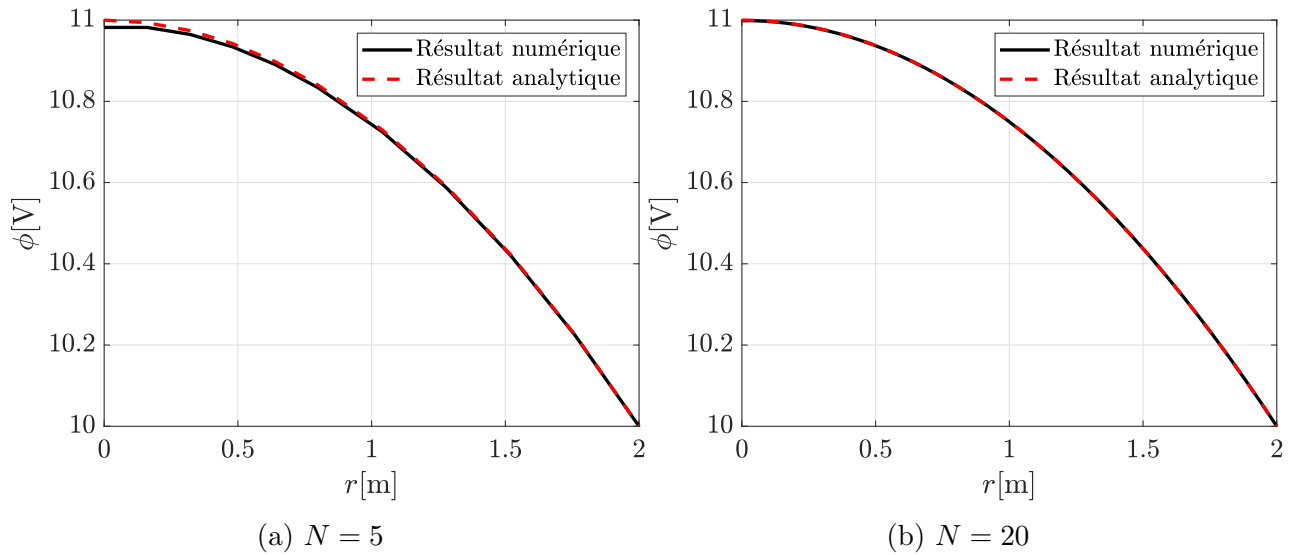


FIGURE 2 – Comparaison du résultat numérique pour le potentiel avec le résultat analytique éq(35). Le nombre d'intervalles  $N_1 = N_2 = N$  est de 5 pour la Fig.2a et de 20 pour la fig.2b.

Afin d'effectuer une analyse légèrement plus poussée dans cette sous-section, il est possible de voir en observant attentivement la Fig.2a que la différence entre le résultat numérique et le résultat analytique est plus accentué autour de  $r = 0$ m que lorsque  $r$  est élevé. Ceci peut être observé plus clairement par la Fig.3, qui montre deux zooms effectués sur la Fig.2a vers le centre et vers le bord du cylindre. Cette différence peut être expliquée par le fait que en  $r = R$  (bord du cylindre), le potentiel numérique est, dans le cadre cet exercice, forcé à avoir la valeur de  $V_0$  comme dans notre solution analytique. Alors qu'en  $r = 0$ , le potentiel numérique n'est pas forcé à avoir une certaine valeur. L'erreur se propagerait donc entre le bord et le centre du cylindre.

