

# Skript Funktionalanalysis

Prof. Volkmar Liebscher SoSe2024

Jonas Harder, Jakob Kropf und Kerstin Hoffmann

Version vom August 19, 2024

# Todo-Liste

Dieser Beweis muss noch beendet werden. . . . .	25
Hier gab es in der Vorlesung einen Nachtrag, allerdings sollte es so auch gehen. . . . .	30
Was genau ist hier mit Projektion gemeint? . . . . .	32
Hier fehlt noch der Rest des Beispiels. . . . .	48
Hier wurde nur gezeigt, dass $Kf(x) \in L^1(\mu)$ , woraus folgt dann, dass $Kf(x) \in L^2(\mu)$ ? . . . . .	53
Wieso schließen wir 0 als Eigenwert aus? . . . . .	56
Wieso genau folgt jetzt die Komposition? Warum genau ist der letzte Term kleiner unendlich?	61
Label fehlt (Satz 8.2 in Vorlesung) . . . . .	63
Label fehlt (Satz 8.2 in der Vorlesung). . . . .	63
Label fehlt (Satz 8.2 in Vorlesung) . . . . .	64
Weil $H = TH + TH^\perp$ ??? . . . . .	67
Wie geht es weiter??? . . . . .	68
Warum? . . . . .	68
Warum gilt hier Gleichheit? . . . . .	69
Label fehlt (Satz 8.11 in Vorlesung) . . . . .	70
Label fehlt. . . . .	70
Label fehlt (Satz 8.19 in Vorlesung) . . . . .	75
In der Vorlesung war $\ker( A ) = \ker(A)^\perp$ gegeben, ist dies richtig? (Werner S. 297: $\ker( A ) =$ $(\text{im}( A )^\perp)$ ) . . . . .	75
Müsste für die Definition von $U^*$ nicht $H = \text{im}(T) \oplus \text{im}(T)^\perp$ gelten? Dies gilt aber nur für $\text{im}(T)$ abgeschlossen, was i. A. nicht gilt. . . . .	76
Label fehlt (Satz 8.20 in Vorlesung) . . . . .	77
Wieso geht hier $f \in L^\infty(\mathbb{C})$ und nicht $f \in L^\infty(\sigma(T))$ ? . . . . .	81
Ich vermute $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, in der Vorlesung wurde dies jedoch nicht angegeben . . . . .	81

# Contents

<b>1</b>	<b>Metrische Räume</b>	<b>4</b>
1.1	Definitionen . . . . .	4
1.2	Konvergenz und Stetigkeit . . . . .	4
1.3	Offene und abgeschlossene Mengen . . . . .	5
1.4	Vollständigkeit . . . . .	5
1.5	Kompaktheit . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Maß- und Integrationstheorie</b>	<b>11</b>
2.1	Grundlegende Konstruktionen . . . . .	11
2.2	Integration . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Normierte Räume</b>	<b>14</b>
3.1	Definitionen . . . . .	14
3.2	Vervollständigung . . . . .	14
3.3	$L^p$ -Räume . . . . .	15
3.4	Beispiele für normierte Räume . . . . .	19
3.5	Äquivalenz von Normen . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Hilberträume</b>	<b>21</b>
4.1	Definitionen . . . . .	21
4.2	Beispiele . . . . .	22
4.3	Orthogonalbasen . . . . .	23
4.4	Projektionen . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Lineare Operatoren</b>	<b>28</b>
5.1	Definitionen . . . . .	28
5.2	Das Dual . . . . .	31
5.3	Der Satz von Hahn-Banach . . . . .	35
5.4	Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit . . . . .	38
5.5	Der Satz von der offenen Abbildung . . . . .	40
5.6	Der Satz vom abgeschlossenen Graphen . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Kompakte Operatoren</b>	<b>46</b>
6.1	Definitionen und Eigenschaften . . . . .	46
6.2	Hilbert-Schmidt-Operatoren . . . . .	50
6.3	Eigenwerte und -vektoren von kompakten Operatoren . . . . .	53
6.4	Kompakte Operatoren und Operatoren von endlichem Rang . . . . .	59

<b>7</b>	<b>Der Spektralsatz und Funktionalkalküle</b>	<b>61</b>
7.1	Der analytische Funktionalkalkül . . . . .	61
7.2	Das Spektrum eines Operators . . . . .	62
7.3	Der Satz von Stone-Weierstraß . . . . .	68
7.4	Der stetige Funktionalkalkül . . . . .	70
7.5	Positive Operatoren und die Spurklasse . . . . .	72
7.6	Der Spektralsatz und der messbare Funktionalkalkül . . . . .	78

# Chapter 1

## Metrische Räume

### 1.1 Definitionen

**Definition 1.1.1.** Eine Menge  $T$ , versehen mit einer Abbildung  $d : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften ( $s, t, u \in T$  beliebig)

1.  $d(s, t) \geq 0$ ,
2.  $d(s, t) = d(t, s)$
3.  $d(s, u) \leq d(s, t) + d(t, u)$
4.  $d(s, t) = 0 \iff s = t$

ist *metrischer Raum* mit *Metrik*  $d$ . Falls nur  $(\Leftarrow)$  in 4. gilt, handelt es sich um eine *Halbmetrik*.

**Beispiel 1.1.1.**  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  ist ein metrischer Raum.

**Beispiel 1.1.2.**  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  ist ein metrischer Raum.

**Beispiel 1.1.3.**  $(\mathbb{R}^n, d_i)$  mit  $i \in \{1, 2, \infty\}$  sind metrische Räume, wobei für  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$d_1(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad d_2(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad d_\infty(x, y) := \max\{|x_i - y_i| \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$$

**Definition 1.1.2.** Sei  $X, d$  ein metrischer Raum. Dann definieren wir die offene bzw. abgeschlossene Kugel um  $x \in X$  wie folgt.

$$K_\nu(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \nu\} \quad \overline{K_\nu(x)} := \{y \in X \mid d(x, y) \leq \nu\}$$

Weiterhin ist  $U$  eine Umgebung von  $x \iff \exists \nu > 0 : K_\nu(x) \subseteq U$ .

### 1.2 Konvergenz und Stetigkeit

**Definition 1.2.1.** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $X$  heißt *konvergent* gegen  $x \in X$  (bez.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

**Satz 1.2.1.** Der Limes einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

**Satz 1.2.2.** Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent und hat den gleichen Grenzwert.

**Definition 1.2.2.** Sei  $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann heißt  $f$  *stetig an der Stelle*  $x_0 \in X_1$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_1(x, x_0) < \delta \implies d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

**Satz 1.2.3.** Sei  $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1.  $f$  ist stetig an  $x_0$
2.  $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X_1^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \in X_1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

**Satz 1.2.4.** Seien  $f : X_1 \rightarrow X_2$ ,  $g : X_2 \rightarrow X_3$  stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Dann ist die Verknüpfung  $g \circ f : X_1 \rightarrow X_3$  stetig.

### 1.3 Offene und abgeschlossene Mengen

**Definition 1.3.1.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, dann heißt

1.  $G \subseteq X$  offen :  $\iff \forall x \in G \exists \nu > 0 : K_\nu(x) \subseteq G$
2.  $F \subseteq X$  abgeschlossen :  $\iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \implies x \in F$
3.  $S \subseteq X$  liegt dicht in  $X$  :  $\iff \forall x \in X \exists (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$

**Definition 1.3.2.** Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt *separabel*, wenn es eine höchstens abzählbare Teilmenge  $S \subseteq X$  gibt, die in diesem Raum dicht liegt.

**Beispiel 1.3.1.** Der Banachraum

$$l^\infty(\mathbb{N}) := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt} \} \quad \text{mit } d_\infty((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$$

ist nicht separabel.

**Satz 1.3.1.** Sei  $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind äquivalent:

1.  $f$  ist stetig.
2.  $\forall G \subseteq X_2 : G \text{ offen} \implies f^{-1}(G) \text{ offen.}$
3.  $\forall F \subseteq X_2 : F \text{ abgeschlossen} \implies f^{-1}(F) \text{ abgeschlossen.}$

*Bemerkung 1.3.1.* Aus Satz 1.3.1 folgt:  $K_\varepsilon(x)$  offen, da  $K_\varepsilon(x) = d(x, \cdot)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ .

### 1.4 Vollständigkeit

**Definition 1.4.1.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, dann heißt  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X^{\mathbb{N}}$  *Cauchyfolge*, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

**Satz 1.4.1.** Jede konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $(X, d)$  ist eine Cauchy-Folge.

**Definition 1.4.2.** Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt *vollständig*, falls jede Cauchyfolge konvergiert.

**Beispiel 1.4.1.**  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  und  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  sind vollständige metrische Räume.

**Beispiel 1.4.2.** Die metrischen Räume  $(\mathbb{R}^n, d_p)$  mit  $p \in [1, \infty]$  sind vollständig.

**Satz 1.4.2.** Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:

$$Y \subseteq X \text{ vollständig} \iff Y \text{ abgeschlossen.}$$

**Satz 1.4.3.** Sei  $(X_1, d_1)$  ein metrischer Raum,  $S \subseteq X_1$  dicht und  $(X_2, d_2)$  ein vollständiger metrischer Raum sowie  $\varphi : S \rightarrow X_2$  isometrisch. Dann gibt es genau eine isometrisches  $\hat{\varphi} : X_1 \rightarrow X_2$  mit  $\hat{\varphi}|_S = \varphi$ .

*Beweis.* Sei  $x \in X_1$ , dann gibt es eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in S$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Somit ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  insbesondere eine Cauchyfolge. Folglich ist auch  $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und mit der Vollständigkeit von  $X_2$  gilt

$$\exists y \in X_2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = y := \hat{\varphi}(x) .$$

Wir setzen also für solche Folgen

$$\hat{\varphi} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) .$$

Zeige nun  $\hat{\varphi}$  ist wohldefiniert. Sei eine weitere Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegeben mit  $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in S$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ . Es folgt:

$$d_2(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = d_1(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d_1(x, x) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(y_n) = y .$$

Somit ist  $\hat{\varphi}$  in der Tat wohldefiniert. Weiterhin gilt  $\hat{\varphi}|_S = \varphi$ , denn wir wählen für  $x \in S$  die Folge  $(x)_{n \in \mathbb{N}}$ , somit gilt

$$\hat{\varphi} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = \hat{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x) = \varphi(x) .$$

Zeige nun  $\hat{\varphi}$  ist eine Isometrie. Seien dazu  $x, y \in X$  mit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen in  $S$ , wobei  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Somit

$$d_2(\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_2(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x_n, y_n) = d(x, y) .$$

□

**Satz 1.4.4.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum  $(\hat{X}, \hat{d})$  (bez. Vervollständigung von  $X$ ) und eine Isometrie  $\varphi : X \rightarrow \hat{X}$  (d. h.  $\forall x, y \in X : d(x, y) = \hat{d}(\varphi(x), \varphi(y))$ ), sodass das Bild  $\varphi(X)$  dicht in  $\hat{X}$  ist. Haben  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  und  $\tilde{\varphi}$  die gleiche Eigenschaft, so gibt es eine Bijektion  $\psi : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\tilde{\varphi} = \psi \circ \varphi$ .

*Beweis.* Definiere die Menge aller Cauchyfolgen in  $X$  durch

$$\hat{X}_0 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge}\} .$$

Definiere weiterhin eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $\hat{X}_0$  mit

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 .$$

Wir setzen  $\hat{X}$  als die Menge aller Äquivalenzklassen an, d. h.

$$\hat{X} = \hat{X}_0 / \sim = \{[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{X}_0\} \text{ wobei } [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] = \{(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}}\} .$$

Nun konstruieren wir die Metrik  $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow [0, \infty)$ , wobei für  $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \hat{X}$  gilt

$$\hat{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, y_m) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N, M \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall m \geq M : d(x_n, y_m) < \varepsilon .$$

Zeigen nun, dass  $\hat{d}$  wohldefiniert. Seien  $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{X}_0$  mit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dann nach Definition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y'_n) = 0.$$

Anwenden der Dreiecksungleichung ergibt

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n) \\ d(x'_n, y'_n) &\leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n). \end{aligned}$$

Somit

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \rightarrow 0.$$

Da  $(d(x_n, y_n))$  und  $(d(x'_n, y'_n))$  konvergent, folgt

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, y_m) = \lim_{n', m' \rightarrow \infty} d(x'_{n'}, y'_{m'})$$

und somit ist  $\hat{d}$  wohldefiniert. Nun gilt nach Def. 1.1.1 zu zeigen, dass  $\hat{d}$  eine Metrik auf  $\hat{X}$  ist. Wir zeigen hier nur die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, y_m) &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, z_k) + d(z_k, y_m) \iff \\ \hat{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]) &\leq \hat{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(z_k)_{k \in \mathbb{N}}]) + \hat{d}([(z_k)_{k \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]). \end{aligned}$$

Setze nun  $\varphi : X \rightarrow \hat{X}$ ,  $x \mapsto [(x)_{n \in \mathbb{N}}]$ , dies ist offensichtlich eine Isometrie. Zeigen nun, dass  $\varphi(X)$  dicht in  $\hat{X}$ . Sei  $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \hat{X}$ . Nach Voraussetzung ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge, d. h.  $\exists N_0 \in \mathbb{N}$  sodass  $\forall m, n \geq N_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon$ . Somit  $\hat{x}_{N_0} := [(x_{N_0})_{n \in \mathbb{N}}] = \varphi(x_{N_0}) \in \varphi(X)$  und

$$\hat{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], \hat{x}_{N_0}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{N_0}) < \varepsilon.$$

Somit  $\hat{x}_{N_0} \in K_\varepsilon([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]) \cap \varphi(X)$  und folglich ist  $\varphi(X)$  dicht in  $\hat{X}$ . Nun gilt zu zeigen, dass  $(\hat{X}, \hat{d})$  vollständig ist. Zeige dafür zunächst folgendes Lemma.

**Lemma 1.4.1.** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum,  $S \subseteq X$  dicht in  $X$ , sodass jede Cauchyfolge in  $S$  in  $X$  konvergiert. Dann ist  $X$  vollständig.

*Beweis.* Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $X$ . Da  $S$  dicht in  $X$  gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists y_n \in S : d(x_n, y_n) < 1/n.$$

Somit ist  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch eine Cauchyfolge in  $S$ , da

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) < 1/m + d(x_m, x_n) + 1/n.$$

Nach Annahme existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n =: x \in X$ . Da

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, x) < 1/n + d(y_n, x)$$

folgt in der Tat  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . □



Nach Lemma 1.4.1 g. z. z., dass jede Cauchyfolge in  $\varphi(X)$  in  $\hat{X}$  konvergiert. Sei  $(\hat{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge in  $\varphi(X)$ , d. h.  $\hat{x}_k := (x_k, x_k, \dots)$ . Da  $\varphi$  eine Isometrie, ist  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $X$  durch

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) = \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) .$$

Somit  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \hat{X}_0$ ,  $\hat{x} := [(x_k)_{k \in \mathbb{N}}] \in \hat{X}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , dann  $\exists N \in \mathbb{N}$  mit  $\forall k, n \geq N : d(x_k, x_n) < \varepsilon$ . Somit gilt  $\forall k \geq N$ :

$$\hat{d}(\hat{x}_k, \hat{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_k, x_n) < \varepsilon .$$

Folglich konvergiert  $(\hat{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $\hat{x} \in \hat{X}$  und  $\hat{X}$  ist vollständig. Betrachte nun  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  sowie  $\tilde{\varphi}$  mit den gleichen Eigenschaften. Wir definieren

$$\psi_0 : \varphi(X) \rightarrow \tilde{X}, \quad \psi_0(\varphi(x)) = \tilde{\varphi}(x) .$$

Dies ist eine Isometrie, da für  $x, y \in X$  gilt

$$\tilde{d}(\psi_0(\varphi(x)), \psi_0(\varphi(y))) = \tilde{d}(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)) = d(x, y) = \hat{d}(\varphi(x), \varphi(y)) .$$

Nach Satz 1.4.3 existiert eine eindeutige Erweiterung  $\psi : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$  Isometrie mit  $\psi|_{\varphi(X)} = \psi_0$ . Da  $\psi_0$  als Isometrie injektiv ist, g. z. z.  $\psi_0$  ist surjektiv. Sei also  $z \in \tilde{X}$ , dann wegen der Dichtheit von  $\tilde{\varphi}(X)$

$$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(x_n) = z .$$

Somit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge  $\implies (\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge. Da  $\hat{X}$  vollständig

$$\exists w \in \hat{X} : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = w .$$

Da  $\psi$  eine Isometrie ist folgt schließlich  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(\varphi(x_n)) = \psi(w) = z$  und somit ist  $\psi$  bijektiv.  $\square$

## 1.5 Kompaktheit

**Definition 1.5.1.** Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. D. h., wenn  $(G_i)_{i \in I}$  eine Familie offener Mengen, mit  $X = \bigcup_{i \in I} G_i$ , dann existieren endlich viele  $G_{i_1}, \dots, G_{i_n}$  mit  $X = \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}$ .

**Satz 1.5.1.** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum,  $K \subseteq X$  kompakt. Dann ist  $K$  beschränkt und abgeschlossen (Umkehrung gilt i. A. nicht).

**Satz 1.5.2.** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum. Dann gilt

$$X \text{ kompakt} \iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ Teilfolge } \exists y \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y$$

**Satz 1.5.3** (Heine-Borel). Betrachte die metrischen Räume  $(\mathbb{R}^n, d_p)$  mit  $p \in [1, \infty]$ . Dann ist  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt  $\iff X$  beschränkt und abgeschlossen.

**Definition 1.5.2.** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum. Dann heißt  $Y \subseteq X$  totalbeschränkt falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \exists x_1, \dots, x_M \in Y : Y \subseteq \bigcup_{i=1}^M K_\varepsilon(x_i)$$

**Satz 1.5.4.** Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum,  $Y \subseteq X$ . Dann ist  $Y$  kompakt  $\iff Y$  abgeschlossen und total beschränkt.

*Beweis.* ( $\Rightarrow$ )

Sei  $Y$  kompakt.  $Y$  abgeschlossen folgt aus Satz 1.5.1. Zeige nun die totale Beschränktheit, sei  $\varepsilon > 0$  dafür fixiert. Dann gilt offensichtlich

$$Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} K_\varepsilon(y) \stackrel{Y \text{ kompakt}}{\Rightarrow} \exists y_1, \dots, y_M : Y \subseteq \bigcup_{i=1}^M K_\varepsilon(y_i)$$

Somit ist  $Y$  total beschränkt.

( $\Leftarrow$ )

Sei  $Y \subseteq X$  abgeschlossen und total beschränkt und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge aus  $Y$ . Es g. z. z., dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine in  $Y$  konvergente Teilfolge besitzt. Wir nutzen die totale Beschränktheit zur Konstruktion der Teilfolge (TF).

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 : \exists \{y_i^1\}_{i=1, \dots, M_1}, Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_1} K_1(y_i^1) &\Rightarrow \exists \text{ TF } (x_{n_k}^1)_{k \in \mathbb{N}} \exists i_1 \in \{1, \dots, M_1\} \forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k}^1 \in K_1(y_{i_1}^1) \\ \varepsilon = \frac{1}{2} : \exists \{y_i^2\}_{i=1, \dots, M_2}, Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_2} K_{1/2}(y_i^2) &\Rightarrow \exists \text{ TTF } (x_{n_k}^2)_{k \in \mathbb{N}} \exists i_2 \in \{1, \dots, M_2\} \\ &\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k}^2 \in K_1(y_{i_1}^1) \cap K_{1/2}(y_{i_2}^2) \end{aligned}$$

Diese Konstruktion lässt sich nun auf  $l$  Schritte erweitern.

$$\begin{aligned} \varepsilon = 2^{-l} : \exists \{y_i^l\}_{i=1, \dots, M_l}, Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_l} K_{2^{-l}}(y_i^l) &\Rightarrow \exists \text{ TT...TF } (x_{n_k}^l)_{k \in \mathbb{N}} \exists i_l \in \{1, \dots, M_l\} \\ &\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k}^l \in K_1(y_{i_1}^1) \cap K_{1/2}(y_{i_2}^2) \cap \dots \cap K_{2^{-(l-1)}}(y_{i_{l-1}}^{l-1}) \cap K_{2^{-l}}(y_{i_l}^l) \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist  $(x_{n_k}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  Teilfolge von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und für  $k, k' \geq l$  gilt

$$x_{n_k}^k, x_{n_{k'}}^{k'} \in K_{2^{-l}}(y_{i_l}^l) \Rightarrow d(x_{n_k}^k, x_{n_{k'}}^{k'}) < 2^{-(l-1)}.$$

Folglich ist  $(x_{n_k}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und da  $X$  nach Voraussetzung vollständig, gilt

$$\exists z \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^k = z.$$

Da  $Y$  abgeschlossen, gilt insbesondere  $z \in Y$  und folglich  $Y$  kompakt. □

**Beispiel 1.5.1.** Betrachte

$$C[0, 1] := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}, \quad \|\cdot\|_\infty, \quad \text{für } f, g \in C[0, 1] : d(f, g) = \max \{|f(t) - g(t)| \mid t \in [0, 1]\}$$

Dann gilt  $Y \subseteq C[0, 1]$  ist kompakt  $\iff Y$  punktweise beschränkt, d. h.

$$\exists c > 0 \forall f \in Y \forall t \in [0, 1] : |f(t)| \leq c$$

und  $Y$  gleichgradig stetig, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in Y \forall s, t \in [0, 1] : |t - s| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| < \varepsilon.$$

**Satz 1.5.5.** Sei  $(X_1, d_1)$  ein kompakter metrischer Raum,  $(X_2, d_2)$  ein metrischer Raum, sowie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  stetig. Dann ist  $f(X_1)$  kompakt.

*Bemerkung 1.5.1.* Falls  $X_2 = \mathbb{R}$ , dann existieren nach dem Satz von Weierstraß  $x_+, x_- \in X_1$  mit  $f(x_+) = \sup f(X_1)$  und  $f(x_-) = \inf f(X_1)$ .

**Satz 1.5.6.** Sei  $(X_1, d_1)$  ein kompakter metrischer Raum,  $(X_2, d_2)$  ein metrischer Raum, sowie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  stetig. Dann ist  $f$  gleichmäßig stetig, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon .$$

## Chapter 2

# Maß- und Integrationstheorie

### 2.1 Grundlegende Konstruktionen

**Definition 2.1.1.** Sei  $\Omega \neq \emptyset$ . Dann heißt  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$   $\sigma$ -Algebra, falls

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$
2.  $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) : A \in \mathcal{F} \implies A^C \in \mathcal{F}$
3.  $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} A_n \in \mathcal{F} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

Bezeichne  $(\Omega, \mathcal{F})$  als messbaren Raum.

*Bemerkung 2.1.1.* Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, dann ist die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(X)$  der Borelmengen die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die alle offenen Teilmengen von  $X$  enthält. Bez.  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) =: \mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}^n$ .

**Definition 2.1.2.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein messbarer Raum. Dann ist  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  ein Maß, falls

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{F}, \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset : \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$

Wir bezeichnen  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  als Maßraum.

**Definition 2.1.3.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum. Das Maß  $\mu$  wird als  $\sigma$ -endlich bezeichnet, falls gilt

$$\exists A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}, A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \text{ mit } \forall n \in \mathbb{N} : \mu(A_n) < \infty \text{ und } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega.$$

**Definition 2.1.4.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum. Ein Maß  $\nu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  heißt absolut stetig bzgl.  $\mu$  (bez.  $\nu \ll \mu$ ), falls

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0.$$

**Beispiel 2.1.1.** Sei  $\Omega$  beliebig und  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Dann können wir das Zählmaß  $\mu$  definieren mit  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & A \text{ endlich} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist  $\Omega$  meist abzählbar, z. B.  $\Omega = \mathbb{N}$  oder  $\Omega = \mathbb{Z}$

**Beispiel 2.1.2.** Sei  $\Omega = \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{F} = \mathcal{B}^n$ . Dann definieren wir das Lebesgue-Maß  $l^n$  mit

$$l^n \left( \bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i) \right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Für  $l = 1$  gilt damit insbesondere  $l^1([a, b)) =: l([a, b)) = b - a$ .

## 2.2 Integration

**Definition 2.2.1.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein messbarer Raum,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  heißt messbar (bez.  $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ ), falls

$$\forall r > 0, z \in \mathbb{C} : f^{-1}(K_r(z)) \in \mathcal{F} \quad [ \iff \forall U \in \mathcal{B}(\mathbb{C}) : f^{-1}(U) \in \mathcal{F} ] .$$

Analog ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar (bez.  $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ ), falls

$$\forall U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$$

*Bemerkung 2.2.1.* Wir bezeichnen weiterhin  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, [0, \infty)) := \mathcal{M}_+(\Omega)$ .

*Bemerkung 2.2.2.* Sei  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein messbarer Raum,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $f$  messbar

$$\iff \forall c \in \mathbb{R} : \{f > c\} := \{x \in \Omega \mid f(x) > c\} \in \mathcal{F} .$$

**Definition 2.2.2.** Sei  $A$  eine Menge. Eine Funktion der Form

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

heißt *Indikatorfunktion* der Menge  $A$ .

**Satz 2.2.1** (Integral für nichtnegative, messbare Funktionen). Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum. Dann gibt es genau eine Abbildung  $\varphi : \mathcal{M}_+(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  mit:

1.  $\forall A \in \mathcal{F} : \varphi(1_A) = \mu(A)$
2.  $\forall f, g \in \mathcal{M}_+(\Omega), \lambda \in [0, \infty] : \varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$
3.  $\forall (f_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} f_{n+1} \geq f_n \geq 0 : \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(f_n)$

Wir schreiben  $\varphi(f) =: \int f d\mu =: \int f(\omega) d(\omega) =: \int f(\omega) \mu(d\omega)$ .

*Bemerkung 2.2.3.* 3. ist auch als Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz bekannt.

*Bemerkung 2.2.4.* Wir können in 2.  $\lambda \in [0, \infty]$  wählen unter Beachtung, dass auf den erweiterten reellen Zahlen  $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  gilt:

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0 \quad \text{und} \quad (+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = 0 .$$

**Definition 2.2.3** (Integral für messbare Funktionen). Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum,  $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ . Dann definieren wir

$$f^+ := \max\{f, 0\}, \quad f^- := \max\{-f, 0\} \implies f = f^+ - f^- \quad \text{und} \quad |f| = f^+ + f^- .$$

Somit erhalten wir als Definition für das Integral (für integrierbare Funktionen, siehe Def. 2.2.4):

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu .$$

Sei nun  $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ , dann folgt  $\Re(f), \Im(f) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ . Somit können wir definieren:

$$\int f d\mu := \int \Re(f) d\mu + i \cdot \int \Im(f) d\mu .$$

**Definition 2.2.4.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum. Dann bezeichnen wir  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  als  $(\mu)$ -integrierbar, falls  $f \in \mathcal{L}^1$ , wobei gilt

$$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \mid \int |f| d\mu < \infty \right\}.$$

Wir schreiben kurz auch  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ .

*Bemerkung 2.2.5.* Analog definiert man  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ . Somit:

$$\int \cdot d\mu : \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R}[\mathbb{C}]) \rightarrow \mathbb{R}[\mathbb{C}]$$

*Bemerkung 2.2.6.* Für  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  gilt insbesondere  $|f| \geq \Re(f)$ ,  $|f| \geq \Im(f)$ , d. h. das Integral ist wohldefiniert.

**Satz 2.2.2.** Seien  $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  sowie eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  sowie  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

1.  $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$
2.  $\int \lambda f + g d\mu = \lambda \int f d\mu + \int g d\mu$
3.  $\mu(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}) = 0 \implies \int f d\mu = \int g d\mu \implies \int |f - g| d\mu = 0$
4.  $\mu(\{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| = \infty\}) = 0$
5.  $\exists h : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ ,  $h \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$   $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \leq h$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \implies \int f d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$

*Bemerkung 2.2.7.* 5. ist auch als Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz bekannt.

**Definition 2.2.5.** Seien  $(\Omega_1, \mathcal{A})$ ,  $(\Omega_2, \mathcal{B})$  Maßräume. Dann heißt die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega_1 \times \Omega_2$ , die die Menge

$$\{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

enthält, Produkt- $\sigma$ -Algebra. Wir bezeichnen diese mit  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ .

**Satz 2.2.3** (Produktmaß). Seien  $(\Omega_1, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(\Omega_2, \mathcal{B}, \nu)$   $\sigma$ -endliche Maßräume. Dann existiert genau ein Maß  $\mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  mit

$$\forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} : (\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Dabei ist  $\mu \otimes \nu$   $\sigma$ -endlich und wir bezeichnen dies als Produktmaß von  $\mu$  und  $\nu$ .

**Satz 2.2.4** (Satz von Fubini). Seien die Maßräume wie für das Produktmaß definiert. Sei weiterhin  $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$ , dann gilt

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) \mu \otimes \nu(dx, dy) = \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} f(x, y) \mu(dx) \right) \nu(dy) = \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx).$$

**Definition 2.2.6.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum,  $\nu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  ein Maß. Dann besitzt  $\nu$  eine Dichte bzgl.  $\mu$ , falls

$$\exists f : \Omega \rightarrow [0, \infty) \text{ messbar} : \forall A \in \mathcal{F} : \nu(A) = \int_A f d\mu.$$

**Satz 2.2.5** (Satz von Radon-Nikodym). Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und  $\nu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  ein Maß mit  $\nu \ll \mu$ . Dann besitzt  $\nu$  eine Dichte bzgl.  $\mu$ .

## Chapter 3

# Normierte Räume

### 3.1 Definitionen

*Bemerkung 3.1.1.* Wir betrachten hier Vektorräume über den Körpern  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Definition 3.1.1.** Eine *Norm* über einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit:

1.  $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
2.  $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$

Dann heißt  $V, \|\cdot\|$  normierter Raum.

*Bemerkung 3.1.2.* Falls 3. nicht gilt, bezeichnen wir die Abbildung als *Halbnorm*.

**Satz 3.1.1.** Ein normierter Raum  $(V, \|\cdot\|)$  ist ein metrischer Raum mit der Metrik  $d$ , definiert durch

$$\forall x, y \in V : d(x, y) = \|x - y\| .$$

**Beispiel 3.1.1.** In diesem Fall gilt für die Operationen  $+: V \times V \rightarrow V$  und  $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$  (mit  $\lambda \in \mathbb{K}, x, y, x', y' \in V$ ):

$$\begin{aligned} d(x' + y', x + y) &= \|x' + y' - (x + y)\| \leq \|x' + y'\| + \|x + y\| \\ d(\lambda x, \lambda x') &= \|\lambda(x - x')\| = |\lambda| \|x - x'\| = |\lambda| d(x, x') \end{aligned}$$

**Definition 3.1.2.** Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Raum.

### 3.2 Vervollständigung

**Satz 3.2.1.** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum, dann existiert eine Vervollständigung  $(\hat{V}, \hat{\|\cdot\|})$ , d. h.  $V$  kann in einen Banachraum eingebettet werden.

*Beweis.* Definiere Analog zu Satz 1.4.4:

$$\hat{V}_0 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in V, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge}\}.$$

$$\text{Äquivalenzrelation } \sim \text{ auf } \hat{V}_0: (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

$$\text{Menge aller Äquivalenzklassen: } \hat{V} = \hat{V}_0 / \sim = \{[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{X}_0\}$$

Dabei ist  $\hat{V}$  ein Vektorraum mit  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{V}_0$  :

$$\lambda [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] := [(\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \quad \text{und} \quad [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] + [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] = [(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}] .$$

Als Norm auf  $\hat{V}$  definieren wir

$$\hat{\|} [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| .$$

Zeige zunächst die Wohldefiniertheit. Der obige Grenzwert existiert, da für  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{V}_0$  die Folge  $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist, mit

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} |\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0 .$$

Betrachte nun  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{V}_0$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\|x_n\| - \|y_n\|| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

und somit ist  $\hat{\|} \cdot \hat{\|}$  unabhängig vom Repräsentanten. Für die Normeigenschaften zeige hier nur die Dreiecksungleichung und Definitheit (1. Eigenschaft trivial):

$$\begin{aligned} \hat{\|} [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] + [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| + \|y_n\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = \hat{\|} [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} + \hat{\|} [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} \end{aligned}$$

Weiterhin:

$$\hat{\|} [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0 \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (0)_{n \in \mathbb{N}} \iff [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] = [(0)_{n \in \mathbb{N}}] = 0_{\hat{V}}$$

□

### 3.3 $L^p$ -Räume

**Definition 3.3.1.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum,  $p \in [1, \infty)$ , dann definieren wir

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}), \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty \right\} .$$

Wir schreiben kurz auch  $\mathcal{L}^p(\mu)$ .

