Skript Funktionalanalysis

Jakob Kropf und Jonas Harder

Version vom 29. Mai 2024

Todo-Liste

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Metrische Räume

1.1 Definitionen

Definition 1.1.1. Eine Menge T, versehen mit einer Abbildung $d : T \times T \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $(s, t, u \in T$ beliebig)

1. $d(s, t) \geq 0$,
2. $d(s, t) = d(t, s)$
3. $d(s, u) \leq d(s, t) + d(t, u)$
4. $d(s, t) = 0 \iff s = t$

ist *metrischer Raum* mit *Metrik* d. Falls nur $(\Leftarrow)$ in 4. gilt, handelt es sich um eine *Halbmetrik*.

Beispiel 1.1.1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist ein metrischer Raum.

Beispiel 1.1.2. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist ein metrischer Raum.

Beispiel 1.1.3. $(\mathbb{R}^n, d_i)$ mit $i \in \{1, 2, \infty\}$ sind metrische Räume, wobei für $x, y \in \mathbb{R}$

$$d_1 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)}, \quad d_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \quad d_\infty := \max\{|x_i - y_i| \, |i : 1, \ldots, n\}$$

Definition 1.1.2. Sei X, d ein metrischer Raum. Dann definieren wir die offene bzw. abschlossene Kugel um $x \in X$wie folgt.

$$K_\nu(x) := \{y \in X | d(x, y) \leq \nu\} \quad \overline{K_\nu(x)} := \{y \in X | d(x, y) \leq \nu\}$$

Weiterhin ist U eine Umgebung von $x \iff \exists \nu > 0 : K_\nu(x) \subseteq U$.

1.2 Konvergenz und Stetigkeit

Definition 1.2.1. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum X heißt *konvergent* gegen $x \in X$ (bez. $\lim_{n\to\infty} t_n = t$), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) \leq \varepsilon \ .$$

Satz 1.2.1. Der Limes einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

Satz 1.2.2. Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent und hat den gleichen Grenzwert.

Definition 1.2.2. Sei $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann heißt f *stetig an der Stelle* $x_0 \in X_1$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : d_1(x, x_0) < \delta \implies d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Satz 1.2.3. Sei $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist stetig an x_0
2. $\forall \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in X_1 \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in X_1 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Satz 1.2.4. Seien $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$ stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Dann ist die Verknüpfung $g \circ f : X_1 \to X_3$ stetig.

1.3 Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 1.3.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann heißt

1. $G \subseteq X$ offen $:\iff \forall x \in G \, \exists \nu > 0 : K_\nu(x) \subseteq G$
2. $F \subseteq X$ abgeschlossen $:\iff \forall \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in F \, \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} x_n = x \implies x \in F$
3. $S \subseteq X$ liegt dicht in $X :\iff \forall x \in X \, \exists \left(s_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, s_n \in S : \lim_{n\to\infty} s_n = x$

Definition 1.3.2. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *separabel*, wenn es eine höchstens abzählbare Teilmenge $S \subseteq X$ gibt, die in diesem Raum dicht liegt.

Beispiel 1.3.1. Der Banachraum

$$l^\infty(\mathbb{N}) := \{\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} | a_n \in \mathbb{R}, \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt}\} \quad \text{mit } d_\infty(\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$$

ist nicht separabel.

Satz 1.3.1. Sei $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind äquivalent:

1. f ist stetig.
2. $\forall G \subseteq X_2 : G$ offen $\implies f^{-1}(G)$ offen.
3. $\forall F \subseteq X_2 : F$ abgeschlossen $\implies f^{-1}(F)$ abgeschlossen.

Bemerkung 1.3.1. Aus Satz 1.3.1 folgt: $K_\varepsilon(x)$ offen, da $K_\varepsilon(x) = d(x, \cdot)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$.

1.4 Vollständigkeit

Definition 1.4.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann heißt $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X$ *Cauchy-folge*, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Satz 1.4.1. Jede konvergente Folge $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) ist eine Cauchy-Folge.

Definition 1.4.2. Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge konvergiert.

Beispiel 1.4.1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $\mathbb{C}, |\cdot|$ sind vollständige metrische Räume.

Beispiel 1.4.2. Die metrischen Räume $(\mathbb{R}^n, f_p)$ mit $p \in [1, \infty]$ sind vollständig.

Satz 1.4.2. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:

$$Y \subseteq X \text{ vollständig} \iff Y \text{ abgeschlossen.}$$

Satz 1.4.3. Sei (X_1, d_1) ein metrischer Raum (X_2, d_2) ein vollständiger metrischer Raum sowie $\varphi : X_1 \to X_2$ isometrisch. Dann gibt es genau eine isometrisches $\hat{\varphi} : X_1 \to X_2$ mit $\hat{\varphi}|_S = \varphi$.

Beweis. Sei $x \in X_1$, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in S$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere eine Cauchyfolge. Folglich ist auch $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und mit der Vollständigkeit von X_2 gilt

$$\exists y \in X_2 : \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = y := \hat{\varphi}(x) \ .$$

Wir setzen also für solche Folgen

$$\hat{\varphi}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) := \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) \ .$$

Zeige nun $\hat{\varphi}$ ist wohldefiniert. Sei eine weitere Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in S$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Es folgt:

$$d_2(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = d_1(x_n, y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d_1(x, x) = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = y \ .$$

Somit ist $\hat{\varphi}$ in der Tat wohldefiniert. Weiterhin gilt $\hat{\varphi}|_S = \varphi$, denn wir wählen für $x \in S$ die Folge $(x)_{n\in\mathbb{N}}$, somit gilt

$$\hat{\varphi}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \hat{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x) = \varphi(x) \ .$$

Zeige nun $\hat{\varphi}$ ist eine Isometrie. Seien dazu $x, y \in X$ mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in S, wobei $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Somit

$$d_2(\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)) = \lim_{n\to\infty} d_2(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d_1(x_n, y_n) = d(x, y) \ .$$

□

Satz 1.4.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ (bez. Vervollständigung von X) und eine Isometrie $\varphi : X \to \hat{X}$ (d. h. $\forall x, y \in X : d(x, y) = \hat{d}(\varphi(x), \varphi(y))$), sodass das Bild $\varphi(X)$ dicht in $\hat{X}$ ist. Haben $(\tilde{X}, \tilde{d})$ und $\tilde{\varphi}$ die gleiche Eigenschaft, so gibt es eine Bijektion $\psi : \hat{X} \to \tilde{X}$ mit $\tilde{\varphi} = \psi \circ \varphi$.

Beweis. Definiere die Menge aller Cauchyfolgen in X durch

$$\hat{X}_0 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge}\}.$$

Definiere weiterhin eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\hat{X}_0$ mit

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} :\iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \ .$$

Wir setzen $\hat{X}$ als die Menge aller Äquivalenzklassen an, d. h.

$$\hat{X} = {}^{\hat{X}_0}\!/\!_{\sim} = \{\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] | \,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{X}_0\} \text{ wobei } \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\} \ .$$

Nun konstruieren wir die Metrik $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \to [0, \infty)$, wobei für $\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \in \hat{X}$ gilt

$$\hat{d}(\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]) = \lim_{n,m\to\infty} d(x_n, y_m) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N, M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall m \geq M : d(x_n, y_m) < \varepsilon \ .$$

Zeigen nun, dass $\hat{d}$ wohldefiniert. Seien $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{X}_0$ mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann nach Definition

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, y'_n) = 0 .$$

Anwenden der Dreiecksungleichung ergibt

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n) \\ d(x'_n, y'_n) &\leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n) . \end{aligned}$$

Somit

$$\left| d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n) \right| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \to 0 .$$

Da $(d(x_n, y_n))$ und $(d(x'_n, y'_n))$ konvergent, folgt

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, y_m) = \lim_{n',m'\to\infty} d(x'_{n'}, y'_{m'})$$

und somit ist $\hat{d}$ wohldefiniert. Nun gilt nach Def. 1.1.1 zu zeigen, dass $\hat{d}$ eine Metrik auf $\hat{X}$ ist. Wir zeigen hier nur die Dreiecksungleichung:

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, y_m) \leq \lim_{k\to\infty} \lim_{n,m\to\infty} d(x_n, z_k) + d(z_k, y_m) \iff$$
$$\hat{d}(\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]) \leq \hat{d}(\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \left[(z_k)_{k\in\mathbb{N}}\right]) + \hat{d}(\left[(z_k)_{k\in\mathbb{N}}\right], \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]) .$$

Setze nun $\varphi : X \to \hat{X},\ , x \mapsto [(x)_{n\in\mathbb{N}}]$, dies ist offensichtlich eine Isometrie. Zeigen nun, dass $\varphi(X)$ dicht in $\hat{X}$. Sei $\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \in \hat{X}$. Nach Voraussetzung ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, d. h. $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ sodass $\forall m, n \geq N_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Somit $\hat{x}_{N_0} := [(x_{N_0})_{n\in\mathbb{N}}] = \varphi(x_{N_0}) \in \varphi(X)$ und

$$\hat{d}\left(\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \hat{x}_{N_0}\right) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{N_0}) < \varepsilon .$$

Somit $\hat{x}_{N_0} \in K_\varepsilon(\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]) \cap \varphi(X)$ und folglich ist $\varphi(X)$ dicht in $\hat{X}$. Nun gilt zu zeigen, dass $(\hat{X}, \hat{d})$ vollständig ist. Zeige dafür zunächst folgendes Lemma.

