Skript Funktionalanalysis

Prof. Volkmar Liebscher SoSe2024

Jonas Harder, Jakob Kropf und Kerstin Hoffmann

Version vom 20. Juni 2024

Todo-Liste

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Metrische Räume

1.1 Definitionen

Definition 1.1.1. Eine Menge T, versehen mit einer Abbildung $d : T \times T \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften ($s, t, u \in T$ beliebig)

1. $d(s,t) \geq 0$,
2. $d(s,t) = d(t,s)$
3. $d(s,u) \leq d(s,t) + d(t,u)$
4. $d(s,t) = 0 \iff s = t$

ist *metrischer Raum* mit *Metrik* d. Falls nur ($\Leftarrow$) in 4. gilt, handelt es sich um eine *Halbmetrik*.

Beispiel 1.1.1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist ein metrischer Raum.

Beispiel 1.1.2. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist ein metrischer Raum.

Beispiel 1.1.3. $(\mathbb{R}^n, d_i)$ mit $i \in \{1, 2, \infty\}$ sind metrische Räume, wobei für $x, y \in \mathbb{R}$

$$d_1 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)}, \quad d_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}, \quad d_\infty := \max\{|x_i - y_i|\,|i : 1, \dots, n\}$$

Definition 1.1.2. Sei X, d ein metrischer Raum. Dann definieren wir die offene bzw. abschlossene Kugel um $x \in X$wie folgt.

$$K_\nu(x) := \{y \in X | d(x,y) \leq \nu\} \quad \overline{K_\nu(x)} := \{y \in X | d(x,y) \leq \nu\}$$

Weiterhin ist U eine Umgebung von $x \iff \exists \nu > 0 : K_\nu(x) \subseteq U$.

1.2 Konvergenz und Stetigkeit

Definition 1.2.1. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum X heißt *konvergent* gegen $x \in X$ (bez. $\lim_{n\to\infty} t_n = t$), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) \leq \varepsilon \quad .$$

Satz 1.2.1. Der Limes einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

Satz 1.2.2. Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent und hat den gleichen Grenzwert.

Definition 1.2.2. Sei $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann heißt f *stetig an der Stelle* $x_0 \in X_1$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : d_1(x, x_0) < \delta \implies d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Satz 1.2.3. Sei $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f ist stetig an x_0
2. $\forall \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in X_1 \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in X_1 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Satz 1.2.4. Seien $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$ stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Dann ist die Verknüpfung $g \circ f : X_1 \to X_3$ stetig.

1.3 Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 1.3.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann heißt

1. $G \subseteq X$ offen $:\iff \forall x \in G \, \exists \nu > 0 : K_\nu(x) \subseteq G$
2. $F \subseteq X$ abgeschlossen $:\iff \forall \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in F \, \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} x_n = x \implies x \in F$
3. $S \subseteq X$ liegt dicht in $X :\iff \forall x \in X \, \exists \left(s_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, s_n \in S : \lim_{n\to\infty} s_n = x$

Definition 1.3.2. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *separabel*, wenn es eine höchstens abzählbare Teilmenge $S \subseteq X$ gibt, die in diesem Raum dicht liegt.

Beispiel 1.3.1. Der Banachraum

$$l^\infty(\mathbb{N}) := \{\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} | a_n \in \mathbb{R}, \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt}\} \quad \text{mit } d_\infty(\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$$

ist nicht separabel.

Satz 1.3.1. Sei $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind äquivalent:

1. f ist stetig.
2. $\forall G \subseteq X_2 : G$ offen $\implies f^{-1}(G)$ offen.
3. $\forall F \subseteq X_2 : F$ abgeschlossen $\implies f^{-1}(F)$ abgeschlossen.

Bemerkung 1.3.1. Aus Satz 1.3.1 folgt: $K_\varepsilon(x)$ offen, da $K_\varepsilon(x) = d(x, \cdot)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$.

1.4 Vollständigkeit

Definition 1.4.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann heißt $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X$ *Cauchy-folge*, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Satz 1.4.1. Jede konvergente Folge $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) ist eine Cauchy-Folge.

Definition 1.4.2. Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge konvergiert.

Beispiel 1.4.1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $\mathbb{C}, |\cdot|$ sind vollständige metrische Räume.

Beispiel 1.4.2. Die metrischen Räume $(\mathbb{R}^n, f_p)$ mit $p \in [1, \infty]$ sind vollständig.

Satz 1.4.2. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:

$$Y \subseteq X \text{ vollständig} \iff Y \text{ abgeschlossen.}$$

Satz 1.4.3. Sei (X_1, d_1) ein metrischer Raum (X_2, d_2) ein vollständiger metrischer Raum sowie $\varphi : X_1 \to X_2$ isometrisch. Dann gibt es genau eine isometrisches $\hat{\varphi} : X_1 \to X_2$ mit $\hat{\varphi}|_S = \varphi$.

Beweis. Sei $x \in X_1$, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in S$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere eine Cauchyfolge. Folglich ist auch $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und mit der Vollständigkeit von X_2 gilt

$$\exists y \in X_2 : \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = y := \hat{\varphi}(x) .$$

Wir setzen also für solche Folgen

$$\hat{\varphi}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) := \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) .$$

Zeige nun $\hat{\varphi}$ ist wohldefiniert. Sei eine weitere Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in S$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Es folgt:

$$d_2(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = d_1(x_n, y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d_1(x, x) = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = y .$$

Somit ist $\hat{\varphi}$ in der Tat wohldefiniert. Weiterhin gilt $\hat{\varphi}|_S = \varphi$, denn wir wählen für $x \in S$ die Folge $(x)_{n\in\mathbb{N}}$, somit gilt

$$\hat{\varphi}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \hat{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x) = \varphi(x) .$$

Zeige nun $\hat{\varphi}$ ist eine Isometrie. Seien dazu $x, y \in X$ mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in S, wobei $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Somit

$$d_2(\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)) = \lim_{n\to\infty} d_2(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d_1(x_n, y_n) = d(x, y) .$$

□

Satz 1.4.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ (bez. Vervollständigung von X) und eine Isometrie $\varphi : X \to \hat{X}$ (d. h. $\forall x, y \in X : d(x, y) = \hat{d}(\varphi(x), \varphi(y))$), sodass das Bild $\varphi(X)$ dicht in $\hat{X}$ ist. Haben $(\tilde{X}, \tilde{d})$ und $\tilde{\varphi}$ die gleiche Eigenschaft, so gibt es eine Bijektion $\psi : \hat{X} \to \tilde{X}$ mit $\tilde{\varphi} = \psi \circ \varphi$.

Beweis. Definiere die Menge aller Cauchyfolgen in X durch

$$\hat{X}_0 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge}\}.$$

Definiere weiterhin eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\hat{X}_0$ mit

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} :\iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 .$$

Wir setzen $\hat{X}$ als die Menge aller Äquivalenzklassen an, d. h.

$$\hat{X} = {}^{\hat{X}_0}\!/\!_{\sim} = \{\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \,|\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{X}_0\} \text{ wobei } \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\} .$$

Nun konstruieren wir die Metrik $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \to [0, \infty)$, wobei für $\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \in \hat{X}$ gilt

$$\hat{d}(\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]) = \lim_{n,m\to\infty} d(x_n, y_m) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N, M \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall m \geq M : d(x_n, y_m) < \varepsilon .$$

Zeigen nun, dass $\hat{d}$ wohldefiniert. Seien $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{X}_0$ mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann nach Definition

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, y'_n) = 0 \; .$$

Anwenden der Dreiecksungleichung ergibt

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n) \\ d(x'_n, y'_n) &\leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n) \; . \end{aligned}$$

Somit

$$\left| d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n) \right| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \to 0 \; .$$

Da $(d(x_n, y_n))$ und $(d(x'_n, y'_n))$ konvergent, folgt

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, y_m) = \lim_{n',m'\to\infty} d(x'_{n'}, y'_{m'})$$

und somit ist $\hat{d}$ wohldefiniert. Nun gilt nach Def. 1.1.1 zu zeigen, dass $\hat{d}$ eine Metrik auf $\hat{X}$ ist. Wir zeigen hier nur die Dreiecksungleichung:

$$\begin{gathered} \lim_{n,m\to\infty} d(x_n, y_m) \leq \lim_{k\to\infty} \lim_{n,m\to\infty} d(x_n, z_k) + d(z_k, y_m) \iff \\ \hat{d}(\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]) \leq \hat{d}(\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \left[(z_k)_{k\in\mathbb{N}}\right]) + \hat{d}(\left[(z_k)_{k\in\mathbb{N}}\right], \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]) \; . \end{gathered}$$

Setze nun $\varphi : X \to \hat{X}, \; , x \mapsto [(x)_{n\in\mathbb{N}}]$, dies ist offensichtlich eine Isometrie. Zeigen nun, dass $\varphi(X)$ dicht in $\hat{X}$. Sei $\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \in \hat{X}$. Nach Voraussetzung ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, d. h. $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ sodass $\forall m, n \geq N_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Somit $\hat{x}_{N_0} := [(x_{N_0})_{n\in\mathbb{N}}] = \varphi(x_{N_0}) \in \varphi(X)$ und

$$\hat{d}\left(\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right], \hat{x}_{N_0}\right) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{N_0}) < \varepsilon \; .$$

Somit $\hat{x}_{N_0} \in K_\varepsilon(\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]) \cap \varphi(X)$ und folglich ist $\varphi(X)$ dicht in $\hat{X}$. Nun gilt zu zeigen, dass $(\hat{X}, \hat{d})$ vollständig ist. Zeige dafür zunächst folgendes Lemma.