*Bemerkung 3.3.1.*  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  definiert einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

**Satz 3.3.1.**  $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(\mu) \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\|f\|_p := (\int_{\Omega} |f|^p d\mu)^{1/p}$  ist eine Halbnorm.

*Beweis.* Siehe nach Satz 3.3.2. □

*Bemerkung 3.3.2.*  $\|\cdot\|_p$  ist keine Norm.

**Beispiel 3.3.1.** Betrachte  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $f = 1_C \neq 0$ ,  $\mu = l$ , wobei  $C$  die Cantormenge und  $l$  das Lebesgue-Maß sind. Dann gilt:

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} (1_C)^p dl \right)^{\frac{1}{p}} = l(C)^{\frac{1}{p}} = 0$$



**Lemma 3.3.1** (Youngsche Ungleichung). Seien  $u, v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $p, q \in \mathbb{R}_{>1}$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt

$$u \cdot v \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

**Satz 3.3.2** (Hölder Ungleichung). Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum,  $p, q \in (1, \infty)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  und  $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ ,  $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ . Dann gilt  $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$  und  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .

*Beweis.* Nehmen o. B. d. A. an  $f, g \geq 0$ ,  $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ . Mit Lemma 3.3.1 gilt

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 &= \int_{\Omega} f(x)g(x)\mu(dx) \leq \int_{\Omega} \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q} \mu(dx) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} f(x)^p \mu(dx) + \frac{1}{q} \int_{\Omega} g(x)^q \mu(dx) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q \end{aligned}$$

□

**Zu Satz 3.3.1.** 1. Eigenschaft ist trivial. Zeige nun noch die Dreiecksungleichung. Seien dafür  $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ . Dann gilt auch die Abschätzung:

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} |f + g| \leq |f + g|^{p-1} |f| + |f + g|^{p-1} |g|.$$

Sei  $q \in \mathbb{R}$  so gewählt, dass  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff p + q = pq$ . Dann gilt  $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\mu)$ , da

$$\left(|f + g|^{p-1}\right)^q = |f + g|^{pq-q} = |f + g|^p$$

Dies ist in der Tat integrierbar, da  $|f + g|^p \leq |f|^p + |g|^p$  und nach Voraussetzung  $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ . Somit erhalten wir

$$\|f + g\|_p^p = \int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \leq \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |f| + |f + g|^{p-1} |g| d\mu = \|(f + g)^{p-1} f\|_1 + \|(f + g)^{p-1} g\|_1.$$

Anwenden der Hölder Ungleichung ergibt

$$\leq \|f + g\|_q \|f\|_p + \|f + g\|_q \|g\|_p = \left(\int_{\Omega} |f + g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} (\|f\|_p + \|g\|_p) = \left(\int_{\Omega} |f + g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} (\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Sei o. B. d. A.  $f + g \neq 0$  fast überall (sonst Beh. trivial), dann gilt:

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^{p/q} (\|f\|_p + \|g\|_p) \iff \|f + g\|_p^{p(1-1/q)} \leq \|f\|_p + \|g\|_p \iff \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

□

**Definition 3.3.2.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum sowie  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ . Dann definieren wir

$$f \stackrel{\mu}{=} g : \iff \mu(\{\omega \in \Omega | f(\omega) \neq g(\omega)\}) =: \mu(\{f \neq g\}) = 0.$$

Man sagt auch  $f = g$   $\mu$ -fast überall.

*Bemerkung 3.3.3.* Die Relation  $\stackrel{\mu}{=}$  ist eine Äquivalenzrelation.

**Satz 3.3.3.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum sowie  $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ ,  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ . Dann gilt

$$f \stackrel{\mu}{=} g \implies g \in \mathcal{L}^p(\mu) \text{ und } \|f\|_p = \|g\|_p .$$

*Beweis.* Gelte o. B. d. A.  $g \stackrel{\mu}{=} 0$ . Betrachte hier  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \cup \{-\infty, \infty\}$ , sei  $A := \{\omega \in \Omega | g(\omega) \neq 0\}$ . Nach Voraussetzung gilt  $\mu(A) = 0$  und somit

$$|g| \leq \infty \cdot 1_A \implies \int_{\Omega} |g|^p d\mu \leq \infty \cdot \int_{\Omega} 1_A d\mu = \infty \cdot 0 = 0 .$$

Folglich gilt also in der Tat  $g \in \mathcal{L}^p$ . Zeige nun  $\|f\|_p = \|g\|_p$ . Dabei nutzen wir  $f \stackrel{\mu}{=} g \iff g - f \stackrel{\mu}{=} 0 \implies \|g - f\|_p = 0$ . Es folgt

$$\|g\|_p = \|f + (g - f)\|_p \leq \|f\|_p + \|g - f\|_p = \|f\|_p$$

Analog erhalten wir  $\|f\|_p \leq \|g\|_p$  und somit in der Tat  $\|f\|_p = \|g\|_p$ .  $\square$

**Satz 3.3.4.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum, dann wird  $\mathcal{L}^p(\mu) / \stackrel{\mu}{=}$  mit  $\forall f \in \mathcal{L}^p(\mu) : \| [f] \|_p := \|f\|_p$  ein normierter Raum.

*Beweis.* Die Wohldefiniertheit der Norm folgt aus Satz 3.3.3. Weiterhin lassen sich die Halbnormeigenschaften auf Satz 3.3.1 zurückführen. Es g. z. z., dass  $\|\cdot\|_p$  auf  $\mathcal{L}^p(\mu) / \stackrel{\mu}{=}$  definit ist. Angenommen für  $[f] \in \mathcal{L}^p(\mu) / \stackrel{\mu}{=}$  gilt  $\|[f]\|_p = 0 \iff \int_{\Omega} |f|^p = 0$ . Nehme weiterhin an, dass  $f \stackrel{\mu}{\neq} 0 \iff 0 < \mu(\{|f| > 0\})$ . Somit

$$0 < \mu(\{|f| > 0\}) = \mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ |f| > \frac{1}{n} \right\} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left( |f| > \frac{1}{n} \right) .$$

Folglich  $\exists c > 0 : \mu(\{|f| \geq c\}) > 0$ . Damit erhalten wir mit  $A := \{|f| > c\}$

$$|f|^p \geq c^p \cdot 1_A \implies \int |f|^p \geq c^p \mu(A) > 0 .$$

Dies ist ein Widerspruch und folglich gilt  $f \stackrel{\mu}{=} 0$ .  $\square$

**Definition 3.3.3.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum, dann

$$L^p(\mu) := L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) / \stackrel{\mu}{=}$$

Wir schreiben meist  $L^p(\mu)$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $L^p(\mu, \mathbb{C})$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

*Bemerkung 3.3.4.* Statt  $[f] \in L^p$  schreiben wir nur  $f \in L^p$ .

**Definition 3.3.4.**  $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  heißt *wesentlich beschränkt* ( $:\iff f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ ), falls

$$\exists c \in \mathbb{R}_{>0} : \mu(\{\omega \in \Omega | |f(\omega)| > c\}) = 0 .$$

Dann definieren wir

$$\|f\|_\infty := \inf \{c \mid \mu(\{\omega \in \Omega | |f(\omega)| > c\}) = 0\} .$$

**Satz 3.3.5.**  $\|\cdot\|_\infty$  ist eine Halbnorm und es gilt  $f \stackrel{\mu}{=} g \iff \|f - g\|_\infty = 0$ .

*Beweis.* Die 1. Eigenschaft und die zweite Aussage sind trivial, wir zeigen hier wieder nur die Dreiecksungleichung. Seien  $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  wesentlich beschränkt,  $c, d > 0$  und  $A := \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| > c\}$ ,  $B := \{\omega \in \Omega \mid |g(\omega)| > d\}$ . Somit

$$\mu(A) = \mu(B) = 0 \implies \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0.$$

Es gilt

$$D := \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega) + g(\omega)| > c + d\} \subseteq A \cup B$$

und somit auch  $\mu(D) = 0$ . Sei nun  $\omega \in (A \cup B)^C$ , dann

$$|f(\omega)| \leq c \wedge |g(\omega)| \leq d \implies |f(\omega) + g(\omega)| \leq |f(\omega)| + |g(\omega)| \leq c + d.$$

D. h.  $f + g$  ist wesentlich durch  $c + d$  beschränkt und somit folgt in der Tat

$$\|f + g\|_\infty \leq c + d \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

□

**Satz 3.3.6.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum. Dann ist  $\mathcal{L}^\infty(\mu)/\underline{\mu}$  mit  $\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mu) : \|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty$  ein normierter Raum.

**Definition 3.3.5.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum, dann

$$L^\infty(\mu) := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)/\underline{\mu}.$$

Wir schreiben meist  $L^\infty(\mu)$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $L^\infty(\mu, \mathbb{C})$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

*Bemerkung 3.3.5.*  $L^p(\mu)$  für  $p \in [1, \infty]$  sind keine direkten Funktionenräume.

**Satz 3.3.7.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum, dann ist  $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$  ein Banachraum für  $p \in [1, \infty]$ .

*Beweis.* Betrachte hier nur den Fall  $p = 1$ . Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $L^p(\mu)$ , d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N_0 : \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon.$$

Daher gilt insbesondere

$$\forall k > 0 \exists n_k \forall m \geq n_k : \|f_m - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}.$$

Somit können wir solche  $n_k$  mit  $n_{k+1} > n_k$  wählen und erhalten eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}$ . Für  $p = 1$  mit Beppo-Levi und  $g_k := |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_\Omega g_k d\mu = \int_\Omega \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k d\mu < \infty.$$

Somit gilt insbesondere

$$\mu \left( \left\{ \omega \in \Omega \mid \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(\omega) = \infty \right\} \right) = 0.$$

Nehmen hier o. B. d. A. an, dass  $\forall \omega \in \Omega : \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(\omega) < \infty$ . Somit bildet  $\forall \omega \in \Omega$  die Folge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und ist somit konvergent, d. h.  $\forall \omega \in \Omega : f(\omega) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(\omega)$  existiert. Somit gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega) = f_{n_0}(\omega) - f(\omega)$$

Wir können eine integrierbare Majorante für die  $f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega)$  finden mit

$$|f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega)| \leq \sum_{l=0}^{k-1} |f_{n_l}(\omega) - f_{n_{l+1}}(\omega)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(\omega) =: g(\omega) \text{ mit } \int_{\Omega} g d\mu < \infty .$$

Nach dem Satz von Lebesgue folgt somit, dass  $f$  integrierbar (d. h.  $f \in L^1(\mu)$ ) und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega) - (f_{n_0}(\omega) - f(\omega))| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f\|_1 = 0 .$$

Also ist  $L^1(\mu)$  in der Tat vollständig. □

### 3.4 Beispiele für normierte Räume

**Beispiel 3.4.1.** Betrachte

$$\Omega = \{1, \dots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}_{>0} \quad \text{mit} \quad \forall A \subseteq \Omega : \mu(A) = |A| .$$

Dann gilt wegen der Korrespondenz als Vektorraum

$$L^p(\mu) = \mathbb{R}^n \text{ und } L^p(\mu, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$$

wegen der Korrespondenz

$$f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix} .$$

**Beispiel 3.4.2** (Folgenräume). Folgende Vektorräume

$$\begin{aligned} c_0 &:= \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\} \\ c &:= \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert} \right\} \\ \ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) &:= \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c \right\} \end{aligned}$$

sind normierte Vektorräume (insbesondere Banachräume) mit der Supremumsnorm

$$\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| .$$

Betrachte weiterhin die Folgenräume  $\ell^p$  mit  $p \in [1, \infty)$ , wobei  $\mu$  das Zählmaß:

$$\ell_{\mathbb{K}}^p = L^p(\mathbb{N}, \mu, \mathbb{K}) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$$

mit der Norm  $\|\cdot\|_p$  definiert durch

$$\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p : \|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Dabei sind  $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$  für  $p \in [1, \infty)$  Banachräume.

**Beispiel 3.4.3.** Betrachte

$$\Omega = \mathbb{R} \text{ bzw. } \Omega = \mathbb{R}^d \text{ mit Lebesgue-Maß } l \text{ bzw. } l^d .$$

mit den entsprechenden Räumen  $L^p(l)$ ,  $L^p(l, \mathbb{C})$  bzw.  $L^p(l^d)$  und den bekannten Normen. Betrachte

$$\Omega = [0, 1] \text{ mit Lebesgue-Maß } l$$

dann ergibt sich

$$L^p([0, 1], l) \text{ mit } \forall f \in L^p([0, 1], l) : \|f\|_p = \int_0^1 |f(x)|^p dx$$

Der normierte Raum  $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$  ist ein Banachraum, wobei

$$C^0([0, 1]) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\} \text{ und } \forall f \in C^0([0, 1]) : \|f\|_\infty = \sup \{|f(t)| \mid t \in [0, 1]\}$$

Hingegen ist  $C^0([0, 1])$  nicht vollständig bzgl. der Norm  $\|f\|_p = \int_0^1 |f(t)|^p dt$ . Der Raum  $(C^r([0, 1]), \|\cdot\|_{r,\infty})$

$$C^r([0, 1]) = \{f \in C^0([0, 1]) \mid f \text{ } r\text{-mal stetig differenzierbar}\} \text{ und } \forall f \in C^r([0, 1]) : \|f\|_{r,\infty} = \sum_{j=0}^r \|f^{(j)}\|_\infty$$

ist ein Banachraum. Man kann auch weitere Normen auf  $C^r([0, 1])$  definieren, bspw. für  $r = 1$  und  $f \in C^1([0, 1])$

$$\|\cdot\|_{1,p} = \|f\|_p + \|f'\|_p \text{ oder } \hat{\|f\|}_{1,p} = \left( \int_0^1 |f'(x)|^p + |f(x)|^p dx \right)^{1/p} .$$

*Bemerkung 3.4.1.* Es gibt eine Inklusion  $C^0([0, 1]) \hookrightarrow L^p([0, 1])$ , da in jeder Äquivalenzklasse nur eine stetige Funktion ist.

### 3.5 Äquivalenz von Normen

**Definition 3.5.1.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\|\cdot\|, \hat{\|\cdot\|} : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  Normen. Diese heißen äquivalent, falls

$$\exists c_1, c_2 : 0 < c_1 < c_2 \forall x \in V : c_1 \|x\| \leq \hat{\|x\|} \leq c_2 \|x\| .$$

**Beispiel 3.5.1.** Betrachte  $\mathbb{R}^n$  mit den Normen ( $x \in \mathbb{R}^n$ ):  $\|x\|_\infty = \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}$  und  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ , dann gilt  $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$$

d. h.  $\|\cdot\|_\infty$  und  $\|\cdot\|_1$  sind äquivalent.

**Beispiel 3.5.2.** Betrachte  $C^1([0, 1])$  mit den Normen  $\|\cdot\|_\infty$  und  $\|\cdot\|_{1,\infty}$ , wie in Bsp. 3.4.3 definiert. Diese sind nicht äquivalent. Definiere  $f_n(x) = x^n \in C^1([0, 1])$ , somit  $f'_n(x) = n \cdot x^{n-1}$ . Folglich

$$\|f_n\|_\infty = 1 \text{ und } \|f_n\|_{1,\infty} = \|f_n\|_\infty + \|f'_n\|_\infty = 1 + n$$

und es existieren offensichtlich keine Konstanten  $0 < c_1 < c_2$  mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : c_1 \leq n + 1 \leq c_2 .$$

**Satz 3.5.1.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit  $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ . Dann sind alle Normen auf  $V$  äquivalent und jeder solche normierte Vektorraum ist ein Banachraum.

## Chapter 4

# Hilberträume

### 4.1 Definitionen

**Definition 4.1.1.** Sei  $H$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  heißt eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  *Skalarprodukt* (oder *inneres Produkt*), falls

1.  $\forall x \in H : \langle x, \cdot \rangle, \langle \cdot, x \rangle : H \rightarrow \mathbb{R}$  sind linear
2.  $\forall x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0$
3.  $\forall x \in H : \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
4.  $\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  muss gelten:

1.  $\forall x \in H : \langle x, \cdot \rangle : H \rightarrow \mathbb{C}$  ist linear,  $\langle \cdot, x \rangle : H \rightarrow \mathbb{C}$  ist antilinear, d. h.  $\forall y, z \in H, \lambda \in \mathbb{C} :$   
 $\langle \lambda x + y, z \rangle = \bar{\lambda} \langle y, z \rangle + \langle x, z \rangle$
2.  $\forall x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0$
3.  $\forall x \in H : \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
4.  $\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

*Bemerkung 4.1.1.* Für das Skalarprodukt über  $\mathbb{C}$  kann nur Sesquilinearität und keine Bilinearität gefordert werden, um die positive Definitheit beizubehalten. Angenommen das Skalarprodukt über  $\mathbb{C}$  wäre bilinear und positiv definit, dann

$$\forall x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0 \implies 0 \leq \langle ix, ix \rangle = -\langle x, x \rangle \leq 0 \implies \langle x, x \rangle = 0 .$$

**Satz 4.1.1** (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). Sei  $H$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , dann gilt

$$\forall x, y \in H : |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle .$$

*Bemerkung 4.1.2.* Mit Satz 4.1.2 schreibt man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auch als

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| .$$

**Satz 4.1.2.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Raum mit Skalarprodukt. Dann ist  $\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  für  $x \in H$  eine Norm auf  $H$ .

*Beweis.* Die 1. und 3. Eigenschaft sind trivial, zeige hier nur die Dreiecksungleichung. Es gilt für  $x, y \in H$

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 .$$

Mit  $\Re(\langle x, y \rangle) \leq |\langle x, y \rangle|$  und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir in der Tat:

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

□

**Definition 4.1.2.** Ein Raum  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit Skalarprodukt heißt *Hilbertraum*, wenn er bzgl. der vom Skalarprodukt induzierten Norm  $\|\cdot\|$  vollständig ist.

**Lemma 4.1.1** (Polarisationsformel). Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Raum mit Skalarprodukt und induzierter Norm  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  für  $x \in H$ . Dann gilt für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

und für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2) .$$

**Satz 4.1.3** (Parallelogrammgleichung). Ein normierter Raum  $(V, \|\cdot\|)$  (mit  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum) ist ein Raum mit Skalarprodukt  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die Norm induziert, genau dann wenn

$$\forall x, y \in V : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) .$$

*Beweis.* ( $\implies$ ) Es gilt:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ \implies \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 &= 2\langle x, y \rangle + 2\langle y, x \rangle \end{aligned}$$

( $\impliedby$ ) Man setzt für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  das Skalarprodukt gemäß der Polarisationsformeln nach Lemma 4.1.1 an und zeigt unter Ausnutzung der Parallelogrammgleichung, dass dies die Eigenschaften eines Skalarprodukts erfüllt. (explizit im *Werner* S. 222). □

## 4.2 Beispiele

**Beispiel 4.2.1.** Betrachte  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$ . Diese sind mit den Standardskalarprodukten Hilberträume, wobei für  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $u, v \in \mathbb{C}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{und} \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i$$

**Beispiel 4.2.2.**  $\ell_{\mathbb{K}}^2$  ist ein Hilbertraum, wobei die Norm von folgendem Skalarprodukt induziert wird

$$\langle (a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i .$$

**Beispiel 4.2.3.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum. Dann ist  $L^2(\mu, \mathbb{K})$  ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt  $(f, g \in L^2(\mu, \mathbb{K}))$

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f g \, d\mu \quad \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \langle f, g \rangle = \int_{\Omega} \overline{f} g \, d\mu \quad \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C} .$$

**Beispiel 4.2.4.** Betrachte  $C^0([0, 1])$ , dann ist für  $f, g \in C^0([0, 1])$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)} g(t) \, dt$$

ein Skalarprodukt aber  $(C^0([0, 1]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  kein Hilbertraum.

**Beispiel 4.2.5.** (Bergmanraum) Sei  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ . Dann ist  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum, wobei mit  $f, g \in H$ ,  $x := \Re(z)$ ,  $y := \Im(z)$  gilt

$$H = \left\{ f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph, } \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dx dy < \infty \right\} \quad \text{und} \quad \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} \overline{f(z)} g(z) \, dx dy .$$

*Bemerkung 4.2.1.* Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen heißt holomorph, falls  $f$  komplex differenzierbar an allen Punkten  $z_0 \in U$ , d. h. falls folgender Grenzwert existiert

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} .$$

### 4.3 Orthogonalbasen

**Definition 4.3.1.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Raum mit Skalarprodukt. Wir bezeichnen  $x, y \in H$  orthogonal, bzw.  $x \perp y$ , falls  $\langle x, y \rangle = 0$ . Zwei Teilmengen  $X, Y \subseteq H$  heißen orthogonal, bzw.  $X \perp Y$ , falls  $\forall x \in X, y \in Y : \langle x, y \rangle = 0$ .

**Lemma 4.3.1** (Satz des Pythagoras). Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Raum mit Skalarprodukt. Dann ergibt sich direkt aus der Definition für  $x, y \in H$

$$x \perp y \implies \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2 .$$

**Definition 4.3.2.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum. Eine Familie  $(e_s)_{s \in S}$ ,  $\forall s \in S : e_s \in H$  heißt *Orthonormalsystem*, falls

$$\forall s, t \in S : \langle e_s, e_t \rangle = \delta_{st} .$$

Eine Familie  $(e_s)_{s \in S}$ ,  $\forall s \in S : e_s \in H$  heißt *vollständig*, falls

$$\forall y \in H : y \perp \{e_s \mid s \in S\} \implies y = 0 .$$

Ein vollständiges Orthonormalsystem heißt *Orthonormalbasis*.

**Beispiel 4.3.1.** Betrachte den Hilbertraum  $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}) := \{(a_t)_{t \in \mathbb{R}} \mid \forall t \in \mathbb{R} : a_t \in \mathbb{C}, \sum_{t \in \mathbb{R}} |a_t|^2 < \infty\}$ . Dabei ist das Skalarprodukt definiert als

$$\forall (a_t)_{t \in \mathbb{R}}, (b_t)_{t \in \mathbb{R}} \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}) : \langle (a_t)_{t \in \mathbb{R}}, (b_t)_{t \in \mathbb{R}} \rangle = \sum_{t \in \mathbb{R}} \overline{a_t} b_t .$$

Definiere  $e_t = (\delta_{s,t})_{s \in \mathbb{R}} \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$ . Dann ist  $(e_t)_{t \in \mathbb{R}}$  eine Orthonormalbasis, da für  $a := (a_t)_{t \in \mathbb{R}} \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$

$$a \perp \{e_t \mid t \in \mathbb{R}\} \iff \forall t \in \mathbb{R} : \langle a, e_t \rangle = \overline{a_t} = 0 \iff a = 0 .$$



**Beispiel 4.3.2.** Betrachte den Hilbertraum  $H = L^2([0, 1], l, \mathbb{C})$ . Dann erhalten wir die (vollständige) Fourierbasis

$$(f_k(x))_{k \in \mathbb{Z}} \text{ mit } f_k(x) := \exp(2\pi i k x) .$$

Die Orthogonalität kann man wie folgt zeigen (mit  $k, l \in \mathbb{Z}$ )

$$\int_0^1 \exp(-2\pi i k x) \exp(2\pi i l x) dx = \int_0^1 \exp(2\pi i (l - k)x) dx = \delta_{kl}$$

**Satz 4.3.1.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum,  $(e_s)_{s \in S}, \forall s \in S : e_s \in H$  ein Orthonormalsystem. Dann existiert für jedes  $\lambda := (\lambda_s)_{s \in S} \in \ell_{\mathbb{C}}^2(S) := \left\{ (a_s)_{s \in S} \mid \forall s \in S : a_s \in \mathbb{C}, \sum_{s \in S} |a_s|^2 < \infty \right\}$  ein abzählbares  $S_0 \subseteq S$  mit  $|\lambda_s| > 0 \implies s \in S_0$ . Sei  $S_0 := \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  und  $x_n = \sum_{m=0}^n \lambda_{s_m} e_{s_m}$ . Dann existiert ein  $x \in H$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , wir schreiben  $x = \sum_{s \in S} \lambda_s e_s$ .

*Beweis.* Wir zeigen hier nur den 2. Teil des Satzes. Da  $H$  vollständig, g. z. z., dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist. Dabei ist bekannt (unter Ausnutzung von Teil 1 des Satzes)

$$\|\lambda\|_{\ell^2(S)}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} |\lambda_{s_m}|^2 < \infty .$$

Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $N \in \mathbb{N}$  hinreichend groß, sodass  $\sum_{m=N+1}^{\infty} |\lambda_{s_m}|^2 < \varepsilon^2$ . Seien nun  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ,  $n_1, n_2 \geq N$ ,  $n_1 < n_2$ . Dann

$$\|x_{n_2} - x_{n_1}\|^2 = \left\| \sum_{m=n_1+1}^{n_2} \lambda_{s_m} \cdot e_{s_m} \right\|^2 .$$

Dabei gilt für  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq l$

$$\left\| \sum_{i=l}^k \lambda_{s_i} e_{s_i} \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=l}^k \lambda_{s_i} e_{s_i}, \sum_{j=l}^k \lambda_{s_j} e_{s_j} \right\rangle = \sum_{i,j=l}^k \overline{\lambda_i} \lambda_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i,j=l}^k \overline{\lambda_i} \lambda_j \delta_{ij} = \sum_{i=l}^k |\lambda_i|^2 .$$

Somit ergibt sich

$$\|x_{n_2} - x_{n_1}\|^2 = \sum_{m=n_1+1}^{n_2} |\lambda_{s_m}|^2 < \varepsilon^2 .$$

Folglich ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in H$  existiert.  $\square$

*Bemerkung 4.3.1* (Motivation). Falls  $(e_s)_{s \in S}$  eine Orthonormalbasis von  $H$ . Dann ist die Abbildung  $F : H \rightarrow \ell_{\mathbb{C}}^2(S)$ ,  $x \mapsto (\langle x, e_s \rangle)_{s \in S}$  ein unitärer Isomorphismus. In diesem Fall gibt es eine Korrespondenz zwischen  $\lambda \in \ell_{\mathbb{C}}^2(S)$  und den Koeffizienten von  $x$  bzgl. der Orthonormalbasis  $(e_s)_{s \in S}$ .

**Lemma 4.3.2** (Besselsche Ungleichung). Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum,  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem und  $x \in H$ . Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

*Bemerkung 4.3.2.* Mit Satz 4.3.1 folgt die allgemeine Besselsche Ungleichung für Orthonormalsysteme. Sei  $(e_s)_{s \in S}, \forall s \in S : e_s \in H$  ein Orthonormalsystem und  $x \in H$ , dann

$$\sum_{s \in S} |\langle x, e_s \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

**Satz 4.3.2.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum,  $(e_s)_{s \in S}$  ein Orthonormalsystem. Dann ist  $(e_s)_{s \in S}$  vollständig, genau dann wenn für jedes  $x \in H$  ein  $\lambda := (\lambda_s)_{s \in S} \in \ell_{\mathbb{C}}^2(S)$  existiert mit  $x = \sum_{s \in S} \lambda_s e_s$ . In diesem Fall ist  $\lambda$  eindeutig bestimmt.

*Beweis. (Eindeutigkeit)* Seien  $S_0 \subseteq S$  sowie  $x_n \in H$  wie in Satz 4.3.1. Sei  $\hat{s} \in S$ , dann

$$\langle e_{\hat{s}}, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle e_{\hat{s}}, x_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle e_{\hat{s}}, \sum_{m=0}^n \lambda_{s_m} e_{s_m} \right\rangle = \begin{cases} 0 & \hat{s} \notin S_0 \\ \lambda_{\hat{s}} & \hat{s} \in S_0 \end{cases}$$

Somit folgt die Eindeutigkeit aus der Eindeutigkeit der Darstellung der  $x_n$ .

*(Existenz)* Angenommen  $(e_s)_{s \in S}$  ist vollständig und  $x$  ist nicht durch die Orthonormalbasis darstellbar. Bezeichne die Menge der darstellbaren Elemente in  $H$  mit

$$H_0 = \left\{ \sum_{s \in S} \lambda_s e_s \mid (\lambda_s)_{s \in S} \in \ell_{\mathbb{C}}^2(S) \right\}.$$

Für eine Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in H_0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \implies y \in H_0$ . Setze  $\mu_s = \langle e_s, x \rangle$ . Sei  $S_0 \subseteq S$  höchstens abzählbar, dann gilt mit Lemma 4.3.2

$$\sum_{s \in S_0} |\mu_s|^2 = \sum_{s \in S_0} |\langle e_s, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty.$$

Für  $t \in S_0$  gilt weiterhin

$$\left\langle e_t, x - \sum_{s \in S_0} \mu_s e_s \right\rangle = \langle e_t, x \rangle - \sum_{s \in S_0} \langle e_t, \langle e_s, x \rangle e_s \rangle = 0.$$

Dieser Beweis muss noch beendet werden.

□

**Satz 4.3.3.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum. Dann existiert eine abzählbare Orthonormalbasis, genau dann wenn  $H$  separabel ist.

*Beweisidee.* Man wendet das Gram-Schmidt-Verfahren aus einer dichten Teilmenge an.

□

## 4.4 Projektionen

**Satz 4.4.1.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum,  $K \subseteq H$  nicht leer, konvex und abgeschlossen. Dann existiert für jedes  $x \in H$  genau ein  $y \in K$  mit

$$\|y - x\| = \inf \{ \|z - x\| \mid z \in K \}.$$

*Beweis.* Nehmen o. B. d. A. an  $x \notin K$  (sonst wähle  $y = x$ ) und  $x = 0$  (sonst verschiebe um  $-x$ ).

*(Existenz)* Setze  $d := \inf \{ \|z - x\| \mid z \in K \}$ . Dann existiert eine Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in K$  mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|y_n\| < d + \frac{1}{n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = d.$$

Wir zeigen nun, dass  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist. Mit der Parallelogrammgleichung gilt für  $n, m \in \mathbb{N}$ :

$$\left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{y_n - y_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2) .$$

Da  $K$  konvex, gilt  $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in K$  und folglich  $\left\| \frac{1}{2}(y_n + y_m) \right\| \geq d^2$ . Da

$$\frac{1}{2}(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2) \leq \frac{1}{2} \left( \left( d + \frac{1}{n} \right)^2 + \left( d + \frac{1}{m} \right)^2 \right) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} d^2$$

folgt also  $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$ , d. h.  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist in der Tat eine Cauchyfolge und da  $H$  ein Hilbertraum, existiert  $y := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in H$ . Da  $K$  abgeschlossen ist, gilt  $y \in K$ . Weiterhin gilt  $\|y\| = d$ , da

$$\|y\| \geq d \text{ da } y \in K \text{ und } \|y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d + \frac{1}{n} = d .$$

(Eindeutigkeit) Angenommen für  $y, \tilde{y} \in K$  gilt

$$\|y\| = \|\tilde{y}\| = \inf \{ \|z\| \mid z \in K \} = d .$$

Sei  $\lambda \in [0, 1]$  wegen der Konvexität von  $K$  gilt

$$\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y} \in K \implies \|\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y}\| \geq d .$$

Weiterhin gilt

$$\|\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y}\| \leq \lambda \|y\| + (1 - \lambda) \|\tilde{y}\| = d$$

und folglich  $\|\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y}\| = d$ . Somit

$$\begin{aligned} d^2 &= \|\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y}\|^2 = \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda(1 - \lambda)\Re(\langle y, \tilde{y} \rangle) + (1 - \lambda)^2 \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle \\ &= \lambda^2(\langle y, y \rangle - 2\Re(\langle y, \tilde{y} \rangle) + \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle) + \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle + 2\lambda(\Re(\langle y, \tilde{y} \rangle) - \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle) \\ &= \lambda^2 \|y - \tilde{y}\|^2 + \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle - \lambda \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle + \lambda \langle y, y \rangle - \lambda(\langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle - 2\Re(\langle y, \tilde{y} \rangle) + \langle y, y \rangle) \\ &= (\lambda^2 - \lambda) \|y - \tilde{y}\|^2 + d^2 \end{aligned}$$

Dies muss insbesondere auch für  $\lambda \in (0, 1) \implies \lambda^2 \neq \lambda$  gelten und somit folgt in der Tat.  $\|y - \tilde{y}\| = 0 \iff y = \tilde{y}$ .  $\square$

**Beispiel 4.4.1.** Betrachte  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$  sowie  $x = (0, 0)$  und  $K = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \geq 1\}$ . Dies ist kein Hilbertraum und die Projektion ist hier auch nicht eindeutig, da

$$P = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 = 1, y_2 \in [-1, 1]\} \implies \forall p \in P : \|x - p\|_\infty = 1 = \inf \{ \|x - z\|_\infty \mid z \in K \} .$$

**Beispiel 4.4.2.** Betrachte  $(\mathbb{R}^{2n}, \|\cdot\|_1)$  sowie

$$K = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} =: \lambda \cdot \hat{y} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} .$$

Sei  $m := \text{med} \{x_1, \dots, x_{2n}\}$ , d. h.

$$m = \underset{a}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{2n} |x_i - a| = \underset{a}{\operatorname{argmin}} \|x - a\hat{y}\|_1 .$$

Dann gilt  $\|x - m\hat{y}\|_1 = \inf \{ \|x - z\|_1 \mid z \in K \}$ .