Lemma 1.4.1. Sei X, d metrischer Raum, $S \subseteq X$ dicht in X, sodass jede Cauchyfolge in S in X konvergiert. Dann ist X vollständig.

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Da S dicht in X gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists y_n \in S : d(x_n, y_n) < 1/n .$$

Somit ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge in S, da

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) < 1/m + d(x_m, x_n) + 1/n .$$

Nach Annahme existiert $\lim_{n\to\infty} y_n =: x \in X$. Da

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, x) < 1/n + d(y_n, x)$$

folgt in der Tat $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. □

Nach Lemma 1.4.1 g. z. z., dass jede Cauchyfolge in $\varphi(X)$ in $\hat{X}$ konvergiert. Sei $(\hat{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\varphi(X)$, d. h. $\hat{x}_k := (x_k, x_k, \ldots)$. Da φ eine Isometrie, ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X durch

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) = \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) \; .$$

Somit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \hat{X}_0$, $\left[(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right] \in \hat{X}$. Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\forall k, n \geq N : d(z_k, z_n) < \varepsilon$. Somit gilt $\forall k \geq N$:

$$\hat{d}(\hat{x}_k, \hat{x}) = \lim_{n\to\infty} d(z_k, z_n) < \varepsilon \; .$$

Folglich konvergiert $(\hat{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\hat{x} \in \hat{X}$ und $\hat{X}$ ist vollständig. Betrachte nun $(\tilde{X}, \tilde{d})$ sowie $\tilde{\varphi}$ mit den gleichen Eigenschaften. Wir definieren

$$\psi_0 : \varphi(X) \to \tilde{X}, \;\; \psi_0(\varphi(x)) = \tilde{\varphi}(x) \; .$$

Dies ist eine Isometrie, da für $x, y \in X$ gilt

$$\tilde{d}\left(\psi_0(\varphi(x)), \psi_0(\varphi(y))\right) = \tilde{d}(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)) = d(x, y) = \hat{d}(\varphi(x), \varphi(y)) \; .$$

Nach Satz 1.4.3 existiert eine eindeutige Erweiterung $\psi : \hat{X} \to \tilde{X}$ Isometrie mit $\psi|_{\varphi(X)} = \psi_0$. Da ψ_0 als Isometrie injektiv ist, g. z. z. ψ_0 ist surjektiv. Sei also $z \in \tilde{X}$, dann wegen der Dichtheit von $\tilde{\varphi}(X)$

$$\exists \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \; \forall n \in \mathbb{N} \; x_n \in X : \lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}(x_n) = z \; .$$

Somit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge $\implies$ $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge. Da $\hat{X}$ vollständig

$$\exists w \in \hat{X} : \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = w \; .$$

Da ψ eine Isometrie ist folgt schließlich $\lim_{n\to\infty} \psi(\varphi(x_n)) = \psi(w) = z$ und somit ist ψ bijektiv. □

1.5 Kompaktheit

Definition 1.5.1. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. D. h., wenn $(G_i)_{i\in I}$ eine Famile offener Mengen, mit $X = \bigcup_{i\in I} G_i$, dann existieren endlich viele $G_{i_1}, \ldots, G_{i_n}$ mit $X = \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$.

Satz 1.5.1. Sei X, d metrischer Raum, $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K beschränkt und abgeschlossen (Umkehrung gilt i. A.nicht).

Satz 1.5.2. Sei X, d metrischer Raum. Dann gilt

$$X \text{ kompakt } \iff \forall \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \exists \left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ Teilfolge } \exists y \in X : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y$$

Satz 1.5.3 (Heine-Borel)**.** Betrachte die metrischen Räume $(\mathbb{R}^n, d_p)$ mit $p \in [1, \infty]$. Dann ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt $\iff$ X beschränkt und abgeschlossen.

Definition 1.5.2. Sei (X, d) metrischer Raum. Dann heißt $Y \subseteq X$ totalbeschränkt falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \in \mathbb{N} \; \exists x_1, \ldots, x_M \in Y : Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} K_\varepsilon(x_i)$$

Satz 1.5.4. Sei X, d ein vollständiger metrischer Raum, $Y \subseteq X$. Dann ist Y kompakt $\iff$ Y abgeschlossen und total beschränkt.

Beweis. ($\Longrightarrow$)
Sei Y kompakt. Y abgeschlossen folgt aus Satz 1.5.1. Zeige nun die totale Beschränktheit, sei $\varepsilon > 0$ dafür fixiert. Dann gilt offensichtlich

$$Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} K_\varepsilon(y) \overset{Y \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} \exists y_1, \ldots, y_M : Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} K_\varepsilon(y_i)$$

Somit ist Y total beschränkt.
($\Longleftarrow$)
Sei $Y \subseteq X$ abgeschlossen und total beschränkt und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus Y. Es g. z. z., dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in Y konvergente Teilfolge besitzt. Wir nutzen die totale Beschränktheit zur Konstruktion der Teilfolge (TF).

$$\varepsilon = 1 : \exists \left\{y_i^1\right\}_{i=1,\ldots,M_1}, \ Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_1} K_1\left(y_i^1\right) \implies \exists \text{ TF } \left(x_{n_k^1}\right)_{k\in\mathbb{N}} \exists i_1 \in \{1,\ldots,M_1\} \, \forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k^1} \in K_1\left(y_{i_1}^1\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} : \exists \left\{y_i^2\right\}_{i=1,\ldots,M_2}, \ Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_2} K_{1/2}\left(y_i^2\right) \implies \exists \text{ TTF } \left(x_{n_k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}} \exists i_2 \in \{1,\ldots,M_2\}$$
$$\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k^2} \in K_1\left(y_{i_1}^1\right) \cap K_{1/2}\left(y_{i_2}^2\right)$$

Diese Konstruktion lässt sich nun auf l Schritte erweitern.

$$\varepsilon = 2^{-l} : \exists \left\{y_i^l\right\}_{i=1,\ldots,M_l}, \ Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_l} K_{2^{-l}}\left(y_i^l\right) \implies \exists \text{ TT}\ldots\text{TF } \left(x_{n_k^l}\right)_{k\in\mathbb{N}} \exists i_l \in \{1,\ldots,M_l\}$$
$$\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k^l} \in K_1\left(y_{i_1}^1\right) \cap K_{1/2}\left(y_{i_2}^2\right) \cap \ldots \cap K_{2^{-(l-1)}}\left(y_{i_{l-1}}^{l-1}\right) \cap K_{2^{-l}}\left(y_{i_l}^l\right)$$

Nach Konstruktion ist $\left(x_{n_k}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und für $k, k' \geq l$ gilt

$$x_{n_k}^k, \ x_{n_{k'}}^{k'} \in K_{2^{-l}}\left(y_{i_l}^l\right) \implies d\left(x_{n_k}^k, x_{n_{k'}}^{k'}\right) < 2^{-(l-1)} .$$

Folglich ist $\left(x_{n_k}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und da X nach Voraussetzung vollständig, gilt

$$\exists z \in X : \lim_{k\to\infty} x_{n_k}^k = z .$$

Da Y abgeschlossen, gilt insbesondere $z \in Y$ und folglich Y kompakt. $\square$

Beispiel 1.5.1. Betrachte

$$C[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}, \ \|\cdot\|_\infty, \text{ für } f, g \in C[0,1] : d(f,g) = \max\{|f(t) - g(t)| \mid t \in [0,1]\}$$

Dann gilt $Y \subseteq C[0,1]$ ist kompakt $\iff$ Y punktweise beschränkt, d. h.

$$\exists c > 0 \, \forall f \in Y \, \forall t \in [0,1] : |f(t)| \leq c$$

und Y gleichgradig stetig, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall f \in Y \, \forall s, t \in [0,1] : |t - s| < \delta \implies |f(t) - f(s)| < \varepsilon .$$

Satz 1.5.5. Sei (X_1, d_1) ein kompakter metrischer Raum, (X_2, d_2) ein metrischer Raum, sowie $f : X_1 \to X_2$ stetig. Dann ist $f(X_1)$ kompakt.

