

Skript Funktionalanalysis

Prof. Volkmar Liebscher SoSe2024

Jonas Harder und Jakob Kropf

Version vom 29. Mai 2024

Todo-Liste

| | |
|--|----|
| Dieser Beweis muss noch beendet werden. | 24 |
| ??? | 27 |
| Hier gab es in der Vorlesung einen Nachtrag, allerdings sollte es so auch gehen. | 29 |
| In der Vorlesung wurde im Lemma $\ \varphi\ \geq \ \varphi_0\ $ angegeben, aber dies sollte direkt aus $\varphi _U = \varphi_0$ folgen und wir zeigen im Lemma \leq und somit Gleichheit, oder? | 34 |
| Es ist nicht ganz klar, wozu die letzte Abschätzung nötig ist und wieso die Eindeutigkeit gilt. . | 36 |

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Metrische Räume | 3 |
| 1.1 | Definitionen | 3 |
| 1.2 | Konvergenz und Stetigkeit | 3 |
| 1.3 | Offene und abgeschlossene Mengen | 4 |
| 1.4 | Vollständigkeit | 4 |
| 1.5 | Kompaktheit | 7 |
| 2 | Maß- und Integrationstheorie | 10 |
| 2.1 | Grundlegende Konstruktionen | 10 |
| 2.2 | Integration | 11 |
| 3 | Normierte Räume | 13 |
| 3.1 | Definitionen | 13 |
| 3.2 | Vervollständigung | 13 |
| 3.3 | L^p -Räume | 14 |
| 3.4 | Beispiele für normierte Räume | 18 |
| 3.5 | Äquivalenz von Normen | 19 |
| 4 | Hilberträume | 20 |
| 4.1 | Definitionen | 20 |
| 4.2 | Beispiele | 21 |
| 4.3 | Orthogonalbasen | 22 |
| 4.4 | Projektionen | 24 |
| 5 | Lineare Operatoren | 27 |
| 5.1 | Definitionen | 27 |
| 5.2 | Das Dual | 30 |
| 5.3 | Der Satz von Hahn-Banach | 34 |

Kapitel 1

Metrische Räume

1.1 Definitionen

Definition 1.1.1. Eine Menge T , versehen mit einer Abbildung $d : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften ($s, t, u \in T$ beliebig)

1. $d(s, t) \geq 0$,
2. $d(s, t) = d(t, s)$
3. $d(s, u) \leq d(s, t) + d(t, u)$
4. $d(s, t) = 0 \iff s = t$

ist *metrischer Raum* mit *Metrik* d . Falls nur (\Leftarrow) in 4. gilt, handelt es sich um eine *Halbmetrik*.

Beispiel 1.1.1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist ein metrischer Raum.

Beispiel 1.1.2. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist ein metrischer Raum.

Beispiel 1.1.3. (\mathbb{R}^n, d_i) mit $i \in \{1, 2, \infty\}$ sind metrische Räume, wobei für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$d_1 := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad d_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad d_\infty := \max\{|x_i - y_i| \mid i : 1, \dots, n\}$$

Definition 1.1.2. Sei X, d ein metrischer Raum. Dann definieren wir die offene bzw. abgeschlossene Kugel um $x \in X$ wie folgt.

$$K_\nu(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq \nu\} \quad \overline{K_\nu(x)} := \{y \in X \mid d(x, y) \leq \nu\}$$

Weiterhin ist U eine Umgebung von $x \iff \exists \nu > 0 : K_\nu(x) \subseteq U$.

1.2 Konvergenz und Stetigkeit

Definition 1.2.1. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum X heißt *konvergent* gegen $x \in X$ (bez. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

Satz 1.2.1. Der Limes einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

Satz 1.2.2. Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent und hat den gleichen Grenzwert.

Definition 1.2.2. Sei $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann heißt f *stetig an der Stelle* $x_0 \in X_1$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_1(x, x_0) < \delta \implies d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Satz 1.2.3. Sei $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist stetig an x_0
2. $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in X_1 \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \in X_1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

Satz 1.2.4. Seien $f : X_1 \rightarrow X_2, g : X_2 \rightarrow X_3$ stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Dann ist die Verknüpfung $g \circ f : X_1 \rightarrow X_3$ stetig.

1.3 Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 1.3.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann heißt

1. $G \subseteq X$ offen : $\iff \forall x \in G \exists \nu > 0 : K_\nu(x) \subseteq G$
2. $F \subseteq X$ abgeschlossen : $\iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in F \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \implies x \in F$
3. $S \subseteq X$ liegt dicht in X : $\iff \forall x \in X \exists (s_n)_{n \in \mathbb{N}}, s_n \in S : \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$

Definition 1.3.2. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *separabel*, wenn es eine höchstens abzählbare Teilmenge $S \subseteq X$ gibt, die in diesem Raum dicht liegt.

Beispiel 1.3.1. Der Banachraum

$$l^\infty(\mathbb{N}) := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt} \} \quad \text{mit } d_\infty((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$$

ist nicht separabel.

Satz 1.3.1. Sei $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind äquivalent:

1. f ist stetig.
2. $\forall G \subseteq X_2 : G \text{ offen} \implies f^{-1}(G) \text{ offen.}$
3. $\forall F \subseteq X_2 : F \text{ abgeschlossen} \implies f^{-1}(F) \text{ abgeschlossen.}$

Bemerkung 1.3.1. Aus Satz 1.3.1 folgt: $K_\varepsilon(x)$ offen, da $K_\varepsilon(x) = d(x, \cdot)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$.

1.4 Vollständigkeit

Definition 1.4.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann heißt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X$ *Cauchyfolge*, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Satz 1.4.1. Jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) ist eine Cauchy-Folge.

Definition 1.4.2. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchyfolge konvergiert.

Beispiel 1.4.1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sind vollständige metrische Räume.

Beispiel 1.4.2. Die metrischen Räume (\mathbb{R}^n, f_p) mit $p \in [1, \infty]$ sind vollständig.

Satz 1.4.2. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:

$$Y \subseteq X \text{ vollständig} \iff Y \text{ abgeschlossen.}$$

Satz 1.4.3. Sei (X_1, d_1) ein metrischer Raum (X_2, d_2) ein vollständiger metrischer Raum sowie $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ isometrisch. Dann gibt es genau eine isometrisches $\hat{\varphi} : X_1 \rightarrow X_2$ mit $\hat{\varphi}|_S = \varphi$.

Beweis. Sei $x \in X_1$, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in S$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Somit ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ insbesondere eine Cauchyfolge. Folglich ist auch $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und mit der Vollständigkeit von X_2 gilt

$$\exists y \in X_2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = y := \hat{\varphi}(x) .$$

Wir setzen also für solche Folgen

$$\hat{\varphi} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) .$$

Zeige nun $\hat{\varphi}$ ist wohldefiniert. Sei eine weitere Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben mit $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in S$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$. Es folgt:

$$d_2(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = d_1(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d_1(x, x) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(y_n) = y .$$

Somit ist $\hat{\varphi}$ in der Tat wohldefiniert. Weiterhin gilt $\hat{\varphi}|_S = \varphi$, denn wir wählen für $x \in S$ die Folge $(x)_{n \in \mathbb{N}}$, somit gilt

$$\hat{\varphi} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = \hat{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x) = \varphi(x) .$$

Zeige nun $\hat{\varphi}$ ist eine Isometrie. Seien dazu $x, y \in X$ mit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in S , wobei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Somit

$$d_2(\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_2(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x_n, y_n) = d(x, y) .$$

□

Satz 1.4.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum (\hat{X}, \hat{d}) (bez. Vervollständigung von X) und eine Isometrie $\varphi : X \rightarrow \hat{X}$ (d. h. $\forall x, y \in X : d(x, y) = \hat{d}(\varphi(x), \varphi(y))$), sodass das Bild $\varphi(X)$ dicht in \hat{X} ist. Haben (\tilde{X}, \tilde{d}) und $\tilde{\varphi}$ die gleiche Eigenschaft, so gibt es eine Bijektion $\psi : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ mit $\tilde{\varphi} = \psi \circ \varphi$.

Beweis. Definiere die Menge aller Cauchyfolgen in X durch

$$\hat{X}_0 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge}\} .$$

Definiere weiterhin eine Äquivalenzrelation \sim auf \hat{X}_0 mit

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 .$$

Wir setzen \hat{X} als die Menge aller Äquivalenzklassen an, d. h.

$$\hat{X} = \hat{X}_0 / \sim = \{[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{X}_0\} \text{ wobei } [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] = \{(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}}\} .$$

Nun konstruieren wir die Metrik $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow [0, \infty)$, wobei für $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \hat{X}$ gilt

$$\hat{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, y_m) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N, M \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall m \geq M : d(x_n, y_m) < \varepsilon .$$

Zeigen nun, dass \hat{d} wohldefiniert. Seien $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{X}_0$ mit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dann nach Definition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y'_n) = 0.$$

Anwenden der Dreiecksungleichung ergibt

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n) \\ d(x'_n, y'_n) &\leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n). \end{aligned}$$

Somit

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \rightarrow 0.$$

Da $(d(x_n, y_n))$ und $(d(x'_n, y'_n))$ konvergent, folgt

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, y_m) = \lim_{n', m' \rightarrow \infty} d(x'_{n'}, y'_{m'})$$

und somit ist \hat{d} wohldefiniert. Nun gilt nach Def. 1.1.1 zu zeigen, dass \hat{d} eine Metrik auf \hat{X} ist. Wir zeigen hier nur die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, y_m) &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, z_k) + d(z_k, y_m) \iff \\ \hat{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]) &\leq \hat{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(z_k)_{k \in \mathbb{N}}]) + \hat{d}([(z_k)_{k \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]). \end{aligned}$$

Setze nun $\varphi : X \rightarrow \hat{X}$, $x \mapsto [(x)_{n \in \mathbb{N}}]$, dies ist offensichtlich eine Isometrie. Zeigen nun, dass $\varphi(X)$ dicht in \hat{X} . Sei $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \hat{X}$. Nach Voraussetzung ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, d. h. $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ sodass $\forall m, n \geq N_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Somit $\hat{x}_{N_0} := [(x_{N_0})_{n \in \mathbb{N}}] = \varphi(x_{N_0}) \in \varphi(X)$ und

$$\hat{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], \hat{x}_{N_0}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{N_0}) < \varepsilon.$$

Somit $\hat{x}_{N_0} \in K_\varepsilon([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]) \cap \varphi(X)$ und folglich ist $\varphi(X)$ dicht in \hat{X} . Nun gilt zu zeigen, dass (\hat{X}, \hat{d}) vollständig ist. Zeige dafür zunächst folgendes Lemma.

Lemma 1.4.1. Sei X, d metrischer Raum, $S \subseteq X$ dicht in X , sodass jede Cauchyfolge in S in X konvergiert. Dann ist X vollständig.