**Definition 4.4.1.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Raum mit Skalarprodukt und  $X \subseteq H$ . Dann heißt

$$X^\perp := \{y \in H \mid \forall x \in X : x \perp y\}$$

orthogonales Komplement von  $X$ .

**Satz 4.4.2.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum,  $U \subseteq H$  ein abgeschlossener Unterraum. Dann gibt es für alle  $x \in H$  eindeutig bestimmte  $y_1 \in U, y_2 \in U^\perp$  mit  $x = y_1 + y_2$ .

*Beweis. (Existenz)* Da  $U$  ein Unterraum ist, ist  $U$  insbesondere konvex und nichtleer. Somit wählen wir  $y_1 \in U$  eindeutig (nach Satz 4.4.1) mit

$$\|y_1 - x\| = \inf \{\|x - u\| \mid u \in U\} .$$

Wir zeigen nun  $x - y_1 \in U^\perp$ . Seien  $u \in U, \lambda \in \mathbb{K}$ , dann

$$\|x - y_1\|^2 \leq \|x - y_1 - \lambda u\|^2 = \|x - y_1\|^2 - 2\lambda \Re(\langle x - y_1, u \rangle) + |\lambda|^2 \|u\|^2$$

Da  $\lambda, u$  beliebig, muss also in der Tat  $\langle x - y_1, u \rangle = 0$  gelten.

*(Eindeutigkeit)* Angenommen  $x = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$  mit  $\hat{y}_1 \in U, \hat{y}_2 \in U^\perp$ . Sei  $u \in U$ , dann gilt wegen der Orthogonalität

$$\|x - (\hat{y}_1 + u)\|^2 = \|x - \hat{y}_1\|^2 + \|u\|^2 \geq \|x - \hat{y}_1\|^2 .$$

Dies ist nur erfüllt, wenn wir  $\hat{y}_1 = y_1$  nach Satz 4.4.1 wählen, woraus die Eindeutigkeit folgt.  $\square$

**Beispiel 4.4.3.** Betrachte  $L^2([0, 1])$ , dann ist  $U = C^0(S^1) = \{u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} \mid u(0) = u(1)\}$  dicht.

## Chapter 5

# Lineare Operatoren

### 5.1 Definitionen

**Definition 5.1.1.** Seien  $(V_1, \|\cdot\|)$  und  $(V_2, \|\cdot\|')$  normierte Räume, dann heißt eine lineare Abbildung (Operator)  $A : V_1 \rightarrow V_2$  beschränkt, wenn gilt:

$$\exists c \geq 0 \forall v \in V_1 : \|Av\|' \leq c \|v\|$$

*Bemerkung 5.1.1.*  $\mathcal{B}(V_1, V_2) = \{A : V_1 \rightarrow V_2 \mid A \text{ linear beschränkt}\}$

**Satz 5.1.1.** In dieser Situation sind äquivalent:

1.  $A \in \mathcal{B}(V_1, V_2)$
2.  $A$  ist stetig
3.  $A$  ist gleichmäßig stetig
4.  $A$  ist Lipschitz-stetig
5.  $A$  ist stetig in 0

*Beweis.* Siehe Analysis 2.

□

**Satz 5.1.2.** Jedes lineare Funktional  $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  ist beschränkt.

**Beispiel 5.1.1** (Volterra-Operator). Betrachte  $C^0([0, 1])$ ,  $\|\cdot\|_\infty$ , wobei

$$I : C^0([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1]), \quad (I(f))(t) = \int_0^t f(x) dx.$$

Dann gilt

$$|(I(f))(t)| = \left| \int_0^t f(x) dx \right| \leq \|f\|_\infty \cdot t \leq \|f\|_\infty$$

und mit

$$\|If\|_\infty = \sup \{|(If)(t)| : t \in [0, 1]\} \leq \|f\|_\infty$$

ist die Operatornorm  $\|I\| \leq 1$ . Wähle nun  $f = 1_{[0,1]}$ , dann ist  $(If)(t) = t$  und damit  $\|I\| = 1$ .

**Beispiel 5.1.2.** Sei  $V_1 = C^1([0, 1])$  mit  $\|\cdot\|_\infty$  und  $V_2 = C^0([0, 1])$  mit  $\|\cdot\|_\infty$  sowie eine Abbildung

$$D : V_1 \rightarrow V_2, f(t) \mapsto f'(t)$$

Definiere  $f_n(t) = t^n$ , dann ist  $\|f_n\|_\infty = 1$  und da  $f'_n(t) = n \cdot t^{n-1}$  gilt  $\|Df_n\|_\infty = n$ , d. h.  $D \notin \mathcal{B}(V_1, V_2)$ .

**Satz 5.1.3.** Seien  $(V, \|\cdot\|_V)$ ,  $(W, \|\cdot\|_W)$  normierte Räume mit  $A \in \mathcal{B}(V, W)$  mit

$$\|A\|_{V,W} = \inf \{c \in \mathbb{R} \mid \forall v \in V : \|Av\|_W \leq c \|v\|_V\}$$

Dann gilt:

1.  $\|A\| = \sup \{\|Av\|_W : \|v\|_V = 1\} = \sup \{\|Av\|_W : \|v\|_V \leq 1\} = \sup \left\{ \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} : v \in V, v \neq 0 \right\}$
2.  $B \in \mathcal{B}(V, W)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K} : \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  sowie  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
3. Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  normierter Raum,  $B \in \mathcal{B}(W, X)$ , dann gilt

$$\|BA\|_{V,X} \leq \|A\|_{V,W} \cdot \|B\|_{W,X}$$

*Beweis.* 1. Sei  $M := \sup \left\{ \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} : v \in V, v \neq 0 \right\}$ . Für  $v = 0$ , gilt  $\|Av\| = 0$ , für  $v \neq 0$  gilt:

$$\frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} \leq M \implies \|Av\|_W \leq M \|v\|_V \implies M \geq \|A\|$$

Andererseits gilt für alle  $v \neq 0$ :

$$\frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} \leq \|A\| \implies M \leq \|A\|$$

2. Wir nutzen die Supremums- und Dreiecksungleichung aus:

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup \{\|(A + B)v\|_W : \|v\| = 1\} \leq \sup \{\|Av\|_W + \|Bv\|_W : \|v\| = 1\} \\ &\leq \sup \{\|Av\|_W : \|v\| = 1\} + \sup \{\|Bv\|_W : \|v\| = 1\} = \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

3. Gilt, da  $\|BAv\| \leq \|B\| \cdot \|Av\|_W \leq \|B\| \|A\| \|v\|_V$

□

**Beispiel 5.1.3** (Multiplikationsoperatoren). Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum,  $\phi \in L^2(\mu)$  und

$$M_\phi : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu), f \mapsto \phi \cdot f \text{ mit } M_\phi \circ M_\psi = M_\psi \circ M_\phi = M_{\phi \cdot \psi}$$

Dann gilt:

$$\|M_\phi f\|^2 = \int |\phi(x)|^2 |f(x)|^2 dx \leq \int \|\phi\|_\infty^2 |f(x)|^2 dx = \|\phi\|_\infty^2 \|f\|^2$$

Dabei haben wir ausgenutzt  $|\phi(x)|^2 \leq \|\phi\|_\infty^2$   $\mu$ -fast überall. Wir haben also  $M_\phi \in \mathcal{B}(L^2(\mu), L^2(\mu))$  und  $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$ . Gleichheit gilt tatsächlich für  $\mu(\Omega) < \infty$ . Sei  $\alpha < \|\phi\|_\infty$  und definiere

$$E = \{x : |\phi(x)| > \alpha\}$$

dann ist  $\mu(E) > 0$ . Sei nun  $f = 1_E$ , dann

$$\|M_\phi f\|^2 = \int_E \|\phi(x)\|^2 \geq \alpha \mu(E) = \alpha \|1_E\|^2$$

*Bemerkung 5.1.2.* Nach Konvention gilt  $\mathcal{B}(V, V) = \mathcal{B}(V)$ .

**Satz 5.1.4.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbert Raum,  $U \subseteq H$  abgeschlossener Unterraum, dann gibt es  $P, Q \in \mathcal{B}(H)$  so, dass:

1.  $\forall v \in H : Pv \in U$  und  $Qv \in U^\perp$
2.  $\forall v \in H : Pv + Qv = v$

Außerdem gilt:

$$\|P\| = \begin{cases} 1 & U \neq \{0\} \\ 0 & U = \{0\} \end{cases}$$

*Beweis.* Da  $U$  abgeschlossener Unterraum von  $H$ , gibt es für jedes  $v \in H$  eine eindeutige Zerlegung von  $v \in U, u^\perp \in U^\perp$  mit  $v = u + u^\perp$ . Wir verwenden die Definitionen  $Pv = u, Qv = u^\perp$  mit  $v, w \in H$  und  $v = Pv + Qv, w = Pw + Qw$ . Betrachte:

$$v + w = \underbrace{(Pv + Pw)}_{\in U} + \underbrace{(Qv + Qw)}_{\in U^\perp}$$

Folglich

$$P(v + w) = Pv + Pw \text{ und } Q(v + w) = Qv + Qw.$$

( $\lambda v$  geht analog.) Wir setzen für  $v \in H$  nun

$$\|v\|^2 = \|Pv + Qv\|^2 = \|Pv\|^2 + \|Qv\|^2 \text{ da } \langle Pv, Qv \rangle = 0$$

Daraus folgt  $\|Pv\|^2 \leq \|v\|^2$  und  $\|P\|, \|Q\| \leq 1$ . Sei  $v \in U, v \neq 0$ , dann  $Pv = v$  und damit  $\|Pv\| = \|v\|$ , also  $\|P\| \geq 1$ .  $\square$

**Satz 5.1.5.** Sei  $V$  ein normierter Raum,  $W$  ein Banachraum, dann ist  $\mathcal{B}(V, W)$  ein Banachraum mit der Operatornorm.

*Beweis.* Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{B}(V, W)$ , dann  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|A_n - A_m\| = 0$ . Sei nun  $v \in V$ , dann

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|A_n v - A_m v\| \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|A_n - A_m\| \|v\|$$

und damit ist  $(A_n v)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $W$ . Somit ist  $Av = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n v$ . Definiere  $A : V \rightarrow W$  nun als Abbildung aus diesem Grenzwert.

Hier gab es in der Vorlesung einen Nachtrag, allerdings sollte es so auch gehen.

Damit gilt schon

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \{\|Av - A_n v\|\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Seien nun  $v, w \in V$ , dann sehen wir die Linearität wie folgt:

$$A(v+w) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(v+w) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n v + A_n w = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n v + \lim_{n \rightarrow \infty} A_n w = Av + Aw \text{ (für } A(\lambda v) \text{ genauso)}$$

Zur Beschränktheit:

$$|\|A_n\| - \|A_m\|| \leq \|A_n - A_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| =: c$$

Betrachte nun:

$$\|Av\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n v\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \|v\| = c \|v\|$$

und damit  $A \in \mathcal{B}(V, W)$ .

□

*Bemerkung 5.1.3.* Es gibt soetwas wie eine Rückrichtung: Falls  $\mathcal{B}(V, W)$  ein Banachraum ist, wobei  $V$  nicht der triviale Vektorraum ist, so ist auch  $W$  ein Banachraum. (Wäre  $V$  der Nullvektorraum, so gäbe es mit der Nullabbildung nur eine lineare Abbildung, damit wäre  $\mathcal{B}(V, W)$  immer vollständig.)

## 5.2 Das Dual

**Definition 5.2.1.** Sei  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein Banachraum. Dann wird  $V' = \mathcal{B}(V, \mathbb{K})$  als Dualraum von  $V$  bezeichnet.  $\phi \in V'$  heißt auch linear beschränktes Funktional.

**Beispiel 5.2.1.** Wir untersuchen den Dualraum von  $V = L^p(\mu)$ . Mittels der Hölderungleichung erhalten wir mit  $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)$ :

$$\left| \int f g d\mu \right| \leq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Sei nun  $\varphi_g := \int \cdot g d\mu \in V'$ . Da

$$|\varphi_g(f)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

ist  $\varphi_g$  beschränkt und  $\{\varphi_g : g \in L^q\} = (L^p(\mu))'$  und damit  $L^p(\mu)'' \simeq L^p(\mu)$ .

**Satz 5.2.1** (Darstellungssatz von Riesz). Jedes beschränkte lineare Funktional  $\varphi$  auf dem Hilbertraum  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  hat die Form  $\varphi(x) = \langle h_0, x \rangle$  für ein eindeutiges  $h_0 \in H$  und  $\|\varphi\|_{H'} = \|h_0\|$  und  $h_0 \mapsto \varphi$  anti-linear.

*Beweis. Existenz* Sei o.B.d.A  $\varphi \neq 0$ , d.h.  $\ker \varphi = \{x \in H | \varphi(x) = 0\}$  ist ein echter abgeschlossener Teilraum. Dann muss aber auch  $\ker \varphi^\perp \neq \{0\}$ . Sei  $z \in \ker \varphi^\perp$  mit  $\|z\| > 0$  und o.B.d.A  $\varphi(z) = 1$ . Sei  $h \in H$  beliebig, dann sehen wir

$$\varphi(\underbrace{\varphi(h)z - h}_{\in \ker \varphi}) = \varphi(h)\varphi(z) - \varphi(h) = 0.$$

Damit ist  $z \perp \varphi(h)z - h$  und äquivalent dazu

$$0 = \langle z, \varphi(h)z - h \rangle = \varphi(h) \|z\|^2 - \langle z, h \rangle \text{ also } \varphi(h) = \left\langle \frac{z}{\|z\|^2}, h \right\rangle.$$

### Eindeutigkeit

Nehmen wir an, dass  $\langle h_1, h \rangle = \langle h_2, h \rangle$  mit  $h = h_1 - h_2$  und sei

$$0 = \langle h_1 - h_2, h \rangle = \|h_1 - h_2\|^2 \implies h_1 = h_2.$$

Über die CBS-Ungleichung gilt außerdem:

$$|\langle h_0, h \rangle| \leq \|h_0\| \|h\| \implies \|\varphi\|_{H'} \leq \|h_0\|.$$

Da aber

$$|\varphi(h_0)| = \langle h_0, h_0 \rangle = \|h_0\|^2 = \|h_0\| \|h_0\| \implies \|\varphi\| = \|h_0\|.$$

□



**Beispiel 5.2.2.** Sei  $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)'$  mit  $\mu(\omega) < \infty$  und  $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$  und jeweils  $\mu(\Omega_n) < \infty$ . Sei  $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$  und  $g \geq 0$ , dann  $\varphi^\pm(g) \geq 0$ .

Sei o.B.d.A  $\varphi \geq 0$ . Dann ist  $v_\varphi : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ ,  $v_\varphi(E) = \varphi(1_E)$  ein Maß. Wenn  $\varphi(E) = 0$ , dann  $v_\varphi(E) = 0$ . Mit dem Satz von Radon-Nikodym (Satz 2.2.5)) folgt, dass es ein  $h \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$  mit

$$\varphi(1_E) = v_\varphi(E) = \int 1_E h d\mu$$

Damit erhalten wir  $\varphi(f) = \int f h d\mu$  und die Hölderungleichung.

**Satz 5.2.2.** Die Abbildung  $\psi : H \rightarrow H', h \mapsto \langle h, \cdot \rangle$  ist eine (anti-lineare) isometrische Projektion.

Was genau ist hier mit Projektion gemeint?

*Beweis.* Wurde in der Vorlesung übersprungen. □

*Bemerkung 5.2.1.* In der Physik schreibt man auch:

$$\begin{aligned} \langle u | &:= \langle u, \cdot \rangle \text{ bra} \\ |h \rangle &:= h, \text{ ket} \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung von Notation gilt dann  $\langle u | h \rangle := \langle u, h \rangle$

**Definition 5.2.2.** Seien  $H, K$  Hilberträume, dann heißt eine Sesquilinearform  $u : H \times K \rightarrow \mathbb{K}$  beschränkt genau dann wenn

$$\exists M > 0, \forall h \in H, k \in K : |u(h, k)| \leq M \|h\|_H \|k\|_K$$

**Satz 5.2.3.** Ein Operator  $u$  wie in 5.2.2 ist genau dann beschränkt, wenn

$$\exists A \in \mathcal{B}(K, H) : \forall h \in H, \forall k \in K : u(h, k) = \langle h, Ak \rangle$$

*Beweis.* ( $\implies$ )

Sei  $k$  fixiert,  $u(\cdot, k) \in H'$ , da:

$$|u(h, k)| \leq M \|h\|_H \|k\|_K \leq (M \|k\|_K) \|h\|_H.$$

Mit 5.2.1 folgt:

$$\exists! A(k) \in H : \overline{u(\cdot, k)} = \langle A(k), \cdot \rangle \text{ bzw. } \forall h \in H : u(h, k) = \langle h, A(k) \rangle$$

Sei nun  $k_1, k_2 \in K$ , dann haben wir:

$$\langle h, A(k_1 + k_2) \rangle = u(h, k_1 + k_2) = u(h, k_1) + u(h, k_2) = \langle h, A(k_1) + A(k_2) \rangle$$

Sei nun  $\lambda \in \mathbb{K}, k \in K$ , so folgt:

$$\langle h, A(\lambda k) \rangle = u(h, \lambda k) = \lambda u(h, k) = \lambda \langle h, A(k) \rangle = \langle h, \lambda A(k) \rangle$$

Damit ist  $A$  linear.

Wir wissen für  $\|h\| \leq 1$  :

$$|\langle h, Ak \rangle| = |u(h, k)| \leq M \|h\| \|k\| \leq M \|k\|$$

Damit folgt  $\|Ak\| \leq M \|k\|$  also ist  $A$  beschränkt. Folglich  $A \in \mathcal{B}(H, K)$ .

( $\Leftarrow$ )

Sei  $A \in \mathcal{B}(K, H)$ , dann haben wir folgende Abschätzung mittels CBS-Ungleichung:

$$|\langle h, Ak \rangle| \leq \|h\| \|Ak\| \leq \|A\| \|h\| \|k\|$$

□

**Satz 5.2.4.** Für alle  $A \in \mathcal{B}(K, H)$  gibt es  $A^* \in \mathcal{B}(H, K)$  mit der Eigenschaft

$$\forall h \in H, k \in K : \langle h, Ak \rangle = \langle A^*h, k \rangle.$$

Dieser adjungierte Operator hat folgende Eigenschaften:

1.  $A \rightarrow A^*$  ist antilinear
2.  $A^{**} = A$
3.  $(AB)^* = B^*A^*$
4.  $\|A^*\| = \|A\|$  und  $\|A^*A\| = \|A\|^2$  ( $C^*$  – Axiom)

*Beweis. Existenz:*

Mittel der CBS-Ungleichung erhalten wir:

$$|\langle h, Ak \rangle| \leq \|h\| \|Ak\| \leq \|A\| \|h\| \|k\|.$$

Aber es gilt  $|\langle h, Ak \rangle| = |\langle Ak, h \rangle|$  Damit ist  $u(k, h) := \langle Ak, h \rangle$  sesquilinear auf  $K \times H$ . Damit gibt es aber ein eindeutiges  $A^*$  mit

$$\overline{\langle Ak, h \rangle} = \overline{u(h, k)} = \overline{\langle k, A^*h \rangle}$$

zu 1: Es gilt  $\langle (\lambda A)^*h, k \rangle = \langle h, \lambda Ak \rangle = \lambda \langle h, Ak \rangle = \langle \overline{\lambda} A^*h, k \rangle$

zu 2:  $\langle A^{**}k, h \rangle = \langle k, A^*h \rangle = \overline{\langle A^*h, k \rangle} = \overline{\langle h, Ak \rangle} = \langle Ak, h \rangle$  mit  $h = A^{**} - Ak$ . Dann:

$$0 = \langle A^{**}k, h \rangle - \langle Ak, h \rangle = \langle (A^{**} - A)k, (A^{**} - A)k \rangle \implies \|A^{**}k - Ak\| = 0$$

Damit gilt dann die Gleichheit.

zu 3: Sei  $A \in \mathcal{B}(K, H), B \in \mathcal{B}(L, K)$  und  $AB \in \mathcal{B}(L, H)$ . Außerdem gilt:  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ . Des Weiteren:

$$\forall h \in H, l \in L : \langle (AB)^*h, l \rangle = \langle h, A(Bl) \rangle = \langle A^*h, Bl \rangle = \langle B^*A^*h, l \rangle$$

zu 4: Sei  $k \in K$  mit  $\|k\| = 1$ . Dann gilt mit der CBS-Ungleichung

$$\|Ak\|^2 = \langle Ak, Ak \rangle = \langle A^*Ak, k \rangle \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\|$$

Auf der anderen Seite:

$$\sup_{\|k\| \leq 1} \|Ak\| = \|A\|^2 \leq \|A^*\| \|A\| \implies \|A^*\| \geq \|A\|$$

Aufgrund von 2. haben wir auch hier Gleichheit. Damit haben wir dann:

$$\|A\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2$$

□

**Beispiel 5.2.3.** „bra's adjoint“

Sei nun  $A := \langle v | : H \rightarrow \mathbb{K}$  und wir betrachten den dazu adjungierten Operator  $A^* : \mathbb{K} \rightarrow H$ . Wir haben:

$$\forall h \in H, \lambda \in \mathbb{K} : \langle A^* \lambda, h \rangle = \langle \lambda, Ah \rangle_{\mathbb{K}} = \overline{\lambda} Ah = \overline{\lambda} \langle v, h \rangle = \langle \lambda v, h \rangle.$$

Daraus folgt dann  $A^* \lambda = \lambda v$  und damit  $\langle v |^* = |v\rangle$

**Beispiel 5.2.4.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $K \subseteq H$  ein abgeschlossener Unterraum. Sei des Weiteren noch  $P, Q \in \mathcal{B}(H)$  mit  $Ph \in K, Qh \in K^\perp, P + Q = I_H$  wobei  $I_H$  der Identitätsoperator ist. Gesucht ist nun  $P^*$ .

Betrachten wir dazu:

$$\langle P^* h, h' \rangle = \langle h, Ph' \rangle = \langle Ph, Ph \rangle + \underbrace{\langle Qh, Ph' \rangle}_{=0} = \langle P^* Ph, h' \rangle.$$

Damit haben wir  $P^* = P^* P$  und da

$$P = (P^* P)^* = P^* P^{**} = P^* P = P^* \text{ und damit } P = P^* = P^2$$

Des Weiteren haben wir  $h - Ph \perp Ph$ :

$$\langle h - Ph, Ph \rangle = \langle h, Ph \rangle - \langle h, P^* Ph \rangle = 0$$

(Für  $Q$  analog.)

**Definition 5.2.3.** Sei  $A \in \mathcal{B}(H)$ , dann heißt  $A$ :

- selbstadjungiert, falls  $A^* = A$
- normal, falls  $A^* A = A A^*$
- unitär, falls  $A^* A = \text{Id}_H = A A^*$

**Beispiel 5.2.5.** Wir betrachten den  $L^2(\mu)$  mit dem Multiplikationsoperator  $M_\varphi f(x) = \varphi(x)f(x)$ . Dann gilt:

$$\langle M_\varphi^* h, f \rangle = \langle h, M_\varphi f \rangle = \int \bar{h}(x) \varphi(x) f(x) \mu(dx) = \int \overline{\varphi(x) h(x)} f(x) \mu(dx) = \langle M_{\bar{\varphi}} h, f \rangle.$$

Somit erhalten wir  $M_\varphi^* = M_{\bar{\varphi}}$ . Falls außerdem  $\text{Im } \varphi \subseteq \mathbb{R}$ , dann ist der Operator selbstadjungiert. Des Weiteren ist er normal, da:

$$M_\varphi^* M_\varphi = M_{\bar{\varphi}} M_\varphi = M_{|\varphi|^2} = M_\varphi M_\varphi^*$$

### 5.3 Der Satz von Hahn-Banach

**Definition 5.3.1.** Eine partielle Ordnung auf einer Menge  $X$  ist eine Relation  $\leq$ , sodass für alle  $a, b, c \in X$  gilt:

1. Transitivität:  $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$
2. Reflexivität:  $a \leq a$
3. Anti-Symmetrie:  $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$

Falls für alle  $a, b \in X$  gilt  $a \leq b \vee b \leq a$ , dann wird  $X$  als total geordnet bezeichnet.

**Satz 5.3.1** (Lemma von Zorn). Sei  $(Z, \leq)$  eine partiell geordnete Menge mit der Eigenschaft, dass jede total geordnete Teilmenge (bez. *Kette*) eine obere Schranke in  $Z$  hat. Dann hat  $Z$  ein maximales Element.

**Lemma 5.3.1.** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum,  $U \subseteq V$  ein Unterraum,  $z \in V \setminus U$  so, dass  $V = \text{span}\{U \cup \{z\}\}$  sowie  $\varphi_0 \in U'$ . Dann gibt es  $\varphi \in V'$  mit  $\forall u \in U : \varphi(u) = \varphi_0(u)$  und  $\|\varphi\| = \|\varphi_0\|$ .

*Beweis.* Wir zeigen hier nur den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Nehmen o. B. d. A. an, dass  $\varphi_0 \neq 0$  (ansonsten setze  $\varphi = 0$ ) und  $\|\varphi_0\| = 1$ . Weiterhin gilt nach Voraussetzung

$$V = \text{span}\{U \cup \{z\}\} = \{u + \alpha z \mid u \in U, \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha z - u \mid u \in U, \alpha \in \mathbb{R}\} .$$

Zeige nun, dass die Darstellung  $v = \alpha z - u \in V$  durch  $u \in U, \alpha \in \mathbb{R}$  eindeutig ist. Angenommen für  $u_1, u_2 \in U, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  gilt  $v = u_1 + \alpha_1 z = u_2 + \alpha_2 z$ , dann folgt

$$u_1 + \alpha_1 z = u_2 + \alpha_2 z \iff \overbrace{(\alpha_2 - \alpha_1)z}^{\notin U} = \overbrace{u_1 - u_2}^{\in U} \implies \alpha_1 = \alpha_2 \implies u_1 = u_2 .$$

Betrachte nun  $x, y \in U$ , dann gilt (mit  $\|\varphi_0\| = 1$ )

$$\begin{aligned} \overbrace{\varphi_0(x) - \varphi_0(y)}^{\in \mathbb{R}} &\leq |\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| = |\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| \\ &= |\varphi_0(x - y)| \leq \|\varphi_0\| \|x - y\| = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|y - z\| \\ &\iff \varphi_0(x) - \|x - z\| \leq \varphi_0(y) + \|y - z\| . \end{aligned}$$

Somit existiert  $c \in \mathbb{R}$  mit

$$\sup_{x \in U} \varphi_0(x) - \|x - z\| \leq c \leq \inf_{y \in U} \varphi_0(y) + \|y - z\| .$$

Damit können wir nun die Fortsetzung definieren, wobei für  $v \in V$  (wie oben) gilt

$$\varphi(v) = \varphi(\alpha z - u) := \alpha c - \varphi_0(u) .$$

Wir prüfen nun die geforderten Eigenschaften. Es gilt offensichtlich  $\varphi|_U = \varphi_0$  (setzen  $\alpha = 0$  in eindeutiger Darstellung) und somit automatisch  $\|\varphi\| \geq \|\varphi_0\|$ . Zeige nun die Normabschätzung. Zunächst gilt  $\forall \tilde{u} \in U$

$$\begin{aligned} \varphi_0(\tilde{u}) - \|\tilde{u} - z\| &\leq c \leq \varphi_0(\tilde{u}) + \|\tilde{u} - z\| \\ \iff -\|\tilde{u} - z\| &\leq c - \varphi_0(\tilde{u}) \leq \|\tilde{u} - z\| \\ \iff |c - \varphi_0(\tilde{u})| &\leq \|\tilde{u} - z\| \end{aligned}$$

Somit erhalten wir  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, u \in U$  (d.h. für  $v \in V \setminus U$ )

$$|\varphi(\alpha z - u)| = |\alpha| \left| \varphi\left(z - \frac{u}{\alpha}\right) \right| = |\alpha| \cdot \left| c - \varphi_0\left(\frac{u}{\alpha}\right) \right| \leq |\alpha| \left\| \frac{u}{\alpha} - z \right\| = \|\alpha z - u\| .$$

Folglich gilt  $|\varphi(\alpha z - u)| \leq \|\varphi_0\| \|\alpha z - u\| \implies \|\varphi\| \leq \|\varphi_0\|$  und es folgt Normgleichheit.  $\square$

**Satz 5.3.2** (Hahn-Banach). Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum,  $U \subseteq V$  ein Unterraum und  $\varphi_0 \in U'$ . Dann gibt es ein  $\varphi \in V'$  mit  $\varphi|_U = \varphi_0$  und  $\|\varphi\|_{V'} = \|\varphi_0\|_{U'}$ . D. h. jedes beschränkte, lineare Funktional kann normgleich fortgesetzt werden.

