Skript Funktionalanalysis

Jakob Kropf und Jonas Harder

Version vom 23. Mai 2024

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Metrische Räume

1.1 Definitionen

Definition 1.1.1. Eine Menge T, versehen mit einer Abbildung $d : T \times T \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften ($s, t, u \in T$ beliebig)

1. $d(s,t) \geq 0$,
2. $d(s,t) = d(t,s)$
3. $d(s,u) \leq d(s,t) + d(t,u)$
4. $d(s,t) = 0 \iff s = t$

ist *metrischer Raum* mit *Metrik* d. Falls nur ($\Leftarrow$) in 4. gilt, handelt es sich um eine *Halbmetrik*.

Beispiel 1.1.1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist ein metrischer Raum.

Beispiel 1.1.2. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist ein metrischer Raum.

Beispiel 1.1.3. $(\mathbb{R}^n, d_i)$ mit $i \in \{1, 2, \infty\}$ sind metrische Räume, wobei für $x, y \in \mathbb{R}$

$$d_1 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)}, \quad d_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \quad d_\infty := \max\{|x_i - y_i|\,|i : 1, \ldots, n\}$$

Definition 1.1.2. Sei X, d ein metrischer Raum. Dann definieren wir die offene bzw. abschlossene Kugel um $x \in X$wie folgt.

$$K_\nu(x) := \{y \in X | d(x,y) \leq \nu\} \quad \overline{K_\nu(x)} := \{y \in X | d(x,y) \leq \nu\}$$

Weiterhin ist U eine Umgebung von $x \iff \exists \nu > 0 : K_\nu(x) \subseteq U$.

1.2 Konvergenz und Stetigkeit

Definition 1.2.1. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum X heißt *konvergent* gegen $x \in X$ (bez. $\lim_{n \to \infty} t_n = t$), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) \leq \varepsilon \quad .$$

Satz 1.2.1. Der Limes einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

Satz 1.2.2. Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent und hat den gleichen Grenzwert.

Definition 1.2.2. Sei $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann heißt f *stetig an der Stelle* $x_0 \in X_1$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : d_1(x, x_0) < \delta \implies d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Satz 1.2.3. Sei $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist stetig an x_0
2. $\forall \left(x_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in X_1 \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in X_1 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Satz 1.2.4. Seien $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$ stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Dann ist die Verknüpfung $g \circ f : X_1 \to X_3$ stetig.

1.3 Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 1.3.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann heißt

1. $G \subseteq X$ offen $:\iff \forall x \in G \, \exists \nu > 0 : K_\nu(x) \subseteq G$
2. $F \subseteq X$ abgeschlossen $:\iff \forall \left(x_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in F \, \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} x_n = x \implies x \in F$
3. $S \subseteq X$ liegt dicht in $X :\iff \forall x \in X \, \exists \left(s_n\right)_{n \in \mathbb{N}}, s_n \in S : \lim_{n\to\infty} s_n = x$

Definition 1.3.2. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *separabel*, wenn es eine höchstens abzählbare Teilmenge $S \subseteq X$ gibt, die in diesem Raum dicht liegt.

Beispiel 1.3.1. Der Banachraum

$$l^\infty(\mathbb{N}) := \{\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}} | a_n \in \mathbb{R}, \left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt}\} \quad \text{mit } d_\infty(\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(b_n\right)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$$

ist nicht separabel.

Satz 1.3.1. Sei $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind äquivalent:

1. f ist stetig.
2. $\forall G \subseteq X_2 : G$ offen $\implies f^{-1}(G)$ offen.
3. $\forall F \subseteq X_2 : F$ abgeschlossen $\implies f^{-1}(F)$ abgeschlossen.

Bemerkung 1.3.1. Aus Satz 1.3.1 folgt: $K_\varepsilon(x)$ offen, da $K_\varepsilon(x) = d(x, \cdot)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$.

1.4 Vollständigkeit

Definition 1.4.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann heißt $\left(x_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X$ *Cauchy-folge*, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Satz 1.4.1. Jede konvergente Folge $\left(x_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) ist eine Cauchy-Folge.

Definition 1.4.2. Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge konvergiert.

Beispiel 1.4.1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $\mathbb{C}, |\cdot|$ sind vollständige metrische Räume.

Beispiel 1.4.2. Die metrischen Räume $(\mathbb{R}^n, f_p)$ mit $p \in [1, \infty]$ sind vollständig.

Satz 1.4.2. Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:

$$Y \subseteq X \text{ vollständig} \iff Y \text{ abgeschlossen.}$$

Satz 1.4.3. Sei (X_1, d_1) ein metrischer Raum (X_2, d_2) ein vollständiger metrischer Raum sowie $\varphi : X_1 \to X_2$ isometrisch. Dann gibt es genau eine isometrisches $\hat{\varphi} : X_1 \to X_2$ mit $\hat{\varphi}|_S = \varphi$.