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X . Da S dicht in X gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists y_n \in S : d(x_n, y_n) < 1/n.$$

Somit ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge in S , da

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) < 1/m + d(x_m, x_n) + 1/n.$$

Nach Annahme existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n =: x \in X$. Da

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, x) < 1/n + d(y_n, x)$$

folgt in der Tat $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. □

Nach Lemma 1.4.1 g. z. z., dass jede Cauchyfolge in $\varphi(X)$ in \hat{X} konvergiert. Sei $(\hat{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\varphi(X)$, d. h. $\hat{x}_k := (x_k, x_k, \dots)$. Da φ eine Isometrie, ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X durch

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) = \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) .$$

Somit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \hat{X}_0$, $[(x_k)_{k \in \mathbb{N}}] \in \hat{X}$. Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\forall k, n \geq N : d(x_k, x_n) < \varepsilon$. Somit gilt $\forall k \geq N$:

$$\hat{d}(\hat{x}_k, \hat{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_k, x_n) < \varepsilon .$$

Folglich konvergiert $(\hat{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $\hat{x} \in \hat{X}$ und \hat{X} ist vollständig. Betrachte nun (\tilde{X}, \tilde{d}) sowie $\tilde{\varphi}$ mit den gleichen Eigenschaften. Wir definieren

$$\psi_0 : \varphi(X) \rightarrow \tilde{X}, \quad \psi_0(\varphi(x)) = \tilde{\varphi}(x) .$$

Dies ist eine Isometrie, da für $x, y \in X$ gilt

$$\tilde{d}(\psi_0(\varphi(x)), \psi_0(\varphi(y))) = \tilde{d}(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)) = d(x, y) = \hat{d}(\varphi(x), \varphi(y)) .$$

Nach Satz 1.4.3 existiert eine eindeutige Erweiterung $\psi : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$ Isometrie mit $\psi|_{\varphi(X)} = \psi_0$. Da ψ_0 als Isometrie injektiv ist, g. z. z. ψ_0 ist surjektiv. Sei also $z \in \tilde{X}$, dann wegen der Dichtheit von $\tilde{\varphi}(X)$

$$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(x_n) = z .$$

Somit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge $\implies (\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge. Da \hat{X} vollständig

$$\exists w \in \hat{X} : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = w .$$

Da ψ eine Isometrie ist folgt schließlich $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(\varphi(x_n)) = \psi(w) = z$ und somit ist ψ bijektiv. \square

1.5 Kompaktheit

Definition 1.5.1. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. D. h., wenn $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen, mit $X = \bigcup_{i \in I} G_i$, dann existieren endlich viele G_{i_1}, \dots, G_{i_n} mit $X = \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}$.

Satz 1.5.1. Sei X, d metrischer Raum, $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K beschränkt und abgeschlossen (Umkehrung gilt i. A. nicht).

Satz 1.5.2. Sei X, d metrischer Raum. Dann gilt

$$X \text{ kompakt} \iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ Teilfolge } \exists y \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y$$

Satz 1.5.3 (Heine-Borel). Betrachte die metrischen Räume (\mathbb{R}^n, d_p) mit $p \in [1, \infty]$. Dann ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt $\iff X$ beschränkt und abgeschlossen.

Definition 1.5.2. Sei (X, d) metrischer Raum. Dann heißt $Y \subseteq X$ totalbeschränkt falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \exists x_1, \dots, x_M \in Y : Y \subseteq \bigcup_{i=1}^M K_\varepsilon(x_i)$$

Satz 1.5.4. Sei X, d ein vollständiger metrischer Raum, $Y \subseteq X$. Dann ist Y kompakt $\iff Y$ abgeschlossen und total beschränkt.

Beweis. (\Rightarrow)

Sei Y kompakt. Y abgeschlossen folgt aus Satz 1.5.1. Zeige nun die totale Beschränktheit, sei $\varepsilon > 0$ dafür fixiert. Dann gilt offensichtlich

$$Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} K_\varepsilon(y) \xrightarrow{Y \text{ kompakt}} \exists y_1, \dots, y_M : Y \subseteq \bigcup_{i=1}^M K_\varepsilon(y_i)$$

Somit ist Y total beschränkt.

(\Leftarrow)

Sei $Y \subseteq X$ abgeschlossen und total beschränkt und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus Y . Es g. z. z., dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in Y konvergente Teilfolge besitzt. Wir nutzen die totale Beschränktheit zur Konstruktion der Teilfolge (TF).

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 : \exists \{y_i^1\}_{i=1, \dots, M_1}, Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_1} K_1(y_i^1) &\Rightarrow \exists \text{ TF } (x_{n_k}^1)_{k \in \mathbb{N}} \exists i_1 \in \{1, \dots, M_1\} \forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k}^1 \in K_1(y_{i_1}^1) \\ \varepsilon = \frac{1}{2} : \exists \{y_i^2\}_{i=1, \dots, M_2}, Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_2} K_{1/2}(y_i^2) &\Rightarrow \exists \text{ TTF } (x_{n_k}^2)_{k \in \mathbb{N}} \exists i_2 \in \{1, \dots, M_2\} \\ &\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k}^2 \in K_1(y_{i_1}^1) \cap K_{1/2}(y_{i_2}^2) \end{aligned}$$

Diese Konstruktion lässt sich nun auf l Schritte erweitern.

$$\begin{aligned} \varepsilon = 2^{-l} : \exists \{y_i^l\}_{i=1, \dots, M_l}, Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_l} K_{2^{-l}}(y_i^l) &\Rightarrow \exists \text{ TT...TF } (x_{n_k}^l)_{k \in \mathbb{N}} \exists i_l \in \{1, \dots, M_l\} \\ &\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k}^l \in K_1(y_{i_1}^1) \cap K_{1/2}(y_{i_2}^2) \cap \dots \cap K_{2^{-(l-1)}}(y_{i_{l-1}}^{l-1}) \cap K_{2^{-l}}(y_{i_l}^l) \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist $(x_{n_k}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und für $k, k' \geq l$ gilt

$$x_{n_k}^k, x_{n_{k'}}^{k'} \in K_{2^{-l}}(y_{i_l}^l) \Rightarrow d(x_{n_k}^k, x_{n_{k'}}^{k'}) < 2^{-(l-1)}.$$

Folglich ist $(x_{n_k}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und da X nach Voraussetzung vollständig, gilt

$$\exists z \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^k = z.$$

Da Y abgeschlossen, gilt insbesondere $z \in Y$ und folglich Y kompakt. □

Beispiel 1.5.1. Betrachte

$$C[0, 1] := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}, \quad \|\cdot\|_\infty, \quad \text{für } f, g \in C[0, 1] : d(f, g) = \max \{|f(t) - g(t)| \mid t \in [0, 1]\}$$

Dann gilt $Y \subseteq C[0, 1]$ ist kompakt $\iff Y$ punktweise beschränkt, d. h.

$$\exists c > 0 \forall f \in Y \forall t \in [0, 1] : |f(t)| \leq c$$

und Y gleichgradig stetig, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in Y \forall s, t \in [0, 1] : |t - s| < \delta \implies |f(t) - f(s)| < \varepsilon.$$

Satz 1.5.5. Sei (X_1, d_1) ein kompakter metrischer Raum, (X_2, d_2) ein metrischer Raum, sowie $f : X_1 \rightarrow X_2$ stetig. Dann ist $f(X_1)$ kompakt.

Bemerkung 1.5.1. Falls $X_2 = \mathbb{R}$, dann existieren nach dem Satz von Weierstraß $x_+, x_- \in X_1$ mit $f(x_+) = \sup f(X_1)$ und $f(x_-) = \inf f(X_1)$.

Satz 1.5.6. Sei (X_1, d_1) ein kompakter metrischer Raum, (X_2, d_2) ein metrischer Raum, sowie $f : X_1 \rightarrow X_2$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon .$$

Kapitel 2

Maß- und Integrationstheorie

2.1 Grundlegende Konstruktionen

Definition 2.1.1. Sei $\Omega \neq \emptyset$. Dann heißt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ σ -Algebra, falls

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $\forall A \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : A \in \mathcal{F} \implies A^C \in \mathcal{F}$
3. $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} A_n \in \mathcal{F} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

Bezeichne (Ω, \mathcal{F}) als messbaren Raum.

Bemerkung 2.1.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann ist die σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$ der Borelmengen die kleinste σ -Algebra, die alle offenen Mengen von X enthält. Bez. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) =: \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}^n$.

Definition 2.1.2. Sei (Ω, \mathcal{F}) ein messbarer Raum. Dann ist $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß, falls

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{F}, \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset : \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$

Wir bezeichnen $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ als Maßraum.

Definition 2.1.3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ wird als σ -endlich bezeichnet, falls gilt

$$\exists A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}, A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \text{ mit } \forall n \in \mathbb{N} : \mu(A_n) < \infty \text{ und } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega.$$

Definition 2.1.4. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Ein Maß $\nu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ heißt absolut stetig bzgl. μ (bez. $\nu \ll \mu$), falls

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0.$$

Beispiel 2.1.1. Sei Ω beliebig und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Dann können wir das Zählmaß μ definieren mit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & A \text{ endlich} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist Ω meist abzählbar, z. B. $\Omega = \mathbb{N}$ oder $\Omega = \mathbb{Z}$

Beispiel 2.1.2. Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{F} = \mathcal{B}^n$. Dann definieren wir das Lebesgue-Maß l^n mit

$$l^n \left(\bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i] \right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Für $l = 1$ gilt damit insbesondere $l^1([a, b]) =: l([a, b]) = b - a$.

2.2 Integration

Definition 2.2.1. Sei (Ω, \mathcal{F}) ein messbarer Raum, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt messbar (bez. $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C})$), falls

$$\forall r > 0, z \in \mathbb{C} : f^{-1}(K_r(z)) \in \mathcal{F} \quad [\iff \forall U \in \mathcal{B}(\mathbb{C}) : f^{-1}(U) \in \mathcal{F}] .$$

Analog ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar (bez. $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$), falls

$$\forall U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$$

Bemerkung 2.2.1. Wir bezeichnen weiterhin $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, [0, \infty)) := \mathcal{M}_+(\Omega)$.

Bemerkung 2.2.2. Sei Ω, \mathcal{F} ein messbarer Raum, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist f messbar

$$\iff \forall c \in \mathbb{R} : \{f > c\} := \{x \in \Omega \mid f(x) > c\} \in \mathcal{F} .$$

Definition 2.2.2. Sei A eine Menge. Eine Funktion der Form

$$1_A(\omega) \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

heißt *Indikatorfunktion* der Menge A .

Satz 2.2.1 (Integral für nichtnegative, messbare Funktionen). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gibt es genau eine Abbildung $\varphi : \mathcal{M}_+(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ mit:

1. $\forall A \in \mathcal{F} : \varphi(1_A) = \mu(A)$
2. $\forall f, g \in \mathcal{M}_+(\Omega), \lambda \in [0, \infty] : \varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$
3. $\forall (f_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} f_{n+1} \geq f_n \geq 0 : \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(f_n)$

Wir schreiben $\varphi(f) =: \int f d\mu =: \int f(\omega) d(\omega) =: \int f(\omega) \mu(d\omega)$.

Bemerkung 2.2.3. 3. ist auch als Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz bekannt.

Bemerkung 2.2.4. Wir können in 2. $\lambda \in [0, \infty]$ wählen unter Beachtung, dass auf den erweiterten reellen Zahlen $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ gilt:

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0 \quad \text{und} \quad (+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = 0 .$$

Definition 2.2.3 (Integral für messbare Funktionen). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Dann definieren wir

$$f^+ := \max\{f, 0\}, \quad f^- := \max\{-f, 0\} \implies f = f^+ - f^- \quad \text{und} \quad |f| = f^+ + f^- .$$

Somit erhalten wir als Definition für das Integral (für integrierbare Funktionen, siehe Def. 2.2.4):

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu .$$

Sei nun $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, dann folgt $\Re(f), \Im(f) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Somit können wir definieren:

$$\int f d\mu := \int \Re(f) d\mu + i \cdot \int \Im(f) d\mu .$$

Definition 2.2.4. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Dann bezeichnen wir $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ als (μ) -integrierbar, falls $f \in \mathcal{L}^1$, wobei gilt

$$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \mid \int |f| d\mu < \infty \right\}.$$

Wir schreiben kurz auch $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Bemerkung 2.2.5. Analog definiert man $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$. Somit:

$$\int \cdot d\mu : \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R} [\mathbb{C}]) \rightarrow \mathbb{R} [\mathbb{C}]$$

Bemerkung 2.2.6. Für $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ gilt insbesondere $|f| \geq \Re(f)$, $|f| \geq \Im(f)$, d. h. das Integral ist wohldefiniert.