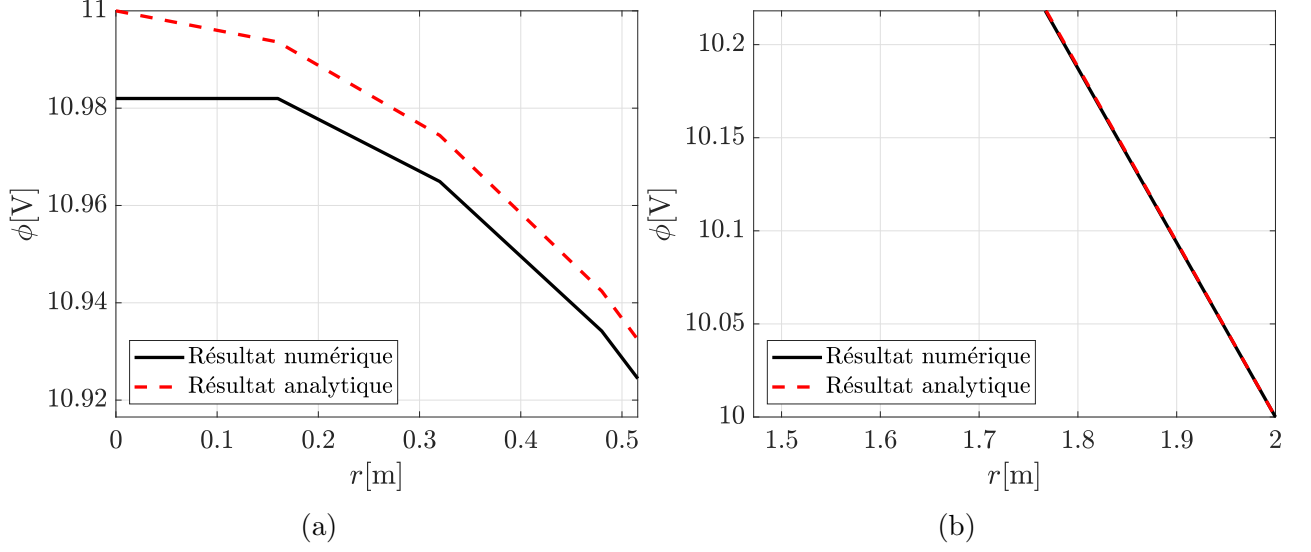


FIGURE 3 – Zooms effectués sur la Fig. 2a. Pour la Fig. 3a,  $r$  est gardé entre 0.0 et 0.5m. Pour la Fig. 3b,  $r$  est gardé entre 1.5 et 2.0m.

### 3.3.3 Etude de convergence

Dans cette sous-section, une étude de convergence de  $\phi(r = 0)$  en fonction de  $\Delta x_1 = \frac{b}{N}$  est effectuée. L'étude de convergence est effectuée en fonction de  $\Delta x_1$  et non de  $N_1$ , car comme  $\Delta t$  (intervalle de temps) est d'habitude utilisé pour la convergence temporelle, alors il semble plus logique d'utiliser  $\Delta x_1$  (intervalle de distance) pour la convergence spatiale. Bien que la convergence soit déterminée par rapport à la maille la plus grande de la discrétisation du domaine (ici donc  $\Delta x_2$ ), la convergence est étudiée ici en fonction de  $\Delta x_1$ . Cela ne va bien-sûr pas changé la convergence dans ce problème, car les mailles sont réduites proportionnellement ( $N_1 = N_2 = N$ ). Comme  $r = 0$  est un point se trouvant dans la première partie du maillage, il a été décidé de faire l'étude de convergence en fonction de  $\Delta x_1$ .

Dans le cas trivial, la solution analytique pour le potentiel en  $\phi(r = 0)$  est connue. Grâce à l'éq.(35). On trouve  $\phi_{analytique}(r = 0) = \frac{R^2}{4} + V_0 = 11V$ . Il est donc possible de calculer l'erreur relative  $\alpha = \left| \frac{\phi_{analytique}(r=0) - \phi_{numérique}(r=0)}{\phi_{analytique}(r=0)} \right|$  et la représenter en fonction de  $\Delta x_1$  sur un diagramme log-log. Ceci est réalisé par par la Fig. 4, la valeur de la pente représente  $m$ , l'ordre de convergence du schéma. Grâce au fit linéaire effectué sur la Fig. 4, il est possible de vérifier que la pente est de  $m = 1.9 \simeq 2$ . Ce résultat semble correct, car pour une solution régulière (ici le potentiel) représentée par un polynôme de degré  $p$ , la méthode des éléments finis converge à l'ordre  $p + 1$  (Voir Annexe [2]). Comme dans ce cas, le potentiel numérique est linéaire, la convergence doit être d'ordre deux.

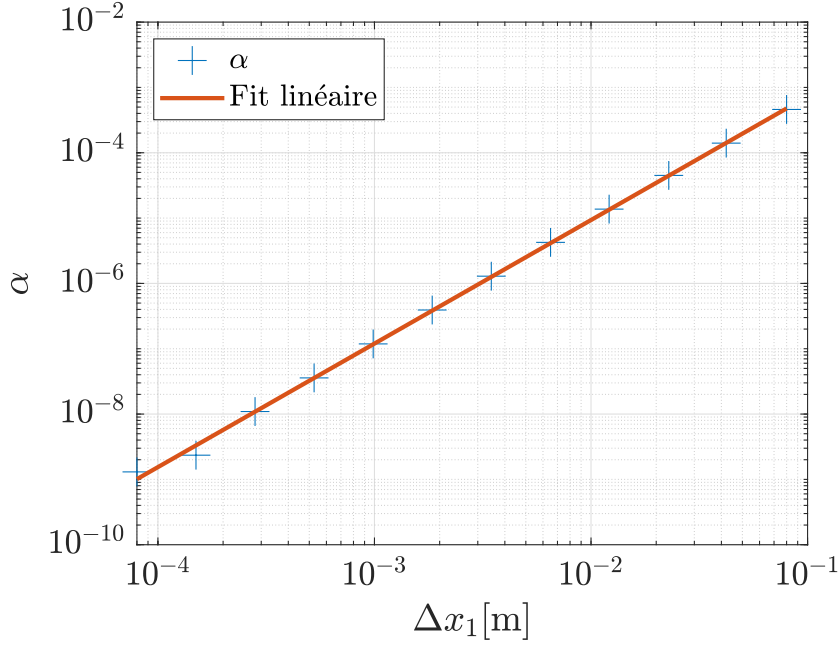


FIGURE 4 – Etude de convergence de  $\phi(0)$  en fonction de  $\Delta x_1$ .  $\alpha$  représente l'erreur relative entre le potentiel numérique en  $r = 0$  et le potentiel analytique en  $r = 0$ . Fit linéaire :  $y = 1.9 \cdot x - 1.3$