Beweis. Sei $x \in X_1$, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in S$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere eine Cauchyfolge. Folglich ist auch $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und mit der Vollständigkeit von X_2 gilt

$$\exists y \in X_2 : \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = y := \hat{\varphi}(x) \ .$$

Wir setzen also für solche Folgen

$$\hat{\varphi}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) := \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) \ .$$

Zeige nun $\hat{\varphi}$ ist wohldefiniert. Sei eine weitere Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in S$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Es folgt:

$$d_2(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = d_1(x_n, y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d_1(x,x) = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = y \ .$$

Somit ist $\hat{\varphi}$ in der Tat wohldefiniert. Weiterhin gilt $\hat{\varphi}|_S = \varphi$, denn wir wählen für $x \in S$ die Folge $(x)_{n\in\mathbb{N}}$, somit gilt

$$\hat{\varphi}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \hat{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x) = \varphi(x) \ .$$

Zeige nun $\hat{\varphi}$ ist eine Isometrie. Seien dazu $x, y \in X$ mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in S, wobei $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Somit

$$d_2(\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)) = \lim_{n\to\infty} d_2(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d_1(x_n, y_n) = d(x,y) \ .$$

□

Satz 1.4.4. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ (bez. Vervollständigung von X) und eine Isometrie $\varphi : X \to \hat{X}$ (d. h. $\forall x,y \in X : d(x,y) = \hat{d}(\varphi(x), \varphi(y))$), sodass das Bild $\varphi(X)$ dicht in $\hat{X}$ ist. Haben $(\tilde{X}, \tilde{d})$ und $\tilde{\varphi}$ die gleiche Eigenschaft, so gibt es eine Bijektion $\psi : \hat{X} \to \tilde{X}$ mit $\tilde{\varphi} = \psi \circ \varphi$.

Beweis. Definiere die Menge aller Cauchyfolgen in X durch

$$\hat{X}_0 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge}\}.$$

Definiere weiterhin eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\hat{X}_0$ mit

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} :\iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \ .$$

Wir setzen $\hat{X}$ als die Menge aller Äquivalenzklassen an, d. h.

$$\hat{X} = {}^{\hat{X}_0}\!/\!_{\sim} = \{\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \,|\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{X}_0\} \text{ wobei } \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\} \ .$$

Nun konstruieren wir die Metrik $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \to [0, \infty)$, wobei für $\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \in \hat{X}$ gilt

$$\hat{d}(\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]) = \lim_{n,m\to\infty} d(x_n, y_m) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N, M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall m \geq M : d(x_n, y_m) < \varepsilon \ .$$

Zeigen nun, dass $\hat{d}$ wohldefiniert. Seien $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{X}_0$ mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann nach Definition

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, y'_n) = 0 \ .$$

Anwenden der Dreiecksungleichung ergibt

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n) \\ d(x'_n, y'_n) &\leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n) \ . \end{aligned}$$

Somit

$$\left| d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n) \right| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \to 0 \ .$$

Da $(d(x_n, y_n))$ und $(d(x'_n, y'_n))$ konvergent, folgt

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, y_m) = \lim_{n',m'\to\infty} d(x'_{n'}, y'_{m'})$$

und somit ist $\hat{d}$ wohldefiniert. Nun gilt nach Def. 1.1.1 zu zeigen, dass $\hat{d}$ eine Metrik auf $\hat{X}$ ist. Wir zeigen hier nur die Dreiecksungleichung:

$$\begin{gathered} \lim_{n,m\to\infty} d(x_n, y_m) \leq \lim_{k\to\infty} \lim_{n,m\to\infty} d(x_n, z_k) + d(z_k, y_m) \iff \\ \hat{d}(\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]) \leq \hat{d}(\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \left[(z_k)_{k\in\mathbb{N}}\right]) + \hat{d}(\left[(z_k)_{k\in\mathbb{N}}\right], \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]) \ . \end{gathered}$$

Setze nun $\varphi : X \to \hat{X}, \ , x \mapsto [(x)_{n\in\mathbb{N}}]$, dies ist offensichtlich eine Isometrie. Zeigen nun, dass $\varphi(X)$ dicht in $\hat{X}$. Sei $\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \in \hat{X}$. Nach Voraussetzung ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, d. h. $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ sodass $\forall m, n \geq N_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Somit $\hat{x}_{N_0} := [(x_{N_0})_{n\in\mathbb{N}}] = \varphi(x_{N_0}) \in \varphi(X)$ und

$$\hat{d}\left(\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \hat{x}_{N_0}\right) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{N_0}) < \varepsilon \ .$$

Somit $\hat{x}_{N_0} \in K_\varepsilon(\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]) \cap \varphi(X)$ und folglich ist $\varphi(X)$ dicht in $\hat{X}$. Nun gilt zu zeigen, dass $(\hat{X}, \hat{d})$ vollständig ist. Zeige dafür zunächst folgendes Lemma.

Lemma 1.4.1. Sei X, d metrischer Raum, $S \subseteq X$ dicht in X, sodass jede Cauchyfolge in S in X konvergiert. Dann ist X vollständig.