Satz 2.2.2. Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ sowie eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ sowie $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$
2. $\int \lambda f + g d\mu = \lambda \int f d\mu + \int g d\mu$
3. $\mu(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}) = 0 \implies \int f d\mu = \int g d\mu \implies \int |f - g| d\mu = 0$
4. $\mu(\{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| = \infty\}) = 0$
5. $\exists h : \Omega \rightarrow [0, \infty], h \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \leq h \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \implies \int f d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$

Bemerkung 2.2.7. 5. ist auch als Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz bekannt.

Definition 2.2.5. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $\nu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß. Dann besitzt ν eine Dichte bzgl. μ , falls

$$\exists f : \Omega \rightarrow [0, \infty) \text{ messbar} : \forall A \in \mathcal{F} : \nu(A) = \int_A f d\mu.$$

Satz 2.2.3 (Satz von Radon-Nikodym). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein σ -endlicher Maßraum und $\nu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß mit $\nu \ll \mu$. Dann besitzt ν eine Dichte bzgl. μ .

Kapitel 3

Normierte Räume

3.1 Definitionen

Bemerkung 3.1.1. Wir betrachten hier Vektorräume über den Körpern $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 3.1.1. Eine *Norm* über einem \mathbb{K} -Vektorraum V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit:

1. $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
2. $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. $\|x\| = 0 \iff x = 0$

Dann heißt $V, \|\cdot\|$ normierter Raum.

Bemerkung 3.1.2. Falls 3. nicht gilt, bezeichnen wir die Abbildung als *Halbnorm*.

Satz 3.1.1. Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist ein metrischer Raum mit der Metrik d , definiert durch

$$\forall x, y \in V : d(x, y) = \|x - y\| .$$

Beispiel 3.1.1. In diesem Fall gilt für die Operationen $+: V \times V \rightarrow V$ und $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ (mit $\lambda \in \mathbb{K}, x, y, x, y' \in V$):

$$\begin{aligned} d(x' + y', x + y) &= \|x' + y' - (x + y)\| \leq \|x' + y'\| + \|x + y\| \\ d(\lambda x, \lambda x') &= \|\lambda(x - x')\| = |\lambda| \|x - x'\| = |\lambda| d(x, x') \end{aligned}$$

Definition 3.1.2. Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Raum.

3.2 Vervollständigung

Satz 3.2.1. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann existiert eine Vervollständigung $(\hat{V}, \hat{\|\cdot\|})$, d. h. V kann in einen Banachraum eingebettet werden.

Beweis. Definiere Analog zu Satz 1.4.4:

$$\hat{V}_0 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in V, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge}\}.$$

$$\text{Äquivalenzrelation } \sim \text{ auf } \hat{V}_0: (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

$$\text{Menge aller Äquivalenzklassen: } \hat{V} = \hat{V}_0 / \sim = \{[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{X}_0\}$$

Dabei ist \hat{V} ein Vektorraum mit $\forall \lambda \in \mathbb{K}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{V}_0$:

$$\lambda [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] := [(\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \quad \text{und} \quad [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] + [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] = [(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}] .$$

Als Norm auf \hat{V} definieren wir

$$\hat{\|} [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| .$$

Zeige zunächst die Wohldefiniertheit. Der obige Grenzwert existiert, da für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{V}_0$ die Folge $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, mit

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} |\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0 .$$

Betrachte nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{V}_0$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\|x_n\| - \|y_n\|| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

und somit ist $\hat{\|} \cdot \hat{\|}$ unabhängig vom Repräsentanten. Für die Normeigenschaften zeige hier nur die Dreiecksungleichung und Definitheit (1. Eigenschaft trivial):

$$\begin{aligned} \hat{\|} [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] + [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| + \|y_n\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = \hat{\|} [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} + \hat{\|} [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} \end{aligned}$$

Weiterhin:

$$\hat{\|} [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0 \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (0)_{n \in \mathbb{N}} \iff [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] = [(0)_{n \in \mathbb{N}}] = 0_{\hat{V}}$$

□

3.3 L^p -Räume

Definition 3.3.1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $p \in [1, \infty)$, dann definieren wir

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}), \int_{\Omega} |f|^p < \infty \right\} .$$

Wir schreiben kurz auch $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Bemerkung 3.3.1. $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ definiert einen \mathbb{K} -Vektorraum.

Satz 3.3.1. $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(\mu) \rightarrow \mathbb{K}$, $\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}$ ist eine Halbnorm.

Beweis. Siehe nach Satz 3.3.2. □

Bemerkung 3.3.2. $\|\cdot\|_p$ ist keine Norm.

Beispiel 3.3.1. Betrachte $\Omega = \mathbb{R}$, $f = 1_C \neq 0$, $\mu = l$, wobei C die Cantormenge und l das Lebesgue-Maß sind. Dann gilt:

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} (1_C)^p dl \right)^{\frac{1}{p}} = l(C)^{\frac{1}{p}} = 0$$

Lemma 3.3.1 (Youngsche Ungleichung). Seien $u, v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $p, q \in \mathbb{R}_{>1}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$u \cdot v \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

Satz 3.3.2 (Hölder Ungleichung). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Dann gilt $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Beweis. Nehmen o. B. d. A. an $f, g \geq 0$, $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Mit Lemma 3.3.1 gilt

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 &= \int_{\Omega} f(x)g(x)\mu(dx) \leq \int_{\Omega} \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q} \mu(dx) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} f(x)^p \mu(dx) + \frac{1}{q} \int_{\Omega} g(x)^q \mu(dx) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q \end{aligned}$$

□

Zu Satz 3.3.1. 1. Eigenschaft ist trivial. Zeige nun noch die Dreiecksungleichung. Seien dafür $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Dann gilt auch die Abschätzung:

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} |f + g| \leq |f + g|^{p-1} |f| + |f + g|^{p-1} |g|.$$

Sei $q \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff p + q = pq$. Dann gilt $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\mu)$, da

$$\left(|f + g|^{p-1}\right)^q = |f + g|^{pq-q} = |f + g|^p$$

Dies ist in der Tat integrierbar, da $|f + g|^p \leq |f|^p + |g|^p$ und nach Voraussetzung $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Somit erhalten wir

$$\|f + g\|_p^p = \int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \leq \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |f| + |f + g|^{p-1} |g| d\mu = \|(f + g)^{p-1} f\|_1 + \|(f + g)^{p-1} g\|_1.$$

Anwenden der Hölder Ungleichung ergibt

$$\leq \|f + g\|_q \|f\|_p + \|f + g\|_q \|g\|_p = \left(\int_{\Omega} |f + g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} (\|f\|_p + \|g\|_p) = \left(\int_{\Omega} |f + g|^p\right)^{\frac{1}{q}} (\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Sei o. B. d. A. $f + g \neq 0$ fast überall (sonst Beh. trivial), dann gilt:

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^{p/q} (\|f\|_p + \|g\|_p) \iff \|f + g\|_p^{p(1-1/q)} \leq \|f\|_p + \|g\|_p \iff \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

□

Definition 3.3.2. Sei Ω, \mathcal{F}, μ ein Maßraum sowie $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$. Dann definieren wir

$$f \stackrel{\mu}{=} g : \iff \mu(\{\omega \in \Omega | f(\omega) \neq g(\omega)\}) =: \mu(\{f \neq g\}) = 0.$$

Man sagt auch $f = g$ μ -fast überall.

Bemerkung 3.3.3. Die Relation $\stackrel{\mu}{=}$ ist eine Äquivalenzrelation.

Satz 3.3.3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum sowie $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$. Dann gilt

$$f \stackrel{\mu}{=} g \implies g \in \mathcal{L}^p(\mu) \text{ und } \|f\|_p = \|g\|_p .$$

Beweis. Gelte o. B. d. A. $g \stackrel{\mu}{=} 0$. Betrachte hier $g : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \cup \{-\infty, \infty\}$, sei $A := \{\omega \in \Omega | g(\omega) \neq 0\}$. Nach Voraussetzung gilt $\mu(A) = 0$ und somit

$$|g| \leq \infty \cdot 1_A \implies \int_{\Omega} |g|^p d\mu \leq \infty \cdot \int_{\Omega} 1_A d\mu = \infty \cdot 0 = 0 .$$

Folglich gilt also in der Tat $g \in \mathcal{L}^p$. Zeige nun $\|f\|_p = \|g\|_p$. Dabei nutzen wir $f \stackrel{\mu}{=} g \iff g - f \stackrel{\mu}{=} 0 \implies \|g - f\|_p = 0$. Es folgt

$$\|g\|_p = \|f + (g - f)\|_p \leq \|f\|_p + \|g - f\|_p = \|f\|_p$$

Analog erhalten wir $\|f\|_p \leq \|g\|_p$ und somit in der Tat $\|f\|_p = \|g\|_p$. □

Satz 3.3.4. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, dann wird $\mathcal{L}^p(\mu) / \stackrel{\mu}{=}$ mit $\forall f \in \mathcal{L}^p(\mu) : \| [f] \|_p := \|f\|_p$ ein normierter Raum.

Beweis. Die Wohldefiniertheit der Norm folgt aus Satz 3.3.3. Weiterhin lassen sich die Halbnormseigenschaften auf Satz 3.3.1 zurückführen. Es g. z. z., dass $\|\cdot\|_p$ auf $\mathcal{L}^p(\mu) / \stackrel{\mu}{=}$ definit ist. Angenommen für $[f] \in \mathcal{L}^p(\mu) / \stackrel{\mu}{=}$ gilt $\|[f]\|_p = 0 \iff \int_{\Omega} |f|^p = 0$. Nehme weiterhin an, dass $f \stackrel{\mu}{\neq} 0 \iff 0 < \mu(\{|f| > 0\})$. Somit

$$0 < \mu(\{|f| > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{|f| > \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(|f| > \frac{1}{n}\right) .$$

Folglich $\exists c > 0 : \mu(\{|f| \geq c\}) > 0$. Damit erhalten wir mit $A := \{|f| > c\}$

$$|f|^p \geq c^p \cdot 1_A \implies \int |f|^p \geq c^p \mu(A) > 0 .$$

Dies ist ein Widerspruch und folglich gilt $f \stackrel{\mu}{=} 0$. □

Definition 3.3.3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, dann

$$L^p(\mu) := L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) / \stackrel{\mu}{=}$$

Wir schreiben meist $L^p(\mu)$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $L^p(\mu, \mathbb{C})$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Bemerkung 3.3.4. Statt $[f] \in L^p$ schreiben wir nur $f \in L^p$.

Definition 3.3.4. $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ heißt *wesentlich beschränkt* ($\iff f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$), falls

$$\exists c \in \mathbb{R}_{>0} : \mu(\{\omega \in \Omega | |f(\omega)| > c\}) = 0 .$$

Dann definieren wir

$$\|f\|_\infty := \inf \{c \mid \mu(\{\omega \in \Omega | |f(\omega)| > c\}) = 0\} .$$

Satz 3.3.5. $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Halbnorm und es gilt $f \stackrel{\mu}{=} g \iff \|f - g\|_\infty = 0$.