### 3.4 Cas non-trivial

Dans cette section, le cas non-trivial est étudié. Les fonctions  $\epsilon_r(r)$  et  $\rho_{lib}(r)$  sont donc spécifiées :

$$\frac{\rho_{lib}(r)}{\epsilon_0} = \begin{cases} a_0 \cdot \left[ \frac{r^2}{b^2} \cdot \left( \frac{2r}{b} - 3 \right) + 1 \right] & (0 \leq r < b) \\ 0 & (b \leq r \leq R) \end{cases} \quad (36)$$

Avec  $a_0 = 2 \cdot 10^4 \text{V} \cdot \text{m}^{-2}$ .

$$\epsilon_r(r) = \begin{cases} 1 & (0 \leq r < b) \\ 2 \cdot \left[ 1 + \arctan\left(\frac{2\pi(r-b)}{R}\right) \right] & (b \leq r \leq R) \end{cases} \quad (37)$$

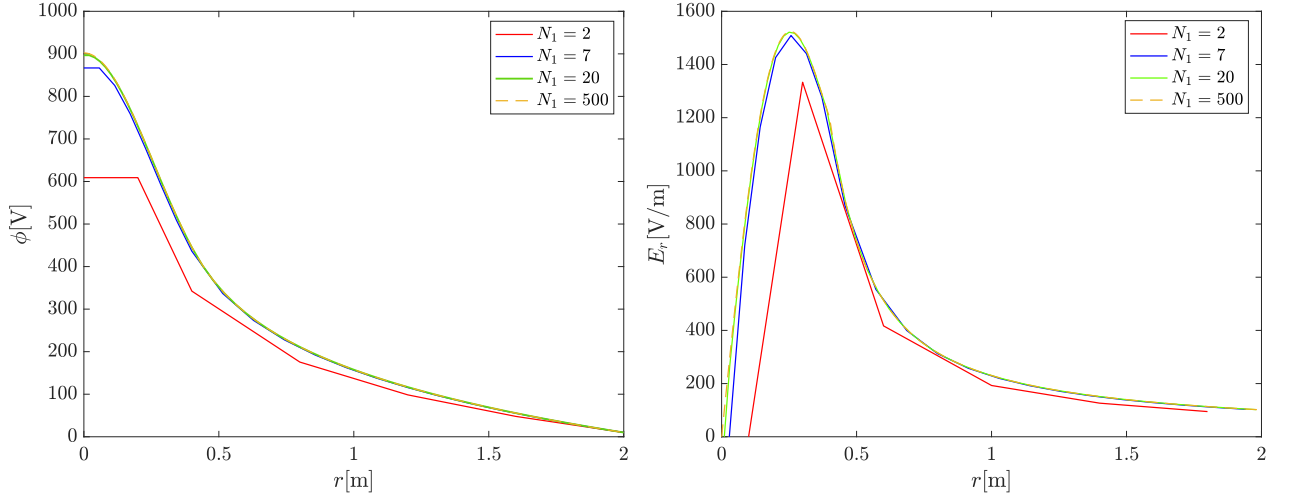
Les paramètres utilisés pour les simulations dans cette section sont recensés dans le Tab.2.  $N_1$  et  $N_2$  seront spécifiés pour chaque simulation.

$V_0[\text{V}]$	$b[\text{m}]$	$R[\text{m}]$
10	0.4	2

TABLE 2 – Paramètres utilisés pour les simulations dans le cas non trivial.

### 3.4.1 Solution numérique pour $\phi(r)$ et $E_r(r)$

Dans cette partie le but est de discuter la solution numérique pour  $\phi(r)$  et  $E_r(r)$  pour diverses valeurs de  $N_1$  et  $N_2$ . Dans les différentes simulations réalisées, la valeur de  $N_2 = 2 \cdot N_1$ . Les Fig.5a et Fig.5b représentent respectivement la solution numérique pour  $\phi(r)$  et  $E_r(r)$  pour  $N_1 = 2, 7, 20, 500$ .