*Beweis.* O. B. d. A.  $\|\varphi_0\| = 1$ . Wir setzen

$$Z := \{(W, \psi) \mid U \subseteq W \subseteq V \text{ Unterraum, } \psi \in W', \psi|_U = \varphi_0, \|\psi\| = \|\varphi_0\| = 1\}.$$

Definieren partielle Ordnung auf  $Z$  über

$$(W, \psi) \leq (\tilde{W}, \tilde{\psi}) : \iff W \subseteq \tilde{W} \text{ und } \tilde{\psi}|_W = \psi.$$

Sei nun  $Z_0 \subseteq Z$  eine total geordnete Teilmenge, womit wir  $W^* \subseteq V$  wie folgt definieren

$$Z_0 := \{(W_i, \psi_i) \mid i \in I\} \quad \text{und} \quad W^* := \bigcup_{i \in I} W_i.$$

Dabei ist  $W^*$  ein Unterraum, da für  $x, y \in W^*$  existieren  $i_1, i_2 \in I$ , sodass  $x \in W_{i_1}$  und  $y \in W_{i_2}$ . Sei o. B. d. A.  $(W_{i_2}, \psi_{i_2}) \geq (W_{i_1}, \psi_{i_1})$ , dann gilt nach Voraussetzung auch  $x \in W_{i_2}$ , dies ist ein Unterraum und somit  $x + y \in W^*$ . Wir definieren nun ein lineares Funktional  $\psi^*$  auf  $W^*$ , wobei für  $w \in W^*$

$$\exists \hat{i} \in I : w \in W_{\hat{i}} \text{ und somit } \psi^*(w) := \psi_{\hat{i}}(w).$$

Zeige nun, dass  $\psi^*$  wohldefiniert ist. Seien  $(W_{i_j}, \psi_{i_j}) \in Z_0$ ,  $j \in \{1, 2\}$ ,  $w \in W_{i_1}$ , o. B. d. A.  $W_{i_1} \subseteq W_{i_2}$  und  $\psi_{i_2}|_{W_{i_1}} = \psi_{i_1}$ . Dann gilt  $\psi_{i_2}(w) = \psi_{i_1}(w)$ , d. h.  $\psi^*$  ist wohldefiniert. Weiterhin existiert für alle  $w \in W^*$  ein  $i^* \in I$  mit

$$|\psi^*(w)| = |\psi_{i^*}(w)| \leq \|\psi_{i^*}\| \|w\| = \|\varphi_0\| \|w\| = \|w\| \implies \|\psi^*\| \leq 1.$$

Da offensichtlich  $\|\psi^*\| \geq \|\varphi_0\|$  (wegen  $\psi^*|_U = \varphi_0$ ), folgt  $\|\psi^*\| = 1$ . Somit  $(W^*, \psi^*) \in Z$  und für  $(W, \psi) \in Z_0$  beliebig gilt nach Konstruktion

$$W \subseteq W^* \text{ und } \forall w \in W : \psi^*(w) = \psi(w) \implies (W, \psi) \leq (W^*, \psi^*).$$

Somit ist  $(W^*, \psi^*)$  eine obere Schranke von  $Z_0$ . Nach dem Lemma von Zorn hat  $Z$  also ein Maximum, bez. dieses mit  $(W_0, \psi_0)$ . Angenommen  $W_0 \neq V$ . Dann können wir für  $z \in V \setminus W_0$  Lemma 5.3.1 anwenden auf  $W_1 := \text{span}\{W_0 \cup \{z\}\}$ , d. h.

$$\exists \eta \in W_1' : \eta|_{W_0} = \psi_0 \text{ und } \|\eta\| = \|\psi_0\| = \|\varphi_0\|.$$

Dann folgt jedoch  $(W_1, \eta) \in Z$  mit  $(W_1, \eta) > (W_0, \psi_0)$ , was ein Widerspruch dazu ist, dass  $(W_0, \psi_0)$  eine obere Schranke ist. Somit leistet  $W_0 = V$  und  $\varphi := \psi_0$  das Verlangte.  $\square$

**Beispiel 5.3.1.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $U \subseteq V$  ein dichter Teilraum von  $V$  und  $\varphi_0 \in U'$ . Nach Voraussetzung existiert für jedes  $x \in V$  eine Cauchyfolge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in U$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Da  $\varphi_0$  beschränkt und linear (und somit stetig), folgt, dass auch  $(\varphi_0(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge auf  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  (und somit konvergent) ist. Wir definieren die Fortsetzung  $\varphi \in V'$  mit

$$\forall x \in V' : \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0(x_n).$$

Weiterhin gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_0\| \|x_n\| = \|\varphi_0\| \|x\|.$$

**Satz 5.3.3.** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum, wobei  $V \neq \{0\}$ . Dann gibt es für jedes  $x_0 \neq 0 \in V$  ein  $\varphi \in V'$  mit  $\varphi(x_0) = \|x_0\|$  und  $\|\varphi\| = 1$ .

*Beweis.* Wir setzen  $U := \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ , damit ist  $U \subseteq V$  ein Unterraum. Definieren  $\varphi_0 \in U'$  über

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} : \varphi_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\| \implies \varphi_0(x_0) = \|x_0\| .$$

Weiterhin gilt

$$\|\varphi_0\| = \sup \{|\varphi_0(\alpha x_0)| \mid \alpha \in \mathbb{K}, |\alpha| \|x_0\| \leq 1\} = \sup \{|\alpha| \|x_0\| \mid |\alpha| \|x_0\| \leq 1\} = 1 .$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach können wir nun  $\varphi_0$  normgleich nach  $V'$  fortsetzen und erhalten somit die geforderten Eigenschaften.  $\square$

**Satz 5.3.4.** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Dann ist

$$\psi : V \rightarrow V'', \quad x \mapsto (x'' : \varphi \mapsto \varphi(x))$$

eine isometrische Abbildung.

*Beweis.* Es gilt

$$\|x''\| = \sup \{|\varphi(x)| \mid \varphi \in V', \|\varphi\| \leq 1\}$$

Dabei gilt  $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\| \leq \|x\|$  für  $\|\varphi\| \leq 1$ . Somit  $\|x''\| \leq \|x\|$ . Da  $\varphi_x \in V'$  mit  $\varphi_x(x) := \|x\|$ , folgt die Gleichheit  $\|x''\| = \|x\|$ .  $\square$

**Definition 5.3.2.** Sei  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{K}$ ,  $V'$  der Dualraum und  $V''$  der Bidualraum. Dann ist die natürliche Einbettung  $\iota$  definiert durch:

$$\iota : V \rightarrow V'', \quad \iota(v)(\varphi) = \varphi(v) \text{ für alle } v \in V, \varphi \in V'$$

Außerdem ist  $\iota$  per Definition injektiv und linear. Des Weiteren erhält  $\iota$  die Norm:

$$\|\iota(v)\|_{V''} = \|v\|_V$$

**Definition 5.3.3.** Ein normierter Raum  $X$  heißt reflexiv, wenn die natürliche Einbettung  $X \rightarrow X''$  bijektiv (bzw. surjektiv) ist.

*Bemerkung 5.3.1.* Sei  $X'' = (X')'$  ein Banachraum, dann ist  $X$  ein Banachraum. Es gibt damit keine nichtvollständigen reflexiven Räume.

**Beispiel 5.3.2.** Sei  $1 < p < \infty$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , dann gilt  $L^p(\mu)' = L^q(\mu)$  für  $\sigma$ -endliche Maße. Wir sehen aber ebenfalls  $L^q(\mu)' = L^p(\mu)$ , also ist  $L^p(\mu)$  tatsächlich reflexiv.

Am einfachsten ist  $p = q = 2$ . Also ist  $L^2(\mu)$  ein Selbstdual.

*Bemerkung 5.3.2.* Wir haben also meistens eine von beiden Ketten:

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{\iota} X' \xrightarrow{\iota'} X'' \simeq X \\ X &\xrightarrow{\iota} X' \simeq X \end{aligned}$$

Tatsächlich kann es sonst nur unendlich lange Ketten geben. Betrachte das folgende Beispiel:

**Beispiel 5.3.3.** Wir untersuchen nun die Dualkette von

$$c_0 = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\}$$

Es stellt sich heraus, dass  $c'_0 = \ell^1$ . Außerdem stellt sich heraus, dass  $(\ell^1)' = \ell^\infty$  und wiederum  $(\ell^\infty)' = \{ \mu : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}, \mu \text{ ist endlich additiv} \}$ . Bei  $\mu$  handelt es sich nicht nur um Maße, sondern um Inhalte. Diese Kette zieht sich so fort.

## 5.4 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

**Definition 5.4.1.** Sei  $(X, \rho)$  ein metrischer Raum, dann heißt  $S \subset X$  nirgends dicht, wenn der Abschluss  $\bar{S}$  keine inneren Punkte enthält. Mit

$$\bar{S} = \left\{ x \in X : \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in S : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \right\} \text{ und } \bar{S} = S \cup \partial S.$$

Das Innere ist definiert als

$$S^\circ = \{x \in X \mid \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subseteq S\}.$$

$S$  ist genau dann nirgends dicht, wenn  $(\bar{S})^\circ = \emptyset$ .

**Definition 5.4.2.** Sei  $Y \subset X$ ,  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Familie nirgends dichter Mengen, dann heißt  $Y$  mager genau dann, wenn  $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ .

**Beispiel 5.4.1.** Sei  $X = \mathbb{R}$ .

1. Die Cantormenge  $C$  ist nirgends dicht.
2.  $\mathbb{Q}$  ist mager.

**Lemma 5.4.1.** Seien  $(V, \|\cdot\|_V)$  sowie  $(W, \|\cdot\|_W)$  normierte Räume,  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Sei  $r, \varepsilon > 0$ ,  $x_0 \in V$  mit  $\overline{K_\varepsilon(x_0)} \subset T^{-1}(\overline{K_r(0)})$ , dann ist  $T$  beschränkt und  $\|T\| \leq \frac{2r}{\varepsilon}$ .

*Beweis.* Sei  $y \in V$  und  $\|y\| \leq \varepsilon$ , dann  $x_0, x_0 + y \in T^{-1}(\overline{K_r(0)})$ , also  $\|Tx_0\| \leq r$  und  $\|T(x_0 + y)\| \leq r$ . Mit der Dreiecksungleichung folgt:

$$\|Ty\| = \|T(x_0 + y) - Tx_0\| \leq 2r.$$

Sei nun  $x \in V$ ,  $\|x\|_V \leq 1$ , dann sehen wir

$$\|Tx\| = \frac{1}{\varepsilon} \|T(\varepsilon x)\| \leq 2 \frac{r}{\varepsilon}$$

□

*Bemerkung 5.4.1.* Die Kategorien sind wie folgt definiert:

1. Eine Menge  $M$  heißt von *Kategorie 1*, wenn sie mager ist. (Wenn es eine Folge  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  nirgends dichter Mengen gibt mit  $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ ).
2. Eine Menge  $M$  heißt von *Kategorie 2*, wenn  $M$  nicht von Kategorie 1 ist.

**Satz 5.4.1** (Baire'sches Kategorientheorem). Sei  $(X, \rho)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge nirgends dichter Mengen, dann gibt es  $x \in X$  mit  $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ .

(Bzw. dazu äquivalent: Jeder vollständige metrische Raum ist von zweiter Kategorie.)

*Beweis.* Wir zeigen dies über die Gegenannahme. Seien  $S_n$  nirgends dichte Teilmengen von  $X$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ . Da  $S_1$  nirgends dicht, gibt es ein  $x_1 \in X \setminus \bar{S}_1$ . Da  $\bar{S}_1$  abgeschlossen und  $X$  offen ist, existiert zu  $x_1$  eine offene Kugel  $K_{r_1}(x_1)$  so, dass mit  $r_1 < 1$  auch  $\bar{K}_{r_1}(x_1) \cap \bar{S}_1 = \emptyset$ .

Weil  $S_2$  nirgends dicht ist, gibt es nun  $x_2 \in K_{r_1}(x_1) \setminus \bar{S}_2$ . Weil  $K_{r_1}(x_1)$  offen und  $\bar{S}_2$  abgeschlossen ist, gibt es nun eine Kugel  $K_{r_2}(x_2)$  mit  $r_2 < \frac{1}{2}$  so, dass  $K_{r_2}(x_2) \subset K_{r_1}(x_1)$  und  $\bar{K}_{r_2}(x_2) \cap \bar{S}_n = \emptyset$ .

Induktiv lässt sich nun mit einer Konstruktion der Folge fortfahren. Dabei konstruiert man eine Folge ineinandergeschachtelte Kugeln  $K_{r_k}(x_k)$  mit den Mittelpunkten  $x_k$  und Radien  $r_k < \frac{1}{k}$  so, dass:

$$K_{r_{k-1}}(x_{k-1}) \subset K_{r_k}(x_k), \bar{K}_{r_k}(x_k) \cap \bar{S}_n = \emptyset.$$

Da alle Mittelpunkte  $x_k, x_{k+1}, \dots$  in  $K_{r_k}(x_k)$  und mit  $m \geq k$ , auch  $d(x_k, x_m) \leq \frac{2}{k}$  und  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist, konvergiert sie also gegen ein  $x \in X$ . Dieses  $x$  liegt aber für alle  $k$  in  $\bar{K}_{r_k}(x_k)$  und deshalb für kein  $k$  in  $\bar{S}_k$ . Es ergibt sich ein Widerspruch.  $\square$

**Satz 5.4.2** (Banach-Steinhaus). Seien  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein Banachraum,  $(W, \|\cdot\|_W)$  ein normierter Raum und  $\mathcal{F}$  eine Familie von Operatoren mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(V, W)$  mit

$$\forall x \in V : \sup \{ \|Tx\|_W : T \in \mathcal{F} \} < \infty,$$

dann gilt  $\sup \{ \|T\|_{V,W} : T \in \mathcal{F} \} < \infty$ .

*Beweis.* Wir zerlegen  $V$  zunächst in abzählbare Mengen mit

$$E_n := \left\{ x \in V : \sup_{i \in \mathcal{F}} \|Tx\| \leq n \right\}$$

Mit  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ . Da die  $T_i$  stetig sind, ist jedes

$$E_n = \bigcap_{i \in \mathcal{F}} \|T_i(\cdot)\|^{-1}([0, n])$$

abgeschlossen. Nach 5.4.1 enthält mindestens eine der Mengen  $E_n$  einen inneren Punkt.

Es existieren also  $N \in \mathbb{N}, y \in E_N$  und  $\varepsilon > 0$  mit

$$\|x - y\| \leq \varepsilon \implies x \in E_N.$$

Da  $E_N$  symmetrisch ist, hat auch  $-y$  diese Eigenschaft. Aufgrund der Konvexität der  $E_n$  folgt nun:

$$\|u\| \leq \varepsilon \implies u = \frac{1}{2}((u + y) + (u - y)) \in \frac{1}{2}(E_N + E_N) \subset E_N.$$

Das heißt explizit: Wenn  $\|u\| \leq \varepsilon$  ist, dann gilt  $\|T_i u\| \leq N$  für alle  $i \in \mathcal{F}$ , also:

$$\sup_{i \in \mathcal{F}} \leq \frac{N}{\varepsilon} < \infty$$

$\square$

**Satz 5.4.3.** Sei  $X$  ein Banachraum,  $Y$  ein normierter Raum, ferner  $T_n \in \mathcal{B}(X, Y)$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $x \in X$  existiere  $Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ . Dann ist  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$

*Beweis.*  $T$  ist offensichtlich linear. Da  $(T_n x)$  für alle  $x \in X$  konvergiert, ist stets  $\sup_n \|T_n x\| < \infty$ . Der Satz 5.4.2 liefert  $\sup_n \|T_n\| =: M < \infty$ . Es folgt

$$\|Tx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq M \|x\|$$

$\square$



**Satz 5.4.4.** Sei  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein normierter Raum und  $A \subseteq V$  eine Teilmenge mit

$$\forall \varphi \in V' : \sup \{ |\varphi(x)| \mid x \in A \} < \infty .$$

Dann ist  $A$  beschränkt.

*Beweis.* Betrachte die kanonische Einbettung  $\Phi : V \rightarrow V''$ ,  $\Phi(x)(\varphi) = \varphi(x)$ . Diese ist isometrisch, wie in Satz 5.3.4 gezeigt. Sei nun

$$\mathcal{F} = \Phi(A) = \{ \Phi(x) \mid x \in A \} \subseteq V'' = \mathcal{B}(V', \mathbb{K}) .$$

Damit gilt nun für alle  $\varphi \in V'$

$$\begin{aligned} \sup \{ \|Y(\varphi)\| \mid Y \in \Phi(A) \} &= \sup \{ |Y(\varphi)| \mid Y \in \Phi(A) \} \\ &= \sup \{ |\varphi(\Phi^{-1}(Y))| \mid Y \in \Phi(A) \} = \sup \{ |\varphi(x)| \mid x \in A \} < \infty \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der zweiten Zeile  $\Phi^{-1}(\Phi(A)) = A$  (da  $\Phi$  injektiv) ausgenutzt. Nach Satz 5.1.5 ist  $V'$  ein Banachraum, das heißt wir können den Satz zur gleichmäßigen Beschränktheit anwenden, mit  $\mathcal{F}$  wie oben definiert. Es gilt also

$$\begin{aligned} \sup \{ \|Y(\varphi)\| \mid Y \in \Phi(A) \} < \infty &\implies \\ \infty &> \sup \{ \|Y\|_{V''} \mid Y \in \Phi(A) \} = \sup \{ \|\Phi(x)\|_{V''} \mid x \in A \} = \sup \{ \|x\|_V \mid x \in A \} . \end{aligned}$$

Somit ist  $A$  in der Tat beschränkt. □

*Bemerkung 5.4.2.* Seien  $V, A$  wie im Satz. Wir bezeichnen die  $A$  als schwach beschränkt, falls

$$\forall \varphi \in V' : \sup \{ |\varphi(x)| \mid x \in A \} < \infty .$$

und als stark beschränkt, falls

$$\sup \{ \|x\|_V \mid x \in A \} < \infty .$$

Wir zeigen hier tatsächlich die Äquivalenz von starker und schwacher Beschränktheit, die Gegenrichtung gilt ebenfalls. Die Konzepte stark (bzgl.  $\|\cdot\|_V$ ) und schwach bzgl. aller  $\varphi \in V'$  lassen sich auch auf weitere Begriffe (z. B. Kompaktheit, Abgeschlossenheit) übertragen.

## 5.5 Der Satz von der offenen Abbildung

*Bemerkung 5.5.1* (Motivation). Seien  $V, W$  Banachräume sowie  $T \in \mathcal{B}(V, W)$ , mit  $T : V \rightarrow W$  bijektiv. Somit existiert  $T^{-1} : W \rightarrow V$ . Die Umkehrabbildung ist linear, da aus

$$T(T^{-1}(x + y)) = x + y \quad \text{und} \quad T(T^{-1}(x) + T^{-1}(y)) = T(T^{-1}(x)) + T(T^{-1}(y)) = x + y$$

unter Ausnutzung der Injektivität von  $T$  folgt, dass  $T^{-1}(x + y) = T^{-1}(x) + T^{-1}(y)$ . Weiterhin stellt sich die Frage, ob  $T^{-1}$  auch beschränkt ist. Nach Satz 5.1.1 g. z. z., dass  $T^{-1}$  stetig. Dafür ist folgende Bedingung notwendig

$$\forall G \subseteq V \text{ offen} : (T^{-1})^{-1}(G) = T(G) \subseteq W \text{ offen} .$$

**Beispiel 5.5.1.** Betrachte die Banachräume  $V = W = (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ . Dann ist  $T \in \mathcal{B}(V, W)$

$$\forall f \in C^0([0, 1]) : (T(f))(x) = \int_0^x f(y) dy$$

ein injektiver Operator. Dann können wir  $\tilde{T}^{-1}$  definieren mit

$$\tilde{T}^{-1}(g(x)) = g'(x) .$$

Da  $T$  nicht bijektiv ist existiert in diesem Fall jedoch keine Umkehrabbildung.

**Satz 5.5.1** (Satz von der offenen Abbildung). Seien  $V, W$  Banachräume und  $T \in \mathcal{B}(V, W)$ . Falls  $T(V) = W$ , dann ist für alle  $G \subseteq V$  offen auch  $T(G)$  offen.

Wir zeigen zunächst zwei Lemmata.

**Lemma 5.5.1.** Seien  $V, W$  Banachräume und  $T \in \mathcal{B}(V, W)$ ,  $T(V) = W$ . Dann gibt es ein  $d > 0$  mit

$$\forall \varepsilon > 0 \forall y \in W \exists x \in V : \|Tx - y\| < \varepsilon \text{ und } \|x\| < d^{-1} \|y\| .$$

*Beweis.* Da  $T$  surjektiv ist, existiert für  $y \in W$  beliebig ein  $\tilde{x} \in V$  mit  $T\tilde{x} = y$ . Somit gilt

$$W = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} T(K_m(0)) .$$

Da  $W$  ein vollständiger metrischer Raum, können wir die Kontraposition des Bairschen Kategorientheorems anwenden. Demnach existieren  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $y_0 \in W$ ,  $m \in \mathbb{N}$  mit

$$K_r(y_0) \subseteq \overline{T(K_m(0))} .$$

Falls für  $\tilde{y} \in W : \|\tilde{y}\| < r$ , dann folgt  $y_0, y_0 + \tilde{y} \in K_r(y_0)$  und somit auch  $y_0, y_0 + \tilde{y} \in \overline{T(K_m(0))}$ . Nach Definition des Abschluss existieren Folgen  $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $V$  mit

$$\forall n \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2\} : \|x_n^i\| < m \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n^1) = y_0, \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n^2) = y_0 + \tilde{y} .$$

Definiere nun die Folge  $(x_n^3)_{n \in \mathbb{N}}$  durch  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n^3 = x_n^2 - x_n^1$ . Damit gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \|x_n^3\| \leq 2m \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n^3) = \tilde{y} .$$

Wir wählen nun  $y \in W$ ,  $y \neq 0$  (sonst  $x = 0$ ) und  $\varepsilon > 0$  fixiert. Wende nun obige Rechnung auf folgendes  $\tilde{y}$  an

$$\tilde{y} = \frac{r}{2} \frac{y}{\|y\|} \implies \|\tilde{y}\| < r \implies \exists (x_n^3)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} x_n^3 \in V, \|x_n^3\| \leq 2m \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n^3) = \tilde{y} .$$

Somit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\|y\|}{r} x_n^3 = y \implies \exists n \in \mathbb{N} : \left\| T\left(\frac{2\|y\|}{r} x_n^3\right) - y \right\| < \varepsilon .$$

Setze nun  $d := \frac{r}{4m}$ , dann folgt

$$\left\| \frac{2\|y\|}{r} x_n^3 \right\| < \frac{2\|y\|}{r} 2m = \frac{4m}{r} \|y\| = d^{-1} \|y\| .$$

Dies war gerade zu zeigen. □

**Lemma 5.5.2.** Seien  $V, W$  Banachräume und  $T \in \mathcal{B}(V, W), T(V) = W$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$  mit

$$K_\delta(0) \subseteq T(K_1(0)) \iff \forall y \in W \text{ mit } \|y\| < \delta \exists x \in V \text{ mit } \|x\| < 1 \text{ und } Tx = y.$$

*Beweis.* Wir erhalten die Behauptung durch iteratives Anwenden des vorhergehenden Lemmas. Setzen  $\delta = d$ , wobei  $d$  wie im vorherigen Lemma sei. Sei weiterhin  $y_0 := y \in K_d(0)$  fixiert sowie  $\varepsilon_0 = \frac{d}{2}$ . Dann liefert Lemma 5.5.1

$$\exists x_0 \in K_1(0) : \|T(x_0) - y_0\| < \frac{d}{2}.$$

Dabei braucht nicht der Abschluss  $\overline{K_1(0)}$  zu betrachtet werden, weil nach dem Lemma  $\|x_0\| \leq d^{-1} \|y_0\| < d^{-1}d = 1$ . Erneutes Anwenden des Lemmas auf  $y_1 := y_0 - T(x_0)$  und  $\varepsilon_1 = \frac{d}{4}$  liefert

$$\exists x_1 \in K_{\frac{1}{2}}(0) : \|T(x_1) - y_1\| = \|T(x_1) + T(x_0) - y\| < \frac{d}{4}$$

Dabei gilt  $x_1 \in K_{\frac{1}{2}}(0)$ , da

$$\|x_1\| \leq d^{-1} \|y_1\| = d^{-1} \|y_0 - T(x_0)\| < \frac{d}{2d} = \frac{1}{2}.$$

Iteration führt zu der allgemeinen Form, dass für  $y_{n+1} = y_0 - T(x_n) - T(x_{n-1}) - \dots - T(x_0)$  gilt

$$\exists x_{n+1} \in K_{2^{-(n+1)}}(0) : \|T(x_{n+1}) - y_{n+1}\| = \|T(x_{n+1}) + T(x_n) + \dots + T(x_0) - y\| < d2^{-(n+2)}.$$

Nach Konstruktion gilt  $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2 < \infty$ . Somit ist  $(\sum_{n=0}^m x_n)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge, denn es gilt für  $m, m' \in \mathbb{N}, m' > m$

$$\left\| \sum_{n=0}^{m'} x_n - \sum_{n=0}^m x_n \right\| = \left\| \sum_{n=m+1}^{m'} x_n \right\| \leq \sum_{n=m+1}^{m'} \|x_n\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Da  $V$  ein Banachraum ist, existiert  $x = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m x_n$ , wobei  $\|x\| < 2$ . Da  $T \in \mathcal{B}(V, W)$  und somit insbesondere stetig, gilt auch  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m T(x_n) = T(x)$ . Somit gilt insbesondere

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y - \sum_{n=0}^m T(x_n) = y - T(x).$$

Nach der obigen iterativen Konstruktion gilt aber auch

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| y - \sum_{n=0}^m T(x_n) \right\| = 0.$$

Daraus folgt also

$$\forall y \in K_d(0) \exists x \in \overline{K_2(0)} : Tx = y.$$

Setzen wir nun  $\delta = \frac{d}{2}$ , folgt die Behauptung.  $\square$

*Beweis von Satz 5.5.1.* Sei  $G \subseteq V$  offen und  $y \in T(G)$ , d. h. es existiert  $x_0 \in G : y = T(x_0)$ . Für Offenheit g. z. z., dass  $T(G)$  eine offene Kugel um  $y$  enthält. Wir setzen

$$\tilde{G} := G - x_0 = \{g - x_0 \mid g \in G\} \xrightarrow{T \text{ linear}} T(\tilde{G}) = T(G) - y.$$

Somit g. z. z.  $\exists \tilde{\delta} > 0 : K_{\tilde{\delta}}(0) \subseteq T(\tilde{G})$ . Da  $\tilde{G}$  offen und  $0 \in \tilde{G}$ , existiert  $\varepsilon > 0$  mit  $K_\varepsilon(0) \subseteq \tilde{G}$ . Somit ergibt sich unter Ausnutzung der Linearität von  $T$  sowie mit  $\delta$  wie in Lemma 5.5.2

$$T(\tilde{G}) \supseteq T(K_\varepsilon(0)) = \varepsilon T(K_1(0)) \supseteq \varepsilon K_\delta(0) = K_{\varepsilon\delta}(0).$$

Setzen also  $\tilde{\delta} = \varepsilon\delta$ , dann gilt  $K_{\tilde{\delta}}(0) \subseteq T(\tilde{G}) \iff K_{\tilde{\delta}}(y) \subseteq T(G)$ . Somit ist  $T(G)$  in der Tat offen.  $\square$

**Satz 5.5.2** (Schlussfolgerung). Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 5.5.1  $T$  injektiv (d. h.  $T$  bijektiv), dann gilt  $T^{-1} \in \mathcal{B}(W, V)$ .

*Beweis.* Wie bereits zuvor motiviert, g. z. z., dass  $T^{-1}$  beschränkt und somit g. z. z., dass  $T^{-1}$  stetig. Es gilt

$$T^{-1} : W \rightarrow V \text{ stetig} \iff \forall G \subseteq V \text{ offen} : (T^{-1})^{-1}(G) = T(G) \subseteq W \text{ offen} .$$

Dies gilt nach Satz 5.5.1 und somit ist  $T^{-1} \in \mathcal{B}(W, V)$ .  $\square$

## 5.6 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

**Definition 5.6.1.** Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume,  $f : X \rightarrow Y$  eine lineare Abbildung. Dann bezeichnen wir

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$$

als den *Graph* von  $f$ .

**Satz 5.6.1.** Seien  $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$  Banachräume. Dann wird  $V \times W$  unter eintragsweisen Operationen zu einem Vektorraum, d. h. für alle  $x, x_1 \in V, y, y_1 \in W, \lambda \in \mathbb{K}$  gilt

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \quad \text{und} \quad (x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1) .$$

Mit jeder der Normen

$$\|(x, y)\|_1 := \|x\|_V + \|y\|_W, \quad \|(x, y)\|_2 := \sqrt{\|x\|_V^2 + \|y\|_W^2}, \quad \|(x, y)\|_3 := \max\{\|x\|_V, \|y\|_W\}$$

wird  $V \times W$  ein Banachraum.

*Beweis.* Dass  $V \times W$  ein Vektorraum ist, ist aus der linearen Algebra bekannt. Zeige nun, dass  $\|\cdot\|_1$  eine Norm ist. Es gilt  $\forall (x, y) \in V \times W$

$$0 = \|(x, y)\|_1 \iff \|x\|_V + \|y\|_W = 0 \iff \|x\|_V = 0 \wedge \|y\|_W = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0 .$$

Somit ist  $\|\cdot\|_1$  definit. Die Homogenität ist klar. Zeige nun die Dreiecksungleichung mit

$$\|(x + x_1, y + y_1)\|_1 = \|x + x_1\|_V + \|y + y_1\|_W \leq \|x\|_V + \|x_1\|_V + \|y\|_W + \|y_1\|_W = \|(x, y)\|_1 + \|(x_1, y_1)\|_1 .$$

$\|\cdot\|_3$  ist offensichtlich eine Norm. Für  $\|\cdot\|_2$  reicht es die Dreiecksungleichung zu zeigen, der Rest ist ebenfalls trivial. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \|(x + x_1, y + y_1)\|_2^2 &= \|x + x_1\|_V^2 + \|y + y_1\|_W^2 \leq (\|x\|_V + \|x_1\|_V)^2 + (\|y\|_W + \|y_1\|_W)^2 \\ &= \|x\|_V^2 + 2\|x\|_V\|x_1\|_V + \|x_1\|_V^2 + \|y\|_W^2 + 2\|y\|_W\|y_1\|_W + \|y_1\|_W^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad (\|x, y\|_2 + \|x_1, y_1\|_2)^2 &= \left( \sqrt{\|x\|_V^2 + \|y\|_W^2} + \sqrt{\|x_1\|_V^2 + \|y_1\|_W^2} \right)^2 \\ &= \|x\|_V^2 + \|y\|_W^2 + \|x_1\|_V^2 + \|y_1\|_W^2 + 2\sqrt{(\|x\|_V^2 + \|y\|_W^2)(\|x_1\|_V^2 + \|y_1\|_W^2)} . \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \text{(i)} \leq \text{(ii)} &\iff \|x\|_V\|x_1\|_V + \|y\|_W\|y_1\|_W \leq \sqrt{(\|x\|_V^2 + \|y\|_W^2)(\|x_1\|_V^2 + \|y_1\|_W^2)} \\ &\iff (\|x\|_V\|x_1\|_V + \|y\|_W\|y_1\|_W)^2 \leq (\|x\|_V^2 + \|y\|_W^2)(\|x_1\|_V^2 + \|y_1\|_W^2) \\ &\iff 2\|x\|_V\|x_1\|_V\|y\|_W\|y_1\|_W \leq \|x\|_V^2\|y_1\|_W^2 + \|y\|_W^2\|x_1\|_V^2 \\ &\iff 0 \leq (\|x\|_V\|y_1\|_W - \|y\|_W\|x_1\|_V)^2 . \end{aligned}$$

Somit ist die Dreiecksungleichung in der Tat erfüllt. Wir zeigen nun, Vollständigkeit bzgl.  $\|\cdot\|_1$ . Sei  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in V, y_n \in W$  eine Cauchyfolge in  $V \times W$ . Dann sind nach Definition auch  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $V$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $W$  Cauchyfolgen, d. h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n := x \in V \text{ bzgl. } \|\cdot\|_V \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n := y \in W \text{ bzgl. } \|\cdot\|_W \quad \text{existieren.}$$

Damit wählen wir  $(x, y) \in V \times W$  als Kandidaten für den Grenzwert von  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ . In der Tat

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\|_1 = \|(x_n - x, y_n - y)\|_1 = \|x_n - x\|_V + \|y_n - y\|_W \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

*Bemerkung 5.6.1.* Die Normen  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_3$  auf  $V \times W$  sind äquivalent. Wir bezeichnen  $V \times W$  auch mit  $V \oplus W$ .