Beweis. Die 1. Eigenschaft und die zweite Aussage sind trivial, wir zeigen hier wieder nur die Dreiecksungleichung. Seien $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ wesentlich beschränkt, $c, d > 0$ und $A := \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| > c\}$, $B := \{\omega \in \Omega \mid |g(\omega)| > d\}$. Somit

$$\mu(A) = \mu(B) = 0 \implies \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0.$$

Es gilt

$$D := \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega) + g(\omega)| > c + d\} \subseteq A \cup B$$

und somit auch $\mu(D) = 0$. Sei nun $\omega \in (A \cup B)^C$, dann

$$|f(\omega)| \leq c \wedge |g(\omega)| \leq d \implies |f(\omega) + g(\omega)| \leq |f(\omega)| + |g(\omega)| \leq c + d.$$

D. h. $f + g$ ist wesentlich durch $c + d$ beschränkt und somit folgt in der Tat

$$\|f + g\|_\infty \leq c + d \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

□

Satz 3.3.6. Sei Ω, \mathcal{F}, μ ein Maßraum. Dann ist $\mathcal{L}^\infty(\mu) / \underline{\mu}$ mit $\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mu) : \|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty$ ein normierter Raum.

Definition 3.3.5. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, dann

$$L^\infty(\mu) := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu) / \underline{\mu}.$$

Wir schreiben meist $L^\infty(\mu)$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $L^\infty(\mu, \mathbb{C})$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Bemerkung 3.3.5. $L^p(\mu)$ für $p \in [1, \infty]$ sind keine direkten Funktionenräume.

Satz 3.3.7. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, dann ist $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum für $p \in [1, \infty]$.

Beweis. Betrachte hier nur den Fall $p = 1$. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\mu)$, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N_0 : \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon.$$

Daher gilt insbesondere

$$\forall k > 0 \exists n_k \forall m \geq n_k : \|f_m - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}.$$

Somit können wir solche n_k mit $n_{k+1} > n_k$ wählen und erhalten eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}$. Für $p = 1$ mit Beppo-Levi und $g_k := |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_\Omega g_k d\mu = \int_\Omega \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k d\mu < \infty.$$

Somit gilt insbesondere

$$\mu \left(\left\{ \omega \in \Omega \mid \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(\omega) = \infty \right\} \right) = 0.$$

Nehmen hier o. B. d. A. an, dass $\forall \omega \in \Omega : \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(\omega) < \infty$. Somit bildet $\forall \omega \in \Omega$ die Folge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und ist somit konvergent, d. h. $\forall \omega \in \Omega : f(\omega) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(\omega)$ existiert. Somit gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega) = f_{n_0}(\omega) - f(\omega)$$

Wir können eine integrierbare Majorante für die $f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega)$ finden mit

$$|f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega)| \leq \sum_{l=0}^{k-1} |f_{n_l}(\omega) - f_{n_{l+1}}(\omega)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(\omega) =: g(\omega) \text{ mit } \int_{\Omega} g d\mu < \infty .$$

Nach dem Satz von Lebesgue folgt somit, dass f integrierbar (d. h. $f \in L^1(\mu)$) und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega) - (f_{n_0}(\omega) - f(\omega))| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f\|_1 = 0 .$$

Also ist $L^1(\mu)$ in der Tat vollständig. □

3.4 Beispiele für normierte Räume

Beispiel 3.4.1. Betrachte

$$\Omega = \{1, \dots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}_{>0} \quad \text{mit} \quad \forall A \subseteq \Omega : \mu(A) = |A| .$$

Dann gilt wegen der Korrespondenz als Vektorraum

$$L^p(\mu) = \mathbb{R}^n \text{ und } L^p(\mu, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$$

wegen der Korrespondenz

$$f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix} .$$

Beispiel 3.4.2 (Folgenräume). Folgende Vektorräume

$$\begin{aligned} c_0 &:= \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\} \\ c &:= \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert} \right\} \\ \ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) &:= \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c \right\} \end{aligned}$$

sind normierte Vektorräume (insbesondere Banachräume) mit der Supremumsnorm

$$\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| .$$

Betrachte weiterhin die Folgenräume ℓ^p mit $p \in [1, \infty)$, wobei μ das Zählmaß:

$$\ell_{\mathbb{K}}^p = L^p(\mathbb{N}, \mu, \mathbb{K}) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$$

mit der Norm $\|\cdot\|_p$ definiert durch

$$\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p : \|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Dabei sind $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ für $p \in [1, \infty)$ Banachräume.

Beispiel 3.4.3. Betrachte

$$\Omega = \mathbb{R} \text{ bzw. } \Omega = \mathbb{R}^d \text{ mit Lebesgue-Maß } l \text{ bzw. } l^d.$$

mit den entsprechenden Räumen $L^p(l)$, $L^p(l, \mathbb{C})$ bzw. $L^p(l^d)$ und den bekannten Normen. Betrachte

$$\Omega = [0, 1] \text{ mit Lebesgue-Maß } l$$

dann ergibt sich

$$L^p([0, 1], l) \text{ mit } \forall f \in L^p([0, 1], l) : \|f\|_p = \int_0^1 |f(x)|^p dx$$

Der normierte Raum $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum, wobei

$$C^0([0, 1]) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\} \text{ und } \forall f \in C^0([0, 1]) : \|f\|_\infty = \sup \{|f(t)| \mid t \in [0, 1]\}$$

Hingegen ist $C^0([0, 1])$ nicht vollständig bzgl. der Norm $\|f\|_p = \int_0^1 |f(t)|^p dt$. Der Raum $(C^r([0, 1]), \|\cdot\|_{k,\infty})$

$$C^r([0, 1]) = \{f \in C^0([0, 1]) \mid f \text{ } r\text{-mal stetig differenzierbar}\} \text{ und } \forall f \in C^r([0, 1]) : \|f\|_{k,\infty} = \sum_{j=0}^r \|f^{(j)}\|_\infty$$

ist ein Banachraum. Man kann auch weitere Normen auf $C^r([0, 1])$ definieren, bspw. für $r = 1$ und $f \in C^1([0, 1])$

$$\|\cdot\|_{1,p} = \|f\|_p + \|f'\|_p \text{ oder } \hat{\|f\|}_{1,p} = \left(\int_0^1 |f'(x)|^p + |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Bemerkung 3.4.1. Es gibt eine Inklusion $C^0([0, 1]) \hookrightarrow L^p([0, 1])$, da in jeder Äquivalenzklasse nur eine stetige Funktion ist.

3.5 Äquivalenz von Normen

Definition 3.5.1. Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $\|\cdot\|, \hat{\|\cdot\|} : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ Normen. Diese heißen äquivalent, falls

$$\exists 0 < c_1 < c_2 \forall x \in V : c_1 \|x\| \leq \hat{\|x\|} \leq c_2 \|x\|.$$

Beispiel 3.5.1. Betrachte \mathbb{R}^n mit den Normen $(x \in \mathbb{R}^n) : \|x\|_\infty = \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ und $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$$

d. h. $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$ sind äquivalent.

Beispiel 3.5.2. Betrachte $C^1([0, 1])$ mit den Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_{1,\infty}$, wie in Bsp. 3.4.3 definiert. Diese sind nicht äquivalent. Definiere $f_n(x) = x^n \in C^1([0, 1])$, somit $f'_n(x) = n \cdot x^{n-1}$. Folglich

$$\|f_n\|_\infty = 1 \text{ und } \|f_n\|_{1,\infty} = \|f_n\|_\infty + \|f'_n\|_\infty = 1 + n$$

und es existieren offensichtlich keine Konstanten $0 < c_1 < c_2$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : c_1 \leq n + 1 \leq c_2.$$

Satz 3.5.1. Sei V ein K -Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$. Dann sind alle Normen auf V äquivalent und jeder solche normierte Vektorraum ist ein Banachraum.

Kapitel 4

Hilberträume

4.1 Definitionen

Definition 4.1.1. Sei H ein \mathbb{K} -Vektorraum. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ heißt eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ *Skalarprodukt* (oder *inneres Produkt*), falls

1. $\forall x \in H : \langle x, \cdot \rangle, \langle \cdot, x \rangle : H \rightarrow \mathbb{R}$ sind linear
2. $\forall x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0$
3. $\forall x \in H : \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
4. $\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ muss gelten:

1. $\forall x \in H : \langle x, \cdot \rangle : H \rightarrow \mathbb{C}$ ist linear, $\langle \cdot, x \rangle : H \rightarrow \mathbb{C}$ ist antilinear, d. h. $\forall y, z \in H, \lambda \in \mathbb{C} :$
 $\langle \lambda x + y, z \rangle = \bar{\lambda} \langle y, z \rangle + \langle x, z \rangle$
2. $\forall x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0$
3. $\forall x \in H : \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
4. $\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Bemerkung 4.1.1. Für das Skalarprodukt über \mathbb{C} kann nur Sesquilinearität und keine Bilinearität gefordert werden, um die positive Definitheit beizubehalten. Angenommen das Skalarprodukt über \mathbb{C} wäre bilinear und positiv definit, dann

$$\forall x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0 \implies 0 \leq \langle ix, ix \rangle = -\langle x, x \rangle \leq 0 \implies \langle x, x \rangle = 0 .$$

Satz 4.1.1 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). Sei H ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dann gilt

$$\forall x, y \in H : |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle .$$

Bemerkung 4.1.2. Mit Satz 4.1.2 schreibt man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auch als

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| .$$

Satz 4.1.2. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Raum mit Skalarprodukt. Dann ist $\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$ mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für $x \in H$ eine Norm auf H .

Beweis. Die 1. und 3. Eigenschaft sind trivial, zeige hier nur die Dreiecksungleichung. Es gilt für $x, y \in H$

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 .$$

Mit $\Re(\langle x, y \rangle) \leq |\langle x, y \rangle|$ und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir in der Tat:

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

□

Definition 4.1.2. Ein Raum $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit Skalarprodukt heißt *Hilbertraum*, wenn er bzgl. der vom Skalarprodukt induzierten Norm $\|\cdot\|$ vollständig ist.

Lemma 4.1.1 (Polarisationsformel). Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Raum mit Skalarprodukt und induzierter Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für $x \in H$. Dann gilt für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2) .$$

Satz 4.1.3 (Parallelogrammgleichung). Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ (mit V ein \mathbb{K} -Vektorraum) ist ein Raum mit Skalarprodukt $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Norm induziert, genau dann wenn

$$\forall x, y \in V : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) .$$

Beweis. (\implies) Es gilt:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ \implies \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 &= 2\langle x, y \rangle + 2\langle y, x \rangle \end{aligned}$$

(\impliedby) Man setzt für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ das Skalarprodukt gemäß der Polarisationsformeln nach Lemma 4.1.1 an und zeigt unter Ausnutzung der Parallelogrammgleichung, dass dies die Eigenschaften eines Skalarprodukts empfiehlt (explizit im *Werner* S. 222). □

4.2 Beispiele

Beispiel 4.2.1. Betrachte \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n . Diese sind mit den Standardskalarprodukten Hilberträume, wobei für $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u, v \in \mathbb{C}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{und} \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i$$

Beispiel 4.2.2. $\ell_{\mathbb{K}}^2$ ist ein Hilbertraum, wobei die Norm von folgendem Skalarprodukt induziert wird

$$\langle (a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i .$$

Beispiel 4.2.3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist $L^2(\mu, \mathbb{K})$ ein Maßraum mit dem Skalarprodukt $(f, g \in L^2(\mu, \mathbb{K}))$

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} fg \, d\mu \quad \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \langle f, g \rangle = \int_{\Omega} \overline{f}g \, d\mu \quad \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C} .$$

Beispiel 4.2.4. Betrachte $C^0([0, 1])$, dann ist für $f, g \in C^0([0, 1])$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t) \, dt$$

ein Skalarprodukt aber $(C^0([0, 1]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ kein Hilbertraum.