Bemerkung 1.5.1. Falls $X_2 = \mathbb{R}$, dann existieren nach dem Satz von Weierstraß $x_+, x_- \in X_1$ mit $f(x_+) = \sup f(X_1)$ und $f(x_-) = \inf f(X_1)$.

Satz 1.5.6. Sei (X_1, d_1) ein kompakter metrischer Raum, (X_2, d_2) ein metrischer Raum, sowie $f : X_1 \to X_2$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon \, .$$

Kapitel 2

Maß- und Integrationstheorie

2.1 Grundlegende Konstruktionen

Definition 2.1.1. Sei $\Omega \neq \emptyset$. Dann heißt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ σ-Algebra, falls

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $\forall A \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : A \in \mathcal{F} \implies A^C \in \mathcal{F}$
3. $\forall \left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \ \forall n \in \mathbb{N}\ A_n \in \mathcal{F} : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$

Bezeichne $(\Omega, \mathcal{F})$ als messbaren Raum.

Bemerkung 2.1.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann ist die σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ der Borelmengen die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen von X enthält. Bez. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) =: \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}^n$.

Definition 2.1.2. Sei $\Omega, \mathcal{F}$ ein messbarer Raum. Dann ist $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ ein Maß, falls

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\forall \left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \ \forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{F}, \ \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset : \mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

Wir bezeichnen $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ als Maßraum.

Definition 2.1.3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ wird als σ-endlich bezeichnet, falls gilt

$$\exists A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}, \ A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \quad \text{mit} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \mu(A_n) < \infty \text{ und } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega \ .$$

Definition 2.1.4. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Ein Maß $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ heißt absolut stetig bzgl. μ (bez. $\nu \ll \mu$), falls

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0 \ .$$

Beispiel 2.1.1. Sei Ω beliebig und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Dann können wir das Zählmaß μ definieren mit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{A endlich} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist Ω meist abzählbar, z. B. $\Omega = \mathbb{N}$ oder $\Omega = \mathbb{Z}$

Beispiel 2.1.2. Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{F} = \mathcal{B}^n$. Dann definieren wir das Lebesgue-Maß l^n mit

$$l^n\left(\bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \ .$$

Für $l = 1$ gilt damit insbesondere $l^1([a, b)) =: l([a, b)) = b - a$.

2.2 Integration

Definition 2.2.1. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt messbar (bez. $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C})$), falls

$$\forall r > 0, z \in \mathbb{C} : f^{-1}(K_r(z)) \in \mathcal{F} \ \left[\iff \forall U \in \mathcal{B}(\mathbb{C}) : f^{-1}(U) \in \mathcal{F} \right] .$$

Analog ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar (bez. $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$), falls

$$\forall U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$$

Bemerkung 2.2.1. Wir bezeichnen weiterhin $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, [0, \infty)) := \mathcal{M}_+(\Omega)$.

Bemerkung 2.2.2. Sei $\Omega, \mathcal{F}$ ein messbarer Raum, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann ist f messbar

$$\iff \forall c \in \mathbb{R} : \{f > c\} := \{x \in \Omega | f(x) > c\} \in \mathcal{F} .$$

Definition 2.2.2. Sei A eine Menge. Eine Funktion der Form

$$1_A(\omega) \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

heißt *Indikatorfunktion* der Menge A.

Satz 2.2.1 (Integral für nichtnegative, messbare Funktionen)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gibt es genau eine Abbildung $\varphi : \mathcal{M}_+(\Omega) \to [0, \infty]$ mit:

1. $\forall A \in \mathcal{F} : \varphi(1_A) = \mu(A)$
2. $\forall f, g \in \mathcal{M}_+(\Omega), \lambda \in [0, \infty] : \varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$
3. $\forall \left(f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}, \ \forall n \in \mathbb{N} f_{n+1} \geq f_n \geq 0 : \varphi(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(f_n)$

Wir schreiben $\varphi(f) =: \int f d\mu =: \int f(\omega) d(\omega) =: \int f(\omega) \mu(d\omega)$.

Bemerkung 2.2.3. 3. ist auch als Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz bekannt.

Bemerkung 2.2.4. Wir können in 2. $\lambda \in [0, \infty]$ wählen unter Beachtung, dass auf den erweiterten reellen Zahlen $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ gilt:

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0 \ \text{ und } \ (+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = 0 .$$

Definition 2.2.3 (Integral für messbare Funktionen)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Dann definieren wir

$$f^+ := \max\{f, 0\}, \quad f^- := \max\{-f, 0\} \implies f = f^+ - f^- \text{ und } |f| = f^+ + f^- .$$

Somit erhalten wir als Definition für das Integral (für integrierbare Funktionen, siehe Def. 2.2.4):

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu .$$

Sei nun $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, dann folgt $\Re(f), \Im(f) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Somit können wir definieren:

$$\int f d\mu := \int \Re(f) d\mu + i \cdot \int \Im(f) d\mu .$$

Definition 2.2.4. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Dann bezeichnen wir $f : \Omega \to \mathbb{C}$ als (μ-)integrierbar, falls $f \in \mathcal{L}^1$, wobei gilt

$$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \middle| \int |f| \, d\mu < \infty \right\} .$$

Wir schreiben kurz auch $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Bemerkung 2.2.5. Analog definiert man $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$. Somit:

$$\int \cdot \, d\mu : \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R} \, [\mathbb{C}]) \to \mathbb{R} \, [\mathbb{C}]$$

Bemerkung 2.2.6. Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gilt insbesondere $|f| \geq \Re(f)$, $|f| \geq \Im(f)$, d. h. das Integral ist wohldefiniert.

Satz 2.2.2. Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ sowie eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} : f_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ sowie $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$
2. $\int \lambda f + g d\mu = \lambda \int f d\mu + \int g d\mu$
3. $\mu \left(\{ \omega \in \Omega | f(\omega) \neq g(\omega) \} \right) = 0 \implies \int f d\mu = \int g d\mu \implies \int |f - g| \, d\mu = 0$
4. $\mu \left(\{ \omega \in \Omega | \, |f(\omega)| = \infty \} \right) = 0$
5. $\exists h : \Omega \to [0, \infty], \; h \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \; \forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \leq h$ und $\lim_{n \to \infty} f_n = f \implies \int f d\mu = \int \lim_{n \to \infty} f_n d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu$

Bemerkung 2.2.7. 5. ist auch als Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz bekannt.

Definition 2.2.5. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ ein Maß. Dann besitzt ν eine Dichte bzgl. μ, falls

$$\exists f : \Omega \to [0, \infty) \text{ messbar} : \forall A \in \mathcal{F} : \nu(A) = \int_A f d\mu \, .$$

Satz 2.2.3 (Satz von Radon-Nikodym)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ ein Maß mit $\nu \ll \mu$. Dann besitzt ν eine Dichte bzgl. μ.

Kapitel 3

Normierte Räume

3.1 Definitionen

Bemerkung 3.1.1. Wir betrachten hier Vektorräume über den Körpern $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 3.1.1. Eine *Norm* über einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit:

1. $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
2. $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. $\|x\| = 0 \iff x = 0$

Dann heißt $V, \|\cdot\|$ normierter Raum.

Bemerkung 3.1.2. Falls 3. nicht gilt, bezeichnen wir die Abbildung als *Halbnorm*.

Satz 3.1.1. Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist ein metrischer Raum mit der Metrik d, definiert durch

$$\forall x, y \in V : d(x, y) = \|x - y\| \ .$$

Beispiel 3.1.1. In diesem Fall gilt für die Operationen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ (mit $\lambda \in \mathbb{K}, \ x, y, x, y' \in V$):

$$d(x' + y', x + y) = \left\|x' + y' - (x + y)\right\| \leq \left\|x' + y'\right\| + \|x + y\|$$
$$d(\lambda x, \lambda x') = \left\|\lambda(x - x')\right\| = |\lambda| \left\|x - x'\right\| = |\lambda| \, d(x, x')$$

Definition 3.1.2. Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Raum.

3.2 Vervollständigung

Satz 3.2.1. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann existiert eine Vervollständigung $(\hat{V}, \hat{\|} \cdot \hat{\|})$, d. h. V kann in einen Banachraum eingebettet werden.

