

# Skript Funktionalanalysis

Jakob Kropf und Jonas Harder

Version vom 24. Mai 2024

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Metrische Räume</b>	<b>2</b>
1.1	Definitionen . . . . .	2
1.2	Konvergenz und Stetigkeit . . . . .	2
1.3	Offene und abgeschlossene Mengen . . . . .	3
1.4	Vollständigkeit . . . . .	3
1.5	Kompaktheit . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Maß- und Integrationstheorie</b>	<b>9</b>
2.1	Grundlegende Konstruktionen . . . . .	9
2.2	Integration . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Normierte Räume</b>	<b>12</b>
3.1	Definitionen . . . . .	12
3.2	Vervollständigung . . . . .	12
3.3	$L^p$ -Räume . . . . .	13
3.4	Beispiele für normierte Räume . . . . .	17
3.5	Äquivalenz von Normen . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Hilberträume</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Lineare Operatoren</b>	<b>20</b>

# Kapitel 1

## Metrische Räume

### 1.1 Definitionen

**Definition 1.1.1.** Eine Menge  $T$ , versehen mit einer Abbildung  $d : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften ( $s, t, u \in T$  beliebig)

1.  $d(s, t) \geq 0$ ,
2.  $d(s, t) = d(t, s)$
3.  $d(s, u) \leq d(s, t) + d(t, u)$
4.  $d(s, t) = 0 \iff s = t$

ist *metrischer Raum* mit *Metrik*  $d$ . Falls nur ( $\Leftarrow$ ) in 4. gilt, handelt es sich um eine *Halbmetrik*.

**Beispiel 1.1.1.**  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  ist ein metrischer Raum.

**Beispiel 1.1.2.**  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  ist ein metrischer Raum.

**Beispiel 1.1.3.**  $(\mathbb{R}^n, d_i)$  mit  $i \in \{1, 2, \infty\}$  sind metrische Räume, wobei für  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$d_1 := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad d_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad d_\infty := \max\{|x_i - y_i| \mid i : 1, \dots, n\}$$

**Definition 1.1.2.** Sei  $X, d$  ein metrischer Raum. Dann definieren wir die offene bzw. abgeschlossene Kugel um  $x \in X$  wie folgt.

$$K_\nu(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq \nu\} \quad \overline{K_\nu(x)} := \{y \in X \mid d(x, y) \leq \nu\}$$

Weiterhin ist  $U$  eine Umgebung von  $x \iff \exists \nu > 0 : K_\nu(x) \subseteq U$ .

### 1.2 Konvergenz und Stetigkeit

**Definition 1.2.1.** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $X$  heißt *konvergent* gegen  $x \in X$  (bez.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

**Satz 1.2.1.** Der Limes einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

**Satz 1.2.2.** Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent und hat den gleichen Grenzwert.

**Definition 1.2.2.** Sei  $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann heißt  $f$  *stetig an der Stelle*  $x_0 \in X_1$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_1(x, x_0) < \delta \implies d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

**Satz 1.2.3.** Sei  $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1.  $f$  ist stetig an  $x_0$
2.  $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in X_1 \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \in X_1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

**Satz 1.2.4.** Seien  $f : X_1 \rightarrow X_2, g : X_2 \rightarrow X_3$  stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Dann ist die Verknüpfung  $g \circ f : X_1 \rightarrow X_3$  stetig.

### 1.3 Offene und abgeschlossene Mengen

**Definition 1.3.1.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, dann heißt

1.  $G \subseteq X$  offen :  $\iff \forall x \in G \exists \nu > 0 : K_\nu(x) \subseteq G$
2.  $F \subseteq X$  abgeschlossen :  $\iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in F \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \implies x \in F$
3.  $S \subseteq X$  liegt dicht in  $X$  :  $\iff \forall x \in X \exists (s_n)_{n \in \mathbb{N}}, s_n \in S : \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$

**Definition 1.3.2.** Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt *separabel*, wenn es eine höchstens abzählbare Teilmenge  $S \subseteq X$  gibt, die in diesem Raum dicht liegt.

**Beispiel 1.3.1.** Der Banachraum

$$l^\infty(\mathbb{N}) := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt} \} \quad \text{mit } d_\infty((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$$

ist nicht separabel.

**Satz 1.3.1.** Sei  $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind äquivalent:

1.  $f$  ist stetig.
2.  $\forall G \subseteq X_2 : G \text{ offen} \implies f^{-1}(G) \text{ offen.}$
3.  $\forall F \subseteq X_2 : F \text{ abgeschlossen} \implies f^{-1}(F) \text{ abgeschlossen.}$

*Bemerkung 1.3.1.* Aus Satz 1.3.1 folgt:  $K_\varepsilon(x)$  offen, da  $K_\varepsilon(x) = d(x, \cdot)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ .

### 1.4 Vollständigkeit

**Definition 1.4.1.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, dann heißt  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X$  *Cauchyfolge*, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

**Satz 1.4.1.** Jede konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $(X, d)$  ist eine Cauchy-Folge.

**Definition 1.4.2.** Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt *vollständig*, falls jede Cauchyfolge konvergiert.

**Beispiel 1.4.1.**  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  und  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  sind vollständige metrische Räume.