Beispiel 4.2.5. (Bergmanraum) Sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Dann ist $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, wobei mit $f, g \in H$, $x := \Re(z)$, $y := \Im(z)$ gilt

$$H = \left\{ f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph, } \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dx dy < \infty \right\} \quad \text{und} \quad \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} \overline{f(z)}g(z) \, dx dy .$$

Bemerkung 4.2.1. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $U \subseteq \mathbb{C}$ offen heißt holomorph, falls f komplex differenzierbar an allen Punkten $z_0 \in U$, d. h. falls folgender Grenzwert existiert

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} .$$

4.3 Orthogonalbasen

Definition 4.3.1. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Raum mit Skalarprodukt. Wir bezeichnen $x, y \in H$ orthogonal, bzw. $x \perp y$, falls $\langle x, y \rangle = 0$. Zwei Teilmengen $X, Y \subseteq H$ heißen orthogonal, bzw. $X \perp Y$, falls $\forall x \in X, y \in Y : \langle x, y \rangle = 0$.

Lemma 4.3.1 (Satz des Pythagoras). Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Raum mit Skalarprodukt. Dann ergibt sich direkt aus der Definition für $x, y \in H$

$$x \perp y \implies \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2 .$$

Definition 4.3.2. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Eine Familie $(e_s)_{s \in S}$, $\forall s \in S : e_s \in H$ heißt *Orthonormalsystem*, falls

$$\forall s, t \in S : \langle e_s, e_t \rangle = \delta_{st} .$$

Eine Familie $(e_s)_{s \in S}$, $\forall s \in S : e_s \in H$ heißt *vollständig*, falls

$$\forall y \in H : y \perp \{e_s \mid s \in S\} \implies y = 0 .$$

Ein vollständiges Orthonormalsystem heißt *Orthonormalbasis*.

Beispiel 4.3.1. Betrachte den Hilbertraum $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}) := \{(a_t)_{t \in \mathbb{R}} \mid \forall t \in \mathbb{R} : a_t \in \mathbb{C}, \sum_{t \in \mathbb{R}} |a_t|^2 < \infty\}$. Dabei ist das Skalarprodukt definiert als

$$\forall (a_t)_{t \in \mathbb{R}}, (b_t)_{t \in \mathbb{R}} \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}) : \langle (a_t)_{t \in \mathbb{R}}, (b_t)_{t \in \mathbb{R}} \rangle = \sum_{t \in \mathbb{R}} \overline{a_t} b_t .$$

Definiere $e_t = (\delta_{s,t})_{s \in \mathbb{R}} \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$. Dann ist $(e_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Orthonormalbasis, da für $a := (a_t)_{t \in \mathbb{R}} \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$

$$a \perp \{e_t \mid t \in \mathbb{R}\} \iff \forall t \in \mathbb{R} : \langle a, e_t \rangle = \overline{a_t} = 0 \iff a = 0 .$$

Beispiel 4.3.2. Betrachte den Hilbertraum $H = L^2([0, 1], l, \mathbb{C})$. Dann erhalten wir die (vollständige) Fourierbasis

$$(f_k(x))_{k \in \mathbb{Z}} \text{ mit } f_k(x) := \exp(2\pi i k x) .$$

Die Orthogonalität kann man wie folgt zeigen (mit $k, l \in \mathbb{Z}$)

$$\int_0^1 \exp(-2\pi i k x) \exp(2\pi i l x) dx = \int_0^1 \exp(2\pi i (l - k)x) dx = \delta_{kl}$$

Satz 4.3.1. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, $(e_s)_{s \in S}, \forall s \in S : e_s \in H$ ein Orthonormalsystem. Dann existiert für jedes $\lambda := (\lambda_s)_{s \in S} \in \ell_{\mathbb{C}}^2(S) := \left\{ (a_s)_{s \in S} \mid \forall s \in S : a_s \in \mathbb{C}, \sum_{s \in S} |a_s|^2 < \infty \right\}$ ein abzählbares $S_0 \subseteq S$ mit $|\lambda_s| > 0 \implies s \in S_0$. Sei $S_0 := \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $x_n = \sum_{m=0}^n \lambda_{s_m} e_{s_m}$. Dann existiert ein $x \in H$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, wir schreiben $x = \sum_{s \in S} \lambda_s e_s$.

Beweis. Wir zeigen hier nur den 2. Teil des Satzes (???). Da H vollständig, g. z. z., dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Dabei ist bekannt (unter Ausnutzung von Teil 1 des Satzes)

$$\|\lambda\|_{\ell^2(S)}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} |\lambda_{s_m}|^2 < \infty .$$

Sei $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, sodass $\sum_{m=N+1}^{\infty} |\lambda_{s_m}|^2 < \varepsilon^2$. Seien nun $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2 \geq N$, $n_1 < n_2$. Dann

$$\|x_{n_2} - x_{n_1}\|^2 = \left\| \sum_{m=n_1+1}^{n_2} \lambda_{s_m} \cdot e_{s_m} \right\|^2 .$$

Dabei gilt für $k, l \in \mathbb{N}$, $k \geq l$

$$\left\| \sum_{i=l}^k \lambda_{s_i} e_{s_i} \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=l}^k \lambda_{s_i} e_{s_i}, \sum_{j=l}^k \lambda_{s_j} e_{s_j} \right\rangle = \sum_{i,j=l}^k \overline{\lambda_i} \lambda_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i,j=l}^k \overline{\lambda_i} \lambda_j \delta_{ij} = \sum_{i=l}^k |\lambda_i|^2 .$$

Somit ergibt sich

$$\|x_{n_2} - x_{n_1}\|^2 = \sum_{m=n_1+1}^{n_2} |\lambda_{s_m}|^2 < \varepsilon^2 .$$

Folglich ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in H$ existiert. \square

Bemerkung 4.3.1 (Motivation). Falls $(e_s)_{s \in S}$ eine Orthonormalbasis von H . Dann ist die Abbildung $F : H \rightarrow \ell_{\mathbb{C}}^2(S)$, $x \mapsto (\langle x, e_s \rangle)_{s \in S}$ ein unitärer Isomorphismus. In diesem Fall gibt es eine Korrespondenz zwischen $\lambda \in \ell_{\mathbb{C}}^2(S)$ und den Koeffizienten von x bzgl. der Orthonormalbasis $(e_s)_{s \in S}$.

Lemma 4.3.2 (Besselsche Ungleichung). Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem und $x \in H$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Bemerkung 4.3.2. Mit Satz 4.3.1 folgt die allgemeine Besselsche Ungleichung für Orthonormalsysteme. Sei $(e_s)_{s \in S}, \forall s \in S : e_s \in H$ ein Orthonormalsystem und $x \in H$, dann

$$\sum_{s \in S} |\langle x, e_s \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Satz 4.3.2. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, $(e_s)_{s \in S}$ ein Orthonormalsystem. Dann ist $(e_s)_{s \in S}$ vollständig, genau dann wenn für jedes $x \in H$ ein $\lambda := (\lambda_s)_{s \in S} \in \ell_{\mathbb{C}}^2(S)$ existiert mit $x = \sum_{s \in S} \lambda_s e_s$. In diesem Fall ist λ eindeutig bestimmt.

Beweis. (Eindeutigkeit) Seien $S_0 \subseteq S$ sowie $x_n \in H$ wie in Satz 4.3.1. Sei $\hat{s} \in S$, dann

$$\langle e_{\hat{s}}, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle e_{\hat{s}}, x_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle e_{\hat{s}}, \sum_{m=0}^n \lambda_{s_m} e_{s_m} \right\rangle = \begin{cases} 0 & \hat{s} \notin S_0 \\ \lambda_{\hat{s}} & \hat{s} \in S_0 \end{cases}$$

Somit folgt die Eindeutigkeit aus der Eindeutigkeit der Darstellung der x_n .

(Existenz) Angenommen $(e_s)_{s \in S}$ ist vollständig und x ist nicht durch die Orthonormalbasis darstellbar. Bezeichne die Menge der darstellbaren Elemente in H mit

$$H_0 = \left\{ \sum_{s \in S} \lambda_s e_s \mid (\lambda_s)_{s \in S} \in \ell_{\mathbb{C}}^2(S) \right\}.$$

Für eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in H_0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \implies y \in H_0$. Setze $\mu_s = \langle e_s, x \rangle$. Sei $S_0 \subseteq S$ höchstens abzählbar, dann gilt mit Satz 4.3.2

$$\sum_{s \in S_0} |\mu_s|^2 = \sum_{s \in S_0} |\langle e_s, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty.$$

Für $t \in S_0$ gilt weiterhin

$$\left\langle e_t, x - \sum_{s \in S_0} \mu_s e_s \right\rangle = \langle e_t, x \rangle - \sum_{s \in S_0} \langle e_t, \langle e_s, x \rangle e_s \rangle = 0.$$

Dieser Beweis muss noch beendet werden.

□

Satz 4.3.3. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Dann existiert eine abzählbare Orthonormalbasis, genau dann wenn H separabel ist.

Beweisidee. Man wendet das Gram-Schmidt-Verfahren auf einer dichten Teilmenge an. □

Bemerkung 4.3.3. Ein metrischer Raum (X, d) heißt separabel, falls ein $A \subseteq X$ existiert, sodass A abzählbar und A dicht in X .

4.4 Projektionen

Satz 4.4.1. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, $K \subseteq H$ nicht leer, konvex und abgeschlossen. Dann existiert für jedes $x \in H$ genau ein $y \in K$ mit

$$\|y - x\| = \inf \{ \|z - x\| \mid z \in K \}.$$

Beweis. Nehmen o. B. d. A. an $x \notin K$ (sonst wähle $y = x$) und $x = 0$ (sonst verschiebe um $-x$).

(Existenz) Setze $d := \inf \{ \|z - x\| \mid z \in K \} = \inf \{ \|z\| \mid z \in K \}$. Dann existiert eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in K$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|y_n\| < d + \frac{1}{n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = d.$$

Wir zeigen nun, dass $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Mit der Parallelogrammgleichung gilt für $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{y_n - y_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2) .$$

Da K konvex, gilt $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in K$ und folglich $\left\| \frac{1}{2}(y_n + y_m) \right\| \geq d^2$. Da

$$\frac{1}{2}(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2) \leq \frac{1}{2} \left(\left(d + \frac{1}{n} \right)^2 + \left(d + \frac{1}{m} \right)^2 \right) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} d^2$$

folgt also $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$, d. h. $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist in der Tat eine Cauchyfolge und da H ein Hilbertraum, existiert $y := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in H$. Da K abgeschlossen ist, gilt $y \in K$. Weiterhin gilt $\|y\| = d$, da

$$\|y\| \geq d \text{ da } y \in K \text{ und } \|y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq d + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d .$$

(Eindeutigkeit) Angenommen für $y, \tilde{y} \in K$ gilt

$$\|y\| = \|\tilde{y}\| = \inf \{ \|z\| \mid z \in K \} = d .$$

Sei $\lambda \in [0, 1]$ wegen der Konvexität von K gilt

$$\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y} \in K \implies \|\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y}\| \geq d .$$

Weiterhin gilt

$$\|\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y}\| \leq \lambda \|y\| + (1 - \lambda) \|\tilde{y}\| = d$$

und folglich $\|\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y}\| = d$. Somit

$$\begin{aligned} d^2 &= \|\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y}\|^2 = \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda(1 - \lambda)\Re(\langle y, \tilde{y} \rangle) + (1 - \lambda)^2 \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle \\ &= \lambda^2(\langle y, y \rangle - 2\Re(\langle y, \tilde{y} \rangle) + \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle) + \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle + 2\lambda(\Re(\langle y, \tilde{y} \rangle) - \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle) \\ &= \lambda^2 \|y - \tilde{y}\|^2 + \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle - \lambda \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle + \lambda \langle y, y \rangle - \lambda(\langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle - 2\Re(\langle y, \tilde{y} \rangle) + \langle y, y \rangle) \\ &= (\lambda^2 - \lambda) \|y - \tilde{y}\|^2 + d^2 \end{aligned}$$

Dies muss insbesondere auch für $\lambda \in (0, 1) \implies \lambda^2 \neq \lambda$ gelten und somit folgt in der Tat. $\|y - \tilde{y}\| = 0 \iff y = \tilde{y}$. \square

Beispiel 4.4.1. Betrachte $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ sowie $x = (0, 0)$ und $K = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \geq 1\}$. Dies ist kein Hilbertraum und die Projektion ist hier auch nicht eindeutig, da

$$P = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 = 1, y_2 \in [-1, 1]\} \implies \forall p \in P : \|x - p\|_\infty = 1 = \inf \{ \|x - z\|_\infty \mid z \in K \} .$$

Beispiel 4.4.2. Betrachte $\mathbb{R}^{2n}, \|\cdot\|_1$ sowie

$$K = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} =: \lambda \cdot \hat{y} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} .$$

Sei $m := \text{med}\{x_1, \dots, x_{2n}\}$, d. h.

$$m = \underset{a}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{2n} |x_i - a| = \underset{a}{\operatorname{argmin}} \|x - a\hat{y}\|_1 .$$

Dann gilt $\|x - m\hat{y}\|_1 = \inf \{ \|x - z\|_1 \mid z \in K \}$.