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Da S dicht in X gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists y_n \in S : d(x_n, y_n) < 1/n \ .$$

Somit ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge in S, da

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) < 1/m + d(x_m, x_n) + 1/n \ .$$

Nach Annahme existiert $\lim_{n\to\infty} y_n =: x \in X$. Da

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, x) < 1/n + d(y_n, x)$$

folgt in der Tat $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. □

Nach Lemma 1.4.1 g. z. z., dass jede Cauchyfolge in $\varphi(X)$ in $\hat{X}$ konvergiert. Sei $(\hat{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\varphi(X)$, d. h. $\hat{x}_k := (x_k, x_k, \ldots)$. Da φ eine Isometrie, ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X durch

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) = \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) \ .$$

Somit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \hat{X}_0$, $\left[(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right] \in \hat{X}$. Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\forall k, n \geq N : d(z_k, z_n) < \varepsilon$. Somit gilt $\forall k \geq N$:

$$\hat{d}(\hat{x}_k, \hat{x}) = \lim_{n\to\infty} d(z_k, z_n) < \varepsilon \ .$$

Folglich konvergiert $(\hat{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\hat{x} \in \hat{X}$ und $\hat{X}$ ist vollständig. Betrachte nun $(\tilde{X}, \tilde{d})$ sowie $\tilde{\varphi}$ mit den gleichen Eigenschaften. Wir definieren

$$\psi_0 : \varphi(X) \to \tilde{X}, \ \ \psi_0(\varphi(x)) = \tilde{\varphi}(x) \ .$$

Dies ist eine Isometrie, da für $x, y \in X$ gilt

$$\tilde{d}\left(\psi_0(\varphi(x)), \psi_0(\varphi(y))\right) = \tilde{d}(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)) = d(x, y) = \hat{d}(\varphi(x), \varphi(y)) \ .$$

Nach Satz 1.4.3 existiert eine eindeutige Erweiterung $\psi : \hat{X} \to \tilde{X}$ Isometrie mit $\psi|_{\varphi(X)} = \psi_0$. Da ψ_0 als Isometrie injektiv ist, g. z. z. ψ_0 ist surjektiv. Sei also $z \in \tilde{X}$, dann wegen der Dichtheit von $\tilde{\varphi}(X)$

$$\exists \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \ \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in X : \lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}(x_n) = z \ .$$

Somit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge $\implies$ $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge. Da $\hat{X}$ vollständig

$$\exists w \in \hat{X} : \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = w \ .$$

Da ψ eine Isometrie ist folgt schließlich $\lim_{n\to\infty} \psi(\varphi(x_n)) = \psi(w) = z$ und somit ist ψ bijektiv. □

1.5 Kompaktheit

Definition 1.5.1. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. D. h., wenn $(G_i)_{i\in I}$ eine Famile offener Mengen, mit $X = \bigcup_{i\in I} G_i$, dann existieren endlich viele $G_{i_1}, \ldots, G_{i_n}$ mit $X = \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$.

Satz 1.5.1. Sei X, d metrischer Raum, $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K beschränkt und abgeschlossen (Umkehrung gilt i. A.nicht).

Satz 1.5.2. Sei X, d metrischer Raum. Dann gilt

$$X \text{ kompakt} \iff \forall \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \exists \left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ Teilfolge } \exists y \in X : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y$$

Satz 1.5.3 (Heine-Borel)**.** Betrachte die metrischen Räume $(\mathbb{R}^n, d_p)$ mit $p \in [1, \infty]$. Dann ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt $\iff$ X beschränkt und abgeschlossen.

Definition 1.5.2. Sei (X, d) metrischer Raum. Dann heißt $Y \subseteq X$ totalbeschränkt falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{N} \ \exists x_1, \ldots, x_M \in Y : Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} K_\varepsilon(x_i)$$

Satz 1.5.4. Sei X, d ein vollständiger metrischer Raum, $Y \subseteq X$. Dann ist Y kompakt $\iff$ Y abgeschlossen und total beschränkt.

Beweis. ($\Longrightarrow$)
Sei Y kompakt. Y abgeschlossen folgt aus Satz 1.5.1. Zeige nun die totale Beschränktheit, sei $\varepsilon > 0$ dafür fixiert. Dann gilt offensichtlich

$$Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} K_\varepsilon(y) \overset{Y \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} \exists y_1, \ldots, y_M : Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} K_\varepsilon(y_i)$$

Somit ist Y total beschränkt.
($\Longleftarrow$)
Sei $Y \subseteq X$ abgeschlossen und total beschränkt und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus Y. Es g. z. z., dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in Y konvergente Teilfolge besitzt. Wir nutzen die totale Beschränktheit zur Konstruktion der Teilfolge (TF).

$$\varepsilon = 1 : \exists \left\{y_i^1\right\}_{i=1,\ldots,M_1},\ Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_1} K_1\left(y_i^1\right) \Longrightarrow \exists \text{ TF } \left(x_{n_k^1}\right)_{k\in\mathbb{N}} \exists i_1 \in \{1,\ldots,M_1\}\, \forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k^1} \in K_1\left(y_{i_1}^1\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} : \exists \left\{y_i^2\right\}_{i=1,\ldots,M_2},\ Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_2} K_{1/2}\left(y_i^2\right) \Longrightarrow \exists \text{ TTF } \left(x_{n_k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}} \exists i_2 \in \{1,\ldots,M_2\}$$
$$\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k^2} \in K_1\left(y_{i_1}^1\right) \cap K_{1/2}\left(y_{i_2}^2\right)$$