**Beispiel 1.4.2.** Die metrischen Räume  $(\mathbb{R}^n, f_p)$  mit  $p \in [1, \infty]$  sind vollständig.

**Satz 1.4.2.** Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:

$$Y \subseteq X \text{ vollständig} \iff Y \text{ abgeschlossen.}$$

**Satz 1.4.3.** Sei  $(X_1, d_1)$  ein metrischer Raum  $(X_2, d_2)$  ein vollständiger metrischer Raum sowie  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  isometrisch. Dann gibt es genau eine isometrisches  $\hat{\varphi} : X_1 \rightarrow X_2$  mit  $\hat{\varphi}|_S = \varphi$ .

*Beweis.* Sei  $x \in X_1$ , dann gibt es eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in S$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Somit ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  insbesondere eine Cauchyfolge. Folglich ist auch  $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und mit der Vollständigkeit von  $X_2$  gilt

$$\exists y \in X_2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = y := \hat{\varphi}(x) .$$

Wir setzen also für solche Folgen

$$\hat{\varphi} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) .$$

Zeige nun  $\hat{\varphi}$  ist wohldefiniert. Sei eine weitere Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegeben mit  $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in S$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ . Es folgt:

$$d_2(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = d_1(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d_1(x, x) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(y_n) = y .$$

Somit ist  $\hat{\varphi}$  in der Tat wohldefiniert. Weiterhin gilt  $\hat{\varphi}|_S = \varphi$ , denn wir wählen für  $x \in S$  die Folge  $(x)_{n \in \mathbb{N}}$ , somit gilt

$$\hat{\varphi} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = \hat{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x) = \varphi(x) .$$

Zeige nun  $\hat{\varphi}$  ist eine Isometrie. Seien dazu  $x, y \in X$  mit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen in  $S$ , wobei  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Somit

$$d_2(\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_2(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x_n, y_n) = d(x, y) .$$

□

**Satz 1.4.4.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum  $(\hat{X}, \hat{d})$  (bez. Vervollständigung von  $X$ ) und eine Isometrie  $\varphi : X \rightarrow \hat{X}$  (d. h.  $\forall x, y \in X : d(x, y) = \hat{d}(\varphi(x), \varphi(y))$ ), sodass das Bild  $\varphi(X)$  dicht in  $\hat{X}$  ist. Haben  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  und  $\tilde{\varphi}$  die gleiche Eigenschaft, so gibt es eine Bijektion  $\psi : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\tilde{\varphi} = \psi \circ \varphi$ .

*Beweis.* Definiere die Menge aller Cauchyfolgen in  $X$  durch

$$\hat{X}_0 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge}\} .$$

Definiere weiterhin eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $\hat{X}_0$  mit

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 .$$

Wir setzen  $\hat{X}$  als die Menge aller Äquivalenzklassen an, d. h.

$$\hat{X} = \hat{X}_0 / \sim = \{[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{X}_0\} \text{ wobei } [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] = \{(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}}\} .$$

Nun konstruieren wir die Metrik  $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow [0, \infty)$ , wobei für  $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \hat{X}$  gilt

$$\hat{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, y_m) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N, M \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall m \geq M : d(x_n, y_m) < \varepsilon .$$

Zeigen nun, dass  $\hat{d}$  wohldefiniert. Seien  $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{X}_0$  mit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dann nach Definition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y'_n) = 0.$$

Anwenden der Dreiecksungleichung ergibt

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n) \\ d(x'_n, y'_n) &\leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n). \end{aligned}$$

Somit

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \rightarrow 0.$$

Da  $(d(x_n, y_n))$  und  $(d(x'_n, y'_n))$  konvergent, folgt

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, y_m) = \lim_{n', m' \rightarrow \infty} d(x'_{n'}, y'_{m'})$$

und somit ist  $\hat{d}$  wohldefiniert. Nun gilt nach Def. 1.1.1 zu zeigen, dass  $\hat{d}$  eine Metrik auf  $\hat{X}$  ist. Wir zeigen hier nur die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, y_m) &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, z_k) + d(z_k, y_m) \iff \\ \hat{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]) &\leq \hat{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(z_k)_{k \in \mathbb{N}}]) + \hat{d}([(z_k)_{k \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]). \end{aligned}$$

Setze nun  $\varphi : X \rightarrow \hat{X}$ ,  $x \mapsto [(x)_{n \in \mathbb{N}}]$ , dies ist offensichtlich eine Isometrie. Zeigen nun, dass  $\varphi(X)$  dicht in  $\hat{X}$ . Sei  $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \hat{X}$ . Nach Voraussetzung ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge, d. h.  $\exists N_0 \in \mathbb{N}$  sodass  $\forall m, n \geq N_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon$ . Somit  $\hat{x}_{N_0} := [(x_{N_0})_{n \in \mathbb{N}}] = \varphi(x_{N_0}) \in \varphi(X)$  und

$$\hat{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], \hat{x}_{N_0}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{N_0}) < \varepsilon.$$

Somit  $\hat{x}_{N_0} \in K_\varepsilon([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]) \cap \varphi(X)$  und folglich ist  $\varphi(X)$  dicht in  $\hat{X}$ . Nun gilt zu zeigen, dass  $(\hat{X}, \hat{d})$  vollständig ist. Zeige dafür zunächst folgendes Lemma.

**Lemma 1.4.1.** Sei  $X, d$  metrischer Raum,  $S \subseteq X$  dicht in  $X$ , sodass jede Cauchyfolge in  $S$  in  $X$  konvergiert. Dann ist  $X$  vollständig.