**Satz 5.6.2.** Seien  $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  und  $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$  Hilberträume. Dann ist  $H = H_1 \times H_2$  ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_1 + \langle y_1, y_2 \rangle_2.$$

*Beweis.* Man kann leicht einsehen, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die Norm  $\|\cdot\|_2$  induziert. Der Rest folgt trivial. □

**Satz 5.6.3** (Satz vom abgeschlossenen Graphen). Seien  $(V, \|\cdot\|_V)$ ,  $(W, \|\cdot\|_W)$  Banachräume und  $T : V \rightarrow W$  linear. Dann gilt

$$T \in \mathcal{B}(V, W) \iff \Gamma_T \text{ abgeschlossen in } (V \times W).$$

*Bemerkung 5.6.2.*  $\Gamma_T$  ist ein Untervektorraum von  $V \times W$ , da unter Ausnutzung der Linearität von  $T$  gilt für  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $x, x_1, x_2 \in V$

$$\begin{aligned} \lambda(x, Tx) &= (\lambda x, \lambda Tx) = (\lambda x, T(\lambda x)) \\ (x_1, Tx_1) + (x_2, Tx_2) &= (x_1 + x_2, Tx_1 + Tx_2) = (x_1 + x_2, T(x_1 + x_2)). \end{aligned}$$

Weiterhin ist  $\Gamma_T$  abgeschlossen, genau dann wenn

$$\forall ((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} (x_n, y_n) \in \Gamma_T \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) =: (x, y) \in V \times W \text{ existiert} \implies (x, y) \in \Gamma_T.$$

Mit Satz 5.1.1 lässt sich dies äquivalent umformulieren zu

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \forall n \in \mathbb{N} x_n \in V, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n =: x \in V \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = y \in W \text{ existieren} \implies y = T(x)$$

*Beweis.* ( $\implies$ ) Sei  $T \in \mathcal{B}(V, W)$  und sei  $((x_n, Tx_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in V$  eine Folge in  $\Gamma_T$ , mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, Tx_n) = (x, y) \in V \times W$ . Somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_V = 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - y\|_W = 0.$$

Aufgrund der Stetigkeit von  $T$  folgt in der Tat  $T(x) = y$ .

( $\impliedby$ ) Sei  $\Gamma_T$  abgeschlossen, dann ist  $\Gamma_T$  als Unterraum des Banachraums  $(V \times W, \|\cdot\|_1)$  ebenfalls ein Banachraum. Wir definieren die stetigen, linearen Abbildungen

$$P_1 : \Gamma_T \rightarrow V, P_1(x, Tx) = x \quad \text{und} \quad P_2 : \Gamma_T \rightarrow W, P_2(x, Tx) = Tx.$$

Dabei gilt für die Operatornorm  $\|P_1\|$

$$\begin{aligned} \|P_1(x, Tx)\|_V &= \|x\|_V \leq \|x\|_V + \|Tx\|_W = \|(x, Tx)\|_1 \implies \\ \|P_1\| &= \sup \{ \|P_1(x, Tx)\|_V \mid \|(x, Tx)\|_1 = 1 \} \leq 1 . \end{aligned}$$

Analog folgt  $\|P_2\| \leq 1$ . Weiterhin gilt  $P_1(\Gamma_T) = V$ , d. h.  $P_1$  surjektiv. Außerdem ist  $P_1$  injektiv, da

$$P_1(x, Tx) = 0 \iff x = 0 \iff x = 0 \text{ und } Tx = 0 \iff (x, Tx) = 0_{V \times W} .$$

Aus der Bijektivität von  $P_1$  folgt nun mit Satz 5.5.2  $P_1^{-1} \in \mathcal{B}(V, \Gamma_T)$  und mit  $P_2 \in \mathcal{B}(\Gamma_T, W)$  nach Definition erhalten wir

$$T = P_2 \circ P_1^{-1} \in \mathcal{B}(V, W) .$$

Dies war gerade zu zeigen

□.

**Satz 5.6.4.** Sei  $V$  ein Vektorraum mit zwei Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , wobei  $(V, \|\cdot\|_1)$  und  $(V, \|\cdot\|_2)$  Banachräume sind. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in V : \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n := x \in V \text{ bzgl. } \|\cdot\|_1 \text{ und } \right. \\ \left. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n := y \in V \text{ bzgl. } \|\cdot\|_2 \text{ existieren} \right) \implies x = y . \end{aligned}$$

Dann sind  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  äquivalent.

*Beweis.* Definiere  $I : (V, \|\cdot\|_1) \rightarrow (V, \|\cdot\|_2)$  als die Identitätsabbildung, welche linear ist. Wollen nun zeigen, dass  $\Gamma_I$  abgeschlossen. Sei dafür eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in V$  gegeben mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =: x$  in  $(V, \|\cdot\|_1)$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = y$  in  $(V, \|\cdot\|_2)$ . Nach Voraussetzung folgt  $x = y$ . Somit ist  $\Gamma_I$  abgeschlossen und mit Satz 5.6.3 gilt  $I \in \mathcal{B}(V, V)$ . Nach Satz 5.5.2 gilt auch  $I^{-1} \in \mathcal{B}(V, V)$ . Nach Definition der Beschränktheit folgt die Behauptung. □

## Chapter 6

# Kompakte Operatoren

*Bemerkung 6.0.1 (Motivation).* Die motivierende Idee des Kapitels ist es für  $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$  Banachräume einen Unterraum von  $B(V, W)$  zu finden, der aus Operatoren besteht, welche sich wie lineare Abbildungen auf endlichdimensionalen Räumen verhalten.

### 6.1 Definitionen und Eigenschaften

**Definition 6.1.1.** Seien  $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$  Banachräume und  $T : V \rightarrow W$  linear. Dann heißt  $T$  *kompakt* (bez.  $T \in \mathcal{K}(V, W)$ ), falls für alle beschränkten Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in V$  eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  existiert, sodass  $(Tx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  in  $W$  konvergiert.  $T$  ist also kompakt, wenn das Bild jeder beschränkten Folge eine in  $W$  konvergente Teilfolge enthält.

*Bemerkung 6.1.1.* Obige Definition ist äquivalent zur Forderung, dass das Bild jeder beschränkten Menge  $E$  in  $V$  unter  $T$  einen kompakten Abschluss besitzt.

**Satz 6.1.1.** Seien  $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$  Banachräume und  $T \in \mathcal{K}(V, W)$ . Dann ist  $T$  beschränkt.

*Beweis.* Angenommen  $T \in \mathcal{K}(V, W)$  ist nicht beschränkt. Dann gilt nach Definition

$$\sup \{ \|Tx\|_W \mid \|x\|_V \leq 1 \} = \infty .$$

Somit finden wir  $\forall n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in V$  mit  $\|x_n\|_V \leq 1$  und  $\|Tx_n\|_W \geq n$ . Da  $T$  kompakt ist, gilt für die somit konstruierte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}, y \in W, \lim_{k \rightarrow \infty} Tx_{n_k} = y$$

Daraus folgt aber sofort  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k}\|_W = \|y\|_W$ . Dies ist ein Widerspruch zur Konstruktion von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Somit ist  $T$  also beschränkt.  $\square$

**Beispiel 6.1.1.** Wir betrachten den in Beispiel 5.1.1 eingeführten Volterra-Operator  $T : C^0([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1])$ , wobei wir  $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$  betrachten mit

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt .$$

Wir zeigen nun, dass der Volterra-Operator kompakt ist. Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} : f_n \in C^0([0, 1])$  beschränkt, d. h.  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty =: c < \infty$ . Wir wenden den Satz von Arzelà-Ascoli nach Bem. 6.1.2 an. Bezeichne dabei  $g_n := Tf_n$ , dann ist  $F := \{g_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq C^0([0, 1])$  punktweise beschränkt, da

$$\forall x \in [0, 1] : |Tf_n(x)| = \left| \int_0^x f_n(t) dt \right| \leq \|f_n\|_\infty \leq c < \infty .$$

Weiterhin ist  $F$  gleichgradig stetig, da für  $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x, y \in [0, 1] : |Tf_n(x) - Tf_n(y)| = \left| \int_x^y f_n(t) dt \right| \leq \|f_n\|_\infty |x - y| .$$

Somit leistet  $\delta := \frac{\varepsilon}{c}$  das Verlangte. Anwenden des Satzes ergibt, dass  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} = (Tf_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine in  $C^0([0, 1])$  konvergente Teilfolge besitzt. Damit ist  $T$  ein kompakter Operator.

**Bemerkung 6.1.2** (Satz von Arzelà-Ascoli). Sei  $K$  ein kompakter metrischer Raum und  $F \subseteq C^0(K)$  eine Teilmenge. Dann ist  $F$  genau dann *relativ kompakt* in  $(C^0(K), \|\cdot\|_\infty)$  genau dann wenn

1.  $F$  *punktweise beschränkt*, d. h.:  $\forall f \in F \forall t \in K : |f(t)| < \infty$  und
2.  $F$  *gleichgradig stetig*, d. h.:  $\forall t \in K \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in F \forall s \in K : d(s, t) < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \varepsilon$ .

Dabei bezeichnen wir  $F$  als relativ kompakt in  $C^0(K)$ , wenn  $\overline{F}$  in  $C^0(K)$  kompakt ist. Weiterhin ist  $F$  genau dann relativ kompakt, falls jede Folge in  $F$  eine in  $C^0(K)$  konvergente Teilfolge hat.

**Satz 6.1.2.**  $T \in \mathcal{B}(V, W)$  ist genau dann kompakt, wenn  $\overline{TK_1^V(0)}$  totalbeschränkt.

*Beweis.* ( $\Rightarrow$ )

Wir nutzen aus, dass  $Y \subset W$  total beschränkt, genau dann wenn es  $Y \subseteq Z \subseteq W$  mit  $Z$  kompakt gibt. Hier setzen wir  $Z := \overline{TK_1^V(0)}$ , d. h. es g. z. z., dass  $Z$  kompakt ist.  $T$  ist nach Voraussetzung kompakt, sei  $y_n \in \overline{TK_1(0)}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann approximiert das Bild den Abschluss, d. h.

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists \tilde{y}_n \in \overline{TK_1(0)} : \|y_n - \tilde{y}_n\| < \frac{1}{n}.$$

Also gibt es ein  $x_n \in \overline{K_1(0)} : \|y_n - Tx_n\| < \frac{1}{n}$ . Da  $T$  kompakt ist, gibt es eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $Tx_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z \in W$ . Damit gilt dann aber auch  $\tilde{y}_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z$  und damit  $y_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z$ . Also ist  $z \in \overline{TK_1^V(0)}$ , d. h.  $\overline{TK_1^V(0)}$  ist kompakt und somit folgt die Behauptung..

( $\Leftarrow$ )

Sei  $\overline{TK_1^V(0)}$  totalbeschränkt und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in V$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei nun  $c := \sup \{\|x_n\| \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$  und sein nun o.B.d.A  $c > 0$ . Sei  $\tilde{x}_n = \frac{x_n}{c} \in \overline{K_1^V(0)}$ , dann

$$T\tilde{x}_n \in \overline{TK_1^V(0)} \subseteq \overline{TK_1^V(0)}$$
 ist kompakt

Damit gibt es eine Teilfolge  $(T\tilde{x}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}, z \in \overline{TK_1^V(0)}$  und  $T\tilde{x}_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z$ . Folglich  $Tx_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} c \cdot z$ . □

**Bemerkung 6.1.3.** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler normierter Raum über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , dann ist  $V$  ein Banachraum.

**Beispiel 6.1.2.** Sei  $T \in \mathcal{B}(V, W)$  beschränkt und  $\dim TV < \infty$ , dann ist  $T$  kompakt insbesondere ist  $TV$  ein endlichdimensionaler Banachraum. Dies ist eine direkte Konsequenz aus dem Satz von Heine-Borel. Es gilt nun:

$$\overline{TK_1(0)} \subseteq \overline{K_{\|T\|}^{TV}(0)}$$

Mit Heine-Borel ist  $\overline{K_{\|T\|}^{TV}(0)}$  kompakt, also total beschränkt. Jede Teilmenge einer totalbeschränkten Menge ist totalbeschränkt, also ist  $\overline{TK_1(0)}$  totalbeschränkt. Mit 6.1.2 folgt die Behauptung.



**Beispiel 6.1.3.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $u \in H, v \in H'$ , dann

Hier fehlt noch der Rest des Beispiels.

**Satz 6.1.3.** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Wir definieren

$$\text{dist}(y, W) = \inf \{\|y - w\|, w \in W\}.$$

Dann ist  $Y \subset V$  totalbeschränkt, genau dann wenn  $Y$  beschränkt und

$$\forall \varepsilon > 0 \exists W \subset V, W \text{ endl. dim. } \forall y \in Y : \text{dist}(y, W) < \varepsilon. (*)$$

*Proof.*  $(\Rightarrow)$

Sei  $Y$  totalbeschränkt, dann ist  $Y$  beschränkt. Fixiere ein  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es

$$y_1, \dots, y_m \in Y \text{ mit } Y \subseteq \cup_{i=1}^m K_\varepsilon(y_i)$$

und damit

$$\forall y \in Y \exists i : \|y - y_i\| < \varepsilon.$$

Setzen wir nun  $W = \text{span} \{y_i | i = 1, \dots, m\}$  und wir sind fertig.

$(\Leftarrow)$

Sei  $Y$  beschränkt und gelte  $(*)$ ,  $\varepsilon > 0, W$  gemäß  $(*)$  mit  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Mit  $M = \sup\{\|y\| : y \in Y\} < \infty$ . Sei  $Z \subseteq \overline{K_{m+\varepsilon}(0)} \cap W$ . Dann ist  $Z$  totalbeschränkt, d.h.

$$\exists z_1, \dots, z_m \in Z \subseteq \cup_{i=1}^m K_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_i)$$

Sei nun  $y \in Y$ , dann gibt es ein  $w \in W$  mit  $\|y - w\| < \frac{\varepsilon}{2}$  und damit

$$\|w\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|y\| \leq M + \frac{\varepsilon}{2}$$

und damit  $w \in Z$ . Damit

$$\exists i : \|w - z_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies \|y - z_i\| < \varepsilon.$$

D.h. konkret:

$$Y \subseteq \cup_{i=1}^m K_\varepsilon(z_i) \implies \exists y_1, \dots, y_m \in Y : Y \subseteq \cup_{i=1}^m K_{2\varepsilon}(y_i).$$

□

**Satz 6.1.4.** Seien  $V, W, U, X$  Banachräume und  $S_1 \in \mathcal{B}(W, X), S_2 \in \mathcal{B}(U, V), \alpha \in \mathbb{K}$  sowie  $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(V, W)$ . Dann sind  $T_1 + T_2, \alpha T_1 \in \mathcal{K}(V, W)$  und  $S_1 T_1 \in \mathcal{K}(V, X), T_1 S_2 \in \mathcal{K}(U, W)$ .

D. h. die Addition kompakter Operatoren und deren Multiplikation mit Skalaren ergibt wieder einen kompakten Operator. Weiterhin ist die beidseitige Komposition eines beschränkten mit einem kompakten Operator wieder kompakt.

*Beweis.* Betrachte zunächst die Addition  $T_1 + T_2$ . Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in V$  eine beschränkte Folge. Da  $T_1$  kompakt, gilt nach Definition

$$\exists \text{ TF } (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} : (T_1 x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert in } W.$$

Da die Folge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  ebenfalls wieder beschränkt ist und  $T_2$  kompakt, gilt

$$\exists \text{ TTF } (x_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}} : (T_2 x_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}} \text{ und } (T_1 x_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}} \text{ konvergieren in } W.$$

Damit konvergiert aber auch die Folge

$$\left( (T_1 + T_2) x_{n_{k_l}} \right)_{l \in \mathbb{N}} = \left( T_2 x_{n_{k_l}} \right)_{l \in \mathbb{N}} + \left( T_1 x_{n_{k_l}} \right)_{l \in \mathbb{N}}$$

in  $W$ . Somit ist  $T_1 + T_2 \in \mathcal{K}(V, W)$ .  $\alpha T_1 \in \mathcal{K}(V, W)$  ist trivial. Betrachte nun  $S_1 T_1$ . Nach Satz 6.1.2 genügt zu zeigen, dass  $S_1 T_1 \overline{K_1^V(0)}$  totalbeschränkt ist. Da  $T_1$  ein kompakter Operator ist, gilt (mit Definition der Folgenkompaktheit), dass  $\overline{T_1 \overline{K_1^V(0)}}$  kompakt ist. Da stetige Abbildungen Kompaktheit erhalten, ist also auch  $S_1 T_1 \overline{K_1^V(0)}$  kompakt, d. h. insbesondere totalbeschränkt. Somit gilt (unter Ausnutzung von Bem. 6.1.4).

$$S_1 T_1 \overline{K_1^V(0)} \subseteq \overline{S_1 T_1 \overline{K_1^V(0)}} \text{ ist totalbeschränkt.}$$

Betrachte nun  $T_1 S_2$ , auch hier genügt zu zeigen, dass  $T_1 S_2 \overline{K_1^U(0)}$  totalbeschränkt ist. Mit  $\|S_2 u\| \leq \|S_2\| \|u\|$  für alle  $u \in U$  gilt

$$S_2 \overline{K_1^U(0)} \subseteq \overline{K_{\|S_2\|}^V(0)} = \|S_2\| \overline{K_1^V(0)}.$$

Damit gilt nun

$$T_1 S_2 \overline{K_1^U(0)} \subseteq T_1 \|S_2\| \overline{K_1^V(0)} = \|S_2\| T_1 \overline{K_1^V(0)}.$$

Da  $T_1$  kompakt, ist also  $T_1 \overline{K_1^V(0)}$  totalbeschränkt und somit auch  $T_1 S_2 \overline{K_1^U(0)}$ .  $\square$

*Bemerkung 6.1.4.* Anders als bei kompakten Mengen, gilt für totalbeschränkte Mengen, dass jede Teilmenge einer totalbeschränkten Menge wieder totalbeschränkt ist.

**Satz 6.1.5.** Seien  $V, W$  Banachräume und  $\forall n \in \mathbb{N} : T_n \in \mathcal{K}(V, W)$  sowie  $T \in \mathcal{B}(V, W)$ . Sei  $\|\cdot\|$  die Operatornorm und gelte  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$  bzgl.  $\|\cdot\|$ . Dann gilt auch  $T \in \mathcal{K}(V, W)$ .

*Proof.* Es g. z. z., dass  $T \overline{K_1^V(0)}$  total beschränkt ist. Sei  $\varepsilon > 0$  fixiert und  $n \in \mathbb{N}$  so, dass  $\|T - T_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Da nach Voraussetzung  $T_n$  kompakt, ist  $T_n \overline{K_1^V(0)}$  totalbeschränkt, d. h. nach Definition

$$\exists x_1, \dots, x_m \in \overline{K_1^V(0)} : T_n \overline{K_1^V(0)} \subseteq \bigcup_{i=1}^m K_{\frac{\varepsilon}{3}}(T_n x_i).$$

Sei nun  $x \in \overline{K_1^V(0)}$ , d. h.  $\|x\|_V \leq 1$ . Damit gilt

$$T_n x \in T_n \overline{K_1^V(0)} \implies \exists i \in \{1, \dots, m\} : \|T_n x - T_n x_i\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nun lässt sich die Dreiecksungleichung anwenden mit ( $\|x\|_V \leq 1$ ,  $\|x_i\|_V \leq 1$ ):

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx_i\| &\leq \|Tx - T_n x\| + \|T_n x - T_n x_i\| + \|T_n x_i - Tx_i\| \\ &= \|(T - T_n)x\| + \|T_n x - T_n x_i\| + \|(T_n - T)x_i\| \\ &< \|(T - T_n)x\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|(T_n - T)x_i\| \\ &\leq \|T - T_n\| \|x\|_V + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_n - T\| \|x_i\|_V \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Somit gilt also

$$\overline{TK_1^V(0)} \subseteq \bigcup_{i=1}^m K_\varepsilon(x_i) \iff \overline{TK_1^V(0)} \text{ totalbeschränkt}$$

d. h.  $T$  ist in der Tat kompakt. □

## 6.2 Hilbert-Schmidt-Operatoren

*Bemerkung 6.2.1* (Motivation). Betrachte eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , d. h. im Fall des endlichdimensionalen Vektorraums  $\mathbb{C}^n$ . Dann sind die Determinante  $\det(A)$  und die Spur  $\text{tr}(A)$  definiert. Sei nun  $H$  ein Hilbertraum,  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$  eine Orthonormalbasis und  $T \in B(H)$ . Wir können nun versuchen lineare Operatoren als unendliche Matrizen aufzufassen, mit (für  $S, T \in B(H)$ )

$$T_{nm} := \langle e_n, T e_m \rangle, \quad T \longleftrightarrow (T_{nm})_{n,m \in \mathbb{N}}, \quad (ST)_{nm} = \sum_{k \in \mathbb{N}} S_{nk} T_{km}.$$

Nun stellt sich die Frage, ob sich damit eine Spur für beschränkte lineare Operatoren definieren lässt, mit

$$\text{tr}(T^*T) \text{ " = " } \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, T^*T e_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle T e_n, T e_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|T e_n\|^2.$$

Dies ist jedoch i. A. nicht konvergent und folglich nicht wohldefiniert. Dies motiviert folgende Definition.

**Definition 6.2.1.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $(e_s)_{s \in S} \in H^S$  eine Orthonormalbasis und  $T \in B(H)$ . Dann ist  $T$  ein *Hilbert-Schmidt-Operator*, falls

$$\sum_{s \in S} \|T e_s\|^2 < \infty.$$

*Bemerkung 6.2.2.* Für die Wohldefiniertheit muss vorausgesetzt werden, dass  $\{s \in S \mid \|T e_s\| > 0\}$  abzählbar ist. Hier nehmen wir o. B. d. A. an, dass  $S$  abzählbar und  $H$  separabel ist.

**Satz 6.2.1.** Sei  $H$  ein (separabler) Hilbertraum,  $T \in \mathcal{B}(H)$  und  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Orthonormalbasis von  $H$ . Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine weitere Orthonormalbasis von  $H$ . Dann gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|T e_n\|^2 < \infty \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} \|T f_n\|^2 < \infty \text{ und } \sum_{n \in \mathbb{N}} \|T f_n\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|T e_n\|^2.$$

*Proof.* Da  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Orthonormalbasen sind, gilt

$$\forall x \in H : x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle e_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f_n, x \rangle f_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, x \rangle|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f_n, x \rangle|^2.$$

Somit gilt insbesondere für alle  $n, j \in \mathbb{N}$

$$\|T e_n\|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} |\langle f_j, T e_n \rangle|^2, \quad \|T^* f_j\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, T^* f_j \rangle|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f_n, T^* f_j \rangle|^2.$$

Weiterhin gilt damit

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|T f_n\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |\langle f_j, T f_n \rangle|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |\langle f_n, T^* f_j \rangle|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \|T^* f_j\|^2.$$

Dies können wir nun ausnutzen mit

$$\infty > \sum_{n \in \mathbb{N}} \|Te_n\|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f_j, Te_n \rangle|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, T^* f_j \rangle|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \|T^* f_j\|^2 .$$

Dabei folgt die Vertauschbarkeit der Summen aus der vorausgesetzten Konvergenz der Reihe. Mit der Rechnung davor folgt also in der Tat

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|Te_n\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|Tf_n\|^2 .$$

□

*Bemerkung 6.2.3.* Die Aussage entspricht im endlichdimensionalen Fall der Invarianz der Spur unter Koordinatentransformationen.

**Definition 6.2.2.** Sei  $H$  ein separabler Hilbertraum mit Orthonormalbasis  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ ,  $T \in B(H)$  Hilbert-Schmidt. Dann definiert

$$\|T\|_{HS} := \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} \|Te_n\|^2} .$$

eine Norm, die *Hilbert-Schmidt-Norm*. Die Wohldefiniertheit folgt aus Satz 6.2.1.

*Bemerkung 6.2.4.* Für einen separablen Hilbertraum  $H$  mit einer Orthonormalbasis  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H^{\mathbb{N}}$  ist der Raum der Hilbert-Schmidt-Operatoren  $HS(H)$  mit  $\|\cdot\|_{HS}$  ebenfalls ein Hilbertraum, wobei die Norm von folgendem Skalarprodukt induziert wird:

$$\forall A, B \in HS(H) : \langle A, B \rangle_{HS} := \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle Ae_n, Be_n \rangle .$$

**Satz 6.2.2.** Sei  $H$  ein separabler Hilbert-Raum (mit Norm  $\|\cdot\|_H$ ). Seien  $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(H)$  Hilbert-Schmidt und  $S \in \mathcal{B}(H)$ . Dann sind auch  $T_1 + T_2$ ,  $ST_1$ ,  $T_1S$ ,  $T^*$  Hilbert-Schmidt.

*Proof.* Sei  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$  eine Orthonormalbasis von  $H$ . Der Beweis für  $T^*$  ist trivial. Betrachte nun  $ST$ , dann gilt unter Verwendung der Eigenschaften der Operatornorm  $\|\cdot\|$  und mit der Beschränktheit von  $S$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|STe_n\|_H^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \|S\|^2 \|Te_n\|_H^2 < \infty .$$

Somit ist  $ST$  in der Tat Hilbert-Schmidt. Weiterhin gilt  $TS = (S^*T^*)^*$ , woraus die Behauptung für  $TS$  analog folgt. Betrachte nun die  $T_1 + T_2$ , dann gilt mit  $\|T_1e_n\|_H \|T_2e_n\|_H \leq \|T_1\|_H^2 + \|T_2\|_H^2$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|(T_1 + T_2)e_n\|_H^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (\|T_1e_n\|_H + \|T_2e_n\|_H)^2 \leq 2 \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \|T_1e_n\|_H^2 + \|T_2e_n\|_H^2 \right) < \infty .$$

Somit ist auch die Summe von Hilbert-Schmidt-Operatoren wieder Hilbert-Schmidt. □

**Satz 6.2.3.** Jeder Hilbert-Schmidt-Operator auf einem separablen Hilbertraum  $H$  ist kompakt.

*Proof.* Sei  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine fixe Orthonormalbasis von  $H$  und  $A \in \mathcal{B}(H)$  Hilbert-Schmidt. Wir stellen im Folgenden  $A$  als Limes von kompakten Operatoren dar, womit dann aus Satz 6.1.5 die Behauptung folgt. Bezeichne mit  $P_n$  die orthogonale Projektion auf den Unterraum  $\text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ . Setze nun  $A_n = AP_n$ . D. h. es gilt  $\forall h \in H$ :

$$P_n h = \sum_{j=0}^n \langle e_j, h \rangle e_j \implies A_n h = \sum_{j=0}^n \langle e_j, h \rangle A e_j .$$

Offensichtlich ist  $A_n$  linear. Weiterhin gilt

$$A_n H \subseteq \text{span} \{Ae_1, \dots, Ae_n\} \implies \dim A_n H < \infty .$$

Nach Beispiel 6.1.2 ist  $A_n$  folglich ein kompakter Operator. Mit  $\forall h \in H : (A - A_n)h = \sum_{j>n} \langle e_j, h \rangle Ae_j$  und unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (bzgl.  $\|\cdot\|_2$ ) gilt weiterhin

$$\|(A - A_n)h\|_H = \left\| \sum_{j>n} \langle e_j, h \rangle Ae_j \right\|_H \leq \sum_{j>n} |\langle e_j, h \rangle| \|Ae_j\|_H \leq \sqrt{\sum_{j>n} |\langle e_j, h \rangle|^2} \sqrt{\sum_{j>n} \|Ae_j\|_H^2} .$$

Dabei gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{j>n} \|Ae_j\|_H^2} = 0$ , da  $A$  Hilbert-Schmidt ist. Folglich gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_n\| = 0 .$$

Somit ist  $A$  in der Tat kompakt. □

*Bemerkung 6.2.5.* Die Gegenrichtung des Satzes gilt nicht.

**Beispiel 6.2.1.** Betrachte den Hilbertraum  $H = \ell^2(\mathbb{N})$  mit der Standardbasis  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ , sowie dem Multiplikationsoperator (siehe Bsp. 5.1.3)  $T = M_\lambda$  für  $\lambda := (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , d. h.

$$Te_n = \lambda_n e_n .$$

Dann gilt, dass  $T$  ein Hilbert-Schmidt-Operator ist, genau dann wenn

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|Te_n\|^2 < \infty \iff \sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n|^2 < \infty \iff \lambda \in l^2(\mathbb{N}) .$$

**Satz 6.2.4.** Sei  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum,  $L^2(\mu)$  separabel und  $k(x, y) \in \mathcal{L}^2(\mu \otimes \mu)$ . Dann definiert

$$(Kf)(x) := \int_{\Omega} k(x, y) f(y) \mu(dy)$$

einen Hilbert-Schmidt-Operator  $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ .

*Proof.* Wir zeigen zunächst, dass  $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ , insbesondere zuerst, dass  $K : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ . Sei  $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ,  $f \stackrel{\mu}{=} 0$  (d. h.  $[f] = [0]$  in  $L^2(\mu)$ ). Damit gilt in der Tat

$$\forall x \in \Omega : k(x, y) f(y) = 0 \text{ für } \mu\text{-fast alle } y \in \Omega \implies \forall x \in \Omega : (Kf)(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y) \mu(dy) = 0 .$$

Nach Voraussetzung gilt  $k(x, y) \in \mathcal{L}^2(\mu \otimes \mu)$ , d. h. es gilt mit dem Satz von Fubini (Satz 2.2.4)

$$\infty > \int_{\Omega \times \Omega} |k(x, y)|^2 \mu \otimes \mu(d(x, y)) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} |k(x, y)|^2 \mu(dy) \mu(dx) .$$

Folglich gilt

$$\int_{\Omega} |k(x, y)|^2 \mu(dy) < \infty \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \in \Omega \iff k(x, \cdot) \in L^2(\mu) .$$

Sei nun  $f \in L^2(\mu)$ . Wir wenden die Hölder-Ungleichung mit  $p = q = 2$  an und erhalten

$$\forall x \in \Omega : \|k(x, \cdot) f\|_1 = \int_{\Omega} |k(x, y) f(y)| \mu(dy) \leq \|k(x, \cdot)\|_2 \|f\|_2 < \infty .$$

Hier wurde nur gezeigt, dass  $Kf(x) \in L^1(\mu)$ , woraus folgt dann, dass  $Kf(x) \in L^2(\mu)$ ?

Nun zeigen wir, dass  $K$  beschränkt ist. Sei  $f \in L^2(\mu)$ , dann gilt mit Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|Kf\|_2^2 &= \int_{\Omega} |Kf(x)|^2 \mu(dx) = \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} k(x, y) f(y) \mu(dy) \right|^2 \mu(dx) = \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} \overline{k(x, y)} f(y) \mu(dy) \right|^2 \mu(dx) \\ &\leq \int_{\Omega} \int_{\Omega} |k(x, y)|^2 \mu(dy) \int_{\Omega} |f(z)|^2 \mu(dz) \mu(dx) \leq \|k\|_{L^2(\mu \otimes \mu)}^2 \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Somit  $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ . Zeigen nun die Hilbert-Schmidt-Eigenschaft. Da  $L^2(\mu)$  separabel nach Voraussetzung, sei  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^2(\mu)^{\mathbb{N}}$  eine Orthonormalbasis. Dann gilt

$$\|Ke_n\|_2^2 = \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} k(x, y) e_n(y) \mu(dy) \right|^2 \mu(dx) = \int_{\Omega} |\langle \overline{e_n}, k(x, \cdot) \rangle|^2 \mu(dx).$$

Wir wenden nun Beppo-Levi an und erhalten

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|Ke_n\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} |\langle \overline{e_n}, k(x, \cdot) \rangle|^2 \mu(dx) = \int_{\Omega} \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle \overline{e_n}, k(x, \cdot) \rangle|^2 \mu(dx).$$

Es ist leicht einzusehen, dass  $(\overline{e_n})_{n \in \mathbb{N}}$  ebenfalls eine Orthonormalbasis von  $L^2(\mu)$  ist. Somit

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle \overline{e_n}, k(x, \cdot) \rangle|^2 = \|k(x, \cdot)\|_2^2.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \|Ke_n\|_2^2 &= \int_{\Omega} \|k(x, \cdot)\|_2^2 \mu(dx) = \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} |k(x, y)|^2 \mu(dy) \right) \mu(dx) \\ &= \int_{\Omega \times \Omega} |k(x, y)|^2 \mu \otimes \mu(dx, y) < \infty. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt  $k \in \mathcal{L}^2(\mu \otimes \mu)$  ausgenutzt. Somit ist  $K$  in der Tat Hilbert-Schmidt.  $\square$

## 6.3 Eigenwerte und -vektoren von kompakten Operatoren

In diesem Kapitel sei  $H$  immer ein Hilbertraum.