Beweis. Definiere Analog zu Satz 1.4.4:

$$\hat{V_0} := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in V, \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge}\}.$$

Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\hat{V_0}$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} :\iff \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n, y_n\| = 0$

Menge aller Äquivalenzklassen: $\hat{V} = {}^{\hat{V_0}}\!/\!_{\sim} = \{\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] | \, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{X}_0\}$

Dabei ist $\hat{V}$ ein Vektorraum mit $\forall \lambda \in \mathbb{K}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{V}_0$:

$$\lambda \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] := \left[(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \text{ und } \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] + \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \left[(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] .$$

Als Norm auf $\hat{V}$ definieren wir

$$\hat{\|} \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \hat{\|} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| .$$

Zeige zunächst die Wohldefiniertheit. Der obige Grenzwert existiert, da für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{V}_0$ die Folge $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, mit

$$\lim_{n,m\to\infty} |\|x_n\| - \|x\|_m| \leq \lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0 .$$

Betrachte nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{V}_0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann

$$\lim_{n\to\infty} |\|x_n\| - \|y_n\|| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

und somit ist $\hat{\|} \cdot \hat{\|}$ unabhängig vom Repräsentanten. Für die Normeigenschaften zeige hier nur die Dreiecksungleichung und Definitheit (1. Eigenschaft trivial):

$$\begin{aligned} \hat{\|} \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] + \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \hat{\|} &= \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n\| + \|y_n\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|x_n\| + \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \hat{\|} \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \hat{\|} + \hat{\|} \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \hat{\|} \end{aligned}$$

Weiterhin:

$$\hat{\|} \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \hat{\|} = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0 \iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (0)_{n\in\mathbb{N}} \iff \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \left[(0)_{n\in\mathbb{N}}\right] = 0_{\hat{V}}$$

□

3.3 L^p-Räume

Definition 3.3.1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $p \in [1, \infty)$, dann definieren wir

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} | f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}),\ \int_\Omega |f|^p < \infty \right\} .$$

Wir schreiben kurz auch $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Bemerkung 3.3.1. $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ definiert einen $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Satz 3.3.1. $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathbb{K}$, $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$ ist eine Halbnorm.

Beweis. Siehe nach Satz 3.3.2. □

Bemerkung 3.3.2. $\|\cdot\|_p$ ist keine Norm.

Beispiel 3.3.1. Betrachte $\Omega = \mathbb{R}$, $f = 1_C \neq 0$, $\mu = l$, wobei C die Cantormenge und l das Lebesgue-Maß sind. Dann gilt:

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega (1_C)^p dl \right)^{\frac{1}{p}} = l(C)^{\frac{1}{p}} = 0$$

Lemma 3.3.1 (Youngsche Ungleichung)**.** Seien $u, v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $p, q \in \mathbb{R}_{>1}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$u \cdot v \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \, .$$

Satz 3.3.2 (Hölder Ungleichung)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Dann gilt $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Beweis. Nehmen o B. d. A. an $f, g \geq 0$, $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Mit Lemma 3.3.1 gilt

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 = \int_\Omega f(x)g(x)\mu(dx) \leq \int_\Omega \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q}\mu(dx) = \frac{1}{p}\int_\Omega f(x)^p\mu(dx) + \frac{1}{q}\int_\Omega g(x)^q\mu(dx) \\ = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q \end{aligned}$$

□

Zu Satz 3.3.1. 1. Eigenschaft ist trivial. Zeige nun noch die Dreiecksungleichung. Seien dafür $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Dann gilt auch die Abschätzung:

$$|f+g|^p = |f+g|^{p-1}|f+g| \leq |f+g|^{p-1}|f| + |f+g|^{p-1}|g| \, .$$

Sei $q \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff p + q = pq$. Dann gilt $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\mu)$, da

$$\left(|f+g|^{p-1}\right)^q = |f+g|^{pq-q} = |f+g|^p$$

Dies ist in der Tat integrierbar, da $|f+g|^p \leq |f|^p + |g|^p$ und nach Voraussetzung $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Somit erhalten wir

$$\|f+g\|_p^p = \int_\Omega |f+g|^p \, d\mu \leq \int_\Omega |f+g|^{p-1}|f| + |f+g|^{p-1}|g| \, d\mu = \left\|(f+g)^{p-1}f\right\|_1 + \left\|(f+g)^{p-1}g\right\|_1 \, .$$

Anwenden der Hölder Ungleichung ergibt

$$\leq \|f+g\|_q \|f\|_p + \|f+g\|_q \|g\|_p = \left(\int_\Omega |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} (\|f\|_p + \|g\|_p) = \left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}} (\|f\|_p + \|g\|_p) \, .$$

Sei o. B. d. A. $f + g \neq 0$ fast überall (sonst Beh. trivial), dann gilt:

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^{p/q}(\|f\|_p + \|g\|_p) \iff \|f+g\|_p^{p(1-1/q)} \leq \|f\|_p + \|g\|_p \iff \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

□

Definition 3.3.2. Sei $\Omega, \mathcal{F}, \mu$ ein Maßraum sowie $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$. Dann definieren wir

$$f \overset{\mu}{=} g :\iff \mu(\{\omega \in \Omega | f(\omega) \neq g(\omega)\} =: \mu(\{f \neq g\}) = 0 \, .$$

Man sagt auch $f = g$ μ-fast überall.

Bemerkung 3.3.3. Die Relation $\overset{\mu}{=}$ ist eine Äquvialenzrelation.

Satz 3.3.3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum sowie $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g : \Omega \to \mathbb{K}$. Dann gilt

$$f \overset{\mu}{=} g \implies g \in \mathcal{L}^p(\mu) \text{ und } \|f\|_p = \|g\|_p \ .$$

Beweis. Gelte o. B. d. A. $g \overset{\mu}{=} 0$.Betrachte hier $g : \Omega \to \mathbb{K} \cup \{-\infty, \infty\}$, sei $A := \{\omega \in \Omega | g(\omega) \neq 0\}$. Nach Voraussetzung gilt $\mu(A) = 0$ und somit

$$|g| \leq \infty \cdot 1_A \implies \int_\Omega |g|^p \, d\mu \leq \infty \cdot \int_\Omega 1_A d\mu = \infty \cdot 0 = 0 \ .$$

Folglich gilt also in der Tat $g \in \mathcal{L}^p$. Zeige nun $\|f\|_p = \|g\|_p$. Dabei nutzen wir $f \overset{\mu}{=} g \iff g - f \overset{\mu}{=} 0 \implies \|g - f\|_p = 0$. Es folgt

$$\|g\|_p = \|f + (g - f)\|_p \leq \|f\|_p + \|g - f\|_p = \|f\|_p$$

Analog erhalten wir $\|f\|_p \leq \|g\|_p$ und somit in der Tat $\|f\|_p = \|g\|_p$. □

Satz 3.3.4. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, dann wird $\mathcal{L}^p(\mu)/_{\overset{\mu}{=}}$ mit $\forall f \in \mathcal{L}^p(\mu) : \ \|[f]\|_p := \|f\|_p$ ein normierter Raum.

Beweis. Die Wohldefiniertheit der Norm folgt aus Satz 3.3.3. Weiterhin lässen sich die Halbnormeigenschaften auf Satz 3.3.1 zurückführen. Es g. z. z., dass $\|\cdot\|_p$ auf $\mathcal{L}^p(\mu)/_{\overset{\mu}{=}}$ definit ist. Angenommen für $[f] \in \mathcal{L}^p(\mu)/_{\overset{\mu}{=}}$ gilt $\|[f]\|_p = 0 \iff \int_\Omega |f|^p = 0$. Nehme weiterhin an, dass $f \overset{\mu}{\neq} 0 \iff 0 < \mu(\{|f| > 0\})$. Somit

$$0 < \mu(\{|f| > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{|f| > \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(|f| > \frac{1}{n}\right) \ .$$

Folglich $\exists c > 0 : \mu(\{|f| \geq c\}) > 0$. Damit erhalten wir mit $A := \{|f| > c\}$

$$|f|^p \geq c^p \cdot 1_A \implies \int |f|^p \geq c^p \mu(A) > 0 \ .$$

Dies ist ein Widerspruch und folglich gilt $f \overset{\mu}{=} 0$. □

Definition 3.3.3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, dann

$$L^p(\mu) := L^p(\Omega, \mathcal{F}\mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)/_{\overset{\mu}{=}}$$

Wir schreiben meist $L^p(\mu)$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $L^p(\mu, \mathbb{C})$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Bemerkung 3.3.4. Statt $[f] \in L^p$ schreiben wir nur $f \in L^p$.

Definition 3.3.4. $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ heißt *wesentlich beschränkt* ($:\iff f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$), falls

$$\exists c \in \mathbb{R}_{>0} : \mu(\{\omega \in \Omega | \, |f(\omega)| > c\}) = 0 \ .$$

Dann definieren wir

$$\|f\|_\infty := \inf \{c \mid \mu(\{\omega \in \Omega | \, |f(\omega)| > c\}) = 0\} \ .$$

Satz 3.3.5. $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Halbnorm und es gilt $f \overset{\mu}{=} g \iff \|f-g\|_\infty = 0$.