Lemma 1.4.1. Sei X, d metrischer Raum, $S \subseteq X$ dicht in X, sodass jede Cauchyfolge in S in X konvergiert. Dann ist X vollständig.

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Da S dicht in X gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \; \exists y_n \in S : d(x_n, y_n) < {}^1\!/\!_n \; .$$

Somit ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge in S, da

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) < {}^1\!/\!_m + d(x_m, x_n) + {}^1\!/\!_n \; .$$

Nach Annahme existiert $\lim_{n\to\infty} y_n =: x \in X$. Da

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, x) < {}^1\!/\!_n + d(y_n, x)$$

folgt in der Tat $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. $\square$

Nach Lemma 1.4.1 g. z. z., dass jede Cauchyfolge in $\varphi(X)$ in $\hat{X}$ konvergiert. Sei $(\hat{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\varphi(X)$, d. h. $\hat{x}_k := (x_k, x_k, \ldots)$. Da φ eine Isometrie, ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X durch

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) = \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) .$$

Somit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \hat{X}_0$, $\left[(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right] \in \hat{X}$. Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\forall k, n \geq N : d(z_k, z_n) < \varepsilon$. Somit gilt $\forall k \geq N$:

$$\hat{d}(\hat{x}_k, \hat{x}) = \lim_{n\to\infty} d(z_k, z_n) < \varepsilon .$$

Folglich konvergiert $(\hat{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\hat{x} \in \hat{X}$ und $\hat{X}$ ist vollständig. Betrachte nun $(\tilde{X}, \tilde{d})$ sowie $\tilde{\varphi}$ mit den gleichen Eigenschaften. Wir definieren

$$\psi_0 : \varphi(X) \to \tilde{X}, \quad \psi_0(\varphi(x)) = \tilde{\varphi}(x) .$$

Dies ist eine Isometrie, da für $x, y \in X$ gilt

$$\tilde{d}\left(\psi_0(\varphi(x)), \psi_0(\varphi(y))\right) = \tilde{d}(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)) = d(x, y) = \hat{d}(\varphi(x), \varphi(y)) .$$

Nach Satz 1.4.3 existiert eine eindeutige Erweiterung $\psi : \hat{X} \to \tilde{X}$ Isometrie mit $\psi|_{\varphi(X)} = \psi_0$. Da ψ_0 als Isometrie injektiv ist, g. z. z. ψ_0 ist surjektiv. Sei also $z \in \tilde{X}$, dann wegen der Dichtheit von $\tilde{\varphi}(X)$

$$\exists \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \ \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in X : \lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}(x_n) = z .$$

Somit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge $\implies$ $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge. Da $\hat{X}$ vollständig

$$\exists w \in \hat{X} : \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = w .$$

Da ψ eine Isometrie ist folgt schließlich $\lim_{n\to\infty} \psi(\varphi(x_n)) = \psi(w) = z$ und somit ist ψ bijektiv. □

1.5 Kompaktheit

Definition 1.5.1. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. D. h., wenn $(G_i)_{i\in I}$ eine Famile offener Mengen, mit $X = \bigcup_{i\in I} G_i$, dann existieren endlich viele $G_{i_1}, \ldots, G_{i_n}$ mit $X = \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$.

Satz 1.5.1. Sei X, d metrischer Raum, $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K beschränkt und abgeschlossen (Umkehrung gilt i. A.nicht).

Satz 1.5.2. Sei X, d metrischer Raum. Dann gilt

$$X \text{ kompakt} \iff \forall \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \exists \left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ Teilfolge } \exists y \in X : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y$$

Satz 1.5.3 (Heine-Borel)**.** Betrachte die metrischen Räume $(\mathbb{R}^n, d_p)$ mit $p \in [1, \infty]$. Dann ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt $\iff$ X beschränkt und abgeschlossen.

Definition 1.5.2. Sei (X, d) metrischer Raum. Dann heißt $Y \subseteq X$ totalbeschränkt falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{N} \ \exists x_1, \ldots, x_M \in Y : Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} K_\varepsilon(x_i)$$

Satz 1.5.4. Sei X, d ein vollständiger metrischer Raum, $Y \subseteq X$. Dann ist Y kompakt $\iff$ Y abgeschlossen und total beschränkt.

Beweis. ($\Longrightarrow$)
Sei Y kompakt. Y abgeschlossen folgt aus Satz 1.5.1. Zeige nun die totale Beschränktheit, sei $\varepsilon > 0$ dafür fixiert. Dann gilt offensichtlich

$$Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} K_\varepsilon(y) \overset{Y \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} \exists y_1, \ldots, y_M : Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} K_\varepsilon(y_i)$$

Somit ist Y total beschränkt.
($\Longleftarrow$)
Sei $Y \subseteq X$ abgeschlossen und total beschränkt und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus Y. Es g. z. z., dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in Y konvergente Teilfolge besitzt. Wir nutzen die totale Beschränktheit zur Konstruktion der Teilfolge (TF).

$$\varepsilon = 1 : \exists \left\{y_i^1\right\}_{i=1,\ldots,M_1}, \; Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_1} K_1\left(y_i^1\right) \implies \exists \text{ TF } \left(x_{n_k^1}\right)_{k\in\mathbb{N}} \exists i_1 \in \{1, \ldots, M_1\} \, \forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k^1} \in K_1\left(y_{i_1}^1\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} : \exists \left\{y_i^2\right\}_{i=1,\ldots,M_2}, \; Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_2} K_{1/2}\left(y_i^2\right) \implies \exists \text{ TTF } \left(x_{n_k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}} \exists i_2 \in \{1, \ldots, M_2\}$$
$$\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k^2} \in K_1\left(y_{i_1}^1\right) \cap K_{1/2}\left(y_{i_2}^2\right)$$

Diese Konstruktion lässt sich nun auf l Schritte erweitern.

$$\varepsilon = 2^{-l} : \exists \left\{y_i^l\right\}_{i=1,\ldots,M_l}, \; Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_l} K_{2^{-l}}\left(y_i^l\right) \implies \exists \text{ TT}\ldots\text{TF } \left(x_{n_k^l}\right)_{k\in\mathbb{N}} \exists i_l \in \{1, \ldots, M_l\}$$
$$\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k^l} \in K_1\left(y_{i_1}^1\right) \cap K_{1/2}\left(y_{i_2}^2\right) \cap \ldots \cap K_{2^{-(l-1)}}\left(y_{i_{l-1}}^{l-1}\right) \cap K_{2^{-l}}\left(y_{i_l}^l\right)$$

Nach Konstruktion ist $\left(x_{n_k}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und für $k, k' \geq l$ gilt

$$x_{n_k}^k, \; x_{n_{k'}}^{k'} \in K_{2^{-l}}\left(y_{i_l}^l\right) \implies d\left(x_{n_k}^k, x_{n_{k'}}^{k'}\right) < 2^{-(l-1)} .$$

Folglich ist $\left(x_{n_k}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und da X nach Voraussetzung vollständig, gilt

$$\exists z \in X : \lim_{k\to\infty} x_{n_k}^k = z .$$

Da Y abgeschlossen, gilt insbesondere $z \in Y$ und folglich Y kompakt. □

Beispiel 1.5.1. Betrachte

$$C[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}, \; \|\cdot\|_\infty, \text{ für } f, g \in C[0,1] : d(f,g) = \max\{|f(t) - g(t)| \mid t \in [0,1]\}$$

Dann gilt $Y \subseteq C[0,1]$ ist kompakt $\iff$ Y punktweise beschränkt, d. h.

$$\exists c > 0 \, \forall f \in Y \, \forall t \in [0,1] : |f(t)| \leq c$$

und Y gleichgradig stetig, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall f \in Y \, \forall s, t \in [0,1] : |t - s| < \delta \implies |f(t) - f(s)| < \varepsilon .$$

Satz 1.5.5. Sei (X_1, d_1) ein kompakter metrischer Raum, (X_2, d_2) ein metrischer Raum, sowie $f : X_1 \to X_2$ stetig. Dann ist $f(X_1)$ kompakt.