(a) Potentiel électrique en fonction de la position dans le cylindre en fonction de différents intervalles  $N_1$  où  $N_2 = 2 \cdot N_1$  (b) Champ électrique en fonction de la position dans le cylindre en fonction de différents intervalles  $N_1$  où  $N_2 = 2 \cdot N_1$

FIGURE 5 – Solution numérique pour  $\phi(r)$  et  $E_r(r)$  pour diverses valeurs de  $N_1$  et  $N_2$

En étudiant ces figures on remarque que plus le nombre d'intervalles est grand, plus la courbe est régulière. On observe qu'à gauche les courbes sont bien plus éloignées les une des autres qu'à droite. Cela signifie que l'erreur est beaucoup plus grande. Ceci s'explique par le fait qu'une condition au bord  $\phi(r = R) = V_0$  est imposée mais qu'aucune condition n'existe en 0. C'est pour cela indépendamment du nombre d'intervalle chaque courbe converge vers la même valeur à droite du graphe. L'erreur observée à gauche de la Fig.5a et de la Fig.5b est directement due à la contrainte imposée.

### 3.4.2 Convergence de $\phi(r = b)$ avec $N_2$ proportionnel à $N_1$

Le but de cette sous-section est d'examiner la convergence de  $\phi(r = b)$  avec  $N_2$  proportionnel à  $N_1$ . On pose  $N_2 = 0.5 \cdot N_1$ . Ici, l'étude de convergence est effectuée en fonction de  $\Delta x_2$ , car  $\Delta x_2 > \Delta x_1$  dans notre cas et la convergence est déterminée par rapport à la maille la plus grande de la discrétisation du cylindre. De plus, le point  $r = b$  se situe à la limite des milieux discrétisés par  $\Delta x_1$  et  $\Delta x_2$ . Comme  $N_2$  est proportionnel à  $N_1$ , l'ordre de convergence ne

changerait pas si on faisait l'étude en fonction de  $\Delta x_1$ .

Dans ce cas non-trivial, la solution analytique de  $\phi(r = b)$  n'est pas connue. On ne peut donc pas calculer directement une erreur et la représenter en fonction du pas de discrétisation comme dans la section 3.3.3. Il faut donc d'abord représenter la quantité désirée (ici  $\phi(r = b)$ ) en fonction de  $(\Delta t)^m$ ,  $m$  un nombre entier strictement positif, sur une échelle linéaire-linéaire. Si dans la limite des petits  $\Delta t$ , les points du graphes forment une droite, alors l'ordre de convergence du schéma utilisé est  $m$ .

La Fig.6 représente  $\phi(r = b)$  en fonction de  $(\Delta x_2)^2$ . On représente en fonction de  $(\Delta x_2)^2$  car, comme dans la section précédente, on s'attend à un ordre de convergence de 2. La Fig.6a montre que le potentiel converge en fonction de  $(\Delta x_2)^2$  (pas forcément linéairement). Grâce à la Fig.6b, qui est un zoom sur effectué sur la Fig.6a à laquelle on ajouté un fit linéaire sur les points situés dans la partie zoomé, il est possible de voir que dans la limite des petits  $\Delta x_2$ , les points forment une droite. On peut donc s'attendre à un ordre de convergence  $m = 2$ .