Beweis. Die 1. Eigenschaft und die zweite Aussage sind trivial, wir zeigen hier wieder nur die Dreiecksungleichung. Seien $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ wesentlich beschränkt, $c, d > 0$ und $A := \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| > c\}$, $B := \{\omega \in \Omega \mid |g(\omega)| > d\}$. Somit

$$\mu(A) = \mu(B) = 0 \implies \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0\ .$$

Es gilt

$$D := \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega) + g(\omega)| > c + d\} \subseteq A \cup B$$

und somit auch $\mu(D) = 0$. Sei nun $\omega \in (A \cup B)^C$, dann

$$|f(\omega)| \leq c \wedge |g(\omega)| \leq d \implies |f(\omega) + g(\omega)| \leq |f(\omega)| + |g(\omega)| \leq c + d\ .$$

D. h. $f + g$ ist wesentlich durch $c + d$ beschränkt und somit folgt in der Tat

$$\|f + g\|_\infty \leq c + d \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\ .$$

□

Satz 3.3.6. Sei $\Omega, \mathcal{F}, \mu$ ein Maßraum. Dann ist $\mathcal{L}^\infty(\mu)/\overset{\mu}{=}$ mit $\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mu) : \|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty$ ein normierter Raum.

Definition 3.3.5. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, dann

$$L^\infty(\mu) := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)/\overset{\mu}{=}\ .$$

Wir schreiben meist $L^\infty(\mu)$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $L^\infty(\mu, \mathbb{C})$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Bemerkung 3.3.5. $L^p(\mu)$ für $p \in [1, \infty]$ sind keine direkten Funktionenräume.

Satz 3.3.7. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, dann ist $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum für $p \in [1, \infty]$.

Beweis. Betrachte hier nur den Fall $p = 1$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\mu)$, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq N_0 : \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon\ .$$

Daher gilt insbesondere

$$\forall k > 0\ \exists n_k\ \forall m \geq n_k : \|f_m - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}\ .$$

Somit können wir solche n_k mit $n_{k+1} > n_k$ wählen und erhalten eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p < 2^{-k}$. Für $p = 1$ mit Beppo-Levi und $g_k := \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega g_k d\mu = \int_\Omega \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k d\mu < \infty\ .$$

Somit gilt insbesondere

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega \middle| \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(\omega) = \infty\right\}\right) = 0\ .$$

Nehmen hier o. B. d. A. an, dass $\forall \omega \in \Omega : \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(\omega) < \infty$. Somit bildet $\forall \omega \in \Omega$ die Folge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und ist somit konvergent, d. h. $\forall \omega \in \Omega : f(\omega) := \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(\omega)$ existiert. Somit gilt

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega) = f_{n_0}(\omega) - f(\omega)$$

Wir können eine integrierbare Majorante für die $f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega)$ finden mit

$$|f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega)| \le \sum_{l=0}^{k-1} \left|f_{n_l}(\omega) - f_{n_{l+1}}(\omega)\right| \le \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(\omega) =: g(\omega) \text{ mit } \int_\Omega g d\mu < \infty \ .$$

Nach dem Satz von Lebesgue folgt somit, dass f integrierbar (d. h. $f \in L^1(\mu)$) und

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega) - (f_{n_0}(\omega) - f(\omega))| = 0 \iff \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_1 = 0 \ .$$

Also ist $L^1(\mu)$ in der Tat vollständig. □

3.4 Beispiele für normierte Räume

Beispiel 3.4.1. Betrachte

$$\Omega = \{1, \dots, n\} \, , \ n \in \mathbb{N}_{>0} \ \text{ mit } \ \forall A \subseteq \Omega : \mu(A) = |A| \ .$$

Dann gilt wegen der Korrespondenz als Vektorraum

$$L^p(\mu) = \mathbb{R}^n \text{ und } L^p(\mu, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$$

wegen der Korrespondenz

$$f : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{K} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} f(1) \\ \dots \\ f(n) \end{pmatrix} \ .$$

Beispiel 3.4.2 (Folgenräume)**.** Folgende Vektorräume

$$\begin{aligned} c_0 &:= \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\} \\ c &:= \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \lim_{n\to\infty} a_n \text{ existiert} \right\} \\ \ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) &:= \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \exists c > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \le c \right\} \end{aligned}$$

sind normierte Vektorräume (insbesondere Banachräume) mit der Supremumsnorm

$$\left\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \ .$$

Betrachte weiterhin die Folgenräume l^p mit $p \in [1, \infty)$, wobei μ das Zählmaß:

$$\ell^p_{\mathbb{K}} = L^p(\mathbb{N}, \mu, \mathbb{K}) = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \middle| \ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$$

mit der Norm $\|\cdot\|_p$ definiert durch

$$\forall \, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p : \left\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

Dabei sind $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ für $p \in [1, \infty)$ Banachräume.

Beispiel 3.4.3. Betrachte

$$\Omega = \mathbb{R} \text{ bzw. } \Omega = \mathbb{R}^d \text{ mit Lebesgue-Maß } l \text{ bzw. } l^d .$$

mit den entsprechenden Räumen $L^p(l),\ L^p(l, \mathbb{C})$ bzw. $L^p(l^d)$ und den bekannten Normen. Betrachte

$$\Omega = [0,1] \text{ mit Lebesgue-Maß } l$$

dann ergibt sich

$$L^p([0,1], l) \text{ mit } \forall f \in L^p([0,1], l) : \|f\|_p = \int_0^1 |f(x)|^p \, dx$$

Der normierte Raum $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum, wobei

$$C^0([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\} \quad \text{und} \quad \forall f \in C^0([0,1]) : \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$$

Hingegen ist $C^0([0,1])$ nicht vollständig bzgl. der Norm $\|f\|_p = \int_0^1 |f(t)|^p \, dt$. Der Raum $(C^r([0,1]), \|\cdot\|_{k,\infty})$

$$C^r([0,1]) = \left\{f \in C^0([0,1]) \mid f \text{ } r\text{-mal stetig differenzierbar}\right\} \quad \text{und} \quad \forall f \in C^r([0,1]) : \|f\|_{k,\infty} = \sum_{j=0}^{r} \left\| f^{(j)} \right\|_\infty$$

ist ein Banachraum. Man kann auch weitere Normen auf $C^r([0,1])$ definieren, bspw. für $r = 1$ und $f \in C^1([0,1])$

$$\|\cdot\|_{1,p} = \|f\|_p + \left\|f'\right\|_p \quad \text{oder} \quad \hat{\|} f \hat{\|}_{1,p} = \left(\int_0^1 |f'(x)|^p + |f(x)|^p\right) .$$

Bemerkung 3.4.1. Es gibt eine Inklusion $C^0([0,1]) \hookrightarrow L^p([0,1])$, da in jeder Äquivalenzklasse nur eine stetige Funktion ist.

3.5 Äquivalenz von Normen

Definition 3.5.1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|, \hat{\|} \cdot \hat{\|} : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Normen. Diese heißen äquivalent, falls

$$\exists 0 < c_1 < c_2 \ \forall x \in V : c_1 \|x\| \leq \hat{\|} x \hat{\|} \leq c_2 \|x\| \ .$$

Beispiel 3.5.1. Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit den Normen ($x \in \mathbb{R}^n$): $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ und $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_1|$, dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$$

d. h. $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$ sind äquivalent.

Beispiel 3.5.2. Betrachte $C^1([0,1])$ mit den Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_{1,\infty}$, wie in Bsp. 3.4.3 definiert. Diese sind nicht äquivalent. Definiere $f_n(x) = x^n \in C^1([0,1])$, somit $f_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$. Folglich

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad \text{und} \quad \|f_n\|_{1,\infty} = \|f_n\|_\infty + \left\|f_n'\right\|_\infty = 1 + n$$

und es existieren offensichtlich keine Konstanten $0 < c_1 < c_2$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : c_1 \leq n + 1 \leq c_2 \ .$$

Satz 3.5.1. Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$. Dann sind alle Normen auf V äquivalent und jeder solche normierte Vektorraum ist ein Banachraum.

Kapitel 4

Hilberträume

4.1 Definitionen

Definition 4.1.1. Sei H ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ heißt eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ *Skalarprodukt* (oder *inneres Produkt*), falls

1. $\forall x \in H : \langle x, \cdot \rangle , \langle \cdot, x \rangle : H \to \mathbb{R}$ sind linear
2. $\forall x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0$
3. $\forall x \in H : \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
4. $\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ muss gelten:

1. $\forall x \in H : \langle x, \cdot \rangle : H \to \mathbb{C}$ ist linear, $\langle \cdot, x \rangle : H \to \mathbb{C}$ ist antilinear, d. h. $\forall y, z \in H, \lambda \in \mathbb{C}$: $\langle \lambda x + y, z \rangle = \overline{\lambda} \langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle$
2. $\forall x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0$
3. $\forall x \in H : \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
4. $\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Bemerkung 4.1.1. Für das Skalarprodukt über $\mathbb{C}$ kann nur Sesquilinearität und keine Bilinearität gefordert werden, um die positive Deinitheit beizubehalten. Angenommen das Skalarprodukt über $\mathbb{C}$ wäre bilinear und positiv definit, dann

$$\forall x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0 \implies 0 \leq \langle ix, ix \rangle = - \langle x, x \rangle \leq 0 \implies \langle x, x \rangle = 0 \ .$$

Satz 4.1.1 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** Sei H ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dann gilt

$$\forall x, y \in H : |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \ .$$

Bemerkung 4.1.2. Mit Satz 4.1.2 schreibt man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auch als

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \ .$$

Satz 4.1.2. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Raum mit Skalarprodukt. Dann ist $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R} \geq 0$ mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für $x \in H$ eine Norm auf H.