**Definition 6.3.1.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  und  $T \in \mathcal{B}(H)$ . Dann heißen  $\lambda \in \mathbb{C}$  Eigenwert und  $x \in H \setminus \{0\}$  zugehöriger Eigenvektor von  $T$ , wenn  $Tx = \lambda x$ .

*Bemerkung 6.3.1.* Es stellt sich die Frage, ob sich der Raum durch die Eigenvektoren aufspannen lässt. Im Allgemeinen hat aber nicht einmal jeder Operator einen Eigenwert. Betrachte dazu das folgende Beispiel:

**Beispiel 6.3.1.** Sei  $H = L^2([0, 1])$ ,  $T = M_{\text{id}}$ , d.h.  $Tf(x) = xf(x)$ . Sei nun  $f \neq 0$ , und nehme an, es gäbe einen Eigenwert, dann

$$xf(x) = Tf(x) = \lambda f(x) \implies \forall x \in H : f(x)(\lambda - x) = 0 \implies f = 0.$$

Damit erhalten wir einen Widerspruch.

**Satz 6.3.1.** Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$  selbstadjungiert und  $\lambda$  Eigenwert, (dann gilt  $\lambda \in \mathbb{R}$ ), sei  $x$  ein Eigenvektor zu  $\lambda$ ,  $\mu$  Eigenwert zu  $y \in H$  mit  $\lambda \neq \mu$ , dann  $x \perp y$ .

*Beweis.* Betrachte:

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda \langle x, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle = \bar{\lambda} \|x\|^2$$

Damit sind  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Betrachte nun weiterhin:

$$\mu \langle x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \implies \langle x, y \rangle = 0.$$

□

**Satz 6.3.2.** Sei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $T \in \mathcal{B}(H)$ , dann  $|\lambda| \leq \|T\|$ .

*Beweis.* Betrachte:

$$|\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$$

□

**Satz 6.3.3.** Sei  $T \in \mathcal{K}(H)$ , dann ist für alle  $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\dim(\ker(T - \lambda \text{Id})) < \infty$ .

*Beweis.* Nehme an  $\dim(\ker(T - \lambda \text{Id})) = \infty$ , d.h. wir haben ein Orthonormalsystem  $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\ker(T - \lambda \text{Id})$  mit  $\|\ell_n\| \leq 1$ , dann betrachte:

$$\|T\ell_n - T\ell_m\| = \|\lambda\ell_n - \lambda\ell_m\| = |\lambda| \|\ell_n - \ell_m\| = |\lambda| \sqrt{2}.$$

Damit ist  $(T\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Cauchy-Folge. Damit gibt es kein  $y \in H$  mit  $T\ell_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ . Damit ist  $T \notin \mathcal{K}(H)$ .

□

*Bemerkung 6.3.2.* Falls  $T \in \mathcal{B}(H)$ , dann gilt

1.  $\|T\| = \sup \{\|Ty\| : \|y\| \leq 1\},$
2.  $\|z\| = \sup \{|\langle x, z \rangle| : \|x\| \leq 1\},$
3. Wir wissen also:  $\|T\| = \sup \{|\langle x, Ty \rangle| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}.$

**Satz 6.3.4.** Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$  selbstadjungiert, dann  $\|T\| = \sup \{|\langle x, Tx \rangle| : \|x\| \leq 1\}.$

*Beweis.* Sei  $M := \sup \{|\langle x, Tx \rangle| : \|x\| = 1\}$ . Für alle  $x \in H \setminus \{0\}$  gilt nun  $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$ . Damit folgt (auch für  $x = 0$ ):

$$|\langle x, Tx \rangle| = \|x\|^2 \left| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, T \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq \|x\|^2 M.$$

Für alle  $x \in H$  mit  $\|x\| = 1$  gilt mit der CBS-Ungleichung:

$$|\langle x, Tx \rangle| \leq \|x\| \|Tx\| \leq \|x\|^2 \|T\| = \|T\| \implies M \leq \|T\|.$$

Sei nun  $f, g \in H$ , dann können wir ausrechnen:

$$\langle f + g, T(f + g) \rangle - \langle f - g, T(f - g) \rangle = 2 \langle f, Tg \rangle + 2 \langle g, Tf \rangle = 2 \langle f, Tg \rangle + 2 \langle Tg, f \rangle = 4 \operatorname{Re} \{ \langle f, Tg \rangle \}.$$

Seien nun  $x, y \in H$ , dann können wir ausrechnen:

$$\langle x, Tx \rangle - \langle y, Ty \rangle \leq |\langle x, Tx \rangle| + |\langle y, Ty \rangle| \leq M(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \frac{M}{2}(\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2).$$

Sei nun  $v \in H$  mit  $\|v\| \leq 1$ ,  $Tv \neq 0$ ,  $g = v$  und  $f = \frac{1}{\|Tv\|}Tv$ . Definieren wir uns nun

- $x = f + g = v + \frac{1}{\|Tv\|}Tv$ ,
- $y = f - g = -v + \frac{1}{\|Tv\|}Tv$ .

so, dass  $\|x\|, \|y\| \leq 2$ , dann können wir abschätzen:

$$\|x, Tx\| - \|y, Ty\| \leq \frac{M}{2}(\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2) \leq 4M.$$

Wenn wir nun alle Puzzelteile zusammensetzen erhalten wir unser Ergebnis:

$$4\|Tv\| = 4 \operatorname{Re} \left\langle \frac{1}{\|Tv\|}Tv, Tv \right\rangle = \langle x, Tx \rangle - \langle y, Ty \rangle \leq 4M \implies \|T\| \leq M.$$

□

**Satz 6.3.5.** Sei  $T \in \mathcal{K}(H)$  selbstadjungiert, dann ist  $\|T\|$  oder  $-\|T\|$  ein Eigenwert.

*Beweis.* Sei o.B.d.A  $\|T\| \neq 0$ . Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $\|x_n\| = 1$  mit  $|\langle x_n, Tx_n \rangle| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|T\|$ . Damit gibt es  $\lambda \in \{\|T\|, -\|T\|\}$  und eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\langle x_{n_k}, Tx_{n_k} \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda$ . Da  $T$  kompakt ist, gibt es eine Teilfolge  $(x_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$  und ein  $y \in H$  mit  $x_{n_{k_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} y$ . Betrachte nun:

$$\left\| Tx_{n_{k_l}} - \lambda x_{n_{k_l}} \right\|^2 = \underbrace{\left\| Tx_{n_{k_l}} \right\|^2}_{\leq \|T\|^2 = \lambda^2} - 2\lambda \underbrace{\langle x_{n_{k_l}}, Tx_{n_{k_l}} \rangle}_{\xrightarrow{l \rightarrow \infty} \lambda} + \lambda^2 \left\| x_{n_{k_l}} \right\|^2 \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0.$$

Da  $T$  stetig ist, folgt mit

$$Tx_{n_{k_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} Ty \implies \lambda x_{n_{k_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} Ty.$$

Da  $T$  kompakt und der Grenzwert eindeutig ist, folgt:

$$\lambda x_{n_{k_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \lambda y = Ty.$$

Wobei  $\left\| x_{n_{k_l}} \right\| = 1$  und damit  $\|y\| = 1$ , also  $\|y\| \neq 0$ . Folglich  $Ty = \lambda y$  und  $y$  ist ein Eigenvektor zu  $\lambda$  von  $T$ .

□

**Satz 6.3.6.** Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$  selbstadjungiert und  $L \subseteq H$  abgeschlossen, dann gilt

$$TL^\perp \subseteq L^\perp = \{v \in H : \forall w \in L, v \perp w\}.$$



*Beweis.* Sei  $v \in L^\perp$  und für alle  $w \in L : \langle v, w \rangle = 0$ . Sei  $w \in L$  beliebig,  $\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle = 0$ .  $\square$

**Satz 6.3.7.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $T \in \mathcal{B}(H)$  ein kompakter, selbstadjungierter Operator. Dann ist

$$\Sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \exists x \in H \setminus \{0\} : Tx = \lambda x\}$$

eine endliche oder abzählbar unendliche Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Im letzteren Fall gibt es eine Teilfolge  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\forall n \neq m : \lambda_n \neq \lambda_m$ , wobei  $\Sigma(T) := \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ .

Wieso schließen wir 0 als Eigenwert aus?

*Proof.* Die Behauptung  $\Sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$  folgt aus Satz 6.3.1. Falls  $\Sigma(T)$  endlich ist, dann sind wir fertig. Nehmen wir also an, dass  $\Sigma(T)$  unendlich ist. Sei  $\varepsilon > 0$ . Zeigen nun per Widerspruch, dass

$$M := \{\lambda_n \in \Sigma(T) \mid |\lambda_n| > \varepsilon\}$$

endlich ist. Angenommen  $M$  ist unendlich, d. h.

$$\exists (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \forall n \neq m : \lambda_n \neq \lambda_m, \forall n \in \mathbb{N} : |\lambda_n| > \varepsilon, \lambda_n \in \Sigma(T).$$

Damit gibt es Eigenvektoren

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in H \setminus \{0\}, Tx_n = \lambda_n x_n.$$

Dabei nehmen wir o. B. d. A. an, dass  $\forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| = 1$ . Nach Satz 6.3.2 gilt  $\forall n \in \mathbb{N} : |\lambda_n| \leq \|T\|$ , weiterhin ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt. Da  $T$  kompakt ist, existiert ein  $y \in H$  sowie eine Teilfolge

$$(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} Tx_{n_k} = y.$$

Insbesondere ist  $(Tx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge. Weiterhin gilt

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l : x_{n_k} \perp x_{n_l} \implies Tx_{n_k} = \lambda_{n_k} x_{n_k} \perp \lambda_{n_l} x_{n_l} = Tx_{n_l}.$$

Somit folgt

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\|^2 = \|Tx_{n_k}\|^2 + \|Tx_{n_l}\|^2 = \lambda_{n_k}^2 \|x_{n_k}\|^2 + \lambda_{n_l}^2 \|x_{n_l}\|^2 > 2\varepsilon^2.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Definition der Cauchyfolge. Damit ist

$$\forall \varepsilon > 0 : \{\lambda \in \Sigma(T) \mid |\lambda| > \varepsilon\} \text{ endlich.}$$

Folglich ist  $\Sigma(T)$  abzählbar, da insbesondere

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left\{ \lambda \in \Sigma(T) \mid |\lambda| > \frac{1}{n} \right\} \text{ endlich.}$$

Außerdem folgt daraus, dass die Eigenwerte im abzählbar unendlichen Fall eine Nullfolge bilden.  $\square$

*Bemerkung 6.3.3.* Die Separabilität des Hilbertraums  $H$  ist keine notwendige Voraussetzung.

**Satz 6.3.8.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$  und  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  orthogonale Projektionen, d. h.

$$\forall n \in \mathbb{N} : P_n \in \mathcal{B}(H), P_n = P_n^* = P_n^2.$$

Gelte weiterhin  $\forall n \neq m : P_n P_m = P_m P_n = 0$ . Dann existiert  $T = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n P_n$  in Operatornorm.

*Proof.* Es g. z. z., dass  $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$  mit  $T_N := \sum_{n=0}^N \lambda_n P_n$  eine Cauchyfolge bzgl. der Operatornorm  $\|\cdot\|$  ist (da  $\mathcal{B}(H)$  insbesondere ein Banachraum). Sei  $x \in H$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \|T_N x\|_H^2 &= \left\langle \sum_{n=0}^N \lambda_n P_n x, \sum_{m=0}^N \lambda_m P_m x \right\rangle = \sum_{n,m=0}^N \overline{\lambda_n} \lambda_m \langle P_n x, P_m x \rangle = \sum_{n,m=0}^N \overline{\lambda_n} \lambda_m \overbrace{\langle x, P_n P_m x \rangle}^{=0 \text{ für } n \neq m} \\ &= \sum_{n=0}^N |\lambda_n|^2 \|P_n x\|_H^2 \leq \max \{|\lambda_n| \mid 0 \leq n \leq N\}^2 \sum_{n=0}^N \|P_n x\|_H^2 \\ &\leq \max \{|\lambda_n| \mid 0 \leq n \leq N\}^2 \|x\|_H^2 \end{aligned}$$

Wir begründen nun die letzte Abschätzung  $\sum_{n=0}^N \|P_n x\|_H^2 \leq \|x\|_H^2$ . Wegen der paarweisen Orthogonalität der Unterräume, auf die projiziert wird, gilt

$$\left\| \left( \sum_{n=0}^N P_n \right) x \right\|_H^2 = \left\langle \sum_{n=0}^N P_n x, \sum_{m=0}^N P_m x \right\rangle = \sum_{n=0}^N \|P_n x\|_H^2 .$$

Außerdem ist mit dieser Voraussetzung auch  $P := \sum_{n=0}^\infty P_n$  wieder eine orthogonale Projektion.  $P^* = P$  ist klar und  $P^2 = P$  folgt aus der Orthogonalitätsbedingung für die Unterräume (d. h.  $\forall n \neq m : P_n P_m = P_m P_n = 0$ ). Es gilt also

$$\sum_{n=0}^N \|P_n x\|_H^2 = \|P x\|_H^2 .$$

Weiterhin gilt  $\|P\| \leq 1$ . Sei nämlich  $\|P\| > 0$  (sonst fertig), dann gilt für  $x \in H$  mit Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|P x\|_H^2 &= |\langle P x, P x \rangle| = |\langle x, P P x \rangle| = |\langle x, P x \rangle| \leq \|x\|_H \|P x\|_H \\ \implies \frac{\|P x\|_H}{\|x\|_H} &\leq 1 \implies \|P\| \leq 1 . \end{aligned}$$

Wir erhalten also insgesamt

$$\|T_N\| = \left\| \sum_{n=0}^N \lambda_n P_n \right\| \leq \max \{|\lambda_n| \mid 0 \leq n \leq N\} .$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  fixiert und  $N_0 \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $\forall n \geq N_0 : |\lambda_n| < \varepsilon$ . Dann gilt für  $N, M \geq N_0$ , o. B. d. A.  $N \leq M$

$$\left\| \sum_{n=0}^M \lambda_n P_n - \sum_{n=0}^N \lambda_n P_n \right\| = \left\| \sum_{n=N+1}^M \lambda_n P_n \right\| \leq \max \{|\lambda_n| \mid N+1 \leq n \leq M\} < \varepsilon .$$

□

**Satz 6.3.9** (Spektralsatz für kompakte Operatoren). Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $T \neq 0$ ,  $T \in \mathcal{K}(H)$  selbstadjungiert. Bezeichne hier

$$\Sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists x \in H \setminus \{0\} : T x = \lambda x\} =: \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad N(\lambda) := \ker(T - \lambda I) .$$

Dabei gilt nach Satz 6.3.7  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ . Dann gilt in Operatornorm (wobei  $P_{N(\lambda)}$  die Projektion auf den Eigenraum zu  $\lambda$  bezeichnet)

$$T = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n P_{N(\lambda_n)} . \quad (*)$$

Speziell gibt es ein ONS  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sowie  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\Sigma(T) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , sodass bzgl. der Operatornorm gilt

$$T = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |e_n\rangle \langle e_n| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n P_{\mathbb{C}e_n} . \quad (**)$$

*Bemerkung 6.3.4.* In der Bra-Ket-Notation gilt

$$\forall x \in H : (|e_n\rangle \langle e_n|)(x) = \langle e_n | x \rangle |e_n\rangle .$$

*Proof.* Bei den Eigenräumen handelt es sich um paarweise orthogonale Unterräume, d. h. es gilt

$$\forall \lambda_n, \lambda_m \in \Sigma(T) : \lambda_n \neq \lambda_m \implies N(\lambda_n) \perp N(\lambda_m) .$$

Somit erfüllen die Projektionen auf die Eigenräume gerade die Voraussetzungen von Satz 6.3.8, d. h. die rechte Seite von (\*) existiert. Bezeichne nun

$$S = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n P_{N(\lambda_n)} \in \mathcal{B}(H) \quad \text{und} \quad L = \overline{\text{span} \{x \in N(\lambda) \mid \lambda \in \Sigma(T)\}} .$$

Dabei gilt nun

$$\forall \lambda \in \Sigma(T) \quad \forall x \in N(\lambda) : Tx = \lambda x \in N(\lambda) \implies TL \subseteq L .$$

Außerdem haben wir bereits gezeigt  $TL^\perp \subseteq L^\perp$ . Da  $L$  ein abgeschlossener Unterraum ist, können wir Satz 5.1.4 anwenden, d. h. es existieren  $P, Q \in \mathcal{B}(H)$  mit

$$\forall x \in H : Px \in L, Qx \in L^\perp \quad \text{und} \quad Px + Qx = x .$$

Dabei ist bekannt, dass  $H \cong L \oplus L^\perp$  sowie  $P = P_L$  und  $Q = P_{L^\perp}$ , d. h. wir können schreiben  $T = TP + TQ$ . Es gilt insbesondere  $PTP = TP$  (analog für  $Q$ ). Insgesamt erhalten wir damit die Darstellung

$$T = PTP + QTQ .$$

Aufgrund der Definition von  $S$  ist klar, dass gilt

$$SL \subseteq L, SL^\perp \subseteq L^\perp, S = S^* \quad \text{und} \quad S|_{L^\perp} = 0$$

Analog gilt also

$$S = PSP + \overbrace{QSQ}^{=0} = PSP .$$

Sei nun  $x \in N(\lambda_n) \subseteq L$  (d. h.  $Tx = \lambda_n x$ ), dann gilt

$$Sx = \sum_{m \in \mathbb{N}} \lambda_m \overbrace{P_{N(\lambda_m)} x}^{=0 \text{ für } m \neq n} = \lambda_n x = Tx = PTPx .$$

Für  $x \in L^\perp$  gilt offensichtlich ebenfalls  $Sx = PTPx$ , d. h. es gilt

$$S = PTP .$$

Nach Satz 6.1.4 gilt  $QTQ \in \mathcal{K}(H)$ . Angenommen es gelte  $\|QTQ\| > 0$ . Nach Satz 6.3.5 folgt dann, dass  $\|QTQ\|$  oder  $-\|QTQ\|$  ist Eigenwert von  $QTQ$ , bezeichne diesen Eigenwert hier mit  $\lambda$ . Folglich gilt (unter Verwendung von  $\forall y \in L^\perp : Qy = P_{L^\perp} y = y$ )

$$\exists x \in L^\perp \text{ mit } Qx = x \neq 0 : TQx = QTQx = \lambda x = \lambda Qx \implies \lambda \in \Sigma(T) .$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zu  $x \in L^\perp$ , d. h. es muss  $\|QTQ = 0\| \implies QTQ = 0$  gelten. Daraus folgt sofort  $T = S$ , womit (\*) gezeigt ist. Betrachte nun die zweite Identität. Sei dazu

$$(e_{nm})_{m=1}^{\dim(N(\lambda_n))} \text{ eine ONB von } N(\lambda_n) .$$

Dann ist

$$\{e_{nm} \mid n \in \mathbb{N}, m = 1, \dots, \dim(N(\lambda_n))\} \text{ ein ONS mit } P_{N(\lambda_n)} = \sum_{m=1}^{\dim(N(\lambda_n))} |e_{nm}\rangle \langle e_{nm}| .$$

□

Durch Aufzählen entsteht der geforderte Ausdruck (\*\*).

## 6.4 Kompakte Operatoren und Operatoren von endlichem Rang

**Definition 6.4.1.** Sei  $H$  ein Hilbertraum. Dann hat  $T \in \mathcal{B}(H)$  *endlichen Rang*, falls  $\dim TH < \infty$ .

*Bemerkung 6.4.1.* Wir haben bereits gezeigt, dass aus  $T \in \mathcal{B}(H)$  endlicher Rang auch  $T \in \mathcal{K}(H)$  folgt. Falls andersherum  $T \in \mathcal{K}(H)$  selbstadjungiert ist, gilt bezüglich der Operatornorm

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n \in \mathbb{N}, |\lambda_n| > \varepsilon} \lambda_n P_{N(\lambda_n)} = T .$$

Für jedes  $\varepsilon > 0$  ist  $\dim P_{N(\lambda_n)} < \infty$  und auch die Summe endlich, wodurch  $T$  dann endlichen Rang hat.

**Satz 6.4.1.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $T \in \mathcal{K}(H)$ . Dann gibt es  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}^\mathbb{N}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$  und  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\forall n \in \mathbb{N} : \|e_n\| = 1$ , sodass bezüglich der Operatornorm gilt

$$T = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |e_n\rangle \langle e_n| .$$

*Bemerkung 6.4.2.* Hier ist  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kein Orthonormalsystem!

*Proof.* Wir definieren

$$\Re(T) := \frac{1}{2}(T + T^*) \text{ und } \Im(T) := \frac{1}{2i}(T - T^*) .$$

Diese Operatoren sind offensichtlich selbstadjungiert und kompakt. Nach Satz 6.3.9 existieren somit Orthonormalsysteme  $(e_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (e_n^2)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H^\mathbb{N}$  sowie  $(\lambda_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (\lambda_n^2)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}^\mathbb{N}$  mit

$$\Re(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^1 |e_n^1\rangle \langle e_n^1| \text{ und } \Im(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^2 |e_n^2\rangle \langle e_n^2| .$$

Folglich gilt in der Tat

$$T = \Re(T) + i\Im(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^1 |e_n^1\rangle \langle e_n^1| + \sum_{n \in \mathbb{N}} i\lambda_n^2 |e_n^2\rangle \langle e_n^2| .$$

□

**Satz 6.4.2.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $T \in \mathcal{K}(H)$ . Dann existiert eine Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , mit  $\forall n \in \mathbb{N} : T_n \in \mathcal{B}(H)$  endlichen Rang und  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$  bezüglich der Operatornorm.

*Proof.* Die Behauptung folgt aus Satz 6.4.1, wobei wir

$$T_n := \sum_{m=0}^n \lambda_m |e_m\rangle \langle e_m|$$

setzen, was endlichen Rang hat. □

*Bemerkung 6.4.3.* Der Satz gilt nicht auf allgemeinen Banachräumen.

## Chapter 7

# Der Spektralsatz und Funktionalkalküle

### 7.1 Der analytische Funktionalkalkül

*Bemerkung 7.1.1.* Die Spektraltheorie versucht die Eigenwerttheorie für Matrizen auf Operatoren auf unendlichdimensionalen Banachräumen zu verallgemeinern. Im endlichdimensionalen waren Eigenwerte dadurch charakterisiert, dass  $\lambda \text{Id} - T$  nicht subjektiv (bzw, äquivalent dazu nicht injektiv ist). Dieses Konzept funktioniert im unendlichdimensionalen leider nicht mehr.

*Bemerkung 7.1.2.* Wir erinnern uns: Eine Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n$  mit  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n, z_0, z \in \mathbb{C}$  konvergiert absolut für

$$z \in \left\{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi - z_0| < \rho(a) := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \right\}$$

**Satz 7.1.1** (Analytischer Funktionalkalkül). Sei  $H$  ein Hilbertraum (über  $\mathbb{C}$ ),  $T \in \mathcal{B}(H)$ , dann

$$\|T - z_0 I\| < \rho(a) \text{ dann konvergiert } f(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (T - z_0 I)^n$$

in der Norm. Mit der Konvention  $A^0 = \text{Id}$ , außerdem gilt

$$f(T)g(T) = (fg)(T) \text{ und } f(g(T)) = f \circ g(T).$$

*Beweis.* Betrachte folgende Abschätzung:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n (T - z_0 \text{Id})^n\| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \|(T - z_0 \text{Id})^n\| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \|(T - z_0 \text{Id})\|^n < \infty$$

Damit ist

$$\left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (T - z_0 \text{Id})^n \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

Wieso genau folgt jetzt die Komposition? Warum genau ist der letzte Term kleiner unendlich?

□

**Beispiel 7.1.1.** Betrachte die Reihe  $\exp(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ . Dann ist  $\rho(a) = \infty$ , also konvergiert  $\exp(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{T^n}{n!}$  für alle  $T \in \mathcal{B}(H)$

**Satz 7.1.2.** Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$ ,  $\|T\| < 1$ . Dann ist  $T - \text{Id}$  invertierbar und  $(T - \text{Id})^{-1} = -\sum_{n \in \mathbb{N}} T^n$

*Beweis.* Sei  $s_N = \sum_{n=0}^N T^n$ , betrachte

$$s_N(T - \text{Id}) = \sum_{n=0}^N T^n(T - \text{Id}) = \sum_{n=0}^N T^{n+1} - T^n = T^{N+1} - \text{Id} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\text{Id}.$$

Die rechte Seite ist klar. □

## 7.2 Das Spektrum eines Operators

**Definition 7.2.1.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $T \in \mathcal{B}(H)$ . Wir definieren

1. das Spektrum durch  $\sigma(T) = \{z \in \mathbb{C} : T - z\text{Id} \text{ nicht invertierbar}\}$
2. die Resolventenmenge durch  $\rho(T) = \{z \in \mathbb{C} : (T - z\text{Id})^{-1} \text{ existiert}\}$ .
3. das Punktespektrum durch  $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Ker}(T - \lambda\text{Id}) \neq \{0\}\}$
4. das kontinuierliche Spektrum  $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Ker}(T - \lambda\text{Id}) = \{0\}, \text{Im}(T - \lambda\text{Id}) \neq H \text{ aber dicht}\}$
5. das Residualspektrum durch  $\sigma_v(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Ker}(T - \lambda\text{Id}) = \{0\}, \text{Im}(T - \lambda\text{Id}) \text{ nicht dicht}\}$

*Bemerkung 7.2.1.* Aus dem Satz der offenen Abbildung Abbildung folgt

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_v(T)$$

**Beispiel 7.2.1.** Betrachte den Hilbertraum  $H = L^2([0, 1])$  mit dem Multiplikationsoperator  $T = M_{\text{Id}}$ . Dieser hat das Spektrum und kontinuierliche Spektrum

$$\sigma(T) = \sigma_c(T) = [0, 1].$$

Betrachte bspw.  $\lambda = \frac{1}{2} \in [0, 1]$ , dann gilt

$$T - \frac{1}{2}\text{Id} = M_{x-\frac{1}{2}}.$$

Dabei ist  $T - \frac{1}{2}\text{Id}$  injektiv, da  $\ker(M_{x-\frac{1}{2}}) = 0$ , wobei  $\forall f \in L^2([0, 1])$  gilt

$$\forall x \in [0, 1] : \left(x - \frac{1}{2}\right) f(x) = 0 \implies f = 0.$$

$M_{x-\frac{1}{2}}$  ist jedoch nicht surjektiv. Betrachte die Funktion  $g \in L^2[0, 1], \forall x \in [0, 1] : g(x) = 1$ , dann

$$\forall x \in [0, 1] \setminus \{1/2\} : \left(x - \frac{1}{2}\right) f(x) = 1 \implies f(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} \notin L^2([0, 1]) \implies \text{im}(M_{x-\frac{1}{2}}) \neq H.$$

Analog erhält man dies für alle  $\lambda \in [0, 1]$ . Wir wissen jedoch auch, dass  $\forall 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$

$$g_1 := g|_{L^2([0, 1/2-\varepsilon])} \in L^2([0, 1/2-\varepsilon]) \text{ und } g_2 := g|_{L^2((1/2+\varepsilon, 1])} \in L^2((1/2+\varepsilon, 1]).$$

Damit liegt  $\text{im}(M_{x-\frac{1}{2}})$  also dicht in  $H$ , d. h.  $\frac{1}{2} \in \sigma_c(T)$ . Analog folgt dies für alle  $\lambda \in [0, 1]$ .

**Beispiel 7.2.2.** Betrachte den Banachraum  $V = C^0([0, 1])$ , sowie den Volterra-Operator  $T \in \mathcal{B}(H)$ , d. h. für  $f \in V$

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt .$$

Dann gilt

$$\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\} .$$

Betrachte hier nur  $\lambda = 0$  (wir zeigen hier nicht die gesamte Aussage). Dann ist  $T$  injektiv nach dem Hauptsatz von Differential- und Integralrechnung, da

$$f(t) = (Tf)'(t) \text{ und } f \in V \implies \ker(T) = 0 .$$

$T$  hat kein dichtes Bild, da gilt

$$\forall f \in V : (Tf)(0) = 0 \implies \operatorname{im}(T) \{g \in C^0([0, 1]) \mid g \text{ differenzierbar, } g(0) = 0\} .$$

**Satz 7.2.1.** Sei  $H$  ein Hilbertraum. Dann ist  $M := \{S \in \mathcal{B}(H) \mid S^{-1} \text{ existiert}\}$  offen in  $\mathcal{B}(H)$ .

*Beweis.* Es g. z. z.

$$\forall S \in M \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(S) \subseteq M .$$

Sei also  $S \in M$ , d. h.  $S^{-1}$  existiert. Setze  $\varepsilon = \frac{1}{\|S^{-1}\|}$ . Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$  mit  $\|T - S\| < \varepsilon$ . Dann gilt

$$T = S + (T - S) = S(I + S^{-1}(T - S)) .$$

Dabei gilt

$$\|S^{-1}(T - S)\| \leq \|S^{-1}\| \|T - S\| < \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1 .$$

Damit ist  $T \in M$ , da  $T$  invertierbar nach Satz [...]

Label fehlt (Satz 8.2 in Vorlesung)

Weiterhin erhalten wir die Normabschätzung

$$\|T^{-1} - S^{-1}\| \leq \frac{\|S^{-1}\|^2 \|T - S\|}{1 - \|S^{-1}\| \|T - S\|}$$

über die folgende Rechnung. Es gilt

$$T^{-1} - S^{-1} = ((\operatorname{Id} + S^{-1}(T - S))^{-1} - \operatorname{Id})S^{-1} .$$

Somit folgt für die Normen

$$\begin{aligned} \|T^{-1} - S^{-1}\| &= \|((\operatorname{Id} + S^{-1}(T - S))^{-1} - \operatorname{Id})S^{-1}\| \leq \|S^{-1}\| \|(\operatorname{Id} + S^{-1}(T - S))^{-1} - \operatorname{Id}\| \\ &\leq \|S^{-1}\| \|(\operatorname{Id} + S^{-1}(T - S))^{-1}\| \|\operatorname{Id} - (\operatorname{Id} + S^{-1}(T - S))\| \\ &= \|S^{-1}\| \|(\operatorname{Id} + S^{-1}(T - S))^{-1}\| \|S^{-1}(T - S)\| \\ &\leq \|S^{-1}\|^2 \|T - S\| \underbrace{\|(\operatorname{Id} + S^{-1}(T - S))^{-1}\|}_{\|\cdot\| < 1} . \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung von Satz [...] folgt dann sofort die Behauptung.

Label fehlt (Satz 8.2 in der Vorlesung).

□



**Satz 7.2.2.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $T \in \mathcal{B}(H)$ . Dann gilt

$$\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} := \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(T)\} .$$

*Beweis.* Es g. z. z.  $\varrho(T^*) = \overline{\varrho(T)}$ . Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  so, dass  $T^* - \lambda \text{Id}$  existiert, dann

$$(T^* - \lambda \text{Id})^{-1} = ((T - \bar{\lambda} \text{Id})^*)^{-1} = ((T - \bar{\lambda} \text{Id})^{-1})^* .$$

Dann existiert auch  $(T - \bar{\lambda} \text{Id})^{-1}$ , d. h.  $\varrho(T^*) = \overline{\varrho(T)}$ , woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**Satz 7.2.3.** Sei  $H$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{C}$  und  $T \in \mathcal{B}(H)$ , dann gilt

1.  $\varrho(T)$  ist offen ( $\implies \sigma(T)$  ist abgeschlossen).
2. Die *Resolventenabbildung*  $\varrho(T) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ ,  $\lambda \mapsto (T - \lambda \text{Id})^{-1}$  ist analytisch.
3.  $\sigma(T)$  ist kompakt und es gilt  $\sigma(T) \subseteq \overline{K_{\|T\|}}(0) \subseteq \mathbb{C}$ .
4.  $\sigma(T) \neq \emptyset$ .