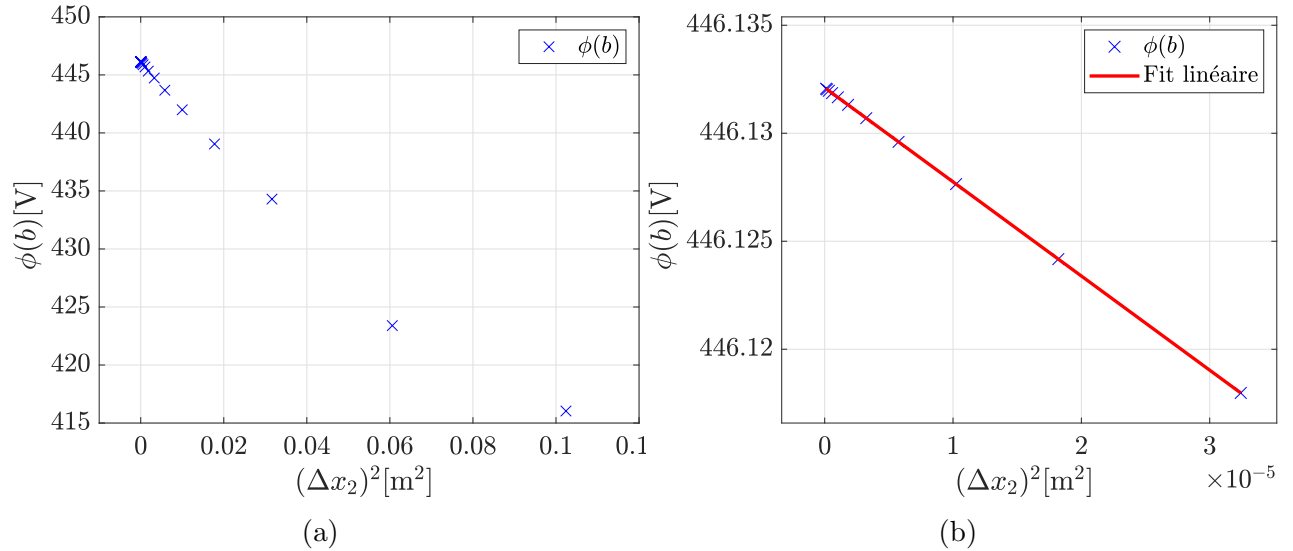


FIGURE 6 – Représentation du potentiel  $\phi(r = b)$  en fonction de  $(\Delta x_2)^2$ . La Fig.6b est un zoom effectué sur la Fig.6a. Fit linéaire de la Fig.6b :  $y = -435.94 \cdot x + 446.13$

De plus, en supposant que le comportement des points en fonction de  $(\Delta x_2)^m$  est identique lorsque  $\Delta x_2$  tend vers 0, il est alors possible d'extrapoler les données dans la limite  $\Delta x_2$  tend vers 0. Ainsi, en prenant l'intersection entre la droite extrapolée et l'axe des ordonnées, il est possible de trouver la valeur asymptotique de la grandeur désirée (ici  $\phi(b)$ ). Grâce à l'équation du fit linéaire effectué sur la Fig.6b et en posant  $x = 0$ , on trouve la valeur asymptotique pour le potentiel en  $b$  :  $\phi_{\text{asympt}}(b) \simeq 446.13\text{V}$ . Il est alors possible de définir une erreur relative  $\beta$  entre  $\phi_{\text{asympt}}(b)$  et la valeur numérique et la représenter en fonction de  $\Delta x_2$  sur un diagramme log-log. Ceci est réalisé par par la Fig.7, la valeur de la pente représente  $m$ , l'ordre de convergence du schéma. Grâce au fit linéaire effectué sur la Fig.7, il est possible de vérifier que la pente est de  $m = 1.97 \simeq 2$ , le même ordre de convergence

trouvé que dans la section 3.3.3.

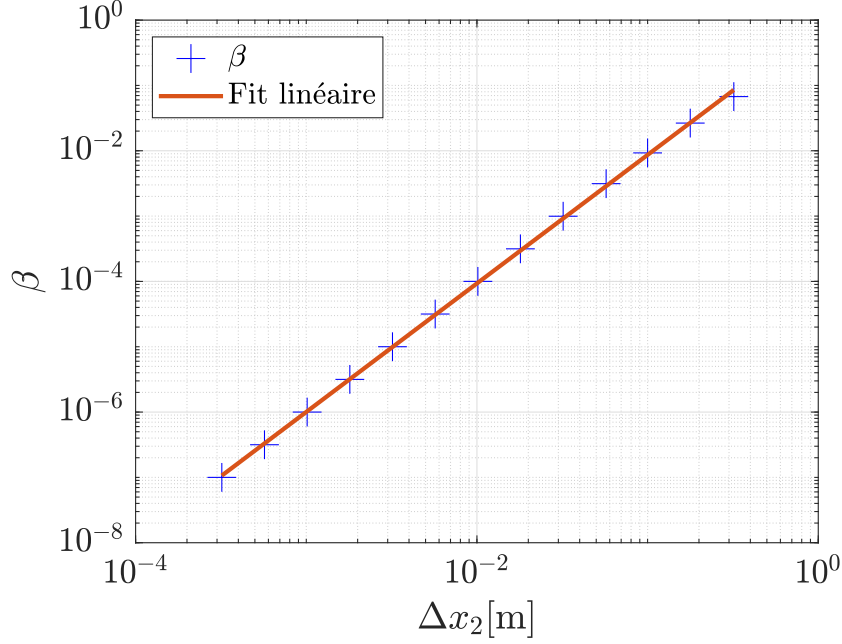


FIGURE 7 – Etude de convergence de  $\phi(r = b)$  en fonction de  $\Delta x_2$ .  $\beta$  représente l'erreur relative entre le potentiel numérique en  $r = b$  et la valeur asymptotique du potentiel en  $r = b$ . Fit linéaire :  $y = 1.98 \cdot x - 0.07$

### 3.4.3 Vérification de $\text{div}(\vec{D})(x) = \rho_{lib}(\vec{x})$ et calcul de la densité des charges de polarisation $\rho_{pol}(\vec{x})$

Dans cette sous-partie il s'agit dans un premier temps de vérifier l'éq.(1) puis de déterminer par la suite la densité de charge de polarisation  $\rho_{pol}(r)$ . La divergence du champ électrique et du champ de déplacement est exprimée en coordonnées cylindrique :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{E}) &= \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} \\ \text{div}(\vec{D}) &= \frac{1}{r} \frac{\partial D}{\partial r} \end{aligned} \quad (38)$$