*Beweis.* Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $X$ . Da  $S$  dicht in  $X$  gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists y_n \in S : d(x_n, y_n) < 1/n.$$

Somit ist  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch eine Cauchyfolge in  $S$ , da

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) < 1/m + d(x_m, x_n) + 1/n.$$

Nach Annahme existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n =: x \in X$ . Da

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, x) < 1/n + d(y_n, x)$$

folgt in der Tat  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . □

Nach Lemma 1.4.1 g. z. z., dass jede Cauchyfolge in  $\varphi(X)$  in  $\hat{X}$  konvergiert. Sei  $(\hat{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge in  $\varphi(X)$ , d. h.  $\hat{x}_k := (x_k, x_k, \dots)$ . Da  $\varphi$  eine Isometrie, ist  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $X$  durch

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) = \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) .$$

Somit  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \hat{X}_0$ ,  $[(x_k)_{k \in \mathbb{N}}] \in \hat{X}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , dann  $\exists N \in \mathbb{N}$  mit  $\forall k, n \geq N : d(x_k, x_n) < \varepsilon$ . Somit gilt  $\forall k \geq N$ :

$$\hat{d}(\hat{x}_k, \hat{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_k, x_n) < \varepsilon .$$

Folglich konvergiert  $(\hat{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $\hat{x} \in \hat{X}$  und  $\hat{X}$  ist vollständig. Betrachte nun  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  sowie  $\tilde{\varphi}$  mit den gleichen Eigenschaften. Wir definieren

$$\psi_0 : \varphi(X) \rightarrow \tilde{X}, \quad \psi_0(\varphi(x)) = \tilde{\varphi}(x) .$$

Dies ist eine Isometrie, da für  $x, y \in X$  gilt

$$\tilde{d}(\psi_0(\varphi(x)), \psi_0(\varphi(y))) = \tilde{d}(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)) = d(x, y) = \hat{d}(\varphi(x), \varphi(y)) .$$

Nach Satz 1.4.3 existiert eine eindeutige Erweiterung  $\psi : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$  Isometrie mit  $\psi|_{\varphi(X)} = \psi_0$ . Da  $\psi_0$  als Isometrie injektiv ist, g. z. z.  $\psi_0$  ist surjektiv. Sei also  $z \in \tilde{X}$ , dann wegen der Dichtheit von  $\tilde{\varphi}(X)$

$$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(x_n) = z .$$

Somit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge  $\implies (\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge. Da  $\hat{X}$  vollständig

$$\exists w \in \hat{X} : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = w .$$

Da  $\psi$  eine Isometrie ist folgt schließlich  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(\varphi(x_n)) = \psi(w) = z$  und somit ist  $\psi$  bijektiv.  $\square$

## 1.5 Kompaktheit

**Definition 1.5.1.** Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. D. h., wenn  $(G_i)_{i \in I}$  eine Familie offener Mengen, mit  $X = \bigcup_{i \in I} G_i$ , dann existieren endlich viele  $G_{i_1}, \dots, G_{i_n}$  mit  $X = \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}$ .

**Satz 1.5.1.** Sei  $X, d$  metrischer Raum,  $K \subseteq X$  kompakt. Dann ist  $K$  beschränkt und abgeschlossen (Umkehrung gilt i. A. nicht).

**Satz 1.5.2.** Sei  $X, d$  metrischer Raum. Dann gilt

$$X \text{ kompakt} \iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ Teilfolge } \exists y \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y$$

**Satz 1.5.3** (Heine-Borel). Betrachte die metrischen Räume  $(\mathbb{R}^n, d_p)$  mit  $p \in [1, \infty]$ . Dann ist  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt  $\iff X$  beschränkt und abgeschlossen.

**Definition 1.5.2.** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum. Dann heißt  $Y \subseteq X$  totalbeschränkt falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \exists x_1, \dots, x_M \in Y : Y \subseteq \bigcup_{i=1}^M K_\varepsilon(x_i)$$

**Satz 1.5.4.** Sei  $X, d$  ein vollständiger metrischer Raum,  $Y \subseteq X$ . Dann ist  $Y$  kompakt  $\iff Y$  abgeschlossen und total beschränkt.

*Beweis.* ( $\Rightarrow$ )

Sei  $Y$  kompakt.  $Y$  abgeschlossen folgt aus Satz 1.5.1. Zeige nun die totale Beschränktheit, sei  $\varepsilon > 0$  dafür fixiert. Dann gilt offensichtlich

$$Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} K_\varepsilon(y) \xrightarrow{Y \text{ kompakt}} \exists y_1, \dots, y_M : Y \subseteq \bigcup_{i=1}^M K_\varepsilon(y_i)$$

Somit ist  $Y$  total beschränkt.

( $\Leftarrow$ )

Sei  $Y \subseteq X$  abgeschlossen und total beschränkt und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge aus  $Y$ . Es g. z. z., dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine in  $Y$  konvergente Teilfolge besitzt. Wir nutzen die totale Beschränktheit zur Konstruktion der Teilfolge (TF).