Bemerkung 1.5.1. Falls $X_2 = \mathbb{R}$, dann existieren nach dem Satz von Weierstraß $x_+, x_- \in X_1$ mit $f(x_+) = \sup f(X_1)$ und $f(x_-) = \inf f(X_1)$.

Satz 1.5.6. Sei (X_1, d_1) ein kompakter metrischer Raum, (X_2, d_2) ein metrischer Raum, sowie $f : X_1 \to X_2$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon \, .$$

Kapitel 2

Maß- und Integrationstheorie

2.1 Grundlegende Konstruktionen

Definition 2.1.1. Sei $\Omega \neq \emptyset$. Dann heißt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ σ-Algebra, falls

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $\forall A \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : A \in \mathcal{F} \implies A^C \in \mathcal{F}$
3. $\forall \left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\ A_n \in \mathcal{F} : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$

Bezeichne $(\Omega, \mathcal{F})$ als messbaren Raum.

Bemerkung 2.1.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann ist die σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ der Borelmengen die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen von X enthält. Bez. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) =: \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}^n$.

Definition 2.1.2. Sei $\Omega, \mathcal{F}$ ein messbarer Raum. Dann ist $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ ein Maß, falls

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\forall \left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{F},\ \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset : \mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

Wir bezeichnen $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ als Maßraum.

Definition 2.1.3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ wird als σ-endlich bezeichnet, falls gilt

$$\exists A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F},\ A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \quad \text{mit} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \mu(A_n) < \infty \text{ und } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega\ .$$

Definition 2.1.4. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Ein Maß $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ heißt absolut stetig bzgl. μ (bez. $\nu \ll \mu$), falls

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0\ .$$

Beispiel 2.1.1. Sei Ω beliebig und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Dann können wir das Zählmaß μ definieren mit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{A endlich} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist Ω meist abzählbar, z. B. $\Omega = \mathbb{N}$ oder $\Omega = \mathbb{Z}$

Beispiel 2.1.2. Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{F} = \mathcal{B}^n$. Dann definieren wir das Lebesgue-Maß l^n mit

$$l^n\left(\bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\ .$$

Für $l = 1$ gilt damit insbesondere $l^1([a, b)) =: l([a, b)) = b - a$.

2.2 Integration

Definition 2.2.1. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt messbar (bez. $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C})$), falls

$$\forall r > 0, z \in \mathbb{C} : f^{-1}(K_r(z)) \in \mathcal{F} \ \ [\iff \forall U \in \mathcal{B}(\mathbb{C}) : f^{-1}(U) \in \mathcal{F}] \ .$$

Analog ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar (bez. $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$), falls

$$\forall U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$$

Bemerkung 2.2.1. Wir bezeichnen weiterhin $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, [0, \infty)) := \mathcal{M}_+(\Omega)$.

Bemerkung 2.2.2. Sei $\Omega, \mathcal{F}$ ein messbarer Raum, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann ist f messbar

$$\iff \forall c \in \mathbb{R} : \{f > c\} := \{x \in \Omega | f(x) > c\} \in \mathcal{F} \ .$$

Definition 2.2.2. Sei A eine Menge. Eine Funktion der Form

$$1_A(\omega) \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

heißt *Indikatorfunktion* der Menge A.

Satz 2.2.1 (Integral für nichtnegative, messbare Funktionen)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gibt es genau eine Abbildung $\varphi : \mathcal{M}_+(\Omega) \to [0, \infty]$ mit:

1. $\forall A \in \mathcal{F} : \varphi(1_A) = \mu(A)$
2. $\forall f, g \in \mathcal{M}_+(\Omega), \lambda \in [0, \infty] : \varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$
3. $\forall \left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \ \forall n \in \mathbb{N} f_{n+1} \geq f_n \geq 0 : \varphi(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(f_n)$

Wir schreiben $\varphi(f) =: \int f d\mu =: \int f(\omega)d(\omega) =: \int f(\omega)\mu(d\omega)$.

Bemerkung 2.2.3. 3. ist auch als Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz bekannt.

Bemerkung 2.2.4. Wir können in 2. $\lambda \in [0, \infty]$ wählen unter Beachtung, dass auf den erweiterten reellen Zahlen $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ gilt:

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0 \ \text{ und } \ (+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = 0 \ .$$

Definition 2.2.3 (Integral für messbare Funktionen)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Dann definieren wir

$$f^+ := \max\{f, 0\} \, , \ \ f^- := \max\{-f, 0\} \implies f = f^+ - f^- \text{ und } |f| = f^+ + f^- \ .$$

Somit erhalten wir als Definition für das Integral (für integrierbare Funktionen, siehe Def. 2.2.4):

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \ .$$

Sei nun $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, dann folgt $\Re(f), \Im(f) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Somit können wir definieren:

$$\int f d\mu := \int \Re(f) d\mu + i \cdot \int \Im(f) d\mu \ .$$

Definition 2.2.4. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Dann bezeichnen wir $f : \Omega \to \mathbb{C}$ als (μ-)integrierbar, falls $f \in \mathcal{L}^1$, wobei gilt

$$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \middle| \int |f| \, d\mu < \infty \right\} .$$

Wir schreiben kurz auch $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Bemerkung 2.2.5. Analog definiert man $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$. Somit:

$$\int \cdot \, d\mu : \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R} \, [\mathbb{C}]) \to \mathbb{R} \, [\mathbb{C}]$$

Bemerkung 2.2.6. Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gilt insbesondere $|f| \geq \Re(f)$, $|f| \geq \Im(f)$, d. h. das Integral ist wohldefiniert.

Satz 2.2.2. Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ sowie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} : f_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ sowie $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| \, d\mu$
2. $\int \lambda f + g d\mu = \lambda \int f d\mu + \int g d\mu$
3. $\mu\left(\{\omega \in \Omega | f(\omega) \neq g(\omega)\}\right) = 0 \implies \int f d\mu = \int g d\mu \implies \int |f - g| \, d\mu = 0$
4. $\mu\left(\{\omega \in \Omega | \, |f(\omega)| = \infty\}\right) = 0$
5. $\exists h : \Omega \to [0, \infty], \; h \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \; \forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \leq h$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = f \implies \int f d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$

Bemerkung 2.2.7. 5. ist auch als Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz bekannt.

Definition 2.2.5. Seien $(\Omega_1, \mathcal{A})$, $(\Omega_2, \mathcal{B})$ Maßräume. Dann heißt die kleinste σ-Algebra auf $\Omega_1 \times \Omega_2$, die die Menge

$$\{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, \; B \in \mathcal{B}\}$$

enthält, Produkt-σ-Algebra. Wir bezeichnen diese mit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Satz 2.2.3 (Produktmaß)**.** Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}, \mu)$ und $(\Omega_2, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Dann existiert genau ein Maß $\mu \otimes \nu : A \otimes B \to [0, \infty]$ mit

$$\forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} : (\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B) .$$

Dabei ist $\mu \otimes \nu$ σ-endlich und wir bezeichnen dies als Produktmaß von μ und ν.

Satz 2.2.4 (Satz von Fubini)**.** Seien die Maßräume wie für das Produktmaß definiert. Sei weiterhin $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$, dann gilt

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) \mu \otimes \nu(d(x, y)) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) \mu(dx) \right) \nu(dy) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx) .$$

Definition 2.2.6. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ ein Maß. Dann besitzt ν eine Dichte bzgl. μ, falls

$$\exists f : \Omega \to [0, \infty) \text{ messbar} : \forall A \in \mathcal{F} : \nu(A) = \int_A f d\mu .$$

Satz 2.2.5 (Satz von Radon-Nikodym)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ ein Maß mit $\nu \ll \mu$. Dann besitzt ν eine Dichte bzgl. μ.

Kapitel 3

Normierte Räume

3.1 Definitionen

Bemerkung 3.1.1. Wir betrachten hier Vektorräume über den Körpern $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 3.1.1. Eine *Norm* über einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit:

1. $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
2. $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3. $\|x\| = 0 \iff x = 0$

Dann heißt $V, \|\cdot\|$ normierter Raum.

Bemerkung 3.1.2. Falls 3. nicht gilt, bezeichnen wir die Abbildung als *Halbnorm*.

Satz 3.1.1. Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist ein metrischer Raum mit der Metrik d, definiert durch

$$\forall x, y \in V : d(x, y) = \|x - y\| \ .$$

Beispiel 3.1.1. In diesem Fall gilt für die Operationen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ (mit $\lambda \in \mathbb{K},\ x, y, x, y' \in V$):

$$\begin{aligned} d(x' + y', x + y) &= \left\|x' + y' - (x + y)\right\| \leq \left\|x' + y'\right\| + \|x + y\| \\ d(\lambda x, \lambda x') &= \left\|\lambda(x - x')\right\| = |\lambda| \left\|x - x'\right\| = |\lambda| \, d(x, x') \end{aligned}$$

Definition 3.1.2. Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Raum.