Diese Konstruktion lässt sich nun auf l Schritte erweitern.

$$\varepsilon = 2^{-l} : \exists \left\{y_i^l\right\}_{i=1,\ldots,M_l},\ Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_l} K_{2^{-l}}\left(y_i^l\right) \Longrightarrow \exists \text{ TT\ldots TF } \left(x_{n_k^l}\right)_{k\in\mathbb{N}} \exists i_l \in \{1,\ldots,M_l\}$$
$$\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k^l} \in K_1\left(y_{i_1}^1\right) \cap K_{1/2}\left(y_{i_2}^2\right) \cap \ldots \cap K_{2^{-(l-1)}}\left(y_{i_{l-1}}^{l-1}\right) \cap K_{2^{-l}}\left(y_{i_l}^l\right)$$

Nach Konstruktion ist $\left(x_{n_k}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und für $k, k' \geq l$ gilt

$$x_{n_k}^k,\ x_{n_{k'}}^{k'} \in K_{2^{-l}}\left(y_{i_l}^l\right) \Longrightarrow d\left(x_{n_k}^k, x_{n_{k'}}^{k'}\right) < 2^{-(l-1)}\ .$$

Folglich ist $\left(x_{n_k}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und da X nach Voraussetzung vollständig, gilt

$$\exists z \in X : \lim_{k\to\infty} x_{n_k}^k = z\ .$$

Da Y abgeschlossen, gilt insbesondere $z \in Y$ und folglich Y kompakt. □

Beispiel 1.5.1. Betrachte

$$C[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}\ ,\ \ \|\cdot\|_\infty\ ,\ \text{für } f, g \in C[0,1] : d(f,g) = \max\{|f(t) - g(t)| \mid t \in [0,1]\}$$

Dann gilt $Y \subseteq C[0,1]$ ist kompakt $\Longleftrightarrow$ Y punktweise beschränkt, d. h.

$$\exists c > 0\ \forall f \in Y\ \forall t \in [0,1] : |f(t)| \leq c$$

und Y gleichgradig stetig, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in Y\ \forall s,t \in [0,1] : |t-s| < \delta \Longrightarrow |f(t) - f(s)| < \varepsilon\ .$$

Satz 1.5.5. Sei (X_1, d_1) ein kompakter metrischer Raum, (X_2, d_2) ein metrischer Raum, sowie $f : X_1 \to X_2$ stetig. Dann ist $f(X_1)$ kompakt.

Bemerkung 1.5.1. Falls $X_2 = \mathbb{R}$, dann existieren nach dem Satz von Weierstraß $x_+, x_- \in X_1$ mit $f(x_+) = \sup f(X_1)$ und $f(x_-) = \inf f(X_1)$.

Satz 1.5.6. Sei (X_1, d_1) ein kompakter metrischer Raum, (X_2, d_2) ein metrischer Raum, sowie $f : X_1 \to X_2$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon \, .$$

Kapitel 2

Maß- und Integrationstheorie

2.1 Grundlegende Konstruktionen

Definition 2.1.1. Sei $\Omega \neq \emptyset$. Dann heißt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ σ-Algebra, falls

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $\forall A \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : A \in \mathcal{F} \implies A^C \in \mathcal{F}$
3. $\forall \left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}\ A_n \in \mathcal{F} : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$

Bezeichne $\Omega, \mathcal{F}$ als messbaren Raum.

Bemerkung 2.1.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann ist die σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ der Borelmengen die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen von X enthält. Bez. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) =: \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}^n$.

Definition 2.1.2. Sei $\Omega, \mathcal{F}$ ein messbarer Raum. Dann ist $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ ein Maß, falls

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\forall \left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{F}, \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset : \mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

Wir bezeichnen $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ als Maßraum.

Beispiel 2.1.1. Sei Ω beliebig und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Dann können wir das Zählmaß μ definieren mit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{A endlich} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist Ω meist abzählbar, z. B. $\Omega = \mathbb{N}$ oder $\Omega = \mathbb{Z}$

Beispiel 2.1.2. Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{F} = \mathcal{B}^n$. Dann definieren wir das Lebesgue-Maß l^n mit

$$l^n\left(\bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\ .$$

Für $l = 1$ gilt damit insbesondere $l^1([a, b)) =: l([a, b)) = b - a$.

2.2 Integration

Definition 2.2.1. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt messbar (bez. $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C})$), falls

$$\forall r > 0, z \in \mathbb{C} : f^{-1}(K_r(z)) \in \mathcal{F} \ \left[\iff \forall U \in \mathcal{B}(\mathbb{C}) : f^{-1}(U) \in \mathcal{F} \right] .$$

Analog ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar (bez. $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$), falls

$$\forall U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$$

Bemerkung 2.2.1. Wir bezeichnen weiterhin $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, [0, \infty)) := \mathcal{M}_+(\Omega)$.