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 : \exists \{y_i^1\}_{i=1, \dots, M_1}, Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_1} K_1(y_i^1) &\Rightarrow \exists \text{ TF } (x_{n_k}^1)_{k \in \mathbb{N}} \exists i_1 \in \{1, \dots, M_1\} \forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k}^1 \in K_1(y_{i_1}^1) \\ \varepsilon = \frac{1}{2} : \exists \{y_i^2\}_{i=1, \dots, M_2}, Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_2} K_{1/2}(y_i^2) &\Rightarrow \exists \text{ TTF } (x_{n_k}^2)_{k \in \mathbb{N}} \exists i_2 \in \{1, \dots, M_2\} \\ &\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k}^2 \in K_1(y_{i_1}^1) \cap K_{1/2}(y_{i_2}^2) \end{aligned}$$

Diese Konstruktion lässt sich nun auf  $l$  Schritte erweitern.

$$\begin{aligned} \varepsilon = 2^{-l} : \exists \{y_i^l\}_{i=1, \dots, M_l}, Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_l} K_{2^{-l}}(y_i^l) &\Rightarrow \exists \text{ TT...TF } (x_{n_k}^l)_{k \in \mathbb{N}} \exists i_l \in \{1, \dots, M_l\} \\ &\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k}^l \in K_1(y_{i_1}^1) \cap K_{1/2}(y_{i_2}^2) \cap \dots \cap K_{2^{-(l-1)}}(y_{i_{l-1}}^{l-1}) \cap K_{2^{-l}}(y_{i_l}^l) \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist  $(x_{n_k}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  Teilfolge von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und für  $k, k' \geq l$  gilt

$$x_{n_k}^k, x_{n_{k'}}^{k'} \in K_{2^{-l}}(y_{i_l}^l) \Rightarrow d(x_{n_k}^k, x_{n_{k'}}^{k'}) < 2^{-(l-1)}.$$

Folglich ist  $(x_{n_k}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und da  $X$  nach Voraussetzung vollständig, gilt

$$\exists z \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^k = z.$$

Da  $Y$  abgeschlossen, gilt insbesondere  $z \in Y$  und folglich  $Y$  kompakt. □

**Beispiel 1.5.1.** Betrachte

$$C[0, 1] := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}, \quad \|\cdot\|_\infty, \quad \text{für } f, g \in C[0, 1] : d(f, g) = \max \{|f(t) - g(t)| \mid t \in [0, 1]\}$$

Dann gilt  $Y \subseteq C[0, 1]$  ist kompakt  $\iff Y$  punktweise beschränkt, d. h.

$$\exists c > 0 \forall f \in Y \forall t \in [0, 1] : |f(t)| \leq c$$

und  $Y$  gleichgradig stetig, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in Y \forall s, t \in [0, 1] : |t - s| < \delta \implies |f(t) - f(s)| < \varepsilon.$$

**Satz 1.5.5.** Sei  $(X_1, d_1)$  ein kompakter metrischer Raum,  $(X_2, d_2)$  ein metrischer Raum, sowie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  stetig. Dann ist  $f(X_1)$  kompakt.



*Bemerkung 1.5.1.* Falls  $X_2 = \mathbb{R}$ , dann existieren nach dem Satz von Weierstraß  $x_+, x_- \in X_1$  mit  $f(x_+) = \sup f(X_1)$  und  $f(x_-) = \inf f(X_1)$ .

**Satz 1.5.6.** Sei  $(X_1, d_1)$  ein kompakter metrischer Raum,  $(X_2, d_2)$  ein metrischer Raum, sowie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  stetig. Dann ist  $f$  gleichmäßig stetig, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon .$$

## Kapitel 2

# Maß- und Integrationstheorie

### 2.1 Grundlegende Konstruktionen

**Definition 2.1.1.** Sei  $\Omega \neq \emptyset$ . Dann heißt  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$   $\sigma$ -Algebra, falls

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$
2.  $\forall A \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : A \in \mathcal{F} \implies A^C \in \mathcal{F}$
3.  $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} A_n \in \mathcal{F} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

Bezeichne  $\Omega, \mathcal{F}$  als messbaren Raum.

*Bemerkung 2.1.1.* Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, dann ist die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(X)$  der Borelmengen die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die alle offenen Mengen von  $X$  enthält. Bez.  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) =: \mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}^n$ .

**Definition 2.1.2.** Sei  $\Omega, \mathcal{F}$  ein messbarer Raum. Dann ist  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  ein Maß, falls

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{F}, \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset : \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$

Wir bezeichnen  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  als Maßraum.

**Beispiel 2.1.1.** Sei  $\Omega$  beliebig und  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Dann können wir das Zählmaß  $\mu$  definieren mit  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & A \text{ endlich} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist  $\Omega$  meist abzählbar, z. B.  $\Omega = \mathbb{N}$  oder  $\Omega = \mathbb{Z}$

**Beispiel 2.1.2.** Sei  $\Omega = \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{F} = \mathcal{B}^n$ . Dann definieren wir das Lebesgue-Maß  $l^n$  mit

$$l^n \left( \bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i) \right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) .$$

Für  $l = 1$  gilt damit insbesondere  $l^1([a, b)) =: l([a, b)) = b - a$ .

## 2.2 Integration

**Definition 2.2.1.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein messbarer Raum,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  heißt messbar (bez.  $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ ), falls

$$\forall r > 0, z \in \mathbb{C} : f^{-1}(K_r(z)) \in \mathcal{F} \quad [ \iff \forall U \in \mathcal{B}(\mathbb{C}) : f^{-1}(U) \in \mathcal{F} ] .$$

Analog ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar (bez.  $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ ), falls

$$\forall U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$$

*Bemerkung 2.2.1.* Wir bezeichnen weiterhin  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, [0, \infty)) := \mathcal{M}_+(\Omega)$ .

*Bemerkung 2.2.2.* Sei  $\Omega, \mathcal{F}$  ein messbarer Raum,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $f$  messbar

$$\iff \forall c \in \mathbb{R} : \{f > c\} := \{x \in \Omega \mid f(x) > c\} \in \mathcal{F} .$$

**Definition 2.2.2.** Sei  $A$  eine Menge. Eine Funktion der Form

$$1_A(\omega) \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

heißt *Indikatorfunktion* der Menge  $A$ .