3.2 Vervollständigung

Satz 3.2.1. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann existiert eine Vervollständigung $(\hat{V}, \hat{\|} \cdot \hat{\|})$, d. h. V kann in einen Banachraum eingebettet werden.

Beweis. Definiere Analog zu Satz 1.4.4:

$$\hat{V}_0 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \, | \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in V,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge}\}.$$

Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\hat{V}_0$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} :\iff \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n, y_n\| = 0$

Menge aller Äquivalenzklassen: $\hat{V} = {}^{\hat{V}_0}\!/\!\sim\; = \{\left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] | \, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{X}_0\}$

Dabei ist $\hat{V}$ ein Vektorraum mit $\forall \lambda \in \mathbb{K}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{V}_0$:

$$\lambda \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] := \left[(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \text{ und } \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] + \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \left[(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] .$$

Als Norm auf $\hat{V}$ definieren wir

$$\hat{\|} \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \hat{\|} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| .$$

Zeige zunächst die Wohldefiniertheit. Der obige Grenzwert existiert, da für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{V}_0$ die Folge $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, mit

$$\lim_{n,m\to\infty} |\|x_n\| - \|x\|_m| \leq \lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0 .$$

Betrachte nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{V}_0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann

$$\lim_{n\to\infty} |\|x_n\| - \|y_n\|| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

und somit ist $\hat{\|} \cdot \hat{\|}$ unabhängig vom Repräsentanten. Für die Normeigenschaften zeige hier nur die Dreiecksungleichung und Definitheit (1. Eigenschaft trivial):

$$\begin{aligned}\hat{\|} \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] + \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \hat{\|} &= \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n\| + \|y_n\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|x_n\| + \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \hat{\|} \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \hat{\|} + \hat{\|} \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \hat{\|}\end{aligned}$$

Weiterhin:

$$\hat{\|} \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \hat{\|} = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0 \iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (0)_{n\in\mathbb{N}} \iff \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \left[(0)_{n\in\mathbb{N}}\right] = 0_{\hat{V}}$$

□

3.3 L^p-Räume

Definition 3.3.1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $p \in [1, \infty)$, dann definieren wir

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} | f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}), \int_\Omega |f|^p < \infty \right\} .$$

Wir schreiben kurz auch $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Bemerkung 3.3.1. $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ definiert einen $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Satz 3.3.1. $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathbb{K}$, $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$ ist eine Halbnorm.

Beweis. Siehe nach Satz 3.3.2. □

Bemerkung 3.3.2. $\|\cdot\|_p$ ist keine Norm.

Beispiel 3.3.1. Betrachte $\Omega = \mathbb{R}$, $f = 1_C \neq 0$, $\mu = l$, wobei C die Cantormenge und l das Lebesgue-Maß sind. Dann gilt:

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega (1_C)^p dl\right)^{\frac{1}{p}} = l(C)^{\frac{1}{p}} = 0$$

Lemma 3.3.1 (Youngsche Ungleichung)**.** Seien $u, v \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ p, q \in \mathbb{R}_{>1},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$u \cdot v \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \ .$$

Satz 3.3.2 (Hölder Ungleichung)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in \mathcal{L}^p(\mu),\ g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Dann gilt $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Beweis. Nehmen o B. d. A. an $f, g \geq 0,\ \|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Mit Lemma 3.3.1 gilt

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 = \int_\Omega f(x)g(x)\mu(dx) \leq \int_\Omega \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q}\mu(dx) = \frac{1}{p}\int_\Omega f(x)^p\mu(dx) + \frac{1}{q}\int_\Omega g(x)^q\mu(dx) \\ = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q \end{aligned}$$

□

Zu Satz 3.3.1. 1. Eigenschaft ist trivial. Zeige nun noch die Dreiecksungleichung. Seien dafür $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Dann gilt auch die Abschätzung:

$$|f+g|^p = |f+g|^{p-1}|f+g| \leq |f+g|^{p-1}|f| + |f+g|^{p-1}|g| \ .$$

Sei $q \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff p + q = pq$. Dann gilt $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\mu)$, da

$$\left(|f+g|^{p-1}\right)^q = |f+g|^{pq-q} = |f+g|^p$$

Dies ist in der Tat integrierbar, da $|f+g|^p \leq |f|^p + |g|^p$ und nach Voraussetzung $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Somit erhalten wir

$$\|f+g\|_p^p = \int_\Omega |f+g|^p \, d\mu \leq \int_\Omega |f+g|^{p-1}|f| + |f+g|^{p-1}|g| \, d\mu = \left\|(f+g)^{p-1}f\right\|_1 + \left\|(f+g)^{p-1}g\right\|_1 \ .$$

Anwenden der Hölder Ungleichung ergibt

$$\leq \|f+g\|_q \|f\|_p + \|f+g\|_q \|g\|_p = \left(\int_\Omega |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} (\|f\|_p + \|g\|_p) = \left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}} (\|f\|_p + \|g\|_p) \ .$$

Sei o. B. d. A. $f + g \neq 0$ fast überall (sonst Beh. trivial), dann gilt:

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^{p/q}(\|f\|_p + \|g\|_p) \iff \|f+g\|_p^{p(1-1/q)} \leq \|f\|_p + \|g\|_p \iff \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

□

Definition 3.3.2. Sei $\Omega, \mathcal{F}, \mu$ ein Maßraum sowie $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$. Dann definieren wir

$$f \stackrel{\mu}{=} g :\iff \mu(\{\omega \in \Omega | f(\omega) \neq g(\omega)\} =: \mu(\{f \neq g\}) = 0 \ .$$

Man sagt auch $f = g$ μ-fast überall.

Bemerkung 3.3.3. Die Relation $\stackrel{\mu}{=}$ ist eine Äquvialenzrelation.

Satz 3.3.3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum sowie $f \in \mathcal{L}^p(\mu),\ g : \Omega \to \mathbb{K}$. Dann gilt

$$f \overset{\mu}{=} g \implies g \in \mathcal{L}^p(\mu) \text{ und } \|f\|_p = \|g\|_p \ .$$

Beweis. Gelte o. B. d. A. $g \overset{\mu}{=} 0$.Betrachte hier $g : \Omega \to \mathbb{K} \cup \{-\infty, \infty\}$, sei $A := \{\omega \in \Omega | g(\omega) \neq 0\}$. Nach Voraussetzung gilt $\mu(A) = 0$ und somit

$$|g| \leq \infty \cdot 1_A \implies \int_\Omega |g|^p \, d\mu \leq \infty \cdot \int_\Omega 1_A d\mu = \infty \cdot 0 = 0 \ .$$

Folglich gilt also in der Tat $g \in \mathcal{L}^p$. Zeige nun $\|f\|_p = \|g\|_p$. Dabei nutzen wir $f \overset{\mu}{=} g \iff g - f \overset{\mu}{=} 0 \implies \|g - f\|_p = 0$. Es folgt

$$\|g\|_p = \|f + (g - f)\|_p \leq \|f\|_p + \|g - f\|_p = \|f\|_p$$

Analog erhalten wir $\|f\|_p \leq \|g\|_p$ und somit in der Tat $\|f\|_p = \|g\|_p$. □

Satz 3.3.4. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, dann wird $\mathcal{L}^p(\mu) / \overset{\mu}{=}$ mit $\forall f \in \mathcal{L}^p(\mu) :\ \|[f]\|_p := \|f\|_p$ ein normierter Raum.

Beweis. Die Wohldefiniertheit der Norm folgt aus Satz 3.3.3. Weiterhin lässen sich die Halbnormeigenschaften auf Satz 3.3.1 zurückführen. Es g. z. z., dass $\|\cdot\|_p$ auf $\mathcal{L}^p(\mu) / \overset{\mu}{=}$ definit ist. Angenommen für $[f] \in \mathcal{L}^p(\mu) / \overset{\mu}{=}$ gilt $\|[f]\|_p = 0 \iff \int_\Omega |f|^p = 0$. Nehme weiterhin an, dass $f \overset{\mu}{\neq} 0 \iff 0 < \mu(\{|f| > 0\})$. Somit

$$0 < \mu(\{|f| > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{|f| > \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(|f| > \frac{1}{n}\right) \ .$$

Folglich $\exists c > 0 : \mu(\{|f| \geq c\}) > 0$. Damit erhalten wir mit $A := \{|f| > c\}$

$$|f|^p \geq c^p \cdot 1_A \implies \int |f|^p \geq c^p \mu(A) > 0 \ .$$

Dies ist ein Widerspruch und folglich gilt $f \overset{\mu}{=} 0$. □

Definition 3.3.3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, dann

$$L^p(\mu) := L^p(\Omega, \mathcal{F}\mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) / \overset{\mu}{=}$$

Wir schreiben meist $L^p(\mu)$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $L^p(\mu, \mathbb{C})$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Bemerkung 3.3.4. Statt $[f] \in L^p$ schreiben wir nur $f \in L^p$.