Bemerkung 2.2.2. Sei $\Omega, \mathcal{F}$ ein messbarer Raum, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann ist f messbar

$$\iff \forall c \in \mathbb{R} : \{f > c\} := \{x \in \Omega | f(x) > c\} \in \mathcal{F} .$$

Definition 2.2.2. Sei A eine Menge. Eine Funktion der Form

$$1_A(\omega) \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

heißt *Indikatorfunktion* der Menge A.

Satz 2.2.1 (Integral für nichtnegative, messbare Funktionen)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gibt es genau eine Abbildung $\varphi : \mathcal{M}_+(\Omega) \to [0, \infty]$ mit:

1. $\forall A \in \mathcal{F} : \varphi(1_A) = \mu(A)$
2. $\forall f, g \in \mathcal{M}_+(\Omega), \lambda \in [0, \infty] : \varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$
3. $\forall \left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}} , \forall n \in \mathbb{N} f_{n+1} \geq f_n \geq 0 : \varphi(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(f_n)$

Wir schreiben $\varphi(f) =: \int f d\mu =: \int f(\omega)d(\omega) =: \int f(\omega)\mu(d\omega)$.

Bemerkung 2.2.3. 3. ist auch als Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz bekannt.

Bemerkung 2.2.4. Wir können in 2. $\lambda \in [0, \infty]$ wählen unter Beachtung, dass auf den erweiterten reellen Zahlen $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ gilt:

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0 \ \text{ und } \ (+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = 0 .$$

Definition 2.2.3 (Integral für messbare Funktionen)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Dann definieren wir

$$f^+ := \max\{f, 0\} , \ \ f^- := \max\{-f, 0\} \implies f = f^+ - f^- \text{ und } |f| = f^+ + f^- .$$

Somit erhalten wir als Definition für das Integral (für integrierbare Funktionen, siehe Def. 2.2.4):

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu .$$

Sei nun $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, dann folgt $\Re(f), \Im(f) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Somit können wir definieren:

$$\int f d\mu := \int \Re(f) d\mu + i \cdot \int \Im(f) d\mu .$$

Definition 2.2.4. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Dann bezeichnen wir $f : \Omega \to \mathbb{C}$ als (μ-)integrierbar, falls $f \in \mathcal{L}^1$, wobei gilt

$$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \middle| \int |f| \, d\mu < \infty \right\} .$$

Wir schreiben kurz auch $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Bemerkung 2.2.5. Analog definiert man $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$. Somit:

$$\int \cdot \, d\mu : \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R}\, [\mathbb{C}]) \to \mathbb{R}\, [\mathbb{C}]$$

Bemerkung 2.2.6. Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gilt insbesondere $|f| \geq \Re(f)$, $|f| \geq \Im(f)$, d. h. das Integral ist wohldefiniert.

Satz 2.2.2. Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ sowie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} : f_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ sowie $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| \, d\mu$
2. $\int \lambda f + g d\mu = \lambda \int f d\mu + \int g d\mu$
3. $\mu\left(\{\omega \in \Omega | f(\omega) \neq g(\omega)\}\right) = 0 \implies \int f d\mu = \int g d\mu \implies \int |f - g| \, d\mu = 0$
4. $\mu\left(\{\omega \in \Omega | \, |f(\omega)| = \infty\}\right) = 0$
5. $\exists h : \Omega \to [0, \infty],\ h \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)\ \forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \leq h$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = f \implies \int f d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$

Bemerkung 2.2.7. 5. ist auch als Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz bekannt.

Kapitel 3

Normierte Räume

3.1 Definitionen

Bemerkung 3.1.1. Wir betrachten hier Vektorräume über den Körpern $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 3.1.1. Eine *Norm* über einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit:

1. $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
2. $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. $\|x\| = 0 \iff x = 0$

Dann heißt $V, \|\cdot\|$ normierter Raum.

Bemerkung 3.1.2. Falls 3. nicht gilt, bezeichnen wir die Abbildung als *Halbnorm*.

Satz 3.1.1. Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist ein metrischer Raum mit der Metrik d, definiert durch

$$\forall x, y \in V : d(x, y) = \|x - y\| \ .$$

Beispiel 3.1.1. In diesem Fall gilt für die Operationen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ (mit $\lambda \in \mathbb{K},\ x, y, x, y' \in V$):

$$d(x' + y', x + y) = \left\|x' + y' - (x + y)\right\| \leq \left\|x' + y'\right\| + \|x + y\|$$
$$d(\lambda x, \lambda x') = \left\|\lambda(x - x')\right\| = |\lambda| \left\|x - x'\right\| = |\lambda| \, d(x, x')$$

Definition 3.1.2. Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Raum.

3.2 Vervollständigung

Satz 3.2.1. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann existiert eine Vervollständigung $(\hat{V}, \hat{\|} \cdot \hat{\|})$, d. h. V kann in einen Banachraum eingebettet werden.

Beweis. Definiere Analog zu Satz 1.4.4:

$\hat{V}_0 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in V,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge$\}$.

Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\hat{V}_0$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} :\iff \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n, y_n\| = 0$

Menge aller Äquivalenzklassen: $\hat{V} = {}^{\hat{V}_0}\!/\!_{\sim} = \{\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \,|\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{X}_0\}$

Dabei ist $\hat{V}$ ein Vektorraum mit $\forall \lambda \in \mathbb{K}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{V}_0$:

$$\lambda \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] := \left[(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \text{ und } \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] + \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \left[(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] .$$

Als Norm auf $\hat{V}$ definieren wir

$$\hat{\|} \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \hat{\|} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| .$$

Zeige zunächst die Wohldefiniertheit. Der obige Grenzwert existiert, da für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{V}_0$ die Folge $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, mit

$$\lim_{n,m\to\infty} |\|x_n\| - \|x\|_m| \leq \lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0 .$$

Betrachte nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{V}_0,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann

$$\lim_{n\to\infty} |\|x_n\| - \|y_n\|| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

und somit ist $\hat{\|} \cdot \hat{\|}$ unabhängig vom Repräsentanten. Für die Normeigenschaften zeige hier nur die Dreiecksungleichung und Definitheit (1. Eigenschaft trivial):

$$\begin{aligned}\hat{\|} \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] + \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \hat{\|} &= \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n\| + \|y_n\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|x_n\| + \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \hat{\|} \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \hat{\|} + \hat{\|} \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \hat{\|}\end{aligned}$$

Weiterhin:

$$\hat{\|} \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \hat{\|} = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0 \iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (0)_{n\in\mathbb{N}} \iff \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \left[(0)_{n\in\mathbb{N}}\right] = 0_{\hat{V}}$$

□

3.3 L^p-Räume

Definition 3.3.1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $p \in [1, \infty)$, dann definieren wir

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} | f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}),\ \int_\Omega |f|^p < \infty \right\} .$$

Wir schreiben kurz auch $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Bemerkung 3.3.1. $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ definiert einen $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Satz 3.3.1. $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathbb{K},\ \|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$ ist eine Halbnorm.

Beweis. Siehe nach Satz 3.3.2. □

Bemerkung 3.3.2. $\|\cdot\|_p$ ist keine Norm.

Beispiel 3.3.1. Betrachte $\Omega = \mathbb{R},\ f = 1_C \neq 0,\ \mu = l$, wobei C die Cantormenge und l das Lebesgue-Maß sind. Dann gilt:

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega (1_C)^p dl\right)^{\frac{1}{p}} = l(C)^{\frac{1}{p}} = 0$$

Lemma 3.3.1 (Youngsche Ungleichung)**.** Seien $u, v \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ p, q \in \mathbb{R}_{>1},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$u \cdot v \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \,.$$

Satz 3.3.2 (Hölder Ungleichung)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in \mathcal{L}^p(\mu),\ g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Dann gilt $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Beweis. Nehmen o B. d. A. an $f, g \geq 0,\ \|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Mit Lemma 3.3.1 gilt

$$\begin{aligned}\|fg\|_1 = \int_\Omega f(x)g(x)\mu(dx) \leq \int_\Omega \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q}\mu(dx) &= \frac{1}{p}\int_\Omega f(x)^p\mu(dx) + \frac{1}{q}\int_\Omega g(x)^q\mu(dx) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q\end{aligned}$$

□

Zu Satz 3.3.1. 1. Eigenschaft ist trivial. Zeige nun noch die Dreiecksungleichung. Seien dafür $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Dann gilt auch die Abschätzung:

$$|f+g|^p = |f+g|^{p-1}|f+g| \leq |f+g|^{p-1}|f| + |f+g|^{p-1}|g| \,.$$

Sei $q \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff p + q = pq$. Dann gilt $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\mu)$, da

$$\left(|f+g|^{p-1}\right)^q = |f+g|^{pq-q} = |f+g|^p$$

Dies ist in der Tat integrierbar, da $|f+g|^p \leq |f|^p + |g|^p$ und nach Voraussetzung $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Somit erhalten wir

$$\|f+g\|_p^p = \int_\Omega |f+g|^p\, d\mu \leq \int_\Omega |f+g|^{p-1}|f| + |f+g|^{p-1}|g|\, d\mu = \left\|(f+g)^{p-1}f\right\|_1 + \left\|(f+g)^{p-1}g\right\|_1 \,.$$

Anwenden der Hölder Ungleichung ergibt

$$\leq \|f+g\|_q\|f\|_p + \|f+g\|_q\|g\|_p = \left(\int_\Omega |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}(\|f\|_p + \|g\|_p) = \left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}}(\|f\|_p + \|g\|_p) \,.$$

Sei o. B. d. A. $f + g \neq 0$ fast überall (sonst Beh. trivial), dann gilt:

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^{p/q}(\|f\|_p + \|g\|_p) \iff \|f+g\|_p^{p(1-1/q)} \leq \|f\|_p + \|g\|_p \iff \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

□

Definition 3.3.2. Sei $\Omega, \mathcal{F}, \mu$ ein Maßraum sowie $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$. Dann definieren wir

$$f \overset{\mu}{=} g :\iff \mu(\{\omega \in \Omega | f(\omega) \neq g(\omega)\} =: \mu(\{f \neq g\}) = 0 \,.$$

Man sagt auch $f = g$ μ-fast überall.