**Satz 2.2.1** (Integral für nichtnegative, messbare Funktionen). Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum. Dann gibt es genau eine Abbildung  $\varphi : \mathcal{M}_+(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  mit:

1.  $\forall A \in \mathcal{F} : \varphi(1_A) = \mu(A)$
2.  $\forall f, g \in \mathcal{M}_+(\Omega), \lambda \in [0, \infty] : \varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$
3.  $\forall (f_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} f_{n+1} \geq f_n \geq 0 : \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(f_n)$

Wir schreiben  $\varphi(f) =: \int f d\mu =: \int f(\omega) d(\omega) =: \int f(\omega) \mu(d\omega)$ .

*Bemerkung 2.2.3.* 3. ist auch als Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz bekannt.

*Bemerkung 2.2.4.* Wir können in 2.  $\lambda \in [0, \infty]$  wählen unter Beachtung, dass auf den erweiterten reellen Zahlen  $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  gilt:

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0 \quad \text{und} \quad (+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = 0 .$$

**Definition 2.2.3** (Integral für messbare Funktionen). Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum,  $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ . Dann definieren wir

$$f^+ := \max\{f, 0\}, \quad f^- := \max\{-f, 0\} \implies f = f^+ - f^- \quad \text{und} \quad |f| = f^+ + f^- .$$

Somit erhalten wir als Definition für das Integral (für integrierbare Funktionen, siehe Def. 2.2.4):

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu .$$

Sei nun  $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ , dann folgt  $\Re(f), \Im(f) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ . Somit können wir definieren:

$$\int f d\mu := \int \Re(f) d\mu + i \cdot \int \Im(f) d\mu .$$

**Definition 2.2.4.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum. Dann bezeichnen wir  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  als  $(\mu)$ -integrierbar, falls  $f \in \mathcal{L}^1$ , wobei gilt

$$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \mid \int |f| d\mu < \infty \right\}.$$

Wir schreiben kurz auch  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ .

*Bemerkung 2.2.5.* Analog definiert man  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ . Somit:

$$\int \cdot d\mu : \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R} [\mathbb{C}]) \rightarrow \mathbb{R} [\mathbb{C}]$$

*Bemerkung 2.2.6.* Für  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  gilt insbesondere  $|f| \geq \Re(f)$ ,  $|f| \geq \Im(f)$ , d. h. das Integral ist wohldefiniert.

**Satz 2.2.2.** Seien  $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  sowie eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  sowie  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

1.  $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$
2.  $\int \lambda f + g d\mu = \lambda \int f d\mu + \int g d\mu$
3.  $\mu(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}) = 0 \implies \int f d\mu = \int g d\mu \implies \int |f - g| d\mu = 0$
4.  $\mu(\{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| = \infty\}) = 0$
5.  $\exists h : \Omega \rightarrow [0, \infty], h \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \leq h \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \implies \int f d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$

*Bemerkung 2.2.7.* 5. ist auch als Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz bekannt.

# Kapitel 3

## Normierte Räume

### 3.1 Definitionen

*Bemerkung 3.1.1.* Wir betrachten hier Vektorräume über den Körpern  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Definition 3.1.1.** Eine *Norm* über einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit:

1.  $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
2.  $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$

Dann heißt  $V, \|\cdot\|$  normierter Raum.

*Bemerkung 3.1.2.* Falls 3. nicht gilt, bezeichnen wir die Abbildung als *Halbnorm*.

**Satz 3.1.1.** Ein normierter Raum  $(V, \|\cdot\|)$  ist ein metrischer Raum mit der Metrik  $d$ , definiert durch

$$\forall x, y \in V : d(x, y) = \|x - y\| .$$

**Beispiel 3.1.1.** In diesem Fall gilt für die Operationen  $+: V \times V \rightarrow V$  und  $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$  (mit  $\lambda \in \mathbb{K}, x, y, x, y' \in V$ ):

$$\begin{aligned} d(x' + y', x + y) &= \|x' + y' - (x + y)\| \leq \|x' + y'\| + \|x + y\| \\ d(\lambda x, \lambda x') &= \|\lambda(x - x')\| = |\lambda| \|x - x'\| = |\lambda| d(x, x') \end{aligned}$$

**Definition 3.1.2.** Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Raum.

### 3.2 Vervollständigung

**Satz 3.2.1.** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum, dann existiert eine Vervollständigung  $(\hat{V}, \hat{\|\cdot\|})$ , d. h.  $V$  kann in einen Banachraum eingebettet werden.

*Beweis.* Definiere Analog zu Satz 1.4.4:

$$\hat{V}_0 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in V, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge}\}.$$

$$\text{Äquivalenzrelation } \sim \text{ auf } \hat{V}_0: (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

$$\text{Menge aller Äquivalenzklassen: } \hat{V} = \hat{V}_0 / \sim = \{[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{X}_0\}$$

Dabei ist  $\hat{V}$  ein Vektorraum mit  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{V}_0$  :

$$\lambda [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] := [(\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \quad \text{und} \quad [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] + [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] = [(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}] .$$

Als Norm auf  $\hat{V}$  definieren wir

$$\hat{\|} [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| .$$

Zeige zunächst die Wohldefiniertheit. Der obige Grenzwert existiert, da für  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{V}_0$  die Folge  $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist, mit

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} |\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0 .$$

Betrachte nun  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{V}_0$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\|x_n\| - \|y_n\|| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

und somit ist  $\hat{\|} \cdot \hat{\|}$  unabhängig vom Repräsentanten. Für die Normeigenschaften zeige hier nur die Dreiecksungleichung und Definitheit (1. Eigenschaft trivial):

$$\begin{aligned} \hat{\|} [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] + [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| + \|y_n\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = \hat{\|} [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} + \hat{\|} [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} \end{aligned}$$

Weiterhin:

$$\hat{\|} [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0 \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (0)_{n \in \mathbb{N}} \iff [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] = [(0)_{n \in \mathbb{N}}] = 0_{\hat{V}}$$

□

### 3.3 $L^p$ -Räume

**Definition 3.3.1.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum,  $p \in [1, \infty)$ , dann definieren wir

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}), \int_{\Omega} |f|^p < \infty \right\} .$$

Wir schreiben kurz auch  $\mathcal{L}^p(\mu)$ .