Definition 3.3.4. $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ heißt *wesentlich beschränkt* $(:\iff f \in \mathcal{L}^\infty(\mu))$, falls

$$\exists c \in \mathbb{R}_{>0} : \mu(\{\omega \in \Omega | \, |f(\omega)| > c\}) = 0 \ .$$

Dann definieren wir

$$\|f\|_\infty := \inf \{c \mid \mu(\{\omega \in \Omega | \, |f(\omega)| > c\}) = 0\} \ .$$

Satz 3.3.5. $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Halbnorm und es gilt $f \overset{\mu}{=} g \iff \|f-g\|_\infty = 0$.

Beweis. Die 1. Eigenschaft und die zweite Aussage sind trivial, wir zeigen hier wieder nur die Dreiecksungleichung. Seien $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ wesentlich beschränkt, $c, d > 0$ und $A := \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| > c\}$, $B := \{\omega \in \Omega \mid |g(\omega)| > d\}$. Somit

$$\mu(A) = \mu(B) = 0 \implies \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0 \, .$$

Es gilt

$$D := \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega) + g(\omega)| > c + d\} \subseteq A \cup B$$

und somit auch $\mu(D) = 0$. Sei nun $\omega \in (A \cup B)^C$, dann

$$|f(\omega)| \leq c \wedge |g(\omega)| \leq d \implies |f(\omega) + g(\omega)| \leq |f(\omega)| + |g(\omega)| \leq c + d \, .$$

D. h. $f + g$ ist wesentlich durch $c + d$ beschränkt und somit folgt in der Tat

$$\|f+g\|_\infty \leq c + d \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \, .$$

□

Satz 3.3.6. Sei $\Omega, \mathcal{F}, \mu$ ein Maßraum. Dann ist ${}^{\mathcal{L}^\infty(\mu)}\!/_{\overset{\mu}{=}}$ mit $\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mu) : \|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty$ ein normierter Raum.

Definition 3.3.5. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, dann

$$L^\infty(\mu) := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := {}^{\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)}\!/_{\overset{\mu}{=}} \, .$$

Wir schreiben meist $L^\infty(\mu)$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $L^\infty(\mu, \mathbb{C})$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Bemerkung 3.3.5. $L^p(\mu)$ für $p \in [1, \infty]$ sind keine direkten Funktionenräume.

Satz 3.3.7. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, dann ist $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum für $p \in [1, \infty]$.

Beweis. Betrachte hier nur den Fall $p = 1$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^p(\mu)$, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \geq N_0 : \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon \, .$$

Daher gilt insbesondere

$$\forall k > 0 \; \exists n_k \; \forall m \geq n_k : \|f_m - f_{n_k}\|_p < 2^{-k} \, .$$

Somit können wir solche n_k mit $n_{k+1} > n_k$ wählen und erhalten eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p < 2^{-k}$. Für $p = 1$ mit Beppo-Levi und $g_k := \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega g_k d\mu = \int_\Omega \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k d\mu < \infty \, .$$

Somit gilt insbesondere

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega \middle| \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(\omega) = \infty\right\}\right) = 0 \, .$$

Nehmen hier o. B. d. A. an, dass $\forall \omega \in \Omega : \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(\omega) < \infty$. Somit bildet $\forall \omega \in \Omega$ die Folge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und ist somit konvergent, d. h. $\forall \omega \in \Omega : f(\omega) := \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(\omega)$ existiert. Somit gilt

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega) = f_{n_0}(\omega) - f(\omega)$$

Wir können eine integrierbare Majorante für die $f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega)$ finden mit

$$|f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega)| \leq \sum_{l=0}^{k-1} \left|f_{n_l}(\omega) - f_{n_{l+1}}(\omega)\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(\omega) =: g(\omega) \text{ mit } \int_\Omega g d\mu < \infty \ .$$

Nach dem Satz von Lebesgue folgt somit, dass f integrierbar (d. h. $f \in L^1(\mu)$) und

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega) - (f_{n_0}(\omega) - f(\omega))| = 0 \iff \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_1 = 0 \ .$$

Also ist $L^1(\mu)$ in der Tat vollständig. □

3.4 Beispiele für normierte Räume

Beispiel 3.4.1. Betrachte

$$\Omega = \{1, \ldots, n\}\,,\ n \in \mathbb{N}_{>0} \ \text{ mit } \ \forall A \subseteq \Omega : \mu(A) = |A| \ .$$

Dann gilt wegen der Korrespondenz als Vektorraum

$$L^p(\mu) = \mathbb{R}^n \text{ und } L^p(\mu, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$$

wegen der Korrespondenz

$$f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} f(1) \\ \ldots \\ f(n) \end{pmatrix} \ .$$

Beispiel 3.4.2 (Folgenräume)**.** Folgende Vektorräume

$$c_0 := \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K},\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right\}$$
$$c := \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K},\ \lim_{n\to\infty} a_n \text{ existiert}\right\}$$
$$\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) := \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K},\ \exists c > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c\right\}$$

sind normierte Vektorräume (insbesondere Banachräume) mit der Supremumsnorm

$$\left\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \ .$$

Betrachte weiterhin die Folgenräume l^p mit $p \in [1, \infty)$, wobei μ das Zählmaß:

$$\ell^p_{\mathbb{K}} = L^p(\mathbb{N}, \mu, \mathbb{K}) = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \middle|\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^\infty |a_n|^p < \infty\right\}$$

mit der Norm $\|\cdot\|_p$ definiert durch

$$\forall\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p : \left\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

Dabei sind $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ für $p \in [1, \infty)$ Banachräume.

Beispiel 3.4.3. Betrachte

$$\Omega = \mathbb{R} \text{ bzw. } \Omega = \mathbb{R}^d \text{ mit Lebesgue-Maß } l \text{ bzw. } l^d .$$

mit den entsprechenden Räumen $L^p(l),\ L^p(l, \mathbb{C})$ bzw. $L^p(l^d)$ und den bekannten Normen. Betrachte

$$\Omega = [0,1] \text{ mit Lebesgue-Maß } l$$

dann ergibt sich

$$L^p([0,1], l) \text{ mit } \forall f \in L^p([0,1], l) : \|f\|_p = \int_0^1 |f(x)|^p \, dx$$

Der normierte Raum $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum, wobei

$$C^0([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\} \quad \text{und} \quad \forall f \in C^0([0,1]) : \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$$

Hingegen ist $C^0([0,1])$ nicht vollständig bzgl. der Norm $\|f\|_p = \int_0^1 |f(t)|^p \, dt$. Der Raum $(C^r([0,1]), \|\cdot\|_{k,\infty})$

$$C^r([0,1]) = \left\{f \in C^0([0,1]) \mid f \text{ } r\text{-mal stetig differenzierbar}\right\} \quad \text{und} \quad \forall f \in C^r([0,1]) : \|f\|_{k,\infty} = \sum_{j=0}^{r} \left\|f^{(j)}\right\|_\infty$$

ist ein Banachraum. Man kann auch weitere Normen auf $C^r([0,1])$ definieren, bspw. für $r = 1$ und $f \in C^1([0,1])$

$$\|\cdot\|_{1,p} = \|f\|_p + \left\|f'\right\|_p \quad \text{oder} \quad \hat{|}f\hat{|}_{1,p} = \left(\int_0^1 |f'(x)|^p + |f(x)|^p\right) .$$

Bemerkung 3.4.1. Es gibt eine Inklusion $C^0([0,1]) \hookrightarrow L^p([0,1])$, da in jeder Äquivalenzklasse nur eine stetige Funktion ist.

3.5 Äquivalenz von Normen

Definition 3.5.1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|, \hat{|}\cdot\hat{|} : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Normen. Diese heißen äquivalent, falls

$$\exists 0 < c_1 < c_2 \; \forall x \in V : c_1 \|x\| \leq \hat{|}x\hat{|} \leq c_2 \|x\| .$$

Beispiel 3.5.1. Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit den Normen ($x \in \mathbb{R}^n$): $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ und $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_1|$, dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$$

d. h. $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$ sind äquivalent.