Beweis. Die 1. und 3. Eigenschaft sind trivial, zeige hier nur die Dreiecksungleichung. Es gilt für $x, y \in H$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + 2\Re(\langle x,y\rangle) + \|y\|^2 \ .$$

Mit $\Re(\langle x,y\rangle) \leq |\langle x,y\rangle|$ und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir in der Tat:

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \ .$$

□

Definition 4.1.2. Ein Raum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit Skalarprodukt heißt *Hilbertraum*, wenn er bzgl. der vom Skalarprodukt induzierten Norm $\|\cdot\|$ vollständig ist.

Lemma 4.1.1 (Polarisationsformel)**.** Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Raum mit Skalarprodukt und induzierter Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ für $x \in H$. Dann gilt für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2) \ .$$

Satz 4.1.3 (Parallelogrammgleichung)**.** Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ (mit V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum) ist ein Raum mit Skalarprodukt $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die Norm induziert, genau dann wenn

$$\forall x, y \in V : \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \ .$$

Beweis. ($\Longrightarrow$) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
\|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
\Longrightarrow \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= 2\,\langle x,x\rangle + 2\,\langle y,y\rangle
\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Man setzt für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ das Skalarprodukt gemäß der Polarisationsformeln nach Lemma 4.1.1 an und zeigt unter Ausnutzung der Parallelogrammgleichung, dass dies die Eigenschaften eines Skalarprodukts empfiehlt (explizit im *Werner* S. 222). □

4.2 Beispiele

Beispiel 4.2.1. Betrachte $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$. Diese sind mit den Standardskalarprodukten Hilberträume, wobei für $x, y \in \mathbb{R}^n,\ u, v \in \mathbb{C}^n$

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{und} \quad \langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_i$$

Beispiel 4.2.2. $\ell^2_{\mathbb{K}}$ ist ein Hilbertraum, wobei die Norm von folgendem Skalarprodukt induziert wird

$$\left\langle (a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \ .$$

Beispiel 4.2.3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist $L^2(\mu, \mathbb{K})$ ein Maßraum mit dem Skalarprodukt $(f, g \in L^2(\mu, \mathbb{K}))$

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega fg \; d\mu \;\text{ für } \mathbb{K} = \mathbb{R} \;\text{ bzw. }\; \langle f, g\rangle = \int_\Omega \overline{f} g \; d\mu \;\text{ für } \mathbb{K} = \mathbb{C} \; .$$

Beispiel 4.2.4. Betrachte $C^0([0,1])$, dann ist für $f, g \in C^0([0,1])$

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 \overline{f(t)} g(t) \; dt$$

ein Skalarprodukt aber $(C^0([0,1]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ kein Hilbertraum.

Beispiel 4.2.5. (Bergmanraum) Sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| < 1\}$. Dann ist $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, wobei mit $f, g \in H$, $x := \Re(z)$, $y := \Im(z)$ gilt

$$H = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ holomorph}, \; \int_\mathbb{D} |f(z)|^2 \; dxdy < \infty \right\} \text{ und } \langle f, g\rangle = \int_\mathbb{D} \overline{f(z)} g(z) \; dxdy \; .$$

Bemerkung 4.2.1. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit $U \subseteq \mathbb{C}$ offen heißt holomorph, falls f komplex differenzierbar an allen Punkten $z_0 \in U$, d. h. falls folgender Grenzwert existiert

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \; .$$

4.3 Orthogonalbasen

Definition 4.3.1. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Raum mit Skalarprodukt. Wir bezeichnen $x, y \in H$ orthogonal, bzw. $x \perp y$, falls $\langle x, y\rangle = 0$. Zwei Teilmengen $X, Y \subseteq H$ heißen orthogonal, bzw. $X \perp Y$, falls $\forall x \in X, y \in Y : \langle x, y\rangle = 0$.

Lemma 4.3.1 (Satz des Pythagoras)**.** Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Raum mit Skalarprodukt. Dann ergibt sich direkt aus der Definition für $x, y \in H$

$$x \perp y \implies \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2 \; .$$

Definition 4.3.2. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Eine Familie $(e_s)_{s \in S}$, $\forall s \in S : e_s \in H$ heißt *Orthonormalsystem*, falls

$$\forall s, t \in S : \langle e_s, e_t\rangle = \delta_{st} \; .$$

Eine Familie $(e_s)_{s \in S}$, $\forall s \in S : e_s \in H$ heißt *vollständig*, falls

$$\forall y \in H : y \perp \{e_s \mid s \in S\} \implies y = 0 \; .$$

Ein vollständiges Orthonormalsystem heißt *Orthonormalbasis*.

Beispiel 4.3.1. Betrachte den Hilbertraum $l^2_\mathbb{C}(\mathbb{R}) := \left\{(a_t)_{t\in\mathbb{R}} \mid \forall t \in \mathbb{R} : a_t \in \mathbb{C}, \sum_{t\in\mathbb{R}} |a_n|^p < \infty\right\}$. Dabei ist das Skalarprodukt definiert als

$$\forall (a_t)_{t\in\mathbb{R}}, (b_t)_{t\in\mathbb{R}} \in l^2_\mathbb{C}(\mathbb{R}) : \langle (a_t)_{t\in\mathbb{R}}, (b_t)_{t\in\mathbb{R}}\rangle = \sum_{t\in\mathbb{R}} \overline{a_t} b_t \; .$$

Definiere $e_t = (\delta_{s,t})_{s\in\mathbb{R}} \in l^2_\mathbb{C}(\mathbb{R})$. Dann ist $(e_t)_{t\in\mathbb{R}}$ eine Orthonormalbasis, da für $a := (a_t)_{t\in\mathbb{R}} \in l^2_\mathbb{C}(\mathbb{R})$

$$a \perp \{e_t \mid t \in \mathbb{R}\} \iff \forall t \in \mathbb{R} : \langle a, e_t\rangle = \overline{a_t} = 0 \iff a = 0 \; .$$

Beispiel 4.3.2. Betrachte den Hilbertraum $H = L^2([0,1], l, \mathbb{C})$. Dann erhalten wir die (vollständige) Fourierbasis

$$(f_k(x))_{k\in\mathbb{Z}} \text{ mit } f_k(x) := \exp(2\pi ikx) \ .$$

Die Orthogonalität kann man wie folgt zeigen (mit $k, l \in \mathbb{Z}$)

$$\int_0^1 \exp(-2\pi ikx)\exp(2\pi ilx)\, dx = \int_0^1 \exp(2\pi i(l-k)x)\, dx = \delta_{kl}$$

Satz 4.3.1. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $(e_s)_{s\in S}, \forall s \in S : e_s \in H$ ein Orthonormalsystem. Dann existiert für jedes $\lambda := (\lambda_s)_{s\in S} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(S) := \left\{(a_s)_{s\in S} \,\middle|\, \forall s \in S : a_s \in \mathbb{C}, \sum_{s\in S}|a_s|^2 < \infty\right\}$ ein abzählbares $S_0 \subseteq S$ mit $|\lambda_s| > 0 \implies s \in S_0$. Sei $S_0 := \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $x_n = \sum_{m=0}^{n} \lambda_{s_m} e_{s_m}$. Dann existiert ein $x \in H$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, wir schreiben $x = \sum_{s\in S} \lambda_s e_s$.