*Bemerkung 3.3.1.*  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  definiert einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

**Satz 3.3.1.**  $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(\mu) \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\|f\|_p := \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}$  ist eine Halbnorm.

*Beweis.* Siehe nach Satz 3.3.2. □

*Bemerkung 3.3.2.*  $\|\cdot\|_p$  ist keine Norm.

**Beispiel 3.3.1.** Betrachte  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $f = 1_C \neq 0$ ,  $\mu = l$ , wobei  $C$  die Cantormenge und  $l$  das Lebesgue-Maß sind. Dann gilt:

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} (1_C)^p dl \right)^{\frac{1}{p}} = l(C)^{\frac{1}{p}} = 0$$

**Lemma 3.3.1** (Youngsche Ungleichung). Seien  $u, v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $p, q \in \mathbb{R}_{>1}$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt

$$u \cdot v \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

**Satz 3.3.2** (Hölder Ungleichung). Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum,  $p, q \in (1, \infty)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  und  $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ ,  $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ . Dann gilt  $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$  und  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .

*Beweis.* Nehmen o. B. d. A. an  $f, g \geq 0$ ,  $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ . Mit Lemma 3.3.1 gilt

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 &= \int_{\Omega} f(x)g(x)\mu(dx) \leq \int_{\Omega} \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q} \mu(dx) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} f(x)^p \mu(dx) + \frac{1}{q} \int_{\Omega} g(x)^q \mu(dx) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q \end{aligned}$$

□

**Zu Satz 3.3.1.** 1. Eigenschaft ist trivial. Zeige nun noch die Dreiecksungleichung. Seien dafür  $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ . Dann gilt auch die Abschätzung:

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} |f + g| \leq |f + g|^{p-1} |f| + |f + g|^{p-1} |g|.$$

Sei  $q \in \mathbb{R}$  so gewählt, dass  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff p + q = pq$ . Dann gilt  $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\mu)$ , da

$$\left(|f + g|^{p-1}\right)^q = |f + g|^{pq-q} = |f + g|^p$$

Dies ist in der Tat integrierbar, da  $|f + g|^p \leq |f|^p + |g|^p$  und nach Voraussetzung  $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ . Somit erhalten wir

$$\|f + g\|_p^p = \int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \leq \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |f| + |f + g|^{p-1} |g| d\mu = \|(f + g)^{p-1} f\|_1 + \|(f + g)^{p-1} g\|_1.$$

Anwenden der Hölder Ungleichung ergibt

$$\leq \|f + g\|_q \|f\|_p + \|f + g\|_q \|g\|_p = \left(\int_{\Omega} |f + g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} (\|f\|_p + \|g\|_p) = \left(\int_{\Omega} |f + g|^p\right)^{\frac{1}{q}} (\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Sei o. B. d. A.  $f + g \neq 0$  fast überall (sonst Beh. trivial), dann gilt:

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^{p/q} (\|f\|_p + \|g\|_p) \iff \|f + g\|_p^{p(1-1/q)} \leq \|f\|_p + \|g\|_p \iff \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

□

**Definition 3.3.2.** Sei  $\Omega, \mathcal{F}, \mu$  ein Maßraum sowie  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ . Dann definieren wir

$$f \stackrel{\mu}{=} g : \iff \mu(\{\omega \in \Omega | f(\omega) \neq g(\omega)\}) =: \mu(\{f \neq g\}) = 0.$$

Man sagt auch  $f = g$   $\mu$ -fast überall.

*Bemerkung 3.3.3.* Die Relation  $\stackrel{\mu}{=}$  ist eine Äquivalenzrelation.

**Satz 3.3.3.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum sowie  $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ ,  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ . Dann gilt

$$f \stackrel{\mu}{=} g \implies g \in \mathcal{L}^p(\mu) \text{ und } \|f\|_p = \|g\|_p .$$

*Beweis.* Gelte o. B. d. A.  $g \stackrel{\mu}{=} 0$ . Betrachte hier  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \cup \{-\infty, \infty\}$ , sei  $A := \{\omega \in \Omega \mid g(\omega) \neq 0\}$ . Nach Voraussetzung gilt  $\mu(A) = 0$  und somit

$$|g| \leq \infty \cdot 1_A \implies \int_{\Omega} |g|^p d\mu \leq \infty \cdot \int_{\Omega} 1_A d\mu = \infty \cdot 0 = 0 .$$

Folglich gilt also in der Tat  $g \in \mathcal{L}^p$ . Zeige nun  $\|f\|_p = \|g\|_p$ . Dabei nutzen wir  $f \stackrel{\mu}{=} g \iff g - f \stackrel{\mu}{=} 0 \implies \|g - f\|_p = 0$ . Es folgt

$$\|g\|_p = \|f + (g - f)\|_p \leq \|f\|_p + \|g - f\|_p = \|f\|_p$$

Analog erhalten wir  $\|f\|_p \leq \|g\|_p$  und somit in der Tat  $\|f\|_p = \|g\|_p$ .  $\square$

**Satz 3.3.4.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum, dann wird  $\mathcal{L}^p(\mu) / \stackrel{\mu}{=}$  mit  $\forall f \in \mathcal{L}^p(\mu) : \| [f] \|_p := \|f\|_p$  ein normierter Raum.