Beispiel 3.5.2. Betrachte $C^1([0,1])$ mit den Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_{1,\infty}$, wie in Bsp. 3.4.3 definiert. Diese sind nicht äquivalent. Definiere $f_n(x) = x^n \in C^1([0,1])$, somit $f_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$. Folglich

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad \text{und} \quad \|f_n\|_{1,\infty} = \|f_n\|_\infty + \left\|f_n'\right\|_\infty = 1 + n$$

und es existieren offensichtlich keine Konstanten $0 < c_1 < c_2$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : c_1 \leq n + 1 \leq c_2 .$$

Satz 3.5.1. Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$. Dann sind alle Normen auf V äquivalent und jeder solche normierte Vektorraum ist ein Banachraum.

Kapitel 4

Hilberträume

4.1 Definitionen

Definition 4.1.1. Sei H ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ heißt eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ *Skalarprodukt* (oder *inneres Produkt*), falls

1. $\forall x \in H : \langle x, \cdot \rangle \,, \, \langle \cdot, x \rangle : H \to \mathbb{R}$ sind linear
2. $\forall x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0$
3. $\forall x \in H : \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
4. $\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ muss gelten:

1. $\forall x \in H : \langle x, \cdot \rangle : H \to \mathbb{C}$ ist linear, $\langle \cdot, x \rangle : H \to \mathbb{C}$ ist antilinear, d. h. $\forall y, z \in H, \lambda \in \mathbb{C}$: $\langle \lambda x + y, z \rangle = \overline{\lambda} \langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle$
2. $\forall x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0$
3. $\forall x \in H : \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
4. $\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Bemerkung 4.1.1. Für das Skalarprodukt über $\mathbb{C}$ kann nur Sesquilinearität und keine Bilinearität gefordert werden, um die positive Deinitheit beizubehalten. Angenommen das Skalarprodukt über $\mathbb{C}$ wäre bilinear und positiv definit, dann

$$\forall x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0 \implies 0 \leq \langle ix, ix \rangle = - \langle x, x \rangle \leq 0 \implies \langle x, x \rangle = 0 \,.$$

Satz 4.1.1 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** Sei H ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dann gilt

$$\forall x, y \in H : |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \;.$$

Bemerkung 4.1.2. Mit Satz 4.1.2 schreibt man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auch als

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \;.$$

Satz 4.1.2. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Raum mit Skalarprodukt. Dann ist $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R} \geq 0$ mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für $x \in H$ eine Norm auf H.

Beweis. Die 1. und 3. Eigenschaft sind trivial, zeige hier nur die Dreiecksungleichung. Es gilt für $x, y \in H$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \ .$$

Mit $\Re(\langle x, y \rangle) \leq |\langle x, y \rangle|$ und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir in der Tat:

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \ .$$

□

Definition 4.1.2. Ein Raum $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit Skalarprodukt heißt *Hilbertraum*, wenn er bzgl. der vom Skalarprodukt induzierten Norm $\|\cdot\|$ vollständig ist.

Lemma 4.1.1 (Polarisationsformel)**.** Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Raum mit Skalarprodukt und induzierter Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für $x \in H$. Dann gilt für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) \ .$$

Satz 4.1.3 (Parallelogrammgleichung)**.** Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ (mit V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum) ist ein Raum mit Skalarprodukt $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Norm induziert, genau dann wenn

$$\forall x, y \in V : \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \ .$$

Beweis. ($\Longrightarrow$) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
\|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
\Longrightarrow \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle
\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Man setzt für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ das Skalarprodukt gemäß der Polarisationsformeln nach Lemma 4.1.1 an und zeigt unter Ausnutzung der Parallelogrammgleichung, dass dies die Eigenschaften eines Skalarprodukts empfiehlt (explizit im *Werner* S. 222). □

4.2 Beispiele

Beispiel 4.2.1. Betrachte $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$. Diese sind mit den Standardskalarprodukten Hilberträume, wobei für $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u, v \in \mathbb{C}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{und} \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_i$$

Beispiel 4.2.2. $\ell^2_{\mathbb{K}}$ ist ein Hilbertraum, wobei die Norm von folgendem Skalarprodukt induziert wird

$$\left\langle (a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \ .$$

Beispiel 4.2.3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist $L^2(\mu, \mathbb{K})$ ein Maßraum mit dem Skalarprodukt $(f, g \in L^2(\mu, \mathbb{K}))$

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega fg \; d\mu \;\text{ für } \mathbb{K} = \mathbb{R} \;\text{ bzw. }\; \langle f, g\rangle = \int_\Omega \overline{f}g \; d\mu \;\text{ für } \mathbb{K} = \mathbb{C}\ .$$

Beispiel 4.2.4. Betrachte $C^0([0,1])$, dann ist für $f, g \in C^0([0,1])$

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t) \; dt$$

ein Skalarprodukt aber $(C^0([0,1]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ kein Hilbertraum.

Beispiel 4.2.5. (Bergmanraum) Sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| < 1\}$. Dann ist $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, wobei mit $f, g \in H$, $x := \Re(z)$, $y := \Im(z)$ gilt

$$H = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ holomorph}, \int_\mathbb{D} |f(z)|^2 \; dxdy < \infty \right\} \text{ und } \langle f, g\rangle = \int_\mathbb{D} \overline{f(z)}g(z) \; dxdy\ .$$

Bemerkung 4.2.1. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit $U \subseteq \mathbb{C}$ offen heißt holomorph, falls f komplex differenzierbar an allen Punkten $z_0 \in U$, d. h. falls folgender Grenzwert existiert

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\ .$$

4.3 Orthogonalbasen

Definition 4.3.1. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Raum mit Skalarprodukt. Wir bezeichnen $x, y \in H$ orthogonal, bzw. $x \perp y$, falls $\langle x, y\rangle = 0$. Zwei Teilmengen $X, Y \subseteq H$ heißen orthogonal, bzw. $X \perp Y$, falls $\forall x \in X, y \in Y : \langle x, y\rangle = 0$.

Lemma 4.3.1 (Satz des Pythagoras)**.** Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Raum mit Skalarprodukt. Dann ergibt sich direkt aus der Definition für $x, y \in H$

$$x \perp y \implies \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2\ .$$

Definition 4.3.2. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Eine Familie $(e_s)_{s\in S}$, $\forall s \in S : e_s \in H$ heißt *Orthonormalsystem*, falls

$$\forall s, t \in S : \langle e_s, e_t\rangle = \delta_{st}\ .$$

Eine Familie $(e_s)_{s\in S}$, $\forall s \in S : e_s \in H$ heißt *vollständig*, falls

$$\forall y \in H : y \perp \{e_s \mid s \in S\} \implies y = 0\ .$$

Ein vollständiges Orthonormalsystem heißt *Orthonormalbasis*.

Beispiel 4.3.1. Betrachte den Hilbertraum $l^2_\mathbb{C}(\mathbb{R}) := \left\{(a_t)_{t\in\mathbb{R}} \mid \forall t \in \mathbb{R} : a_t \in \mathbb{C}, \sum_{t\in\mathbb{R}} |a_n|^p < \infty\right\}$. Dabei ist das Skalarprodukt definiert als

$$\forall (a_t)_{t\in\mathbb{R}}, (b_t)_{t\in\mathbb{R}} \in l^2_\mathbb{C}(\mathbb{R}) : \langle (a_t)_{t\in\mathbb{R}}, (b_t)_{t\in\mathbb{R}}\rangle = \sum_{t\in\mathbb{R}} \overline{a_t}b_t\ .$$

Definiere $e_t = (\delta_{s,t})_{s\in\mathbb{R}} \in l^2_\mathbb{C}(\mathbb{R})$. Dann ist $(e_t)_{t\in\mathbb{R}}$ eine Orthonormalbasis, da für $a := (a_t)_{t\in\mathbb{R}} \in l^2_\mathbb{C}(\mathbb{R})$

$$a \perp \{e_t \mid t \in \mathbb{R}\} \iff \forall t \in \mathbb{R} : \langle a, e_t\rangle = \overline{a_t} = 0 \iff a = 0\ .$$

Beispiel 4.3.2. Betrachte den Hilbertraum $H = L^2([0,1], l, \mathbb{C})$. Dann erhalten wir die (vollständige) Fourierbasis

$$(f_k(x))_{k\in\mathbb{Z}} \text{ mit } f_k(x) := \exp(2\pi ikx) .$$

Die Orthogonalität kann man wie folgt zeigen (mit $k, l \in \mathbb{Z}$)

$$\int_0^1 \exp(-2\pi ikx)\exp(2\pi ilx)\,dx = \int_0^1 \exp(2\pi i(l-k)x)\,dx = \delta_{kl}$$

Satz 4.3.1. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $(e_s)_{s\in S}, \forall s \in S : e_s \in H$ ein Orthonormalsystem. Dann existiert für jedes $\lambda := (\lambda_s)_{s\in S} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(S) := \left\{(a_s)_{s\in S} \,\middle|\, \forall s \in S : a_s \in \mathbb{C}, \sum_{s\in S}|a_s|^2 < \infty\right\}$ ein abzählbares $S_0 \subseteq S$ mit $|\lambda_s| > 0 \implies s \in S_0$. Sei $S_0 := \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $x_n = \sum_{m=0}^n \lambda_{s_m} e_{s_m}$. Dann existiert ein $x \in H$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, wir schreiben $x = \sum_{s\in S}\lambda_s e_s$.