La méthode des différences finies centrées aux milieux des intervalles pour  $\frac{dD_r}{r}$  et  $\frac{dE_r}{r}$  est utilisée ce qui donne :

$$\text{div}(\vec{E})(r_{midmid}^i) \approx \frac{1}{r_{midmid}^i} \left[ \frac{r_{mid}^{i+1} E_r(r_{mid}^{i+1}) - r_{mid}^i E_r(r_{mid}^i)}{r_{mid}^{i+1} - r_{mid}^i} \right] \approx \nabla \cdot E_r(x_i) \quad (39)$$

$$\text{div}(\vec{D})(r_{midmid}^i) \approx \frac{1}{r_{midmid}^i} \left[ \frac{r_{mid}^{i+1} D_r(r_{mid}^{i+1}) - r_{mid}^i D_r(r_{mid}^i)}{r_{mid}^{i+1} - r_{mid}^i} \right] \approx \nabla \cdot D_r(x_i) \quad (40)$$

où  $r_{midmid}^i = 0.5 \cdot r_{mid}^i + 0.5 \cdot r_{mid}^{i+1}$ .

On cherche maintenant à calculer la densité de charges de polarisation. La densité de charge totale est donnée par  $\rho = \rho_{lib} + \rho_{pol}$ . De plus,  $-\nabla^2\phi = \rho$ . En posant  $-\nabla\phi = \epsilon_0\vec{E}$  on obtient l'équation suivante :

$$\rho_{pol} = \epsilon_0 \text{div}(\vec{E}) - \text{div}(\vec{D}) \quad (41)$$

La Fig.8 vérifie parfaitement l'éq.(1) en tout point excepté en  $r = b$ . En effet, ce point est une singularité et ceci est démontré à la Fig.9. La Fig.9 représente la densité de charges de polarisation (divisée par la permittivité du vide) en fonction de la position dans le cylindre pour différentes intervalles  $N_1 = N_2 = 5, 20, 200$ . Sur chaque courbe  $\frac{\rho_{pol}}{\epsilon_0}$  vaut d'abord 0, un pic dans les négatifs est observé puis la valeur  $\frac{\rho_{pol}}{\epsilon_0}$  tend à nouveau vers 0.

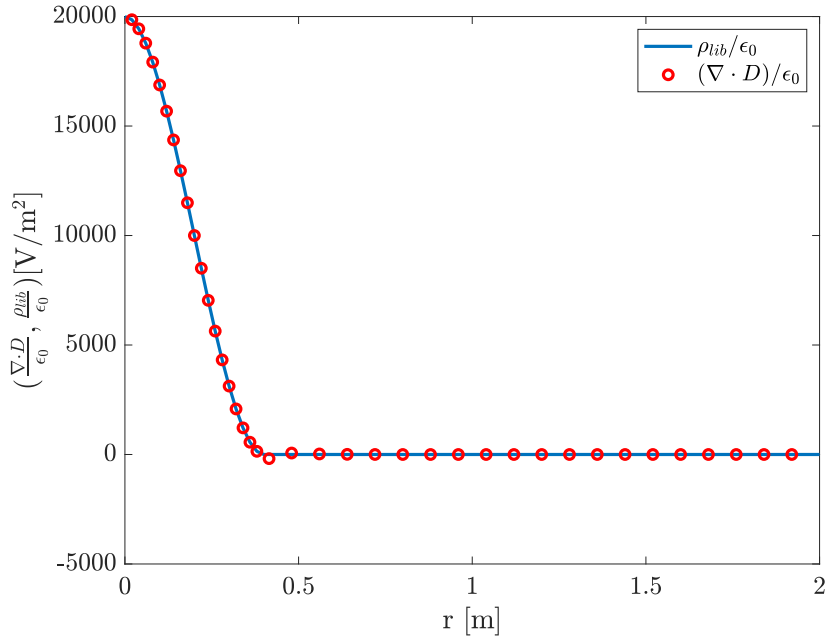


FIGURE 8 – Superposition de  $\frac{\text{div}(\vec{D})}{\epsilon_0}$  et de  $\frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0}$  en fonction de de la position  $r$  dans le cylindre

Expliquons à présent pourquoi  $\frac{\rho_{pol}}{\epsilon_0} = 0$ . Dans un diélectrique, par le phénomène de polarisation, les charges se positionne de manière à contrer le champ extérieur. L'alignement des dipôles électriques d'un morceau de matière placé dans un champ électrique fait apparaître une charge résultante positive sur un côté du morceau et une charge négative sur le côté opposé. Le morceau de matière devient alors un dipôle électrique macroscopique qui tend également à s'aligner dans la direction du champ. A l'intérieur, les charges se compensent si le champ est uniforme. C'est pourquoi la densité de charges de polarisation est nulle.[3]

Il s'agit à présent de discuter de l'anomalie observée en  $r = b$ . Ceci est dû au fait que la densité de polarisation est calculé à partir du champ électrique et du champ de déplacement.