Definition 4.4.1. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Raum mit Skalarprodukt und $X \subseteq H$. Dann heißt

$$X^\perp := \{y \in H \mid \forall x \in X : x \perp y\}$$

orthogonales Komplement von X .

Satz 4.4.2. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, $U \subseteq H$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann gibt es für alle $x \in H$ eindeutig bestimmte $y_1 \in U, y_2 \in U^\perp$ mit $x = y_1 + y_2$.

Beweis. (Existenz) Da U ein Unterraum ist, ist U insbesondere konvex und nichtleer. Somit wählen wir $y_1 \in U$ eindeutig (nach Satz 4.4.1) mit

$$\|y_1 - x\| = \inf \{\|x - u\| \mid u \in U\} .$$

Wir zeigen nun $x - y_1 \in U^\perp$. Seien $u \in U, \lambda \in \mathbb{K}$, dann

$$\|x - y_1\|^2 \leq \|x - y_1 - \lambda u\|^2 = \|x - y_1\|^2 - 2\lambda \Re(\langle x - y_1, u \rangle) + |\lambda|^2 \|u\|^2$$

Da λ, u beliebig, muss also in der Tat $\langle x - y_1, u \rangle = 0$ gelten.

(Eindeutigkeit) Angenommen $x = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$ mit $\hat{y}_1 \in U, \hat{y}_2 \in U^\perp$. Sei $u \in U$, dann gilt wegen der Orthogonalität

$$\|x - (\hat{y}_1 + u)\|^2 = \|x - \hat{y}_1\|^2 + \|u\|^2 \geq \|x - \hat{y}_1\|^2 .$$

Dies ist nur erfüllt, wenn wir $\hat{y}_1 = y_1$ nach Satz 4.4.1 wählen, woraus die Eindeutigkeit folgt. \square

Beispiel 4.4.3. Betrachte $L^2([0, 1])$, dann ist $U = C^0(S^1) = \{u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} \mid u(0) = u(1)\}$ dicht.

Kapitel 5

Lineare Operatoren

5.1 Definitionen

Definition 5.1.1. Seien $(V_1, \|\cdot\|)$ und $(V_2, \|\cdot\|')$ normierte Räume, dann heißt eine lineare Abbildung (Operator) $A : V_1 \rightarrow V_2$ beschränkt, wenn gilt:

$$\exists c \geq 0 \forall v \in V_1 : \|Av\|' \leq c \|v\|$$

Bemerkung 5.1.1. $B(V_1, V_2) = \{A : V_1 \rightarrow V_2 \mid A \text{ linear beschränkt}\}$

Satz 5.1.1. In dieser Situation sind äquivalent:

1. $A \in B(V_1, V_2)$
2. A ist stetig
3. A ist gleichmäßig stetig
4. A ist Lipschitz-stetig
5. A ist stetig in 0

Beweis: Siehe Analysis 2. □

???

Satz 5.1.2. Jedes lineare Funktional $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ ist beschränkt.

Beweis: Dieser Beweis wurde in der Vorlesung übersprungen. □

Beispiel 5.1.1. Betrachte $C^0([0, 1])$, $\|f\|_\infty$, wobei

$$I : C^0([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1]), f(z) \mapsto \int_0^z f(x) dx.$$

Dann gilt

$$|I(f(z))| = \left| \int_0^z f(x) dx \right| = \|f\|_\infty \cdot t \leq \|f\|_\infty$$

und mit

$$\|If\| = \sup |If(z)| : z \in [0, 1] \leq \|f\|_\infty$$

ist die Operatornorm $\|I\| \leq 1$. Wähle nun $f_{[0,1]}$, dann ist $If(t) = t$ und damit $\|I\| = 1$.

Beispiel 5.1.2. Sei $V_1 = C^1([0, 1])$ mit $\|\cdot\|_\infty$ und $V_2 = C^0([0, 1])$ mit $\|\cdot\|_\infty$ sowie eine Abbildung

$$D : V_1 \rightarrow V_2, f(t) \mapsto f'(t)$$

Definiere $f_n(t) = t^n$, dann ist $\|f_n\|_\infty = 1$ und da $f'_n(t) = n \cdot t^{n-1}$ auch $\|Df_n\| = n$??

Satz 5.1.3. Seien V und W , $\|\cdot\|_W$ normierte Räume mit $A \in B(V, W)$ mit

$$\|A\|_{V,W} = \inf \{c \in \mathbb{R} \mid \forall v \in V : \|Av\|_W \leq c\}$$

Dann gilt:

1. $\|A\| = \sup \{\|Av\|_W : \|v\|_V = 1\} = \sup \{\|Av\|_W : \|v\|_V \leq 1\} = \sup \left\{ \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V}, v \in V, v \neq 0 \right\}$
2. $B \in B(V, W) : \|A + B\| = \|A\| + \|B\|$ sowie $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
3. Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ normierter Raum, $B \in B(W, X)$, dann gilt

$$\|AB\|_{V,X} \leq \|A\|_{V,W} \cdot \|B\|_{W,X}$$

Beweis: 1. Sei $M := \sup \left\{ \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V}, v \in V, v \neq 0 \right\}$. Für $v = 0$, gilt $\|Av\| = 0$, für $v \neq 0$ gilt:

$$\frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} \leq M \implies \|Av\|_W \leq M \|v\|_V \implies M \geq \|A\|$$

Andererseits gilt für alle $v \neq 0$:

$$\frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} \leq \|A\| \implies M \leq \|A\|$$

2. Wir nutzen die Supremums- und Dreiecksungleichung aus:

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup \{\|(A + B)v\|_W : \|v\| = 1\} \leq \sup \{\|Av\|_W + \|Bv\|_W : \|v\| = 1\} \\ &\leq \sup \{\|Av\|_W : \|v\| = 1\} + \sup \{\|Bv\|_W : \|v\| = 1\} = \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

3. Gilt, da $\|BAv\| \leq \|B\| \cdot \|Av\|_W \leq \|B\| \|A\| \|v\|_V$

□

Beispiel 5.1.3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $\phi \in L^2(\mu)$ und

$$M_\phi : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu), f \mapsto \phi \cdot f \text{ mit } M_\phi \cdot M_\psi = M_\psi \cdot M_\phi = M_{\phi \cdot \psi}$$

Dann gilt:

$$\|M_\phi f\|^2 = \int |\phi(x)|^2 |f(x)|^2 dx \leq \int \|\phi\|_\infty^2 |f(x)|^2 dx = \|\phi\|_\infty^2 \|f\|^2 \leq \|\phi\|_\infty^2 \mu - \text{fast überall}$$

Wir haben also $M_\phi \in B(L^2(\mu), L^2(\mu))$ und $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$.

Gleichheit gilt tatsächlich für $\mu(\Omega) < \infty$.

Sei $\alpha < \|\phi\|_\infty$ und definiere

$$E = \{x : |\phi(x)| > \alpha\}$$

dann ist $\mu(E) > 0$. Sei nun $f = 1_E$, dann

$$\|M_\phi f\|^2 = \int_E \|\phi(x)\|^2 \geq \alpha \mu(E) = \alpha \|1_E\|^2$$

Bemerkung 5.1.2. Nach Konvention gilt $B(V, V) = B(V)$.

Satz 5.1.4. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbert Raum, $U \subseteq H$ abgeschlossener Unterraum, dann gibt es $P, Q \in B(H)$ so, dass:

1. $\forall v \in H : Pv \in U$ und $Qv \in U^\perp$
2. $\forall v \in H : Pv + Qv = v$

Außerdem gilt:

$$\|P\| = \begin{cases} 1 & U \neq \{0\} \\ 0 & U = \{0\} \end{cases}$$

Beweis: Da U abgeschlossener Unterraum von H , gibt es für jedes $v \in H$ eine eindeutige Zerlegung von $v \in U, u^\perp \in U^\perp$ mit $v = u + u^\perp$. Wir verwenden die Definitionen $Pv = u, Qv = u^\perp$ mit $v, w \in H$ und $v = Pv + Qv, w = Pw + Qw$. Betrachte:

$$v + w = \underbrace{(Pv + Pw)}_{\in U} + \underbrace{(Qv + Qw)}_{\in U^\perp}$$

Folglich

$$P(v + w) = Pv + Pw \text{ und } Q(v + w) = Qv + Qw.$$

(λv geht analog.) Wir setzen für $v \in H$ nun

$$\|v\|^2 = \|Pv + Qv\|^2 = \|Pv\|^2 + \|Qv\|^2 \text{ da } \langle Pv, Qv \rangle = 0$$

Daraus folgt $\|Pv\|^2 \leq \|v\|^2$ und $\|P\|, \|Q\| \leq 1$. Sei $v \in U, v \neq 0$, dann $Pv = v$ und damit $\|Pv\| = \|v\|$, also $\|P\| \geq 1$. \square

Satz 5.1.5. Sei V ein normierter Raum, W ein Banachraum, dann ist $B(V, W)$ ein Banachraum mit der Operatornorm.

Beweis: Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $B(V, W)$, dann $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|A_n - A_m\| = 0$. Sei nun $v \in V$, dann

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|A_n v - A_m v\| \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|A_n - A_m\| \|v\|$$

und damit ist $(A_n v)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in W . Somit ist $Av = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n v$. Definiere $A : V \rightarrow W$ nun als Abbildung aus diesem Grenzwert.

Hier gab es in der Vorlesung einen Nachtrag, allerdings sollte es so auch gehen.

Damit gilt schon

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \{\|Av - A_n v\|\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Seien nun $v, w \in V$, dann sehen wir die Linearität wie folgt:

$$A(v+w) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(v+w) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n v + A_n w = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n v + \lim_{n \rightarrow \infty} A_n w = Av + Aw \text{ (für } A(\lambda v) \text{ genauso)}$$

Zur Beschränktheit:

$$|\|A_n\| - \|A_m\|| \leq \|A_n - A_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| =: c$$

Betrachte nun:

$$\|Av\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n v\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \|v\| = c \|v\|$$

und damit $A \in B(V, W)$.