Beweis. Wir zeigen hier nur den 2. Teil des Satzes (???). Da H vollständig, g. z. z., dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Dabei ist bekannt (unter Ausnutzung von Teil 1 des Satzes)

$$\|\lambda\|^2_{\ell^2(S)} = \sum_{m=0}^{\infty} |\lambda_{s_m}|^2 < \infty \ .$$

Sei $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, sodass $\sum_{m=N+1}^{\infty} |\lambda_{s_m}|^2 < \varepsilon^2$. Seien nun $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2 \geq N$, $n_1 < n_2$. Dann

$$\|x_{n_2} - x_{n_1}\|^2 = \left\| \sum_{m=n_1+1}^{n_2} \lambda_{s_m} \cdot e_{s_m} \right\| \ .$$

Dabei gilt für $k, l \in \mathbb{N},\ k \geq l$

$$\left\| \sum_{i=l}^{k} \lambda_{s_i} e_{s_i} \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=l}^{k} \lambda_{s_i} e_{s_i}, \sum_{j=l}^{k} \lambda_{s_j} e_{s_j} \right\rangle = \sum_{i,j=l}^{k} \overline{\lambda_i}\lambda_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i,j=l}^{k} \overline{\lambda_i}\lambda_j \delta_{ij} = \sum_{i=l}^{k} |\lambda_i|^2 \ .$$

Somit ergibt sich

$$\|x_{n_2} - x_{n_1}\|^2 = \sum_{m=n_1+1}^{n_2} |\lambda_{s_m}|^2 < \varepsilon^2 \ .$$

Folglich ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in H$ existiert. □

Bemerkung 4.3.1 (Motivation)*.* Falls $(e_s)_{s\in S}$ eine Orthonormalbasis von H. Dann ist die Abbildung $F : H \to \ell^2_{\mathbb{C}}(S),\ x \mapsto (\langle x, e_s\rangle)_{s\in S}$ ein unitärer Isomorphismus. In diesem Fall gibt es eine Korrespondenz zwischen $\lambda \in \ell^2_{\mathbb{C}}(S)$ und den Koeffizienten von x bzgl. der Orthonormalbasis $(e_s)_{s\in S}$.

Lemma 4.3.2 (Besselsche Ungleichung)**.** Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem und $x \in H$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \ .$$

Bemerkung 4.3.2*.* Mit Satz 4.3.1 folgt die allgemeine Besselsche Ungleichung für Orthonormalsysteme. Sei $(e_s)_{s\in S}$, $\forall s \in S : e_s \in H$ ein Orthonormalsystem und $x \in H$, dann

$$\sum_{s\in S} |\langle x, e_s\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \ .$$

Satz 4.3.2. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $(e_s)_{s\in S}$ ein Orthonormalsystem. Dann ist $(e_s)_{s\in S}$ vollständig, genau dann wenn für jedes $x \in H$ ein $\lambda := (\lambda_s)_{s\in S} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(S)$ existiert mit $x = \sum_{s\in S} \lambda_s e_s$. In diesem Fall ist λ eindeutig bestimmt.

Beweis. (Eindeutigkeit) Seien $S_0 \subseteq S$ sowie $x_n \in H$ wie in Satz 4.3.1. Sei $\hat{s} \in S$, dann

$$\langle e_{\hat{s}}, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle e_{\hat{s}}, x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle e_{\hat{s}}, \sum_{m=0}^{n} \lambda_{s_m} e_{s_m} \right\rangle = \begin{cases} 0 & \hat{s} \notin S_0 \\ \lambda_{\hat{s}} & \hat{s} \in S_0 \end{cases}$$

Somit folgt die Eindeutigkeit aus der Eindeutigkeit der Darstellung der x_n.
(Existenz) Angenommen $(e_s)_{s\in S}$ ist vollständig und x ist nicht durch die Orthonormalbasis darstellbar. Bezeichne die Menge der darstellbaren Elemente in H mit

$$H_0 = \left\{ \sum_{s\in S} \lambda_s e_s \mid (\lambda_s)_{s\in S} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(S) \right\} .$$

Für eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in H_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} y_n = y \implies y \in H_0$. Setze $\mu_s = \langle e_s, x\rangle$. Sei $S_0 \subseteq S$ höchstens abzählbar, dann gilt mit Satz 4.3.2

$$\sum_{s\in S_0} |\mu_s|^2 = \sum_{s\in S_0} |\langle e_s, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty .$$

Für $t \in S_0$ gilt weiterhin

$$\left\langle e_t \, , \, x - \sum_{s\in S_0} \mu_s e_s \right\rangle = \langle e_t, x\rangle - \sum_{s\in S_0} \langle e_t, \langle e_s, x\rangle\, e_s\rangle = 0 .$$

Dieser Beweis muss noch beendet werden.

□

Satz 4.3.3. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Dann existiert eine abzählbare Orthonormalbasis, genau dann wenn H separabel ist.

Beweisidee. Man wendet das Gram-Schmidt-Verfahren aus einer dichten Teilmenge an. □

Bemerkung 4.3.3. Ein metrischer Raum (X, d) heißt separabel, falls ein $A \subseteq X$ existiert, sodass A abzählbar und A dicht in X.

4.4 Projektionen

Satz 4.4.1. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $K \subseteq H$ nicht leer, konvex und abgeschlossen. Dann existiert für jedes $x \in H$ genau ein $y \in K$ mit

$$\|y - x\| = \inf\left\{\|z - x\| \mid z \in K\right\} .$$

Beweis. Nehmen o. B. d. A. an $x \notin K$ (sonst wähle $y = x$) und $x = 0$ (sonst verschiebe um $-x$).
(Existenz) Setze $d := \inf\left\{\|z - x\| \mid z \in K\right\} = \inf\left\{\|z\| \mid z \in K\right\}$. Dann existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in K$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|y_n\| < d + \frac{1}{n} \implies \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = d .$$

Wir zeigen nun, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Mit der Parallelogrammgleichung gilt für $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\left\|\frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y_n - y_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2) .$$

Da K konvex, gilt $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in K$ und folglich $\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m)\right\| \geq d^2$. Da

$$\frac{1}{2}(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2) \leq \frac{1}{2}\left(\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(d + \frac{1}{m}\right)^2\right) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} d^2$$

folgt also $\|y_n - y_m\| \to 0$, d. h. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist in der Tat eine Cauchyfolge und da H ein Hilbertraum, existiert $y := \lim_{n\to\infty} y_n \in H$. Da K abgeschlossen ist, gilt $y \in K$. Weiterhin gilt $\|y\| = d$, da

$$\|y\| \geq d \text{ da } y \in K \quad \text{und} \quad \|y\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| \leq d + \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d .$$

(Eindeutigkeit) Angenommen für $y, \tilde{y} \in K$ gilt

$$\|y\| = \|\tilde{y}\| = \inf\{\|z\| \mid z \in K\} = d .$$

Sei $\lambda \in [0, 1]$ wegen der Konvexität von K gilt

$$\lambda y + (1-\lambda)\tilde{y} \in K \implies \|\lambda y + (1-\lambda)\tilde{y}\| \geq d .$$

Weiterhin gilt

$$\|\lambda y + (1-\lambda)\tilde{y}\| \leq \lambda \|y\| + (1-\lambda) \|\tilde{y}\| = d$$

und folglich $\|\lambda y + (1-\lambda)\tilde{y}\| = d$. Somit

$$\begin{aligned}
d^2 &= \|\lambda y + (1-\lambda)\tilde{y}\|^2 = \lambda^2 \langle y, y\rangle + 2\lambda(1-\lambda)\Re(\langle y, \tilde{y}\rangle) + (1-\lambda)^2 \langle \tilde{y}, \tilde{y}\rangle \\
&= \lambda^2(\langle y, y\rangle - 2\Re(\langle y, \tilde{y}\rangle) + \langle \tilde{y}, \tilde{y}\rangle) + \langle \tilde{y}, \tilde{y}\rangle + 2\lambda(\Re(\langle y, \tilde{y}\rangle) - \langle \tilde{y}, \tilde{y}\rangle) \\
&= \lambda^2 \|y - \tilde{y}\|^2 + \langle \tilde{y}, \tilde{y}\rangle - \lambda \langle \tilde{y}, \tilde{y}\rangle + \lambda \langle y, y\rangle - \lambda(\langle \tilde{y}, \tilde{y}\rangle - 2\Re(\langle y, \tilde{y}\rangle + \langle y, y\rangle)) \\
&= (\lambda^2 - \lambda) \|y - \tilde{y}\|^2 + d^2
\end{aligned}$$

Dies muss insbesondere auch für $\lambda \in (0, 1) \implies \lambda^2 \neq \lambda$ gelten und somit folgt in der Tat. $\|y - \tilde{y}\| = 0 \iff y = \tilde{y}$. □

Beispiel 4.4.1. Betrachte $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ sowie $x = (0, 0)$ und $K = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \geq 1\}$. Dies ist kein Hilbertraum und die Projektion ist hier auch nicht eindeutig, da

$$P = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 = 1,\ y_2 \in [-1, 1]\} \implies \forall p \in P : \|x - p\|_\infty = 1 = \inf\{\|x - z\|_\infty \mid z \in K\} .$$

Beispiel 4.4.2. Betrachte $\mathbb{R}^{2n}, \|\cdot\|_1$ sowie

$$K = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} =: \lambda \cdot \hat{y} \in \mathbb{R}^{2n} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\},\ x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} .$$

Sei $m := \operatorname{med}\{x_1, \dots, x_{2n}\}$, d. h.

$$m = \operatorname*{argmin}_a \sum_{i=1}^{2n} |x_i - a| = \operatorname*{argmin}_a \|x - a\hat{y}\|_1 .$$

Dann gilt $\|x - m\hat{y}\|_1 = \inf\{\|x - z\|_1 \mid z \in K\}$.