*Beweis.* Die Wohldefiniertheit der Norm folgt aus Satz 3.3.3. Weiterhin lassen sich die Halbnormseigenschaften auf Satz 3.3.1 zurückführen. Es g. z. z., dass  $\|\cdot\|_p$  auf  $\mathcal{L}^p(\mu) / \stackrel{\mu}{=}$  definit ist. Angenommen für  $[f] \in \mathcal{L}^p(\mu) / \stackrel{\mu}{=}$  gilt  $\|[f]\|_p = 0 \iff \int_{\Omega} |f|^p = 0$ . Nehme weiterhin an, dass  $f \stackrel{\mu}{\neq} 0 \iff 0 < \mu(\{|f| > 0\})$ . Somit

$$0 < \mu(\{|f| > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{|f| > \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(|f| > \frac{1}{n}\right) .$$

Folglich  $\exists c > 0 : \mu(\{|f| \geq c\}) > 0$ . Damit erhalten wir mit  $A := \{|f| > c\}$

$$|f|^p \geq c^p \cdot 1_A \implies \int |f|^p \geq c^p \mu(A) > 0 .$$

Dies ist ein Widerspruch und folglich gilt  $f \stackrel{\mu}{=} 0$ .  $\square$

**Definition 3.3.3.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum, dann

$$L^p(\mu) := L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) / \stackrel{\mu}{=}$$

Wir schreiben meist  $L^p(\mu)$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $L^p(\mu, \mathbb{C})$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

*Bemerkung 3.3.4.* Statt  $[f] \in L^p$  schreiben wir nur  $f \in L^p$ .

**Definition 3.3.4.**  $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  heißt *wesentlich beschränkt* ( $\iff f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ ), falls

$$\exists c \in \mathbb{R}_{>0} : \mu(\{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| > c\}) = 0 .$$

Dann definieren wir

$$\|f\|_\infty := \inf \{c \mid \mu(\{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| > c\}) = 0\} .$$



**Satz 3.3.5.**  $\|\cdot\|_\infty$  ist eine Halbnorm und es gilt  $f \stackrel{\mu}{=} g \iff \|f - g\|_\infty = 0$ .

*Beweis.* Die 1. Eigenschaft und die zweite Aussage sind trivial, wir zeigen hier wieder nur die Dreiecksungleichung. Seien  $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  wesentlich beschränkt,  $c, d > 0$  und  $A := \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| > c\}$ ,  $B := \{\omega \in \Omega \mid |g(\omega)| > d\}$ . Somit

$$\mu(A) = \mu(B) = 0 \implies \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0.$$

Es gilt

$$D := \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega) + g(\omega)| > c + d\} \subseteq A \cup B$$

und somit auch  $\mu(D) = 0$ . Sei nun  $\omega \in (A \cup B)^C$ , dann

$$|f(\omega)| \leq c \wedge |g(\omega)| \leq d \implies |f(\omega) + g(\omega)| \leq |f(\omega)| + |g(\omega)| \leq c + d.$$

D. h.  $f + g$  ist wesentlich durch  $c + d$  beschränkt und somit folgt in der Tat

$$\|f + g\|_\infty \leq c + d \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

□

**Satz 3.3.6.** Sei  $\Omega, \mathcal{F}, \mu$  ein Maßraum. Dann ist  $\mathcal{L}^\infty(\mu) / \underline{\mu}$  mit  $\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mu) : \|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty$  ein normierter Raum.

**Definition 3.3.5.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum, dann

$$L^\infty(\mu) := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu) / \underline{\mu}.$$

Wir schreiben meist  $L^\infty(\mu)$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $L^\infty(\mu, \mathbb{C})$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

*Bemerkung 3.3.5.*  $L^p(\mu)$  für  $p \in [1, \infty]$  sind keine direkten Funktionenräume.

**Satz 3.3.7.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum, dann ist  $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$  ein Banachraum für  $p \in [1, \infty]$ .

*Beweis.* Betrachte hier nur den Fall  $p = 1$ . Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $L^p(\mu)$ , d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N_0 : \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon.$$

Daher gilt insbesondere

$$\forall k > 0 \exists n_k \forall m \geq n_k : \|f_m - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}.$$

Somit können wir solche  $n_k$  mit  $n_{k+1} > n_k$  wählen und erhalten eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}$ . Für  $p = 1$  mit Beppo-Levi und  $g_k := |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_\Omega g_k d\mu = \int_\Omega \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k d\mu < \infty.$$

Somit gilt insbesondere

$$\mu \left( \left\{ \omega \in \Omega \mid \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(\omega) = \infty \right\} \right) = 0.$$

Nehmen hier o. B. d. A. an, dass  $\forall \omega \in \Omega : \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(\omega) < \infty$ . Somit bildet  $\forall \omega \in \Omega$  die Folge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und ist somit konvergent, d. h.  $\forall \omega \in \Omega : f(\omega) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(\omega)$  existiert. Somit gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega) = f_{n_0}(\omega) - f(\omega)$$