□

Bemerkung 5.1.3. Es gibt soetwas wie eine Rückrichtung: Falls $B(V, W)$ ein Banachraum ist, wobei V nicht der triviale Vektorraum ist, so ist auch W ein Banachraum. (Wäre V der Nullvektorraum, so gäbe es mit der Nullabbildung nur eine lineare Abbildung, damit wäre $B(V, W)$ immer vollständig.)

5.2 Das Dual

Definition 5.2.1. Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum. Dann wird $V' = B(V, \mathbb{K})$ als Dualraum von V bezeichnet. $\phi \in V'$ heißt auch linear beschränktes Funktional.

Definition 5.2.2.

Beispiel 5.2.1. Wir untersuchen den Dualraum von $V = L^p(\mu)$. Mittels der Hölderungleichung erhalten wir mit $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)$:

$$\left| \int f g d\mu \right| \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Sei nun $\varphi_g := \int \cdot g d\mu \in V'$. Da

$$|\varphi_g| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

ist φ_g beschränkt und $\{\varphi_g : g \in L^p\} = (L^p(\mu))'$ und damit $L^p(\mu)'' \simeq L^p(\mu)$.

Satz 5.2.1. Jedes beschränkte lineare Funktional φ auf dem Hilbertraum $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ hat die Form $\varphi(x) = \langle h_0, x \rangle$ für ein eindeutiges $h_0 \in H$ und $\|\varphi\|_{H'} = \|h_0\|$ und $h_0 \rightarrow \varphi$ anti-linear.

Beweis: Existenz Sei o.B.d.A $\varphi \neq 0$, d.h. $\ker \varphi = \{x \in H \mid \varphi(x) = 0\}$ ist ein echter abgeschlossener Teilraum. Dann muss aber auch $\ker \varphi^\perp \neq \{0\}$. Sei $z \in \ker \varphi$ mit $\|z\| > 0$ und o.B.d.A $\varphi(z) = 1$. Sei $h \in H$ beliebig, dann sehen wir

$$\varphi(\underbrace{\varphi(h)z - h}_{\in \ker \varphi}) = \varphi(h)\varphi(z) - \varphi(h) = 0.$$

Damit ist $z \perp \varphi(h)z - h$ und äquivalent dazu

$$0 = \langle z, \varphi(h)z - h \rangle = \varphi(h) \|z\|^2 - \langle z, h \rangle \text{ also } \varphi(h) = \left\langle \frac{z}{\|z\|^2}, h \right\rangle.$$

Eindeutigkeit

Nehmen wir an, dass $\langle h_1, h \rangle = \langle h_2, h \rangle$ mit $h = h_1 - h_2$ und sei

$$0 = \langle h_1 - h_2, h \rangle = \|h_1 - h_2\|^2 \implies h_1 = h_2.$$

Über die CBS-Ungleichung gilt außerdem:

$$|\langle h_0, h \rangle| \leq \|h_0\| \|h\| \implies \|\varphi\|_{H'} \leq \|h_0\|.$$

Da aber

$$|\varphi(h_0)| = \langle h_0, h_0 \rangle = \|h_0\|^2 = \|h_0\| \|h_0\| \implies \|\varphi\| = \|h_0\|.$$

□

Beispiel 5.2.2. Sei $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)'$ mit $\mu(\omega) < \infty$ und $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ und jeweils $\mu(\Omega_n) < \infty$. Sei $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ und $g \geq 0$, dann $\varphi^\pm(g) \geq 0$.

Sei o.B.d.A $\varphi \geq 0$. Dann ist $v_\varphi : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$, $v_\varphi(E) = \varphi(1_E)$ ein Maß. Wenn $\varphi(E) = 0$, dann $v_\varphi(E) = 0$. Mit dem Satz von Radon-Nikodim (LABEL???) folgt, dass es ein $h \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$ mit

$$\varphi(1_E) = v_\varphi(E) = \int 1_E h d\mu$$

Damit erhalten wir $\varphi(f) = \int f h d\mu$ und die Hölderungleichung.

Satz 5.2.2. Die Abbildung $\psi : H \rightarrow H', h \mapsto \langle h, \cdot \rangle$ ist eine (anti-lineare) isometrische Projektion.

Beweis: Wurde in der Vorlesung übersprungen. □

Bemerkung 5.2.1. In der Physik schreibt man auch:

$$\begin{aligned} \langle u | &:= \langle u, \cdot \rangle \text{ bra} \\ |h \rangle &:= h, \text{ ket} \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung von Notation gilt dann $\langle u | h \rangle := \langle u, h \rangle$

Definition 5.2.3. Seien H, K Hilberträume, dann heißt eine Sesquilinearform $u : H \times K \rightarrow \mathbb{K}$ beschränkt genau dann wenn

$$\exists M > 0, \forall h \in H, k \in K : |u(h, k)| \leq M \|h\|_H \|k\|_K$$

Satz 5.2.3. Ein Operator u wie in 5.2.3 ist genau dann beschränkt, wenn

$$\exists A \in B(K, H) : \forall h \in H, \forall k \in K : u(h, k) = \langle h, Ak \rangle$$

Beweis: (\implies)

Sei k fixiert, $u(\cdot, k) \in H'$, da:

$$|u(h, k)| \leq M \|h\|_H \|k\|_K \leq (M \|k\|_K) \|h\|_H.$$

Mit 5.2.2 folgt:

$$\exists ! A(k) \in H : \overline{u(\cdot, k)} = \langle A(k), \cdot \rangle \text{ bzw. } \forall h \in H : u(h, k) = \langle h, A(k) \rangle$$

Sei nun $k_1, k_2 \in K$, dann haben wir:

$$\langle h, A(k_1 + k_2) \rangle = u(h, k_1 + k_2) = u(h, k_1) + u(h, k_2) = \langle h, A(k_1) + A(k_2) \rangle$$

Sei nun $\lambda \in \mathbb{K}, k \in K$, so folgt:

$$\langle h, A(\lambda k) \rangle = u(h, \lambda k) = \lambda u(h, k) = \lambda \langle h, A(k) \rangle = \langle h, \lambda A(k) \rangle$$

Damit ist A linear.

Wir wissen für $\|h\| \leq 1$:

$$|\langle h, Ak \rangle| = |u(h, k)| \leq M \|h\| \|k\| \leq M \|k\|$$

Damit folgt $\|Ak\| \leq M \|k\|$ also ist A beschränkt. Folglich $A \in B(H, K)$.

(\impliedby)

Sei $A \in B(K, H)$, dann haben wir folgende Abschätzung mittels CBS-Ungleichung:

$$|\langle h, Ak \rangle| \leq \|h\| \|Ak\| \leq \|A\| \|h\| \|k\|$$

□

Satz 5.2.4. Für alle $A \in B(K, H)$ gibt es $A^* \in B(H, K)$ mit der Eigenschaft

$$\forall h \in H, k \in K : \langle h, Ak \rangle = \langle A^*h, k \rangle.$$

Dieser adjungierte Operator hat folgende Eigenschaften:

1. $A \rightarrow A^*$ ist antilinear
2. $A^{**} = A$
3. $(AB)^* = B^*A^*$
4. $\|A^*\| = \|A\|$ und $\|A^*A\| = \|A\|^2$ (C^* – Axiom)

Beweis: Existenz:

Mittel der CBS-Ungleichung erhalten wir:

$$|\langle h, Ak \rangle| \leq \|h\| \|Ak\| \leq \|A\| \|h\| \|k\|.$$

Aber es gilt $|\langle h, Ak \rangle| = |\langle Ah, k \rangle|$. Damit ist $u(k, h) := \langle Ak, h \rangle$ sesquilinear auf $K \times H$. Damit gibt es aber ein eindeutiges A^* mit

$$\overline{\langle Ak, h \rangle} = \overline{u(h, k)} = \overline{\langle k, A^*h \rangle}$$

zu 1: Es gilt $\langle (\lambda A)^*h, k \rangle = \langle h, \lambda Ak \rangle = \lambda \langle h, Ak \rangle = \langle \bar{\lambda} A^*h, k \rangle$

zu 2: $\langle A^{**}k, h \rangle = \langle k, A^*h \rangle = \overline{\langle A^*h, k \rangle} = \overline{\langle h, Ak \rangle} = \langle Ak, h \rangle$ mit $h = A^{**} - Ak$. Dann:

$$0 = \langle A^{**}k, h \rangle - \langle Ak, h \rangle = \langle (A^{**} - A)k, (A^{**} - A)k \rangle \implies \|A^{**}k - Ak\| = 0$$

Damit gilt dann die Gleichheit.

zu 3: Sei $A \in B(K, H), B \in B(L, K)$ und $AB \in B(L, H)$. Außerdem gilt: $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. Des Weiteren:

$$\forall h \in H, l \in L : \langle (AB)^*, l \rangle = \langle h, A(Bl) \rangle = \langle A^*l, Bl \rangle = \langle B^*A^*h, l \rangle$$

zu 4: Sei $k \in K$ mit $\|k\| = 1$. Dann gilt mit der CBS-Ungleichung

$$\|Ak\|^2 = \langle Ak, Ak \rangle = \langle A^*Ak, k \rangle \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\|$$

Auf der anderen Seite:

$$\sup_{\|k\| \leq 1} \|Ak\| = \|A\|^2 \leq \|A^*\| \|A\| \implies \|A^*\| \geq \|A\|$$

Aufgrund von 2. haben wir auch hier Gleichheit. Damit haben wir dann:

$$\|A\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2$$

□

Beispiel 5.2.3. „bra's adjointed“

Sei nun $A := |v\rangle : H \rightarrow \mathbb{K}$ und wir betrachten den dazu adjungierten Operator $A^* : \mathbb{K} \rightarrow H$. Wir haben:

$$\forall h \in H, \lambda \in \mathbb{K} : \langle A^*\lambda, h \rangle = \langle \lambda, Ah \rangle_{\mathbb{K}} = \langle \lambda, Ah \rangle_{\mathbb{K}} = \bar{\lambda} Ah = \bar{\lambda} \langle v, h \rangle = \lambda \langle v, h \rangle.$$

Daraus folgt dann $A^*\lambda = \lambda v$ und damit $|l\text{angev}| = |v\rangle$

Beispiel 5.2.4. Sei H ein Hilbertraum, $K \subseteq H$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei des Weiteren noch $P, Q \in B(H)$ mit $Ph \in K, Qh \in K^\perp, P + Q = I_H$ wobei I_H der Identitätsoperator ist. Gesucht ist nun P^* .

Betrachten wir dazu:

$$\langle P^*h, h' \rangle = \langle h, Ph' \rangle = \langle Ph, Ph \rangle + \underbrace{\langle Qh, Ph' \rangle}_{=0} = \langle P^*Ph, h' \rangle.$$

Damit haben wir $P^* = P^*P$ und da

$$P = (P^*P)^* = P^*P^{**} = P^*P = P^* \text{ und damit } P = P^* = P^2$$

Des Weiteren haben wir $h - Ph \perp Ph$:

$$\langle h - Ph, Ph \rangle = \langle Ph \rangle - \langle h, P^*Ph \rangle = 0$$

(Für Q analog.)