Definition 4.4.1. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Raum mit Skalarprodukt und $X \subseteq H$. Dann heißt

$$X^\perp := \{y \in H \mid \forall x \in X : x \perp y\}$$

orthogonales Komplement von X.

Satz 4.4.2. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, $U \subseteq H$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann gibt es für alle $x \in H$ eindeutig bestimmte $y_1 \in U, y_2 \in U^\perp$ mit $x = y_1 + y_2$.

Beweis. (Existenz) Da U ein Unterraum ist, ist U insbesondere konvex und nichtleer. Somit wählen wir $y_1 \in U$ eindeutig (nach Satz 4.4.1) mit

$$\|y_1 - x\| = \inf\{\|x - u\| \mid u \in U\} \ .$$

Wir zeigen nun $x - y_1 \in U^\perp$. Seien $u \in U, \ \lambda \in \mathbb{K}$, dann

$$\|x - y_1\|^2 \leq \|x - y_1 - \lambda u\|^2 = \|x - y_1\|^2 - 2\lambda \Re(\langle x - y_1, u \rangle) + |\lambda|^2 \|u\|^2$$

Da λ, u beliebig, muss also in der Tat $\langle x - y_1, u \rangle = 0$ gelten.
(Eindeutigkeit) Angenommen $x = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$ mit $\hat{y}_1 \in U, \ \hat{y}_2 \in U^\perp$. Sei $u \in U$, dann gilt wegen der Orthogonalität

$$\|x - (\hat{y}_1 + u)\|^1 = \|x - \hat{y}_1\|^2 + \|u\|^2 \geq \|x - \hat{y}_1\|^2 \ .$$

Dies ist nur erfüllt, wenn wir $\hat{y}_1 = y_1$ nach Satz 4.4.1 wählen, woraus die Eindeutigkeit folgt. □

Beispiel 4.4.3. Betrachte $L^2([0, 1])$, dann ist $U = C^0(S^1) = \{u : [0, 1] \to \mathbb{K} \mid u(0) = u(1)\}$ dicht.

Kapitel 5

Lineare Operatoren

5.1 Der Satz von Hahn-Banach

Definition 5.1.1. Eine partielle Ordnung auf einer Menge X ist eine Relation $\leq$, sodass für alle $a, b, c \in X$ gilt:

1. Transitivität: $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$
2. Reflexivität: $a \leq a$
3. Anti-Symmetrie: $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$

Falls für alle $a, b \in X$ gilt $a \leq b \vee b \leq a$, dann wird X als total geordnet bezeichnet.

Satz 5.1.1 (Lemma von Zorn)**.** Sei $(Z, \leq)$ eine partiell geordnete Menge mit der Eigenschaft, dass jede total geordnete Teilmenge (bez. *Kette*) eine obere Schranke in Z hat. Dann hat Z ein maximales Element.

Lemma 5.1.1. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Unterraum, $z \in V \setminus U$ so, dass $V = \operatorname{span}\{U \cup \{z\}\}$ sowie $\varphi_0 \in U'$. Dann gibt es $\varphi \in V'$ mit $\forall u \in U : \varphi(u) = \varphi_0(u)$ und $\|\varphi\| = \|\varphi_0\|$.

In der Vorlesung wurde im Lemma $\|\varphi\| \geq \|\varphi_0\|$ angegeben, aber dies sollte direkt aus $\varphi|_U = \varphi_0$ folgen und wir zeigen im Lemma $\leq$ und somit Gleichheit, oder?

Beweis. Wir zeigen hier nur den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nehmen o. B. d. A. an, dass $\varphi_0 \neq 0$ (ansonsten setze $\varphi = 0$) und $\|\varphi_0\| = 1$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung

$$V = \operatorname{span}\{U \cup \{z\}\} = \{u + \alpha z \mid u \in U, \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha z - u \mid u \in U, \alpha \in \mathbb{R}\} \ .$$

Zeige nun, dass für $v = \alpha z - u \in V$ mit $u \in U, \alpha \in \mathbb{R}$ eindeutig ist. Angenommen für $u_1, u_2 \in U, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gilt $v = u_1 + \alpha_1 z = u_2 + \alpha_2 z$, dann folgt

$$u_1 + \alpha_1 z = u_2 + \alpha_2 z \iff \overbrace{(\alpha_2 - \alpha_1) z}^{\notin U} = \overbrace{u_1 - u_2}^{\in U} \implies \alpha_1 = \alpha_2 \implies u_1 = u_2 \ .$$

Betrachte nun $x, y \in U$, dann gilt (mit $\|\varphi_0\| = 1$)

$$\begin{aligned} \overbrace{\varphi_0(x) - \varphi_0(y)}^{\in \mathbb{R}} &\leq |\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| = |\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| \\ &= |\varphi_0(x - y)| \leq \|\varphi_0\| \, \|x - y\| = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|y - z\| \\ \iff & \varphi(x) - \|x - z\| \leq \varphi_0(y) + \|y - z\| \ . \end{aligned}$$

Somit existiert $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\sup_{x \in U} \varphi_0(x) - \|x - z\| \leq c \leq \inf_{y \in U} \varphi_0(y) + \|y - z\| \ .$$

Damit können wir nun die Forsetzung definieren, wobei für $v \in V$ (wie oben) gilt

$$\varphi(v) = \varphi(\alpha z - u) := \alpha c - \varphi_0(u) \ .$$

Wir prüfen nun die geforderten Eigenschaften. Es gilt offensichtlich $\varphi|_U = \varphi_0$ (setzen $\alpha = 0$ in eindeutiger Darstellung) und somit automatisch $\|\varphi\| \geq \|\varphi_0\|$. Zeige nun die Normabschätzung. Zunächst gilt $\forall \tilde{u} \in U$

$$\begin{aligned} & \varphi_0(\tilde{u}) - \|\tilde{u} - z\| \leq c \leq \varphi_0(\tilde{u}) + \|\tilde{u} - z\| \\ \iff & -\|\tilde{u} - z\| \leq c - \varphi_0(\tilde{u}) \leq \|\tilde{u} - z\| \\ \iff & |c - \varphi_0(\tilde{u})| \leq \|\tilde{u} - z\| \end{aligned}$$

Somit erhalten wir $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, u \in U$ (d.h. für $v \in V \setminus U$)

$$|\varphi(\alpha z - u)| = |\alpha| \left|\varphi\left(z - \frac{u}{\alpha}\right)\right| = |\alpha| \cdot \left|c - \varphi_0\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right| \leq |\alpha| \left\|\frac{u}{\alpha} - z\right\| = \|\alpha z - u\| \ .$$

Folglich gilt $|\varphi(\alpha z - u)| \leq \|\varphi_0\| \, \|az - u\| \implies \|\varphi\| \leq \|\varphi_0\|$ und es folgt Normgleichheit. □

Satz 5.1.2 (Hahn-Banach)**.** Sei $V, \|\cdot\|$ ein normierter Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Unterraum und $\varphi_0 \in U'$. Dann gibt es ein $\varphi \in V'$ mit $\varphi|_U = \varphi_0$ und $\|\varphi\|_{V'} = \|\varphi_0\|_{U'}$. D. h. jedes beschränkte, lineare Funktional kann normgleich fortgesetzt werden.

Beweis. Wir setzen

$$Z := \left\{(W, \psi) \,\middle|\, U \subseteq W \subseteq V \text{ Unterraum}, \ \psi \in W', \ \psi|_U = \psi_0, \ \|\psi\| = \|\varphi_0\|\right\} \ .$$

Definieren partielle Ordnung auf Z über

$$(W, \psi) \leq (\tilde{W}, \tilde{\psi}) :\iff W \subseteq \tilde{W} \text{ und } \tilde{\psi}|_W = \psi \ .$$

Sei nun $Z_0 \subseteq Z$ eine total geordnete Teilmenge, womit wir $W^* \subseteq V$ wie folgt definieren

$$Z_0 := \{(W_i, \psi_i) \mid i \in I\} \quad \text{und} \quad W^* := \bigcup_{i \in I} W_i \ .$$

Dabei ist W^* ein Unterraum, da für $x, y \in W^*$ existieren $i_1, i_2 \in I$, sodass $x \in W_{i_1}$ und $y \in W_{i_2}$. Sei o. B. d. A. $i_2 \geq i_1$, dann gilt nach Voraussetzung auch $x \in W_{i_2}$, dies ist ein Unterraum und somit $x + y \in W^*$. Wir definieren nun ein lineares Funktional ψ^* auf W^*.

□