Bemerkung 3.3.3. Die Relation $\overset{\mu}{=}$ ist eine Äquvialenzrelation.

Satz 3.3.3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum sowie $f \in \mathcal{L}^p(\mu),\ g : \Omega \to \mathbb{K}$. Dann gilt

$$f \overset{\mu}{=} g \implies g \in \mathcal{L}^p(\mu) \text{ und } \|f\|_p = \|g\|_p \ .$$

Beweis. Gelte o. B. d. A. $g \overset{\mu}{=} 0$.Betrachte hier $g : \Omega \to \mathbb{K} \cup \{-\infty, \infty\}$, sei $A := \{\omega \in \Omega | g(\omega) \neq 0\}$. Nach Voraussetzung gilt $\mu(A) = 0$ und somit

$$|g| \leq \infty \cdot 1_A \implies \int_\Omega |g|^p \, d\mu \leq \infty \cdot \int_\Omega 1_A d\mu = \infty \cdot 0 = 0 \ .$$

Folglich gilt also in der Tat $g \in \mathcal{L}^p$. Zeige nun $\|f\|_p = \|g\|_p$. Dabei nutzen wir $f \overset{\mu}{=} g \iff g - f \overset{\mu}{=} 0 \implies \|g - f\|_p = 0$. Es folgt

$$\|g\|_p = \|f + (g - f)\|_p \leq \|f\|_p + \|g - f\|_p = \|f\|_p$$

Analog erhalten wir $\|f\|_p \leq \|g\|_p$ und somit in der Tat $\|f\|_p = \|g\|_p$. □

Satz 3.3.4. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, dann wird $\mathcal{L}^p(\mu)/\overset{\mu}{=}$ mit $\forall f \in \mathcal{L}^p(\mu) : \ \|[f]\|_p := \|f\|_p$ ein normierter Raum.

Beweis. Die Wohldefiniertheit der Norm folgt aus Satz 3.3.3. Weiterhin lässen sich die Halbnormeigenschaften auf Satz 3.3.1 zurückführen. Es g. z. z., dass $\|\cdot\|_p$ auf $\mathcal{L}^p(\mu)/\overset{\mu}{=}$ definit ist. Angenommen für $[f] \in \mathcal{L}^p(\mu)/\overset{\mu}{=}$ gilt $\|[f]\|_p = 0 \iff \int_\Omega |f|^p = 0$. Nehme weiterhin an, dass $f \overset{\mu}{\neq} 0 \iff 0 < \mu(\{|f| > 0\})$. Somit

$$0 < \mu(\{|f| > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{|f| > \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(|f| > \frac{1}{n}\right) \ .$$

Folglich $\exists c > 0 : \mu(\{|f| \geq c\}) > 0$. Damit erhalten wir mit $A := \{|f| > c\}$

$$|f|^p \geq c^p \cdot 1_A \implies \int |f|^p \geq c^p \mu(A) > 0 \ .$$

Dies ist ein Widerspruch und folglich gilt $f \overset{\mu}{=} 0$. □

Definition 3.3.3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, dann

$$L^p(\mu) := L^p(\Omega, \mathcal{F}\mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)/\overset{\mu}{=}$$

Wir schreiben meist $L^p(\mu)$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $L^p(\mu, \mathbb{C})$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Bemerkung 3.3.4. Statt $[f] \in L^p$ schreiben wir nur $f \in L^p$.

Definition 3.3.4. $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ heißt *wesentlich beschränkt* ($:\iff f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$), falls

$$\exists c \in \mathbb{R}_{>0} : \mu(\{\omega \in \Omega | \, |f(\omega)| > c\}) = 0 \ .$$

Dann definieren wir

$$\|f\|_\infty := \inf \{c \mid \mu(\{\omega \in \Omega | \, |f(\omega)| > c\}) = 0\} \ .$$

Satz 3.3.5. $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Halbnorm und es gilt $f \stackrel{\mu}{=} g \iff \|f-g\|_\infty = 0$.

Beweis. Die 1. Eigenschaft und die zweite Aussage sind trivial, wir zeigen hier wieder nur die Dreiecksungleichung. Seien $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ wesentlich beschränkt, $c, d > 0$ und $A := \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| > c\}$, $B := \{\omega \in \Omega \mid |g(\omega)| > d\}$. Somit

$$\mu(A) = \mu(B) = 0 \implies \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0 \; .$$

Es gilt

$$D := \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega) + g(\omega)| > c + d\} \subseteq A \cup B$$

und somit auch $\mu(D) = 0$. Sei nun $\omega \in (A \cup B)^C$, dann

$$|f(\omega)| \leq c \wedge |g(\omega)| \leq d \implies |f(\omega) + g(\omega)| \leq |f(\omega)| + |g(\omega)| \leq c + d \; .$$

D. h. $f + g$ ist wesentlich durch $c + d$ beschränkt und somit folgt in der Tat

$$\|f+g\|_\infty \leq c + d \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \; .$$

□

Satz 3.3.6. Sei $\Omega, \mathcal{F}, \mu$ ein Maßraum. Dann ist $\mathcal{L}^\infty(\mu)/_{\stackrel{\mu}{=}}$ mit $\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mu) : \|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty$ ein normierter Raum.