Definition 5.2.4. Sei $A \in B(H)$, dann heißt A :

- selbstadjungiert, falls $A^* = A$
- normal, falls $A^*A = AA^*$
- unitär, falls $A^*A = \text{Id}_H = AA^*$

Beispiel 5.2.5. Wir betrachten den $L^2(\mu)$ mit dem Multiplikationsoperator $M_\varphi f(x) = \varphi(x)f(x)$. Dann gilt:

$$\langle M_\varphi^*h, f \rangle = \langle h, M_\varphi f \rangle = \int \bar{h}(x)\varphi(x)f(x)\mu(dx) = \int \overline{\bar{\varphi}(x)h(x)}f(x)\mu(dx) = \langle M_{\bar{\varphi}}h, f \rangle.$$

Somit erhalten wir $M_\varphi^* = M_{\bar{\varphi}}$. Falls außerdem $\text{Im}\varphi \subseteq \mathbb{R}$, dann ist der Operator selbstadjungiert. Des Weiteren ist er normal, da:

$$M_\varphi^*M_\varphi = M_{\bar{\varphi}}M_\varphi = M_{|\varphi|^2} = M_\varphi M_\varphi^*$$

5.3 Der Satz von Hahn-Banach

Definition 5.3.1. Eine partielle Ordnung auf einer Menge X ist eine Relation \leq , sodass für alle $a, b, c \in X$ gilt:

1. Transitivität: $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$
2. Reflexivität: $a \leq a$
3. Anti-Symmetrie: $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$

Falls für alle $a, b \in X$ gilt $a \leq b \vee b \leq a$, dann wird X als total geordnet bezeichnet.

Satz 5.3.1 (Lemma von Zorn). Sei (Z, \leq) eine partiell geordnete Menge mit der Eigenschaft, dass jede total geordnete Teilmenge (bez. *Kette*) eine obere Schranke in Z hat. Dann hat Z ein maximales Element.

Lemma 5.3.1. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Unterraum, $z \in V \setminus U$ so, dass $V = \text{span}\{U \cup \{z\}\}$ sowie $\varphi_0 \in U'$. Dann gibt es $\varphi \in V'$ mit $\forall u \in U : \varphi(u) = \varphi_0(u)$ und $\|\varphi\| = \|\varphi_0\|$.

In der Vorlesung wurde im Lemma $\|\varphi\| \geq \|\varphi_0\|$ angegeben, aber dies sollte direkt aus $\varphi|_U = \varphi_0$ folgen und wir zeigen im Lemma \leq und somit Gleichheit, oder?

Beweis. Wir zeigen hier nur den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nehmen o. B. d. A. an, dass $\varphi_0 \neq 0$ (ansonsten setze $\varphi = 0$) und $\|\varphi_0\| = 1$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung

$$V = \text{span}\{U \cup \{z\}\} = \{u + \alpha z \mid u \in U, \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha z - u \mid u \in U, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Zeige nun, dass für $v = \alpha z - u \in V$ mit $u \in U, \alpha \in \mathbb{R}$ eindeutig ist. Angenommen für $u_1, u_2 \in U, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gilt $v = u_1 + \alpha_1 z = u_2 + \alpha_2 z$, dann folgt

$$u_1 + \alpha_1 z = u_2 + \alpha_2 z \iff \overbrace{(\alpha_2 - \alpha_1)z}^{\notin U} = \overbrace{u_1 - u_2}^{\in U} \implies \alpha_1 = \alpha_2 \implies u_1 = u_2.$$

Betrachte nun $x, y \in U$, dann gilt (mit $\|\varphi_0\| = 1$)

$$\begin{aligned} \overbrace{\varphi_0(x) - \varphi_0(y)}^{\in \mathbb{R}} &\leq |\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| = |\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| \\ &= |\varphi_0(x - y)| \leq \|\varphi_0\| \|x - y\| = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|y - z\| \\ &\iff \varphi_0(x) - \|x - z\| \leq \varphi_0(y) + \|y - z\|. \end{aligned}$$

Somit existiert $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\sup_{x \in U} \varphi_0(x) - \|x - z\| \leq c \leq \inf_{y \in U} \varphi_0(y) + \|y - z\|.$$

Damit können wir nun die Fortsetzung definieren, wobei für $v \in V$ (wie oben) gilt

$$\varphi(v) = \varphi(\alpha z - u) := \alpha c - \varphi_0(u).$$

Wir prüfen nun die geforderten Eigenschaften. Es gilt offensichtlich $\varphi|_U = \varphi_0$ (setzen $\alpha = 0$ in eindeutiger Darstellung) und somit automatisch $\|\varphi\| \geq \|\varphi_0\|$. Zeige nun die Normabschätzung. Zunächst gilt $\forall \tilde{u} \in U$

$$\begin{aligned} \varphi_0(\tilde{u}) - \|\tilde{u} - z\| &\leq c \leq \varphi_0(\tilde{u}) + \|\tilde{u} - z\| \\ \iff -\|\tilde{u} - z\| &\leq c - \varphi_0(\tilde{u}) \leq \|\tilde{u} - z\| \\ \iff |c - \varphi_0(\tilde{u})| &\leq \|\tilde{u} - z\| \end{aligned}$$

Somit erhalten wir $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, u \in U$ (d.h. für $v \in V \setminus U$)

$$|\varphi(\alpha z - u)| = |\alpha| \left| \varphi \left(z - \frac{u}{\alpha} \right) \right| = |\alpha| \cdot \left| c - \varphi_0 \left(\frac{u}{\alpha} \right) \right| \leq |\alpha| \left\| \frac{u}{\alpha} - z \right\| = \|\alpha z - u\| .$$

Folglich gilt $|\varphi(\alpha z - u)| \leq \|\varphi_0\| \|\alpha z - u\| \implies \|\varphi\| \leq \|\varphi_0\|$ und es folgt Normgleichheit. \square

Satz 5.3.2 (Hahn-Banach). Sei $V, \|\cdot\|$ ein normierter Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Unterraum und $\varphi_0 \in U'$. Dann gibt es ein $\varphi \in V'$ mit $\varphi|_U = \varphi_0$ und $\|\varphi\|_{V'} = \|\varphi_0\|_{U'}$. D. h. jedes beschränkte, lineare Funktional kann normgleich fortgesetzt werden.

Beweis. O. B. d. A. $\|\varphi_0\| = 1$. Wir setzen

$$Z := \left\{ (W, \psi) \mid U \subseteq W \subseteq V \text{ Unterraum, } \psi \in W', \psi|_U = \varphi_0, \|\psi\| = \|\varphi_0\| = 1 \right\} .$$

Definieren partielle Ordnung auf Z über

$$(W, \psi) \leq (\tilde{W}, \tilde{\psi}) : \iff W \subseteq \tilde{W} \text{ und } \tilde{\psi}|_W = \psi .$$

Sei nun $Z_0 \subseteq Z$ eine total geordnete Teilmenge, womit wir $W^* \subseteq V$ wie folgt definieren

$$Z_0 := \{(W_i, \psi_i) \mid i \in I\} \quad \text{und} \quad W^* := \bigcup_{i \in I} W_i .$$

Dabei ist W^* ein Unterraum, da für $x, y \in W^*$ existieren $i_1, i_2 \in I$, sodass $x \in W_{i_1}$ und $y \in W_{i_2}$. Sei o. B. d. A. $(W_{i_2}, \psi_{i_2}) \geq (W_{i_1}, \psi_{i_1})$, dann gilt nach Voraussetzung auch $x \in W_{i_2}$, dies ist ein Unterraum und somit $x + y \in W^*$. Wir definieren nun ein lineares Funktional ψ^* auf W^* , wobei für $w \in W^*$

$$\exists \hat{i} \in I : w \in W_{\hat{i}} \text{ und somit } \psi^*(w) := \psi_{\hat{i}}(w) .$$

Zeige nun, dass ψ^* wohldefiniert ist. Seien $(W_{i_j}, \psi_{i_j}) \in Z_0, j \in \{1, 2\}, w \in W_{i_1}$, o. B. d. A. $W_{i_1} \subseteq W_{i_2}$ und $\psi_{i_2}|_{W_{i_1}} = \psi_{i_1}$. Dann gilt $\psi_{i_2}(w) = \psi_{i_1}(w)$, d. h. ψ^* ist wohldefiniert. Weiterhin existiert für alle $w \in W^*$ ein $i^* \in I$ mit

$$|\psi^*(w)| = |\psi_{i^*}(w)| \leq \|\psi_{i^*}\| \|w\| = \|\varphi_0\| \|w\| = \|w\| \implies \|\psi^*\| \leq 1 .$$

Da offensichtlich $\|\psi^*\| \geq \|\varphi_0\|$ (wegen $\psi^*|_U = \varphi_0$), folgt $\|\psi^*\| = 1$. Somit $(W^*, \psi^*) \in Z$ und für $(W, \psi) \in Z_0$ beliebig gilt nach Konstruktion

$$W \subseteq W^* \text{ und } \forall w \in W : \psi^*(w) = \psi(w) \implies (W, \psi) \leq (W^*, \psi^*) .$$

Somit ist (W^*, ψ^*) eine obere Schranke von Z_0 . Nach dem Lemma von Zorn hat Z_0 also ein Maximum, bez. dieses mit (W_0, ψ_0) . Angenommen $W_0 \neq V$. Dann können wir für $z \in V \setminus W_0$ Lemma 5.3.1 anwenden auf $W_1 := \text{span}\{W_0 \cup \{z\}\}$, d. h.

$$\exists \eta \in W_1' : \eta|_{W_0} = \psi_0 \text{ und } \|\eta\| = \|\psi_0\| = \|\varphi_0\| .$$

Dann folgt jedoch $(W_1, \eta) \in Z$ mit $(W_1, \eta) > (W_0, \psi_0)$, was ein Widerspruch dazu ist, dass (W_0, ψ_0) eine obere Schranke ist. Somit leistet $W_0 = V$ und $\varphi := \psi_0$ das Verlangte. \square

Beispiel 5.3.1. Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum, $U \subseteq V$ ein dichter Teilraum von V und $\varphi_0 \in U'$. Nach Voraussetzung existiert für jedes $x \in V$ eine Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in U$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Da φ_0 beschränkt und linear (und somit stetig), folgt, dass auch $(\varphi_0(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge auf

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (und somit konvergent) ist. Wir definieren die (eindeutige) Fortsetzung $\varphi \in V'$ mit

$$\forall x \in V' : \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0(x_n) .$$

Weiterhin gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_0\| \|x_n\| = \|\varphi_0\| \|x\| .$$

Es ist nicht ganz klar, wozu die letzte Abschätzung nötig ist und wieso die Eindeutigkeit gilt.

Satz 5.3.3. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, wobei $V \neq \{0\}$. Dann gibt es für jedes $x_0 \neq 0 \in V$ ein $\varphi \in V'$ mit $\varphi(x_0) = \|x_0\|$ und $\|\varphi\| = 1$.

Beweis. Wir setzen $U := \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$, damit ist $U \subseteq V$ ein Unterraum. Definieren $\varphi_0 \in U'$ über

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} : \varphi_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\| \implies \varphi_0(x_0) = \|x_0\| .$$

Weiterhin gilt

$$\|\varphi_0\| = \sup \{ |\varphi_0(\alpha x_0)| \mid \alpha \in \mathbb{K}, |\alpha| \|x_0\| \leq 1 \} = \sup \{ |\alpha| \|x_0\| \mid |\alpha| \|x_0\| \leq 1 \} = 1 .$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach können wir nun φ_0 normgleich nach V' fortsetzen und erhalten somit die geforderten Eigenschaften. \square

Satz 5.3.4. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist

$$\psi : V \rightarrow V'', \quad x \mapsto (x'' : \varphi \mapsto \varphi(x))$$

eine isometrische Abbildung.

Beweis. Es gilt

$$\|x''\| = \sup \{ |\varphi(x)| \mid \varphi \in V', \|\varphi\| \leq 1 \}$$

Dabei gilt $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\| \leq \|x\|$ für $\|\varphi\| \leq 1$. Somit $\|x''\| \leq \|x\|$. Da $\varphi_x \in V'$ mit $\varphi_x(x) := \|x\|$, folgt die Gleichheit $\|x''\| = \|x\|$. \square