*Beweis.* **Zu 1.:** Es gilt

$$\varrho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (T - \lambda \text{Id}) \in \overbrace{\{S \in \mathcal{B}(H) \mid S^{-1} \text{ existiert}\}}^{=:M}\}$$

Die Abbildung  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ ,  $\lambda \mapsto T - \lambda \text{Id}$  ist stetig und somit gilt

$$\varrho(T) = \eta^{-1}(M) .$$

Da  $M$  nach Satz 7.2.1 offen ist, ist also auch  $\varrho(T)$  offen.

**Zu 2.:** Sei  $\lambda_0 \in \varrho(T)$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ , dann

$$\lambda \text{Id} - T = (\lambda_0 \text{Id} - T) + (\lambda - \lambda_0) \text{Id} = (\lambda_0 \text{Id} - T)(\text{Id} - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 \text{Id} - T)^{-1}) .$$

Fordere nun  $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 \text{Id} - T)^{-1}\|^{-1}$ . Dann gilt  $\|(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 \text{Id} - T)^{-1}\| < 1$ , d. h. wir erhalten  $(T - \lambda \text{Id})^{-1}$  lokal für  $\lambda$  wie oben angegeben über die konvergente Neumann-Reihe wie folgt

$$(T - \lambda \text{Id})^{-1} = (T - \lambda_0 \text{Id}) \left( \sum_{n=0}^{\infty} ((\lambda_0 - \lambda)(T - \lambda_0 \text{Id})^{-1})^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda) ((T - \lambda_0 \text{Id})^{-1})^{n+1} .$$

**Zu 3.:** Nach 1. ist  $\sigma(T)$  abgeschlossen. Nach Heine-Borel g. z. z., dass  $\sigma(T)$  beschränkt ist. Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $|\lambda| > \|T\|$ . Dann ist  $(\lambda \text{Id} - T)$  invertierbar (d. h.  $\lambda \notin \sigma(T)$ ) nach Satz [...], da

Label fehlt (Satz 8.2 in Vorlesung)

$$(\lambda \text{Id} - T)^{-1} = \lambda^{-1} \left( \text{Id} - \frac{T}{\lambda} \right)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} T^n .$$

Folglich gilt also  $\sigma(T) \subseteq \overline{K_{\|T\|}}(0)$ , wie behauptet.

**Zu 4.:** Angenommen  $\sigma(T) = \emptyset$ , d. h.  $\varrho(T) = \mathbb{C}$ . Wir wissen, dass die (analytische) Abbildung  $\eta : \lambda \mapsto (T - \lambda \text{Id})^{-1}$  stetig ist (existiert auf ganz  $\mathbb{C}$  nach Voraussetzung). Daher ist  $\eta$  beschränkt auf der kompakten Menge  $\overline{K_{2\|T\|}}(0)$ . Weiterhin ist  $\eta$  auch auf  $K_{2\|T\|}(0)^C$  beschränkt, da mit 3. gilt

$$|\lambda| \geq 2\|T\| \implies \left\| \frac{T}{\lambda} \right\| \leq \frac{1}{2} \implies \|T - \lambda \text{Id}\|^{-1} \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|T\|^n}{\|\lambda\|^n} \leq \frac{2}{|\lambda|} \leq \frac{1}{\|T\|} .$$

Seien nun  $x, y \in H$  fixiert, dann definiere  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda) = \langle x, (T - \lambda \text{Id})^{-1} y \rangle .$$

Durch die Eigenschaften von  $\eta$  ist  $f$  offensichtlich ebenfalls analytisch und beschränkt und folglich nach dem Satz von Liouville (Bem. 7.2.2) konstant. Da wir insbesondere  $\lambda = 0$  wählen können, gilt also

$$\forall x, y \in H \forall \lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda) = \langle x, (T - \lambda \text{Id})^{-1} y \rangle = \langle x, T^{-1} y \rangle = f(0) .$$

Somit folgt jedoch

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{Id} = T^{-1} \implies T - \lambda \text{Id} = T .$$

Dies ist ein Widerspruch, folglich ist  $\sigma(T) \neq \emptyset$ . □

*Bemerkung 7.2.2* (Satz von Liouville). Ist  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkt und analytisch, so ist  $f$  konstant. Dabei bezeichnen wir  $f$  als *analytisch*, wenn  $f$  in jedem Punkt lokal durch eine konvergente Potenzreihe gegeben ist.

**Definition 7.2.2.** Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$ . Dann wird

$$r(T) := \max \{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T) \}$$

als *Spektralradius* von  $T$  bezeichnet.

**Lemma 7.2.1.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  mit  $\forall n, m \in \mathbb{N} : 0 \leq a_{n+m} \leq a_n a_m$ . Dann konvergiert die Folge  $(\sqrt[n]{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$  wobei für den Grenzwert gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n} =: b .$$

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  und  $N \in \mathbb{N}$  hinreichend groß, sodass  $a_N < (b + \varepsilon)^N$ . Setze

$$c = c(\varepsilon) = \max \{ a_1, \dots, a_N \} .$$

Schreibe nun  $n \in \mathbb{N}$  in der Form  $n = kN + r$  mit  $1 \leq r \leq N$ . Folglich gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_n} &= (a_{kN+r})^{1/n} \leq (a_{kN} \cdot a_r)^{1/n} \leq (a_N^k \cdot a_r)^{1/n} \leq ((b + \varepsilon)^{Nk} \cdot c)^{1/n} \\ &= (b + \varepsilon)^{Nk/n} c^{1/n} = (b + \varepsilon)(b + \varepsilon)^{-r/n} c^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b + \varepsilon . \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. □

**Satz 7.2.4.** Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$ . Dann gilt  $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$ .

*Beweis.* Nach Definition des Spektralradius gilt

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(T) \implies \lambda \in \varrho(T) .$$

Wir zeigen hier beide Inklusionen.

$(r(T) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|})$ : Analog zum Beweis von 7.2.3, (3) wissen wir, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}(H), z \mapsto (\text{Id} - zT)^{-1}$$

analytisch ist in  $K_{\frac{1}{|\lambda|}}(0)$  für  $\lambda > r(T)$ , d. h.

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} T^n z^n \text{ konvergiert für } |z| < \frac{1}{r(T)} .$$

Somit gilt für alle  $x, y \in H$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, z^n T^n y \rangle \text{ konvergiert} \implies \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \left\langle x, \left( \frac{T}{r(T)} \right)^n y \right\rangle \right| < \infty \text{ für } \|x\|, \|y\| \leq 1.$$

Mit dem Satz von Banach-Steinhaus (5.4.2) gilt also

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|T^n\|}{r(T)^n} =: c < \infty.$$

Somit erhalten wir

$$\|T^n\| \leq 2c \cdot r(T)^n \implies \limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|T^n\|} \leq r(T).$$

Nun können wir Lemma 7.2.1 anwenden auf  $\left( \sqrt[n]{\|T^n\|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  und bekommen somit die Behauptung

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \inf \left\{ \sqrt[n]{\|T^n\|} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$(r(T) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|})$ : Aus obiger Rechnung wissen wir, dass für  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $|\lambda| > \sqrt[n]{\|T^n\|}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\left\| \frac{T^n}{\lambda^n} \right\|} < 1 \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{T^n}{\lambda^n} \text{ konvergiert bzgl. } \|\cdot\|.$$

Folglich existiert  $(T - \lambda \text{Id})^{-1}$ , d. h.  $\lambda \in \varrho(T)$  und somit  $\lambda > r(T)$ , woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**Satz 7.2.5.** Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $T \in \mathcal{B}(H)$  normal (d. h.  $TT^* = T^*T$ ). Dann gilt  $r(T) = \|T\|$ .

*Beweis.* Für normale Operatoren gilt  $\|T\|^2 = \|TT^*\| = \|T^*T\|$ . Somit erhalten wir:

$$\|T^2\|^2 = \|(T^*)^2 T^2\| = \|T^* T T^* T\| = \|(\overbrace{T^* T}^{\text{normal}})^2\| = \|T^* T\|^2 = \|T\|^4.$$

Somit gilt also  $\|T^2\| = \|T\|^2$ . Da für alle  $n \in \mathbb{N}$   $T^n$  normal sind, gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} : \|T\|^{2k} = \|T^{2k}\|.$$

Somit erhalten wir in der Tat

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^{2^k}\|^{1/2^k} = \|T\|.$$

$\square$

**Lemma 7.2.2.** Sei  $S, T, U \in \mathcal{B}(H)$ , mit  $H$  als Hilbertraum und  $T = SU = US$ . Dann existiert  $T^{-1}$  genau dann, wenn  $S^{-1}$  und  $U^{-1}$  existieren.

*Beweis.*  $(\Leftarrow)$  Ist klar, da

$$T^{-1} = S^{-1}U^{-1} = (US)^{-1} = U^{-1}S^{-1}$$

( $\Rightarrow$ ) Wir zeigen dies über die Kontraposition. Nehme an  $S^{-1}$  existiere nicht.

**Fall 1:** Sei

$$\ker S \neq \{0\}, T = US \implies \ker T \supseteq \ker S \neq \{0\}$$

**Fall 2:** Sei  $\ker S = \{0\}$ . Dann kann  $S$  aber nicht surjektiv sein. Betrachte:

$$(TH)^\perp = (SUH)^\perp \supset (SH)^\perp \neq \{0\}$$

Weil  $H = TH + TH^\perp$  ???

□

**Satz 7.2.6.** Für  $T \in \mathcal{B}(H)$ ,  $H$  Hilbertraum, gilt für  $p \in \mathbb{C}[X] : \sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$

*Beweis.* ( $\subseteq$ ) Sei  $\mu \neq \sigma(p(T))$ , also  $p(T) - \mu$  nicht invertierbar. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gibt es ein  $c \neq 0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  mit

$$p(x) - \mu = c(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n) \implies p(T) - \mu = c(T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_n)$$

Damit gibt es  $\lambda_i(T), i = 1, \dots, n$  mit  $(T - \lambda_i)$  existiert nicht, also  $\lambda_i \in \sigma(T)$ . Aber  $p(\lambda_i) - \mu = 0 \implies \mu = p(\lambda_i)$ .

( $\supseteq$ ) Sei  $\lambda \in \sigma(T)$ . Es gibt ein  $c \neq 0, \lambda_1, \dots, \lambda_n : p(x) - p(\lambda) = c(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$ . Sei  $x \neq \lambda_i, i = 1, \dots, j, \dots, n$ , dann folgt aus

$$0 = c(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_j) \cdots (x - \lambda_n) \implies x = \lambda_j$$

Dann

$$p(T) - p(\lambda_j)\text{Id} = cc(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_j) \cdots (x - \lambda_n) = c(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_{j+1}) \cdots (x - \lambda_n)(x - \lambda_j).$$

Da aber  $(T - \lambda_j)$  nicht existiert existiert durch 7.2.6 auch  $(P(T) - p(\lambda)\text{Id})^{-1}$  nicht. Damit  $p(\lambda_j \in \sigma(p(T)))$ .

□

**Definition 7.2.3.** Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$ ,  $H$  ein Hilbertraum, dann ist der numerische Wertebereich definiert als  $W(T) := \{\langle x, Tx \rangle : \|x\| = 1\}$ .

**Satz 7.2.7.** Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$ , dann  $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$ .

*Beweis.* Wir zeigen dies über die Kontraposition. Sei also  $\lambda \notin \overline{W(T)}$ , dann ist zu zeigen  $(T - \lambda\text{Id})^{-1}$  existiert. Damit  $d := \text{dist}(\lambda, \overline{W(T)}) > 0$  und  $\overline{W(T)} \subseteq K_{\|T\|}(0)$  also folgt Kompaktheit.

Sei nun  $\|x\| = 1$ , dann:

$$d \leq |\lambda - \langle x, Tx \rangle| = |\lambda \langle x, x \rangle - \langle x, Tx \rangle| = |\langle x, (T - \lambda\text{Id})x \rangle| \leq \underbrace{\|x\|}_{=1} \|(T - \lambda\text{Id})x\|$$

Also gilt für alle  $x \in H$  mit  $\|x\| = 1$ . Damit aber auch für alle  $x \in H \setminus \{0\}$  (Für  $\{0\}$  trivialerweise.):

$$\|(T - \lambda \text{Id})x\| = \|x\| \left\| (T - \lambda \text{Id}) \frac{x}{\|x\|} \right\| \geq d \|x\| \implies \ker T - \lambda \text{Id} = \{0\}$$

Damit haben wir die Injektivität.

Wie geht es weiter???

Außerdem ist  $(T - \lambda \text{Id})H$  abgeschlossen

Warum?

Sei nun  $y_n = (T - \lambda \text{Id})x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ . Wenn  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist, so auch  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Sei nun  $(T - \lambda \text{Id})H$  nicht dicht, d.h es gibt  $0 \neq x \in ((T - \lambda \text{Id})H)^\perp$ ,  $\|x\| = 1$ . Dann folgt:

$$0 = \langle x, (T - \lambda \text{Id})x \rangle = \langle x, Tx \rangle - \lambda \implies \lambda \in \overline{W(T)}$$

und damit ein Widerspruch.

□

**Satz 7.2.8.** Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$  selbstadjungiert mit  $T = T^*$ , dann ist  $\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|] \subseteq \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Es gilt mit 7.2.7  $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)} \subseteq [-\|T\|, \|T\|] \subseteq \mathbb{R}$ , da  $\langle x, Tx \rangle = \langle Tx, x \rangle = \overline{\langle x, Tx \rangle} \in \mathbb{R}$ . Des Weiteren mit  $\|x\| = 1$ :

$$|\langle x, Tx \rangle| \leq \|T\| \|x\|^2 = \|T\|$$

□

### 7.3 Der Satz von Stone-Weierstraß

**Satz 7.3.1.** Sei  $f \in C^0_{\mathbb{R}}[a, b]$  dann gibt es eine Folge von Polynomen  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}, p_n \in \mathbb{R}[X]$  mit  $p_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty, n \rightarrow \infty} f$ .

*Beweis.* Ohne Beweis.

□

**Satz 7.3.2.** Sei  $\emptyset \neq K$  kompakt,  $\mathcal{A} \subseteq C^0(K, \mathbb{R})$  mit

1.  $\forall f, g \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C} : \lambda f + g \in \mathcal{A}, fg \in \mathcal{A}$
2.  $\mathcal{A}$  abgeschlossen
3.  $\forall s \neq t \in K \exists f \in \mathcal{A} : f(s) \neq f(t)$
4.  $1 \in \mathcal{A}$

Dann ist  $\mathcal{A} = C^0(K, \mathbb{R})$

*Beweis.* Wir zeigen  $f \in \mathcal{A}, 0 \leq f \implies \sqrt{f} \in \mathcal{A}$ . Sei o.B.d.A  $f \leq 1$ , dann existiert  $g_n := \sqrt{\frac{1}{n} + (1 - \frac{1}{n})f}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Warum gilt hier Gleichheit?

Und dies ist gleich

$$g_n = \frac{1}{n} + (1 - \frac{1}{n})f \leq \frac{1}{n} + (1 - \frac{1}{n}) = 1 \implies \|g_n\|_{\text{inf}} = \sqrt{1} = 1$$

Aufgrund der Abgeschlossenheit haben wir nun:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \sqrt{f} \in \mathcal{A}.$$

Wir erhalten nun folgendes geschenkt:

1.  $\forall f \in \mathcal{A} : |f| = \sqrt{f^2} \in \mathcal{A}$ .
2.  $\forall f, g \in \mathcal{A} : f \vee g = \max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in \mathcal{A}$
3.  $\forall f, g \in \mathcal{A} : f \wedge g = \min(f, g) = \max\{-f, -g\}$

Sei nun  $f \in C^0(K, \mathbb{R}), \varepsilon > 0$ . Für alle  $s \neq t \in \mathcal{A}$  gibt es ein  $h \in \mathcal{A}$  mit  $h(s) \neq h(t)$ , sei nun

$$f_{s,t} : K \rightarrow \mathbb{R}, f_{s,t}(v) = f(t) + (f(s) - f(t)) \frac{h(v) - h(t)}{h(s) - h(t)} \implies f_{s,t} \in \mathcal{A}$$

Außerdem  $f_{s,t}(s) = f(s), f_{s,t}(t) = f(t)$ .

Definiere nun  $U_t = \{v \in K : f_{s,t}(v) < f(v) + \varepsilon\}$ . Dann ist  $U_t$  offen. Setze nun  $s \in K$  fix. Aufgrund der Kompaktheit gilt:

$$\exists I = \{t_1, \dots, t_m\} : \bigcup_{t \in I} U_t = K$$

Wir setzen  $h_s := \bigcap_{t \in I} f_{s,t} \in \mathcal{A}$  (und schneiden damit nur über endlich viele.) Wir wissen  $h_s(s) = f(s)$  und  $\forall v \in K : h_s(v) < f(v) + \varepsilon$ .

Für alle  $s \in K$  ist  $v_s = \{v \in K, f(v) - \varepsilon < h_s(v)\}$  offen. Es folgt mit Kompaktheit wieder  $K = \bigcup_{j=1}^n v_{s_j}$ , und setze  $g_i = \bigcup_{j=1}^n h_{s_j} \in \mathcal{A}$  (wieder nur endlich viele), also gilt für alle  $v \in K : g(v) < f(v) + \varepsilon$  und  $g(v) > f(v) - \varepsilon$ . Folglich  $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$ . Damit haben wir die Dichtheit gewonnen. Da alle Grenzwerte aufgrund der Abgeschlossenheit in  $\mathcal{A}$  enthalten sind, erhalten wir die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 7.3.1.** Sei  $K = [a, b]$  und betrachte  $\mathcal{A} = \overline{\mathbb{R}[X]}$ . Dann folgt mit 7.3.2 der Satz von Weierstraß.

**Beispiel 7.3.2.** Sei  $K = S^1, C^0(S^1) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, } 2\pi \text{ periodisch}\}$  und  $\mathcal{A} = \varepsilon_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)$

## 7.4 Der stetige Funktionalkalkül

**Satz 7.4.1** (Stetiger Funktionalkalkül). Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $T \in \mathcal{B}(H)$  selbstadjungiert. Dann existiert genau eine Isometrie

$$\varphi_T : C^0(\sigma(T), \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{B}(H)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $\varphi_T$  ist ein involutiver Algebrenmorphismus, d. h. die Abbildung ist
  - linear:  $\forall f, g \in C^0(\sigma(T)), \lambda \in \mathbb{C} : \varphi_T(\lambda f + g) = \lambda \varphi_T(f) + \varphi_T(g)$
  - multiplikativ:  $\forall f, g \in C^0(\sigma(T)) : \varphi_T(f \cdot g) = \varphi_T(f) \cdot \varphi_T(g) = \varphi_T(g) \cdot \varphi_T(f)$
  - involutiv:  $\forall f \in C^0(\sigma(T)) : \varphi_T(\bar{f}) = \varphi_T(f)^*$
2.  $\varphi_T(1) = \text{Id}$  und  $\varphi_T(\text{id}) = T$ , wobei  $\text{id}(x) = x, 1(x) = 1$ .

*Bemerkung 7.4.1.* Wir schreiben  $f(T) := \varphi_T(f)$ .

*Beweis. Schritt 1:* Wir definieren:

$$A_0 := \left\{ f \in C^0(\sigma(T)) \mid \exists p \in \mathbb{C}[X] : f(x) = p(x) := \sum_{n=0}^N a_n \cdot X^n \forall x \in \sigma(T) \right\}.$$

Somit können wir für alle  $f \in A_0 : \varphi_0(f) = p(T)$  sowie  $\varphi_0(f)^* = \bar{p}(T)$  setzen (mit  $p$  zu  $f$  wie in der Definition), wobei:

$$p(T) := \sum_{n=0}^N a_n T^n \quad \text{und} \quad \bar{p}(X) := \sum_{n=0}^N \bar{a}_n X^n.$$

Dabei nutzen wir  $(T^n)^* = (T^*)^n = T^n$  aus.

**Schritt 2:** Nach Satz [...] ist  $A_0$  nach Konstruktion dicht in  $C^0(\sigma(T))$ .

Label fehlt (Satz 8.11 in Vorlesung)

**Schritt 3:** Es gilt für alle  $f, g \in A_0$  mit  $p, q$  wie in der Definition

$$\varphi_0(fg) = pq(T) = p(T)q(T) = \varphi_0(f)\varphi_0(g).$$

Weiterhin ist die Linearität offensichtlich erfüllt.

**Schritt 4:** Folglich gilt für alle  $f \in A_0$  mit  $p$  wie in der Definition:

$$\begin{aligned} \|\varphi_0(f)\|^2 &= \|\varphi_0(f)^* \varphi_0(f)\| = \|\varphi_0(\bar{p}p)\| \stackrel{(*)}{=} r(\varphi_0(\bar{p}p)) = \sup \{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(\varphi_0(\bar{p}p)) \} \\ &= \sup \{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(\bar{p}p(T)) \} \stackrel{(**)}{=} \sup \{ |\lambda| \mid \lambda \in \bar{p}p(\sigma(T)) \} \\ &= \sup \{ |p(\lambda)|^2 \mid \lambda \in \sigma(T) \} = \|p\|_\infty^2 \end{aligned}$$

Dabei haben wir im Schritt (\*) ausgenutzt, dass  $\varphi_0(\bar{p}p)$  selbstadjungiert ist und im Schritt (\*\*) Satz [...]. Somit ist  $\varphi_0$  in der Tat eine Isometrie.

Label fehlt.

**Schritt 5:** Sei  $f \in C^0(\sigma(T))$ . Nach dem Satz von Weierstraß existiert eine Folge von Polynomen  $p_n \in A_0$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = f$  (bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ ). Folglich ist  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und aufgrund der Isometrieeigenschaft auch  $(\varphi_0(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ . Somit konvergiert letztere Folge und wir setzen  $\varphi_T(f)$  auf den

Grenzwert.

**Schritt 6:** (Linearität) Seien  $f, g \in C^0(\sigma(T))$ , mit entsprechenden Polynomfolgen in  $A_0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = g \quad (\text{bzgl. } \|\cdot\|_\infty) .$$

Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n + q_n = f + g$  und folglich

$$\varphi_T(f + g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0(p_n + q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0(p_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0(q_n) = \varphi_T(f) + \varphi_T(g) .$$

**Schritt 7:** (Wohldefiniertheit) Sei  $f \in C^0(\sigma(T))$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = f$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ . Dann gilt

$$\|\varphi_T(f)\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_T(p_n) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_0(p_n)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n\|_\infty$$

**Schritt 8:** (Eindeutigkeit) Sei  $\tilde{\varphi}$  eine andere Isometrie mit den obigen Eigenschaften. Dann gilt  $\forall f \in A_0$  (mit  $p$  wie in der Definition):

$$\tilde{\varphi}(f) = \varphi_0(f) = p(T) = \varphi_T(f) .$$

Betrachte nun allgemein  $g \in C^0(\sigma(T))$  mit entsprechender Polynomfolge  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = g$  (bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ ). Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0(q_n) = \tilde{\varphi}(g) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0(q_n) = \varphi_T(g) \implies \tilde{\varphi}(g) = \varphi_T(g) .$$

□

*Bemerkung 7.4.2* (Stetiger Funktionalkalkül für normale Operatoren). Der Beweis lässt sich analog für normale Operatoren durchführen. Dabei betrachten wir in der Definition von  $A_0$  jedoch

$$\mathbb{C}[X, \overline{X}] \quad \text{und somit z. B.} \quad A_0 \ni p(X, \overline{X}) = X\overline{X} = \overline{X}X \implies \varphi_T(p) = TT^* = T^*T .$$

Für normale Operatoren besitzt die Isometrie die zusätzliche Eigenschaft  $\varphi_T(\text{id}) = T^*$ .

**Lemma 7.4.1.** Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$  normal,  $\lambda \in \sigma(T)$ . Dann existiert  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H^\mathbb{N}$  mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - \lambda x_n\| = 0 .$$

*Beweis.* Wir benutzen Kontraposition. Angenommen

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in H, \|x\| = 1 : \|Tx - \lambda x\| \geq \delta .$$

Somit folgt

$$\forall x \in H : \|(T - \lambda \text{Id})x\| \geq \delta \|x\| \implies T - \lambda \text{Id} \text{ injektiv} \implies (T - \lambda \text{Id})H \text{ abgeschlossen} .$$

Dabei erhalten wir die letzte Folgerung aus Satz 5.5.1.

Sei nun  $H \ni u \perp (T - \lambda \text{Id})H$ , d. h.

$$\forall x \in H \setminus \{0\} : 0 = \langle u, (T - \lambda \text{Id})x \rangle \iff 0 = \langle (T^* - \overline{\lambda} \text{Id})u, x \rangle \implies (T^* - \overline{\lambda} \text{Id})u = 0 .$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass gilt:

$$\langle u, (T - \lambda \text{Id})x \rangle = \langle u, Tx \rangle - \lambda \langle u, x \rangle = \langle T^*u, x \rangle - \langle \overline{\lambda}u, x \rangle .$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (T^* - \overline{\lambda} \text{Id})u, (T^* - \overline{\lambda} \text{Id})u \rangle = \langle u, (T - \lambda \text{Id})(T^* - \overline{\lambda} \text{Id})u \rangle = \langle u, (T^* - \overline{\lambda} \text{Id})(T - \lambda \text{Id})u \rangle \\ &= \|(T - \lambda \text{Id})u\|^2 \implies u = 0 \implies \lambda \in \varrho(T) . \end{aligned}$$

Dabei haben wir  $u = 0$  aus der Injektivität von  $T - \lambda \text{Id}$  gefolgert. Damit ist  $T - \lambda \text{Id}$  auch surjektiv und es folgt die Behauptung. □



**Satz 7.4.2.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $T \in \mathcal{B}(H)$  normal. Dann gilt für  $f \in C^0(\varrho(T))$ :

1.  $\|f(T)\|_{\mathcal{B}(H)} = \|f\|_\infty = \sup \{|f(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$
2. Falls  $x \in H \setminus \{0\}$ ,  $T$  selbstadjungiert sowie  $\lambda \in \mathbb{R}$  die Eigenwertgleichung  $Tx = \lambda x$  erfüllen, so gilt  $f(T)x = f(\lambda)x$ .
3. Spektralabbildungssatz: Es gilt  $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)) = \{f(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\}$ .

*Beweis.* **Zu 1.)** Dies folgt sofort aus Schritt 4, Satz 7.4.1.

**Zu 2.)** Nach Konstruktion im Beweis von Satz 7.4.1 ist bekannt:

$$\forall p \in \mathbb{C}[X] : p(T)x = p(\lambda)x .$$

Sei nun eine Polynomfolge  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegeben mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = f$  (bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ ). Mit 1 folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(T) &= f(T) \quad (\text{bzgl. } \|\cdot\|_{\mathcal{B}(H)}) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(T)x = f(T)x \quad \text{bzgl. } \|\cdot\|_H \\ \text{mit } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(T)x &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(\lambda)x = f(\lambda)x \implies f(T)x = f(\lambda)x . \end{aligned}$$

**Zu 3.)** ( $\subseteq$ ) Es g. z. z.

$$\forall \mu \in \sigma(f(T)) \exists \lambda \in \sigma(T) : \mu = f(\lambda) .$$

Wir benutzen Kontraposition. Angenommen  $\mu \notin f(\sigma(T))$ . Dann folgt

$$g := \frac{1}{f - \mu} \in C^0(\sigma(T)) \quad \text{und} \quad g(f - \mu) = (f - \mu)g = 1 \in C^0(\sigma(T)) .$$

Nach Satz 7.4.1 gilt somit

$$g(T)(f(T) - \mu \text{Id}) = (f(T) - \mu \text{Id})g(T) = \text{Id} \implies (f(T) - \mu \text{Id})^{-1} \text{ existiert.}$$

Somit gilt in der Tat  $\mu \notin \sigma(f(T))$ .

( $\supseteq$ ) Sei  $\mu = f(\lambda)$  für ein  $\lambda \in \sigma(T)$ . Wähle Polynomfolge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}[X, \overline{X}]^{\mathbb{N}}$  mit  $\|f - g_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ . Somit gilt insbesondere  $|f(\lambda) - g_n(\lambda)| \leq \frac{1}{n}$ . Unter Ausnutzung von  $\sigma(g_n(T)) = g_n(\sigma(T))$  (Bew. von Satz 7.4.1) existiert also (nach Lemma 7.4.1)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H^{\mathbb{N}}$  mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| = 1 \quad \text{und} \quad \|(g_n(T) - g_n(\lambda)\text{Id})(x_n)\| \leq \frac{1}{n} .$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \|(f(T) - \mu \text{Id})x_n\| &\leq \|(f(T) - g_n(T))x_n\| + \|(g_n(T) - g_n(\lambda)\text{Id})x_n\| \\ &\quad + \|(g_n(\lambda)\text{Id} - f(\lambda)\text{Id})x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 . \end{aligned}$$

Somit gilt in der Tat  $\mu \in \sigma(f(T))$ . □

## 7.5 Positive Operatoren und die Spurklasse

**Definition 7.5.1.** Sei  $H$  ein Hilbertraum, dann bez.  $T \in \mathcal{B}(H)$  *positiv* :  $\iff T = T^*$  und  $\sigma(T) \geq 0$  (d. h.  $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$ ). Wir schreiben dann auch  $T \geq 0$ .

**Satz 7.5.1.** Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$  selbstadjungiert, dann gilt

1.  $|T| \geq 0$
2.  $T \geq 0 \implies \exists S \geq 0 : T = S^2$  ( $S = \sqrt{T}$ )

*Beweis.* Dies folgt aus den Sätzen 7.4.1 und 7.4.2, da  $|\cdot|$  und  $\sqrt{\cdot}$  stetige Funktionen sind. □

**Satz 7.5.2.** Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$ , wobei  $H$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{C}$ . Dann gilt

$$T \geq 0 \iff \forall x \in H : \langle x, Tx \rangle \geq 0 .$$

*Beweis.* ( $\implies$ ) Es gilt

$$\langle x, Tx \rangle = \langle x, \sqrt{T}\sqrt{T}x \rangle = \langle \sqrt{T}x, \sqrt{T}x \rangle \geq 0 .$$

( $\impliedby$ ) Nach Definition des numerischen Wertebereichs gilt

$$\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)} = \overline{\{\langle x, Tx \rangle \mid \|x\| = 1\}} \subseteq [0, \infty) .$$

□

**Definition 7.5.2.**  $S, T \in \mathcal{B}(H)$  selbstadjungiert, dann  $S \leq T \iff T - S \geq 0$ .

*Bemerkung 7.5.1.* Vorsicht:  $\text{Re}\mathcal{B}H$  ist kein Verband, d.h:

$$\exists S, T \geq 0 \nexists! U \geq 0 \forall V \geq S, V \geq T : V \geq U$$

**Satz 7.5.3.** Sei  $S, T, U \in \mathcal{B}(H)_{\geq 0}, \lambda \geq 0$

1.  $S + T \geq 0$
2.  $\lambda S \geq 0$
3.  $ST = TS \implies ST \geq 0$ .