Analytiquement, en  $r = b$  une asymptote est observée dans le calculs de  $\rho_{pol}$  due à la discontinuité d' $\epsilon_r$ . Le pic observé sur la Fig.9 est donc l'interprétation numérique de cette asymptote. Dans ce cas de figure, on mesure donc une densité ponctuelle infinie en  $r = b$ .

Il est intéressant de discuter de l'évolution de la valeur de  $\phi(r = b)$  en fonction du nombre d'intervalles. On constate que la valeur de  $\phi(r = b)$  est proportionnelle au nombre d'intervalles. Ceci s'explique par le fait que  $\rho_{pol}$  est calculé en utilisant la différence finie entre  $\vec{E}_r(r)$  et  $\vec{D}_r(r)$ . Sachant que le pas spatiale  $h_i$  devient de plus en plus petit à mesure que  $N$  tend vers l'infini et vu comme la divergence est calculée (équ.(39) et équ.(40)) : la charge de polarisation tend numériquement à l'infini.

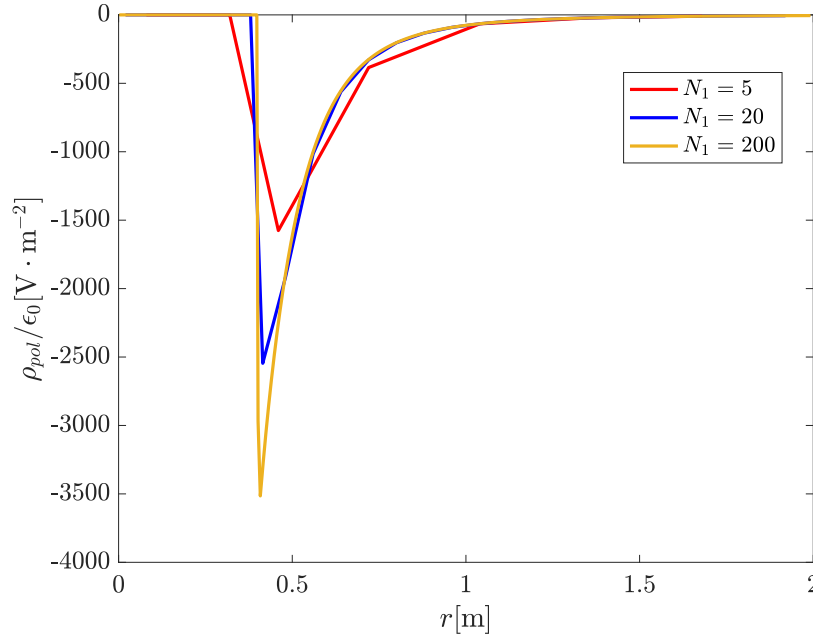


FIGURE 9 – Charge de polarisation  $\rho_{pol}$  divisée par la constante de la permittivité du vide  $\epsilon_0$  en fonction de  $r$  pour différentes intervalles  $N1 = N2$

## 4 Facultatif

Dans cette partie, il s'agit d'implémenter l'intégrale mixte trapèze-point milieu pour la construction de la matrice et du membre de droite. L'équation (3.48) des notes de cours est implémentée dans le code C++ :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx h_k \left[ p \cdot \frac{f(x_k) + f(x_{k+1}))}{2} + (1 - p) \cdot f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \right] \quad (42)$$

avec  $0 \leq p \leq 1$ .

l'implémentation est la suivante :

$$\begin{aligned}
A_{(i,i)} &= p \cdot \frac{r_{i+1}\epsilon_r(r_{i+1}) + r_i\epsilon_r(r_i)}{2h_i} + \frac{(1-p)}{h_i} \cdot r_{mid}^i \cdot \rho_{lib}(r_{mid}) \\
A_{(i,i+1)} &= A_{(i+1,i)} = -p \cdot \frac{r_{i+1}\epsilon_r(r_{i+1}) + r_i\epsilon_r(r_i)}{2h_i} - \frac{(1-p)}{h_i} \cdot r_{mid}^i \cdot \rho_{lib}(r_{mid}) \\
b_i &= p \cdot r_i \rho_{lib}(r_i) \frac{h_i}{2} + (1-p) \frac{h_i}{2} \cdot r_{mid}^i \cdot \rho_{lib}(r_{mid}^i) \\
b_{i+1} &= p \cdot r_{i+1} \rho_{lib}(r_{i+1}) \frac{h_i}{2} + (1-p) \frac{h_i}{2} \cdot r_{mid}^i \cdot \rho_{lib}(r_{mid}^i)
\end{aligned} \tag{43}$$

Plusieurs simulations sont effectuées en variant le paramètre  $p$  dans le cas trivial (voir Section 3.3) car la valeur analytique est connue, en particulier on sait que  $\phi(0) = 11\text{V}$ . La Fig. 10 représente le potentiel en fonction de la position et le Tab. 3 recense la valeur de  $\phi(0)$  pour différentes valeur de  $p$  et pour  $N_1 = N_2 = 20$ . On remarque que la courbe la plus proche de la solution analytique est celle où  $p$  prend la valeur  $p = 0.5$ . On constate aussi que l'erreur relative est faible puisque l'erreur relative maximale est de 0.14% (lorsque  $p = 1$ ).