Definition 3.3.5. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, dann

$$L^\infty(\mu) := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)/_{\stackrel{\mu}{=}} \; .$$

Wir schreiben meist $L^\infty(\mu)$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $L^\infty(\mu, \mathbb{C})$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Bemerkung 3.3.5. $L^p(\mu)$ für $p \in [1, \infty]$ sind keine direkten Funktionenräume.

Satz 3.3.7. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, dann ist $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum für $p \in [1, \infty]$.

Beweis. Betrachte hier nur den Fall $p = 1$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\mu)$, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \geq N_0 : \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon \; .$$

Daher gilt insbesondere

$$\forall k > 0 \; \exists n_k \; \forall m \geq n_k : \|f_m - f_{n_k}\|_p < 2^{-k} \; .$$

Somit können wir solche n_k mit $n_{k+1} > n_k$ wählen und erhalten eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p < 2^{-k}$. Für $p = 1$ mit Beppo-Levi und $g_k := \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega g_k d\mu = \int_\Omega \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k d\mu < \infty \; .$$

Somit gilt insbesondere

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega \middle| \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(\omega) = \infty\right\}\right) = 0 \; .$$

Nehmen hier o. B. d. A. an, dass $\forall \omega \in \Omega : \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(\omega) < \infty$. Somit bildet $\forall \omega \in \Omega$ die Folge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und ist somit konvergent, d. h. $\forall \omega \in \Omega : f(\omega) := \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(\omega)$ existiert. Somit gilt

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega) = f_{n_0}(\omega) - f(\omega)$$

Wir können eine integrierbare Majorante für die $f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega)$ finden mit

$$|f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega)| \leq \sum_{l=0}^{k-1} \left|f_{n_l}(\omega) - f_{n_{l+1}}(\omega)\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(\omega) =: g(\omega) \text{ mit } \int_\Omega g d\mu < \infty \ .$$

Nach dem Satz von Lebesgue folgt somit, dass f integrierbar (d. h. $f \in L^1(\mu)$) und

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega) - (f_{n_0}(\omega) - f(\omega))| = 0 \iff \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_1 = 0 \ .$$

Also ist $L^1(\mu)$ in der Tat vollständig. □

3.4 Beispiele für normierte Räume

Beispiel 3.4.1. Betrachte

$$\Omega = \{1, \ldots, n\} \ , \ n \in \mathbb{N}_{>0} \ \text{ mit } \ \forall A \subseteq \Omega : \mu(A) = |A| \ .$$

Dann gilt wegen der Korrespondenz als Vektorraum

$$L^p(\mu) = \mathbb{R}^n \text{ und } L^p(\mu, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$$

wegen der Korrespondenz

$$f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} f(1) \\ \ldots \\ f(n) \end{pmatrix} \ .$$

Beispiel 3.4.2 (Folgenräume)**.** Folgende Vektorräume

$$\begin{aligned} c_0 &:= \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right\} \\ c &:= \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \ \lim_{n\to\infty} a_n \text{ existiert}\right\} \\ \ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) &:= \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \ \exists c > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c\right\} \end{aligned}$$

sind normierte Vektorräume (insbesondere Banachräume) mit der Supremumsnorm

$$\left\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \ .$$

Betrachte weiterhin die Folgenräume l^p mit $p \in [1, \infty)$, wobei μ das Zählmaß:

$$\ell^p_{\mathbb{K}} = L^p(\mathbb{N}, \mu, \mathbb{K}) = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \middle| \ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^\infty |t_n|^p < \infty\right\}$$

mit der Norm $\|\cdot\|_p$ definiert durch

$$\forall \, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p : \left\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |t_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

Dabei sind $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ für $p \in [1, \infty)$ Banachräume.

Beispiel 3.4.3. Betrachte

$$\Omega = \mathbb{R} \text{ bzw. } \Omega = \mathbb{R}^d \text{ mit Lebesgue-Maß } l \text{ bzw. } l^d \;.$$

mit den entsprechenden Räumen $L^p(l),\ L^p(l,\mathbb{C})$ bzw. $L^p(l^d)$ und den bekannten Normen. Betrachte

$$\Omega = [0,1] \text{ mit Lebesgue-Maß } l$$

dann ergibt sich

$$L^p([0,1],l) \text{ mit } \forall f \in L^p([0,1],l) : \|f\|_p = \int_0^1 |f(x)|^p \, dx$$

Der normierte Raum $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ...

Bemerkung 3.4.1. Es gibt eine Inklusion $C^0([0,1]) \hookrightarrow L^p([0,1])$, da in jeder Äquivalenzklasse nur eine stetige Funktion ist.

Kapitel 4

Hilberträume

Kapitel 5

Lineare Operatoren