Wir können eine integrierbare Majorante für die  $f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega)$  finden mit

$$|f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega)| \leq \sum_{l=0}^{k-1} |f_{n_l}(\omega) - f_{n_{l+1}}(\omega)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(\omega) =: g(\omega) \text{ mit } \int_{\Omega} g d\mu < \infty .$$

Nach dem Satz von Lebesgue folgt somit, dass  $f$  integrierbar (d. h.  $f \in L^1(\mu)$ ) und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega) - (f_{n_0}(\omega) - f(\omega))| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f\|_1 = 0 .$$

Also ist  $L^1(\mu)$  in der Tat vollständig. □

### 3.4 Beispiele für normierte Räume

**Beispiel 3.4.1.** Betrachte

$$\Omega = \{1, \dots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}_{>0} \quad \text{mit} \quad \forall A \subseteq \Omega : \mu(A) = |A| .$$

Dann gilt wegen der Korrespondenz als Vektorraum

$$L^p(\mu) = \mathbb{R}^n \text{ und } L^p(\mu, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$$

wegen der Korrespondenz

$$f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix} .$$

**Beispiel 3.4.2** (Folgenräume). Folgende Vektorräume

$$\begin{aligned} c_0 &:= \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\} \\ c &:= \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert} \right\} \\ \ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) &:= \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c \right\} \end{aligned}$$

sind normierte Vektorräume (insbesondere Banachräume) mit der Supremumsnorm

$$\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| .$$

Betrachte weiterhin die Folgenräume  $\ell^p$  mit  $p \in [1, \infty)$ , wobei  $\mu$  das Zählmaß:

$$\ell_{\mathbb{K}}^p = L^p(\mathbb{N}, \mu, \mathbb{K}) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$$

mit der Norm  $\|\cdot\|_p$  definiert durch

$$\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p : \|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Dabei sind  $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$  für  $p \in [1, \infty)$  Banachräume.

**Beispiel 3.4.3.** Betrachte

$$\Omega = \mathbb{R} \text{ bzw. } \Omega = \mathbb{R}^d \text{ mit Lebesgue-Maß } l \text{ bzw. } l^d.$$

mit den entsprechenden Räumen  $L^p(l)$ ,  $L^p(l, \mathbb{C})$  bzw.  $L^p(l^d)$  und den bekannten Normen. Betrachte

$$\Omega = [0, 1] \text{ mit Lebesgue-Maß } l$$

dann ergibt sich

$$L^p([0, 1], l) \text{ mit } \forall f \in L^p([0, 1], l) : \|f\|_p = \int_0^1 |f(x)|^p dx$$

Der normierte Raum  $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$  ist ein Banachraum, wobei

$$C^0([0, 1]) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\} \quad \text{und} \quad \forall f \in C^0([0, 1]) : \|f\|_\infty = \sup \{|f(t)| \mid t \in [0, 1]\}$$

Hingegen ist  $C^0([0, 1])$  nicht vollständig bzgl. der Norm  $\|f\|_p = \int_0^1 |f(t)|^p dt$ . Der Raum  $(C^r([0, 1]), \|\cdot\|_{k,\infty})$

$$C^r([0, 1]) = \{f \in C^0([0, 1]) \mid f \text{ } r\text{-mal stetig differenzierbar}\} \quad \text{und} \quad \forall f \in C^r([0, 1]) : \|f\|_{k,\infty} = \sum_{j=0}^r \|f^{(j)}\|_\infty$$

ist ein Banachraum. Man kann auch weitere Normen auf  $C^r([0, 1])$  definieren, bspw. für  $r = 1$  und  $f \in C^1([0, 1])$

$$\|\cdot\|_{1,p} = \|f\|_p + \|f'\|_p \quad \text{oder} \quad \hat{\|f\|}_{1,p} = \left( \int_0^1 |f'(x)|^p + |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

*Bemerkung 3.4.1.* Es gibt eine Inklusion  $C^0([0, 1]) \hookrightarrow L^p([0, 1])$ , da in jeder Äquivalenzklasse nur eine stetige Funktion ist.

### 3.5 Äquivalenz von Normen

**Definition 3.5.1.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\|\cdot\|, \hat{\|\cdot\|} : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  Normen. Diese heißen äquivalent, falls

$$\exists 0 < c_1 < c_2 \forall x \in V : c_1 \|x\| \leq \hat{\|x\|} \leq c_2 \|x\|.$$

**Beispiel 3.5.1.** Betrachte  $\mathbb{R}^n$  mit den Normen  $(x \in \mathbb{R}^n) : \|x\|_\infty = \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}$  und  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ , dann gilt  $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$$

d. h.  $\|\cdot\|_\infty$  und  $\|\cdot\|_1$  sind äquivalent.

**Beispiel 3.5.2.** Betrachte  $C^1([0, 1])$  mit den Normen  $\|\cdot\|_\infty$  und  $\|\cdot\|_{1,\infty}$ , wie in Bsp. 3.4.3 definiert. Diese sind nicht äquivalent. Definiere  $f_n(x) = x^n \in C^1([0, 1])$ , somit  $f'_n(x) = n \cdot x^{n-1}$ . Folglich

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad \text{und} \quad \|f_n\|_{1,\infty} = \|f_n\|_\infty + \|f'_n\|_\infty = 1 + n$$

und es existieren offensichtlich keine Konstanten  $0 < c_1 < c_2$  mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : c_1 \leq n + 1 \leq c_2.$$

**Satz 3.5.1.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ . Dann sind alle Normen auf  $V$  äquivalent und jeder solche normierte Vektorraum ist ein Banachraum.

## Kapitel 4

# Hilberträume

## Kapitel 5

# Lineare Operatoren