Beweis. Wir zeigen hier nur den 2. Teil des Satzes (???). Da H vollständig, g. z. z., dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Dabei ist bekannt (unter Ausnutzung von Teil 1 des Satzes)

$$\|\lambda\|^2_{\ell^2(S)} = \sum_{m=0}^{\infty} |\lambda_{s_m}|^2 < \infty .$$

Sei $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, sodass $\sum_{m=N+1}^{\infty}|\lambda_{s_m}|^2 < \varepsilon^2$. Seien nun $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2 \geq N$, $n_1 < n_2$. Dann

$$\|x_{n_2} - x_{n_1}\|^2 = \left\| \sum_{m=n_1+1}^{n_2} \lambda_{s_m} \cdot e_{s_m} \right\| .$$

Dabei gilt für $k, l \in \mathbb{N}$, $k \geq l$

$$\left\|\sum_{i=l}^{k} \lambda_{s_i} e_{s_i}\right\|^2 = \left\langle \sum_{i=l}^{k} \lambda_{s_i} e_{s_i}, \sum_{j=l}^{k} \lambda_{s_j} e_{s_j} \right\rangle = \sum_{i,j=l}^{k} \overline{\lambda_i}\lambda_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i,j=l}^{k} \overline{\lambda_i}\lambda_j \delta_{ij} = \sum_{i=l}^{k} |\lambda_i|^2 .$$

Somit ergibt sich

$$\|x_{n_2} - x_{n_1}\|^2 = \sum_{m=n_1+1}^{n_2} |\lambda_{s_m}|^2 < \varepsilon^2 .$$

Folglich ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in H$ existiert. □

Bemerkung 4.3.1 (Motivation). Falls $(e_s)_{s\in S}$ eine Orthonormalbasis von H. Dann ist die Abbildung $F : H \to \ell^2_{\mathbb{C}}(S),\ x \mapsto (\langle x, e_s\rangle)_{s\in S}$ ein unitärer Isomorphismus. In diesem Fall gibt es eine Korrespondenz zwischen $\lambda \in \ell^2_{\mathbb{C}}(S)$ und den Koeffizienten von x bzgl. der Orthonormalbasis $(e_s)_{s\in S}$.

Lemma 4.3.2 (Besselsche Ungleichung)**.** Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem und $x \in H$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Bemerkung 4.3.2. Mit Satz 4.3.1 folgt die allgemeine Besselsche Ungleichung für Orthonormalsysteme. Sei $(e_s)_{s\in S}$, $\forall s \in S : e_s \in H$ ein Orthonormalsystem und $x \in H$, dann

$$\sum_{s\in S} |\langle x, e_s\rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Satz 4.3.2. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $(e_s)_{s\in S}$ ein Orthonormalsystem. Dann ist $(e_s)_{s\in S}$ vollständig, genau dann wenn für jedes $x \in H$ ein $\lambda := (\lambda_s)_{s\in S} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(S)$ existiert mit $x = \sum_{s\in S} \lambda_s e_s$. In diesem Fall ist λ eindeutig bestimmt.

Beweis. (Eindeutigkeit) Seien $S_0 \subseteq S$ sowie $x_n \in H$ wie in Satz 4.3.1. Sei $\hat{s} \in S$, dann

$$\langle e_{\hat{s}}, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle e_{\hat{s}}, x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle e_{\hat{s}}, \sum_{m=0}^{n} \lambda_{s_m} e_{s_m} \right\rangle = \begin{cases} 0 & \hat{s} \notin S_0 \\ \lambda_{\hat{s}} & \hat{s} \in S_0 \end{cases}$$

Somit folgt die Eindeutigkeit aus der Eindeutigkeit der Darstellung der x_n.
(Existenz) Angenommen $(e_s)_{s\in S}$ ist vollständig und x ist nicht durch die Orthonormalbasis darstellbar. Bezeichne die Menge der darstellbaren Elemente in H mit

$$H_0 = \left\{ \sum_{s\in S} \lambda_s e_s \mid (\lambda_s)_{s\in S} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(S) \right\} .$$

Für eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in H_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} y_n = y \implies y \in H_0$. Setze $\mu_s = \langle e_s, x\rangle$. Sei $S_0 \subseteq S$ höchstens abzählbar, dann gilt mit Satz 4.3.2

$$\sum_{s\in S_0} |\mu_s|^2 = \sum_{s\in S_0} |\langle e_s, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty .$$

Für $t \in S_0$ gilt weiterhin

$$\left\langle e_t \, , \, x - \sum_{s\in S_0} \mu_s e_s \right\rangle = \langle e_t, x\rangle - \sum_{s\in S_0} \langle e_t, \langle e_s, x\rangle \, e_s\rangle = 0 .$$

Dieser Beweis muss noch beendet werden.

□

Satz 4.3.3. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Dann existiert eine abzählbare Orthonormalbasis, genau dann wenn H separabel ist.

Beweisidee. Man wendet das Gram-Schmidt-Verfahren aus einer dichten Teilmenge an. □

Bemerkung 4.3.3. Ein metrischer Raum (X, d) heißt separabel, falls ein $A \subseteq X$ existiert, sodass A abzählbar und A dicht in X.

4.4 Projektionen

Satz 4.4.1. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $K \subseteq H$ nicht leer, konvex und abgeschlossen. Dann existiert für jedes $x \in H$ genau ein $y \in K$ mit

$$\|y - x\| = \inf\{\|z - x\| \mid z \in K\} .$$

Beweis. Nehmen o. B. d. A. an $x \notin K$ (sonst wähle $y = x$) und $x = 0$ (sonst verschiebe um $-x$).
(Existenz) Setze $d := \inf\{\|z - x\| \mid z \in K\} = \inf\{\|z\| \mid z \in K\}$. Dann existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in K$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|y_n\| < d + \frac{1}{n} \implies \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = d .$$

Wir zeigen nun, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Mit der Parallelogrammgleichung gilt für $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\left\|\frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y_n - y_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2) \ .$$

Da K konvex, gilt $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in K$ und folglich $\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m)\right\| \geq d^2$. Da

$$\frac{1}{2}(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2) \leq \frac{1}{2}\left(\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(d + \frac{1}{m}\right)^2\right) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} d^2$$

folgt also $\|y_n - y_m\| \to 0$, d. h. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist in der Tat eine Cauchyfolge und da H ein Hilbertraum, existiert $y := \lim_{n\to\infty} y_n \in H$. Da K abgeschlossen ist, gilt $y \in K$. Weiterhin gilt $\|y\| = d$, da

$$\|y\| \geq d \text{ da } y \in K \quad \text{und} \quad \|y\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| \leq d + \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d \ .$$

(Eindeutigkeit) Angenommen für $y, \tilde{y} \in K$ gilt

$$\|y\| = \|\tilde{y}\| = \inf\{\|z\| \mid z \in K\} = d \ .$$

Sei $\lambda \in [0, 1]$ wegen der Konvexität von K gilt

$$\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y} \in K \implies \|\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y}\| \geq d \ .$$

Weiterhin gilt

$$\|\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y}\| \leq \lambda \|y\| + (1 - \lambda) \|\tilde{y}\| = d$$

und folglich $\|\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y}\| = d$. Somit

$$\begin{aligned}
d^2 &= \|\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y}\|^2 = \lambda^2 \langle y, y\rangle + 2\lambda(1 - \lambda)\Re(\langle y, \tilde{y}\rangle) + (1 - \lambda)^2 \langle \tilde{y}, \tilde{y}\rangle \\
&= \lambda^2(\langle y, y\rangle - 2\Re(\langle y, \tilde{y}\rangle) + \langle \tilde{y}, \tilde{y}\rangle) + \langle \tilde{y}, \tilde{y}\rangle + 2\lambda(\Re(\langle y, \tilde{y}\rangle) - \langle \tilde{y}, \tilde{y}\rangle) \\
&= \lambda^2 \|y - \tilde{y}\|^2 + \langle \tilde{y}, \tilde{y}\rangle - \lambda \langle \tilde{y}, \tilde{y}\rangle + \lambda \langle y, y\rangle - \lambda(\langle \tilde{y}, \tilde{y}\rangle - 2\Re(\langle y, \tilde{y}\rangle + \langle y, y\rangle)) \\
&= (\lambda^2 - \lambda) \|y - \tilde{y}\|^2 + d^2
\end{aligned}$$

Dies muss insbesondere auch für $\lambda \in (0, 1) \implies \lambda^2 \neq \lambda$ gelten und somit folgt in der Tat. $\|y - \tilde{y}\| = 0 \iff y = \tilde{y}$. $\square$

Beispiel 4.4.1. Betrachte $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ sowie $x = (0, 0)$ und $K = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \geq 1\}$. Dies ist kein Hilbertraum und die Projektion ist hier auch nicht eindeutig, da

$$P = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 = 1,\ y_2 \in [-1, 1]\} \implies \forall p \in P : \|x - p\|_\infty = 1 = \inf\{\|x - z\|_\infty \mid z \in K\} \ .$$

Beispiel 4.4.2. Betrachte $\mathbb{R}^{2n}, \|\cdot\|_1$ sowie

$$K = \left\{\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} =: \lambda \cdot \hat{y} \in \mathbb{R}^{2n} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}, \ x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \ .$$

Sei $m := \operatorname{med}\{x_1, \dots, x_{2n}\}$, d. h.

$$m = \operatorname*{argmin}_a \sum_{i=1}^{2n} |x_i - a| = \operatorname*{argmin}_a \|x - a\hat{y}\|_1 \ .$$

Dann gilt $\|x - m\hat{y}\|_1 = \inf\{\|x - z\|_1 \mid z \in K\}$.