$p$	0.1	0.5	0.7	0.9	1
$\phi(0)[\text{V}]$	11.0011	11.0000	10.9994	10.9989	10.9986
Erreur relative [%]	0.11	0.00	0.06	0.11	0.14

TABLE 3 – Valeur de  $\phi(0)$  pour différentes valeurs de  $p$  pour  $N_1 = N_2 = 20$

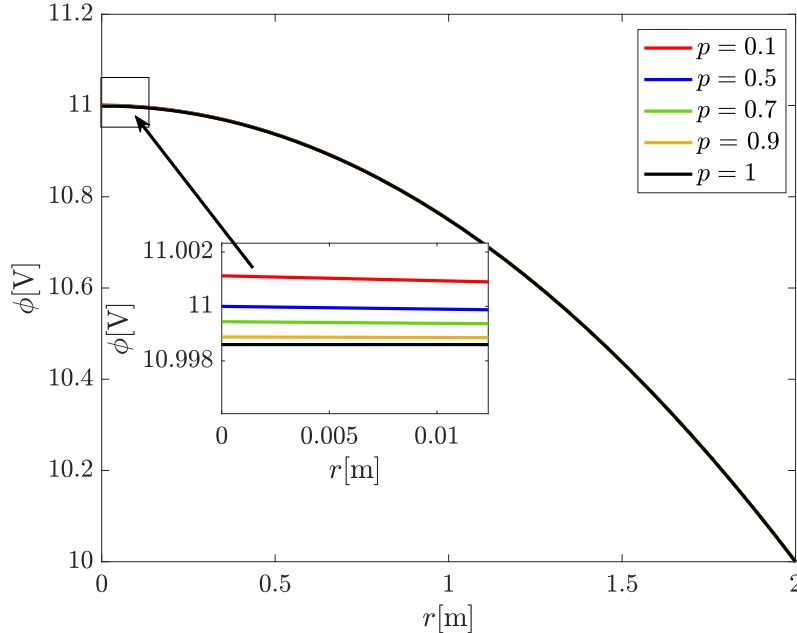


FIGURE 10 – Potentiel électrique  $\phi(r)$  en fonction de la position  $r$  dans le cylindre pour différentes valeurs de  $p$ .

## 5 Conclusion

Pour conclure, l'étude de ce problème a permis de lier l'analyse mathématique, l'analyse numérique et la physique théorique. La forme variationnelle avec la méthode des éléments finis ont permis de rendre possible l'étude numérique de l'équation différentielle dans le cas d'un cylindre diélectrique. En effet, en utilisant la méthode des trapèzes le problème a pu être implémenter sous forme matricielle et vectorielle.

Dans le cas triviale, une solution analytique a pu être calculée et on a observé que l'erreur numérique est inversement proportionnelle à  $N$ . L'étude de converge de  $\phi(r = 0)$  a permis de vérifier que la méthode des éléments finis converge à l'ordre 2.

Le cas non trivial a permis d'observer un phénomène physique plus intéressant avec l'apparition d'une discontinuité de  $\epsilon_r$  en  $r = b$ . L'étude de convergence de  $\phi(r = b)$  a à nouveau démontré que le schéma converge à l'ordre 2. L'étude numérique du potentiel et du champ électrique a permis de confirmer que l'erreur numérique diminue avec l'augmentation des intervalles. Pour finir, la relation  $\text{div}(\vec{D}(r)) = \rho_{lib}(r)$  a été vérifiée numériquement et les charges de polarisation calculées. L'étude de charges de polarisation a permis d'étudier la singularité présente en  $r = b$ .

Dans un travail supplémentaire, la méthode de l'intégrale mixte trapèze point milieu a été implémentée. Il a pu être vérifié que le résultat le plus précis par rapport à la solution analytique est  $p = 0.5$ .

## 6 Annexe

### Références

- [1] Physique Numérique I-II, Laurent Villars, EPFL, 26 août 2019, Version 19.1
- [2] Introduction à la Méthode des Éléments Finis, Alfio Quarteroni, Section Mathématiques, Semestre d'automne 2013-2014
- [3] Electromagnétisme, Professeur J.J Meister, EPFL, Section de Physique, Edition 2016