*Beweis:* Folgt aus dem Spektralsatz für kommutative Operatoren. □

**Satz 7.5.4.** Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$ , dann ist  $\|T\| = \sqrt{\inf \{\lambda \geq 0 : \lambda \text{Id} - T^*T \geq 0\}}$

*Beweis:* Wir wissen  $\|T\|^2 = \|T^*T\|$  und zeigen nun für  $S \geq 0$ , dann

$$\|S\| = \inf \{\lambda \geq 0 : \lambda \text{Id} \geq S\} =: \|S\|' .$$

Für alle  $\lambda \geq \|S\|$  und  $\|x\| = 1$  gilt:

$$\lambda = \lambda \|x\|^2 \geq \langle x, Sx \rangle \implies \lambda \geq \|S\| \implies \|S\| \leq \|S\|'$$

Sei nun  $\lambda \geq \|S\|$ , dann für alle  $x \in H, \|x\| = 1$ :

$$\langle x, Sx \rangle \leq \|Sx\| \leq \|S\| \|x\| = \|S\|$$

Damit haben wir  $\|S\| = \|S\|'$ . □

**Satz 7.5.5.** Seien  $A_n \in \mathcal{B}(H)_{\geq 0}$ ,  $A \in \mathcal{B}(H)$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$  gelte  $A \geq A_{n+1} \geq A_n$ , dann existiert  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{A_n\} =: B$  und für alle  $x, y \in H$  gilt:

$$\langle x, A_n y \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle x, B y \rangle.$$

*Beweis:* Wir setzen für  $x, y \in H : L_B = \langle x, A_n y \rangle$ . Wir observieren:

$$\forall x \in H : \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, A_n x \rangle = \sup_{n \in \mathbb{N}} \langle x, A_n x \rangle \implies L_B(x, x) \text{ ist definiert.}$$

Betrachte nun  $x, y \in H$ . Wir wenden die Polarisationsformel an:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, A_n y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \sum_{k=0}^n (-1)^k \langle x + i y^k, A_n x + i^k y \rangle \implies L_B(x, y) \text{ existiert.}$$

Außerdem gilt

$$L_B(x + y, x + y) + L_B(x - y, x - y) = 2L_B(x, x) + 2L_B(y, y).$$

Somit ist  $L_B$  eine Sesquilinearform. Da wir nun wissen, dass  $A_n \leq A$ , folgt für alle

$$x \in H : L_B(x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, A_n x \rangle \leq \langle x, A x \rangle \leq \|A\| \|x\|^2$$

Und über die Sesquilinearität folgt die Beschränktheit, mit Riez die Eindeutigkeit.

$$\forall x, y \in H : \|L_B(x, y)\| \leq 4 \|A\| \|x\| \|y\| \implies \exists! B \in \mathcal{B}(H) : L_B(x, y) = \langle x, B y \rangle$$

□

**Definition 7.5.3.** Ein Operator  $T \in \mathcal{B}(H)$  gehört zur Spurklasse genau dann wenn es eine ONB  $(e_s)_{s \in S}$  gibt mit der Spur  $\text{tr}(T) = \sum_{s \in S} \langle e_s, T e_s \rangle < \infty$ .

**Satz 7.5.6.**  $T \geq 0$  gehört zur Spurklasse genau dann wenn  $\sqrt{|T|}$  ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Es gilt dann für alle ONB's:

$$\sum_{s \in S} \langle e_s, T e_s \rangle = \sum_{s \in S} \langle e'_s, T e'_s \rangle$$

*Beweis:* ( $\Rightarrow$ ) Gehöre  $T$  zu Spurklasse:

$$\infty > \sum_{s \in S} \langle e_s, |T| e_s \rangle = \sum_{s \in S} \left\langle \sqrt{|T|} e_s, \sqrt{|T|} e_s \right\rangle = \sum_{s \in S} \left\| \sqrt{|T|} e_s \right\|^2$$

Damit ist  $\sqrt{|T|}$  ein Hilbert Schmidt Operator

( $\Leftarrow$ ) Sei  $T \geq 0$ , dann ist  $T$  selbstadjungiert. Sei nun

$$T_+ = \frac{1}{2}(T + |T|) \geq 0, T_- = \frac{1}{2}(|T| - T) \geq 0, T = T_+ - T_-.$$

Dann haben wir

$$\sum_{s \in S} \langle e_s, T_+ e_s \rangle = \sum_{s \in S'} \langle e_s, T_+ e_s \rangle \implies (*).$$

Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$  beliebig, dann  $\text{Re}(T) = \frac{1}{2}(T + T^*)$ ,  $\text{Im}(T) = \frac{1}{2}(T - T^*)$  sind selbstadjungiert mit  $T = \text{Re}(T) + i \text{Im}(T)$ . □

**Satz 7.5.7.** Jeder Spurklasseoperator auf einem Hilbertraum  $H$  ist kompakt. Weiterhin gilt für  $T$  Spurklasse sowie  $S \in B(H)$  auch  $TS, ST$  Spurklasse und  $\text{tr}(ST) = \text{tr}(TS)$ .

*Beweis.* Sei also  $S \in \mathcal{B}(H)$  und  $T$  Spurklasse. Da die Isometrie nach Satz 7.4.1 involutorisch ist, gilt

$$|ST| = \sqrt{(ST)^*ST} = \sqrt{T^*S^*ST}.$$

Weiterhin gilt mit Satz

Label fehlt (Satz 8.19 in Vorlesung)

$$S^*S = |S|^2 \leq \|S\|^2 \text{Id} \implies T^*S^*ST \leq T^*T \|S\|^2.$$

Somit folgt

$$\sqrt{T^*S^*ST} \leq \|S\| \sqrt{T^*T} = \|S\| |T|.$$

Dies ergibt für eine ONB  $(e_s)_{s \in S}$  von  $H$

$$\sum_{s \in S} \langle e_s, |ST| e_s \rangle \leq \sum_{s \in S} \|S\| \langle e_s, |T| e_s \rangle < \infty.$$

Die Behauptung für  $ST$  erhalten wir über  $TS = (S^*T^*)^*$ . Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \text{tr}(ST) &= \sum_{s \in S} \langle e_s, ST e_s \rangle = \sum_{s \in S} \langle S^* e_s, T e_s \rangle = \sum_{s, s' \in S} \langle S^* e_s, e_{s'} \rangle \langle e_{s'}, T e_s \rangle \\ &= \sum_{s, s' \in S} \langle T^* e_{s'}, e_s \rangle \langle e_s, S e_{s'} \rangle = \sum_{s' \in S} \langle T^* e_{s'}, S e_{s'} \rangle = \sum_{s' \in S} \langle e_{s'}, T S e_{s'} \rangle. \end{aligned}$$

□

**Satz 7.5.8.** Sei  $T \geq 0$  Spurklasse auf einem Hilbertraum  $H$ . Dann existiert eine Folge  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  mit  $\forall n \in \mathbb{N} : \lambda_n \geq 0, \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n < \infty$  sowie ein ONS  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H^{\mathbb{N}}$  sodass gilt

$$T = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |e_n\rangle \langle e_n|.$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt aus  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n = \text{tr}(T)$ .

□

**Definition 7.5.4.** Sei  $H$  ein Hilbertraum sowie  $H_1, H_2$  Unterhilberträume. Dann bez.  $U \in \mathcal{B}(H)$  partielle Isometrie von  $H_1$  nach  $H_2$ , wenn

$$U^*U = \text{Pr}_{H_1} \quad \text{und} \quad UU^* = \text{Pr}_{H_2}.$$

Das heißt konkret:

$$\begin{aligned} \forall x \in H_1 : \|Ux\| &= \|x\|, \quad \forall x \in H_2 : \|U^*x\| = \|x\|, \\ \forall x \in H_1^\perp : Ux &= 0, \quad \forall x \in H_2^\perp : U^*x = 0. \end{aligned}$$

**Satz 7.5.9.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $A \in \mathcal{B}(H)$ . Dann existiert eine partielle Isometrie  $U \in \mathcal{B}(H)$  von  $\ker(A)^\perp$  nach  $\text{im}(A)$ , sodass  $A = U|A|$ .

In der Vorlesung war  $\ker(|A|) = \ker(A)^\perp$  gegeben, ist dies richtig? (Werner S. 297:  $\ker(|A|) = (\text{im}(|A|)^\perp)$ )

*Bemerkung 7.5.2.* Dies ist analog zur Polarzerlegung bei komplexen Zahlen, jedoch gilt i. A.

$$\mathbb{C} \ni z = |z| \exp(i\varphi(z)) \implies |\bar{z}| = |z| \quad \text{vs} \quad T \in \mathcal{B}(H) \implies |T^*| = \sqrt{TT^*} \neq \sqrt{T^*T} = |T| .$$

*Beweis.* Es gilt für alle  $x \in H$

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^*Ax \rangle = \left\langle x, |A|^2 x \right\rangle = \langle |A| x, |A| x \rangle = \||A| x\|^2 .$$

Damit ist  $K := \ker(A)^\perp$  ein Hilbertraum mit Norm

$$\|x\|_A := \||A| x\|^2$$

und  $|A| : K \rightarrow H$  ist eine Isometrie. Wir definieren

$$U : \text{im}(|A|) = \ker(|A|)^\perp \rightarrow \text{im}(A), \quad U(|A| x) := Ax .$$

Damit gilt

$$|A| x = |A| y \implies (x - y) \in \ker |A| \implies x - y \in \ker A \implies Ax = Ay .$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass wegen  $|A|$  selbstadjungiert  $\ker(|A|) = \ker(A)$  über

$$\||A| x\|^2 = \left\langle x, |A|^2 x \right\rangle = \langle x, A^*Ax \rangle = \|Ax\|^2 .$$

Setze weiterhin für  $y \in \ker(|A|)$   $U(y) := 0$  und damit ist  $U$  wohldefiniert und eine partielle Isometrie.  $\square$

**Satz 7.5.10.** Sei  $T$  Spurklasse-Operator auf einem Hilbertraum  $H$ . Dann ist auch  $T^*$  ein Spurklasse-Operator. Außerdem gilt  $\text{tr}(T^*) = \overline{\text{tr}(T)}$ .

*Beweis.* Nach Satz 7.5.9 existiert eine partielle Isometrie  $U \in \mathcal{B}(H) : \ker(T)^\perp = \text{im}(|T|) \rightarrow \text{im}(T)$  mit

$$T = U |T| \implies T^* = |T| U^* .$$

Somit gilt

$$TT^* = U |T|^2 U^* = U |T| \underbrace{\overbrace{U^* U}^{\text{Pr}_{\text{im}(|T|)}}}_{=|T|^2} |T| U^* \implies |T^*| = U |T| U^* .$$

Dabei erhalten wir die letzte Folgerung über:

$$|T|^2 = |T| U^* U |T| \implies |T^*|^2 = U |T| |T| U^* = (U |T| U^*)^2 .$$

Wir wählen nun eine ONB  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sodass  $\forall n \in \mathbb{N} : U^* e_n = f_n$  oder  $U^* e_n = 0$ . Somit gilt

$$\langle f_n, f_m \rangle = \langle U^* e_n, U^* e_m \rangle = \langle e_n, e_m \rangle .$$

Dies macht also auch  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zu einem ONS, sei  $((f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup S})$  ONB. Dabei haben wir ausgenutzt, dass mit  $U^* : \text{im}(T) \rightarrow \ker(T)^\perp$  nach Definition  $UU^* = \text{Pr}_{\text{im}(T)}$  gilt.

Müsste für die Definition von  $U^*$  nicht  $H = \text{im}(T) \oplus \text{im}(T)^\perp$  gelten? Dies gilt aber nur für  $\text{im}(T)$  abgeschlossen, was i. A. nicht gilt.

Damit ergibt sich nun:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, |T^*| e_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, U |T| U^* e_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle U^* e_n, |T| U^* e_n \rangle \leq \sum_{n \in \mathbb{N} \cup S} \langle f_n, |T| f_n \rangle < \infty .$$

Somit ist  $T^*$  in der Tat ein Spurklasse-Operator. Weiterhin gilt

$$\operatorname{tr}(T^*) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, T^* e_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle T e_n, e_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle T e_n, e_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{\langle e_n, T e_n \rangle} = \overline{\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, T e_n \rangle} = \overline{\operatorname{tr}(T)} .$$

□

*Bemerkung 7.5.3.* Sei  $\varrho \in \mathcal{B}(H)_{\geq 0}$  mit  $\operatorname{tr}(\varrho) < \infty$ . Dann gilt für alle  $T \in \mathcal{B}(H)$ , dass  $T\varrho$  ein Spurklasse-Operator ist, d. h. die Abbildung  $T \mapsto \operatorname{tr}(T\varrho)$  ist ein lineares Funktional.

**Satz 7.5.11.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $\varrho \in \mathcal{B}(H)_{\geq 0}$  mit  $\operatorname{tr}(\varrho) < \infty$ . Dann gilt

$$\forall T \in \mathcal{B}(H) : |\operatorname{tr}(T\varrho)| \leq \operatorname{tr}(\varrho) \|T\| .$$

Sei weiterhin  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(H)^{\mathbb{N}}$  mit  $0 \leq T_n \leq T_{n+1} \leq T \in \mathcal{B}(H)$  gegeben, dann gilt

$$\operatorname{tr} \left( \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} T_n \right) \varrho \right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{tr}(T_n \varrho) .$$

*Beweis.* Nach Satz 7.5.8 existiert  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  mit

$$\varrho = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \lambda_n \geq 0, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n = \operatorname{tr}(\varrho) < \infty .$$

Damit gilt

$$T\varrho = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n T |e_n\rangle\langle e_n| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |T e_n\rangle\langle e_n| .$$

Somit erhalten wir die erste Behauptung

$$\operatorname{tr}(T\varrho) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n | T\varrho | e_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle e_n, T e_n \rangle \implies |\operatorname{tr}(T\varrho)| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |\langle e_n, T e_n \rangle| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \|T\| .$$

Sei nun  $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$  wie oben angegeben,  $T_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} T_m$ . Mit Satz [...] folgt:

Label fehlt (Satz 8.20 in Vorlesung)

$$\langle e_n, T_m e_n \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left\langle e_n, \sup_{m \in \mathbb{N}} T_m e_n \right\rangle .$$

Anwendung des Satzes von Beppo-Levi liefert die zweite Behauptung:

$$\operatorname{tr}(T_m \varrho) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \left\langle e_n, \sup_{m \in \mathbb{N}} T_m e_n \right\rangle .$$

□

*Bemerkung 7.5.4.* Es besteht eine Analogie zwischen dem zweiten Teil des Satzes sowie der  $\sigma$ -Additivität nichtkommutativer Maße.

## 7.6 Der Spektralsatz und der messbare Funktionalkalkül

*Bemerkung 7.6.1.* Ziel des messbaren Kalküls ist es eine funktionalanalytische Beziehung zwischen stetigen Funktionen und der Maß- und Integrationstheorie herzustellen.

**Satz 7.6.1** (Riesz-Markov-Kakutani). Sei  $K$  ein kompakter metrischer Raum,  $\Sigma$  die Borelmengen auf  $K$ . Dann gibt es eine Bijektion zwischen  $C^0(K)$  und

$$M(K) := \{\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{C} \mid \mu \text{ (endliches) signiertes Maß}\}$$

mittels  $\mu(f) := \int f d\mu$ . Weiterhin ist  $\mu$  endliches Maß  $\iff \forall f \geq 0 : \mu(f) \geq 0$ .

**Satz 7.6.2.** Sei  $K$  ein kompakter metrischer Raum,  $\Sigma$  die Borelmengen auf  $K$  sowie  $L^\infty(K) := \{f : K \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar, beschränkt}\}$ . Sei weiterhin  $V \subseteq L^\infty(K)$  mit den Eigenschaften

1.  $C^0(K) \subseteq V$
2. Für alle  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V^{\mathbb{N}}$  mit  $\forall t \in K : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) := f(t)$  existiert sowie  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$  gilt  $f \in V$ .

Dann gilt  $V = L^\infty(K)$ .

*Beweis.* Wir definieren für  $f \in L^\infty(K)$

$$V_f := \{g \in L^\infty(K) \mid f + g \in V\}.$$

Sei  $f \in C^0(K)$ , dann  $C^0(K) \subseteq V_f$ . Sei weiterhin eine Folge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V_f^{\mathbb{N}}$  gegeben, mit  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|g_n\|_\infty < \infty$  und einem existierenden punktwisen Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$ . Damit folgt sofort  $g \in V_f$ . Somit  $V_f = V$ , also

$$f \in C^0(K), g \in V \implies f + g \in V.$$

Sei nun  $f \in V$ , dann gilt ebenfalls  $C^0(K) \subseteq V_f$  und wir folgern analog  $V_f = V$ , also

$$f \in V, g \in V \implies f + g \in V.$$

Somit ist  $V$  also abgeschlossen bzgl. der Addition. Genauso lässt sich

$$\alpha \in \mathbb{C}, g \in V \implies \alpha g \in V$$

zeigen, was  $V$  zu einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum macht. Sei nun  $G \subseteq K$  offen,

$$1_G(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\min(1, n \cdot \text{dist}(x, G^c))}^{\in C^0(K)} \implies 1_G \in V.$$

Man kann leicht zeigen:

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, A_n \in \Sigma \text{ paarweise disjunkt} \implies 1_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{A_n}$$

Weiterhin gilt

$$1_A \in V \implies 1_{A^c} = \overbrace{1}^{\in C^0(K)} - 1_A$$

Aus letzteren beiden Relationen folgt:  $\{A \in \Sigma \mid 1_A \in V\} = \Sigma$ . Mit Eigenschaft 2 folgt dann die Behauptung.  $\square$

*Bemerkung 7.6.2* (Erweiterung Funktionalalkül). Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$  selbstadjungiert,  $f \in C^0(\sigma(T))$  sowie  $x, y \in H$  mit  $H$  Hilbertraum. Definiere:

$$l_{x,y}(f) := \langle f(T)x, y \rangle$$

Damit ist  $l_{x,y} : C^0(\sigma(T)) \rightarrow \mathbb{C}$  linear und stetig mit

$$|l_{x,y}(f)| \leq \|f(T)\| \|x\| \|y\| = \|f\|_\infty \|x\| \|y\| .$$

Dann existiert genau ein Maß  $\mu_{x,y}$  auf  $\sigma(T)$  mit

$$\forall f \in C(\sigma(T)) : \langle f(T)x, y \rangle = \int_{\sigma(T)} f(z) \mu_{x,y}(dz) \quad (*) .$$

Weiterhin gilt  $\|\mu_{x,y}\|_{TV} \leq \|x\| \|y\|$  wobei  $\|\cdot\|_{TV}$  die *Totalvariationsnorm*:

$$\|\mu\|_{TV} = \sup \left\{ \left| \int f d\mu \right| \mid \forall x \in K : |f(x)| \leq 1, f \in L^\infty(K) [\text{bzw. } f \in C^0(K)] \right\} .$$

Die rechte Seite von  $(*)$  ist auch für  $f \in L^\infty(\sigma(T))$  sinnvoll, wodurch wir auch für solche  $f$  ein  $f(T)$  definieren wollen (messbarer Kalkül).

**Satz 7.6.3** (Messbarer Funktionalalkül). Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$  normal. Dann gibt es genau eine Abbildung  $\varphi : L^\infty(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{B}(H)$  mit

1.  $\varphi(\text{id}) = T$ ,  $\varphi(1) = \text{Id}$ , wobei  $\forall x \in \sigma(T) : \text{id}(x) = x$ ,  $1(x) = 1$
2.  $\forall f \in L^\infty(\sigma(T)) : \varphi(\bar{f}) = \varphi(f)^*$
3.  $\forall f, g \in L^\infty(\sigma(T)) \forall \lambda \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$  und  $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$
4.  $\forall f \in L^\infty(\sigma(T)) : \|\varphi(f)\| = \|f\|_\infty$
5. Falls  $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in L^\infty(\sigma(T))$ ,  $\exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\|_\infty \leq c$  und  $\forall t \in \sigma(T) : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ , so gilt  $\forall x \in H : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(f_n)x = \varphi(f)x$ .

*Beweis. Schritt 1* (Eindeutigkeit) Sei  $\tilde{\varphi}$  eine weitere solche Abbildung. Wir nutzen Satz 7.6.2 mit

$$V = \{f \in L^\infty(\sigma(T)) \mid \varphi(f) = \tilde{\varphi}(f)\} .$$

Nach Voraussetzung wissen wir, dass  $\text{id} \in V$ ,  $1 \in V$ . Aufgrund der Eindeutigkeit des stetigen Funktionalalküls gilt  $C^0(\sigma(T)) \subseteq V$ . Wegen Eigenschaft 5 ist Satz 7.6.2 anwendbar und wir erhalten  $V = L^\infty(\sigma(T)) \iff \varphi = \tilde{\varphi}$ .

**Schritt 2** (Existenz) Analog zu Bem. 7.6.2 definieren wir für  $f \in L^\infty(\sigma(T))$  die stetige Sesquilinearform

$$u : H \times H \rightarrow \mathbb{C}, \quad u(x, y) = \int_{\sigma(T)} f(z) \mu_{x,y}(dz) .$$

Damit ist  $u$  insbesondere beschränkt, da

$$|u(x, y)| \leq \|f\|_\infty \|\mu_{x,y}\| \leq \|f\|_\infty \|x\| \|y\| .$$

Nach Satz 5.2.3 existiert somit in der Tat  $\varphi(f) \in \mathcal{B}(H)$  mit

$$u(x, y) = \langle x, \varphi(f)y \rangle .$$



**Schritt 3** (Eigenschaften) (Zu 2:) Seien  $x, y \in H$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \langle x, \varphi(\bar{f})y \rangle &= \int_{\sigma(T)} \bar{f}(z) \mu_{x,y}(dz) = \overline{\int_{\sigma(T)} f(z) \overline{\mu_{x,y}}(dz)} = \overline{\int_{\sigma(T)} f(z) \mu_{y,x}(dz)} \\ &= \overline{\langle y, \varphi(f)x \rangle} = \langle \varphi(f)x, y \rangle \implies \varphi(\bar{f}) = \varphi(f)^* \end{aligned}$$

(Zu 3:) Beweis analog

(Zu 5:) Seien  $f_n, f \in L^\infty(\sigma(T))$  wie gefordert. Damit wissen wir nach dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz:

$$\forall x, y \in H : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\sigma(T)} f_n(z) \mu_{x,y}(dz) = \int_{\sigma(T)} f(z) \mu_{x,y}(dz) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, \varphi(f_n)y \rangle = \langle x, \varphi(f)y \rangle .$$

Sei nun  $x \in H$  beliebig, so gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi(f_n)x\|^2 &= \langle \varphi(f_n)x, \varphi(f_n)x \rangle = \langle x, \varphi(f_n)^* \varphi(f_n)x \rangle = \langle x, \varphi(\bar{f}_n) \varphi(f_n)x \rangle \\ &= \left\langle x, \varphi(|f_n|^2)x \right\rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left\langle x, \varphi(|f|^2)x \right\rangle = \|\varphi(f)x\|^2 . \end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi(f_n)x - \varphi(f)x\|^2 &= \langle \varphi(f)x, \varphi(f)x \rangle - 2\Re(\langle \varphi(f_n)x, \varphi(f)x \rangle) + \langle \varphi(f_n)x, \varphi(f_n)x \rangle \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \varphi(f)x, \varphi(f)x \rangle - 2\langle \varphi(f)x, \varphi(f)x \rangle + \langle \varphi(f)x, \varphi(f)x \rangle = 0 . \end{aligned}$$

Dies war gerade zu zeigen.  $\square$

**Definition 7.6.1.** Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$  normal. Dann ist das zugehörige *Spektralmaß*  $E^T : \Sigma(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{B}(H)$  definiert als

$$E^T(A) = 1_{A \cap \sigma(T)}(T) = \varphi(1_A)$$

Dabei bez.  $f(T) = \varphi(f)$  für alle  $f \in L^\infty(\sigma(T))$ .

**Satz 7.6.4** (Eigenschaften Spektralmaß). Es gilt für  $T \in \mathcal{B}(H)$  normal:

1.  $\forall A \in \Sigma(\mathbb{C}) : E^T(A)$  ist eine orthogonale Projektion.
2.  $\forall A, B \in \Sigma(\mathbb{C}) : E^T(A \cap B) = E^T(A)E^T(B) = E^T(B)E^T(A)$
3. Für alle  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ , wobei die  $A_n$  paarweise disjunkt,  $\forall x \in H$  gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} E^T(A_n)x = E^T\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)x .$$

4.  $\sigma(T)$  ist die kleinste kompakte Menge  $K$  mit  $E^T(K) = \text{Id}$ .

*Beweis.* (**Zu 1**) Eine orthogonale Projektion  $P \in \mathcal{B}(H)$  erfüllt die Eigenschaften  $P = P^2 = P^*$ . Es gilt

$$\forall A \in \Sigma(\mathbb{C}) : 1_A^2 = 1_A \implies \varphi(1_A) = \varphi(1_A^2) = \varphi(1_A)\varphi(1_A) \iff E^T(A) = (E^T(A))^2 .$$

Analog lässt sich folgern

$$\overline{1_A} = 1_A \implies E^T(A)^* = E^T(A) .$$

(Zu 2) Die Behauptung folgt aus

$$\forall A, B \in \Sigma(\mathbb{C}) : 1_A 1_B = 1_{A \cap B} .$$

(Zu 3) Dies folgt direkt aus Satz 7.6.3, (5).

(Zu 4) Nach 7.6.3 gilt  $E^T(\sigma(T)) = \text{Id}$ . Sei nun

$$K \subseteq \sigma(T) \text{ mit } E^T(K) = \text{Id} \implies E^T(K^C) = 0 .$$

Somit gilt

$$\forall f \in L^\infty(\sigma(T)) \text{ mit } f|_K = 0 : \varphi(f) = 0 \implies f|_{\sigma(T)} = 0 \implies f = 0 \implies K = \sigma(T) .$$

□

**Definition 7.6.2.** Ein *projektionswertiges Maß* (auf  $\mathbb{C}$ ,  $H$  Hilbertraum) ist eine Abbildung  $E : \Sigma(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{B}(H)$  mit:

1.  $\forall A \in \Sigma(\mathbb{C}) : E(A) = E(A)^2 = E(A)^*$
2.  $\forall A, B \in \Sigma(\mathbb{C}) : E(A)E(B) = E(A \cap B)$
3.  $E(\emptyset) = 0, E(\mathbb{C}) = \text{Id}$
4.  $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma(\mathbb{C})^\mathbb{N}, A_n$  paarweise disjunkt,  $\forall x \in H :$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} E(A_n)x = E\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)x \text{ mit } E(K) = \text{Id} \text{ für kompaktes } K \subseteq \mathbb{C} .$$

**Satz 7.6.5** (Spektralsatz für normale, beschränkte Operatoren). Sei  $E$  ein projektionswertiges Maß. Dann existiert genau ein normales  $\mathcal{B}(H) \ni T =: \int_{\sigma(T)} z E(dz)$  mit

$$\forall f \in L^\infty(\mathbb{C}) \forall x, y \in H : \langle x, \varphi(f)y \rangle = \int_{\sigma(T)} f(z) \langle x, E(dz)y \rangle .$$

Wieso geht hier  $f \in L^\infty(\mathbb{C})$  und nicht  $f \in L^\infty(\sigma(T))$ ?

*Beweis.* Sei  $K \subseteq \mathbb{C}$  kompakt. Setze

Ich vermute  $K \subseteq \mathbb{C}$  kompakt, in der Vorlesung wurde dies jedoch nicht angegeben

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{C}} z 1_K(z) \langle x, E(dz)y \rangle \implies |(u(x, y))| \leq \max\{z \mid z \in K\} \|x\| \|y\|$$

Nach 5.2.3 existiert  $T \in \mathcal{B}(H)$  mit  $u(x, y) = \langle x, Ty \rangle$ . Somit gilt

$$\forall f \in L^\infty(K) : \langle x, f(T)y \rangle = \int_K f(z) \langle x, E(dz)y \rangle .$$

Dabei ist die Abbildung

$$\Sigma(\mathbb{C}) \supseteq A \mapsto \langle x, E(A)y \rangle$$

ein Maß, dasselbe Maß, welches in Bem. 7.6.2 mit  $\mu_{x,y}$  bezeichnet wurde.

□

*Bemerkung 7.6.3* (Integration bzgl. eines projektionswertigen Maßes). Zur Integration einer beschränkten, messbaren Funktion  $f$  gehen wir in Schritten analog zur skalaren Integration vor.

**1. Schritt: Indikatorfunktionen** ( $f = 1_A$ ,  $A \in \Sigma(\mathbb{R})$ ). Dann setze

$$\int f(z)E(dz) = E(A) .$$

**2. Schritt: Treppenfunktionen** ( $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ ) Dann setze

$$\int f(z)E(dz) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{A_i} .$$

**3. Schritt:** Sei  $f$  beschränkt und messbar, dann existiert eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Es lässt sich zeigen, dass gerechtfertigt ist

$$\int f dE = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dE$$

zu setzen.

**Satz 7.6.6.** Sei  $T \in \mathcal{B}(H)$  normal, sowie  $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkt und messbar. Dann gilt

$$(f \circ g)(T) = f(g(T)) .$$

*Beweis.* Wir sehen, dass  $E^{g(T)}(A) = E^T(g^{-1}(A))$  gilt (intuitiv wegen  $1_A \circ g = 1_{g^{-1}(A)}$ ). Somit:

$$f(g(T)) = \int f(z)E^{g(T)}(dz) = \int f(z)E^T(g^{-1}(dz)) = \int f(g(z))E^T(dz) = (f \circ g)(T) .$$

□

**Satz 7.6.7.** Sei  $H$  Hilbertraum,  $T \in \mathcal{B}(H)$  normal mit Spektralmaß  $E^T$ . Dann gilt

1.  $\lambda \in \varrho(T) \iff \exists \varepsilon > 0 : E^T(K_\varepsilon(\lambda)) = 0$
2.  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist Eigenwert von  $T \iff E^T(\{\lambda\}) \neq 0$ . In diesem Fall ist  $E^T(\{\lambda\})$  die Projektion auf  $\ker(T - \lambda \text{Id})$ .
3. Isolierte Punkte  $\lambda \in \sigma(T)$  (d. h.  $\exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(\lambda) \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$ ) sind Eigenwerte von  $T$ .

*Beweis. (Zu 1.)* Nach Konstruktion gilt offensichtlich  $E^T(\varrho(T)) = 0$ . Zeige nun die Rückrichtung. Sei also eine solches  $\varepsilon$  gegeben. Setze

$$f(z) = \frac{1}{\lambda - z} \cdot 1_{K_\varepsilon(\lambda)^C}(z)$$

Dann ist  $f$  messbar und auf  $\sigma(T)$  beschränkt. Dasselbe gilt für  $g(z) = \lambda - z$ . Somit (mit Satz 7.6.6)

$$f(T)(\lambda - T) = f(T)g(T) = (fg)(T) = 1_{K_\varepsilon(\lambda)^C}(T) = E^T(K_\varepsilon(\lambda)^C) = \text{Id} .$$

Dabei haben wir  $\text{Id} = E^T(\mathbb{C}) = E^T(K_\varepsilon(\lambda)^C) + E^T(K_\varepsilon(\lambda))$  ausgenutzt. Analog zeigt man  $(\lambda - T)f(T) = \text{Id}$  und somit gilt in der Tat  $\lambda \in \varrho(T)$ .

**(Zu 2.)** Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  Eigenwert zu  $x \in H$ , d. h.  $Tx = \lambda x$ . Aus 7.4.1 ist bekannt, dass für  $f$  stetig

$f(T)x = f(\lambda)x$  gilt. Mit Satz 7.6.2 folgt, dass diese Gleichung auch für beschränkte, messbare  $f$  gilt. Somit

$$E^T(\{\lambda\})x = 1_{\{\lambda\}}(T)x = 1_{\{\lambda\}}(\lambda)x = x .$$

Sei nun andersherum  $E^T(\{\lambda\}) \neq 0$ . Sei nun  $x \in \text{im}(E^T(\{\lambda\}))$ , d. h.  $x = E^T(\{\lambda\})x$ . Somit

$$\langle y, (\lambda - T)x \rangle = \langle y, (\lambda - T)E^T(\{\lambda\})x \rangle = \int (\lambda - z)1_{\{\lambda\}}(z) \langle y, E^T(dz)x \rangle = 0 .$$

Damit in der Tat  $x \in \ker(\lambda - T)$ .

**(Zu 3.)** Wähle  $\varepsilon > 0$  mit  $K_\varepsilon(\lambda) \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$ . Nach dem 1. Punkt des Satzes gilt

$$K_\varepsilon(\lambda) \setminus \{\lambda\} \subseteq \varrho(T) \implies E^T(K_\varepsilon(\lambda) \setminus \{\lambda\}) = 0$$

Währe nun  $E^T(\{\lambda\}) = 0$ , dann auch  $E^T(K_\varepsilon(\lambda)) = 0$  und deshalb  $\lambda \in \varrho(T)$ . Somit  $E^T(\{\lambda\}) \neq 0$  und folglich Eigenwert.  $\square$