Definition 4.4.1. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Raum mit Skalarprodukt und $X \subseteq H$. Dann heißt

$$X^{\perp} := \{y \in H \mid \forall x \in X : x \perp y\}$$

orthogonales Komplement von X.

Satz 4.4.2. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $U \subseteq H$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann gibt es für alle $x \in H$ eindeutig bestimmte $y_1 \in U, y_2 \in U^{\perp}$ mit $x = y_1 + y_2$.

Beweis. (Existenz) Da U ein Unterraum ist, ist U insbesondere konvex und nichtleer. Somit wählen wir $y_1 \in U$ eindeutig (nach Satz 4.4.1) mit

$$\|y_1 - x\| = \inf \{\|x - u\| \mid u \in U\} \ .$$

Wir zeigen nun $x - y_1 \in U^{\perp}$. Seien $u \in U,\ \lambda \in \mathbb{K}$, dann

$$\|x - y_1\|^2 \leq \|x - y_1 - \lambda u\|^2 = \|x - y_1\|^2 - 2\lambda\Re(\langle x - y_1, u\rangle) + |\lambda|^2 \|u\|^2$$

Da λ, u beliebig, muss also in der Tat $\langle x - y_1, u\rangle = 0$ gelten.
(Eindeutigkeit) Angenommen $x = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$ mit $\hat{y}_1 \in U,\ \hat{y}_2 \in U^{\perp}$. Sei $u \in U$, dann gilt wegen der Orthogonalität

$$\|x - (\hat{y}_1 + u)\|^1 = \|x - \hat{y}_1\|^2 + \|u\|^2 \geq \|x - \hat{y}_1\|^2 \ .$$

Dies ist nur erfüllt, wenn wir $\hat{y}_1 = y_1$ nach Satz 4.4.1 wählen, woraus die Eindeutigkeit folgt. □

Beispiel 4.4.3. Betrachte $L^2([0,1])$, dann ist $U = C^0(S^1) = \{u : [0,1] \to \mathbb{K} \mid u(0) = u(1)\}$ dicht.

Kapitel 5

Lineare Operatoren

5.1 Definitionen

Definition 5.1.1. Seien $(V_1, \|\cdot\|)$ und $(V_2, \|\cdot\|')$ normierte Räume, dann heißt eine lineare Abbildung (Operator) $A : V_1 \to V_2$ beschränkt, wenn gilt:

$$\exists c \geq 0 \forall v \in V_1 : \|Av\|' \leq c \|v\|$$

Bemerkung 5.1.1. $\mathcal{B}(V_1, V_2) = \{A : V_1 \to V_2 |$ A linear beschränkt$\}$

Satz 5.1.1. In dieser Situation sind äquivalent:

1. $A \in \mathcal{B}(V_1, V_2)$
2. A ist stetig
3. A ist gleichmäßig stetig
4. A ist Lipschitz-stetig
5. A ist stetig in 0

Beweis: Siehe Analysis 2.

□

???

Satz 5.1.2. Jedes lineare Funktional $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist beschränkt.

Beweis: Dieser Beweis wurde in der Vorlesung übersprungen. □

Beispiel 5.1.1 (Volterra-Operator)**.** Betrachte $C^0([0,1]), \|A\|_\infty$, wobei

$$I : C^0([0,1]) \to C^0([0,1]), f(z) \mapsto \int_0^z f(x)dx.$$

Dann gilt

$$|I(f(z)| = \left| \int_0^z f(x)dx \right| = \|f\|_\infty \cdot t \leq \|f\|_\infty$$

und mit

$$\|If\| = \sup |If(z)| : t \in [0,1] \leq \|f\|_\infty$$

ist die Operatornorm $\|I\| \leq 1$. Wähle nun $f_{[0,1]}$, dann ist $If(t) = t$ und damit $\|I\| = 1$.

Beispiel 5.1.2. Sei $V_1 = C^1([0,1])$ mit $\|\cdot\|_\infty$ und $V_2 = C^0([0,1])$ mit $\|\cdot\|_\infty$ sowie eine Abbildung

$$D : V_1 \to V_2, f(t) \mapsto f'(t)$$

Definiere $f_n(t) = t^n$, dann ist $\|f_n\|_\infty = 1$ und da $f_n'(t) = n \cdot t^{n-1}$ auch $\|Df_n\| = n$??

Satz 5.1.3. Seien und $W, \|\cdot\|_W$ normierte Räume mit $A \in \mathcal{B}(V,W)$ mit

$$\|A\|_{V,W} = \inf\{c \in \mathbb{R} | \forall v \in V : \|Av\|_W \leq c\}$$

Dann gilt:

1. $\|A\| = \sup\{\|Av\|_W : \|v\|_V = 1\} = \sup\{\|Av\|_w : \|v\|_V \leq 1\} = \sup\left\{\frac{\|Av\|_W}{\|v\|_W}, v \in V, v \neq 0\right\}$
2. $B \in \mathcal{B}(V,W) : \|A+B\| = \|A\| + \|B\|$ sowie $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
3. Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ normierter Raum, $B \in \mathcal{B}(W,X)$, dann gilt

$$\|AB\|_{V,X} \leq \|A\|_{V,W} \cdot \|B\|_{W,X}$$

Beweis: 1. Sei $M := \sup\left\{\frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V}, v \in V, v \neq 0\right\}$. Für $v = 0$, gilt $\|Av\| = 0$, für $v \neq 0$ gilt:

$$\frac{\|Av\|_w}{\|v\|_V} \leq M \implies \|Av\|_W \leq M \|v\|_V \implies M \geq \|A\|$$

Andererseits gilt für alle $v \neq 0$:

$$\frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} \leq \|A\| \implies M \leq \|A\|$$

2. Wir nutzen die Supremums- und Dreiecksungleichung aus:

$$\|A+B\| = \sup\{\|(A+B)v\|_W : \|v\| = 1\} \leq \sup\{\|Av\|_W + \|Bv\|_W : \|v\| = 1\}$$
$$\leq \sup\{\|Av\|_W : \|v\| = 1\} + \sup\{\|Bv\|_W : \|v\| = 1\} = \|A\| + \|B\|$$

3. Gilt, da $\|BAv\| \leq \|B\| \cdot \|Av\|_W \leq \|B\| \|A\| \|v\|_V$

□

Beispiel 5.1.3 (Multiplikationsoperatoren)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $\phi \in L^2(\mu)$ und

$$M_\phi : L^2(\mu) \to L^2(\mu), f \mapsto \phi \cdot f \text{ mit } M_\phi \cdot M_\psi = M_\psi \cdot M_\phi = M_{\phi\cdot\psi}$$

Dann gilt:

$$\|M_\phi f\|^2 = \int |\phi(x)|^2 |f(x)|^2 dx \leq \int \|\phi\|_\infty^2 |f(x)|^2 dx = \|\phi\|_\infty^2 \|f\|^2 \leq \|\phi\|_\infty^2 \; \mu\text{– fast überall}$$

Wir haben also $M_\phi \in \mathcal{B}(L^2(\mu), L^2(\mu))$ und $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$.
Gleichheit gilt tatsächlich für $\mu(\Omega) < \infty$.
Sei $\alpha < \|\phi\|_\infty$ und definiere

$$E = \{x : |\phi(x) > \alpha|\}$$

dann ist $\mu(E) > 0$. Sei nun $f = 1_E$, dann

$$\|M_\phi f\|^2 = \int_E \|\phi(x)\|^2 \geq \alpha\mu(E) = \alpha \|1_E\|^2$$

Bemerkung 5.1.2. Nach Konvention gilt $\mathcal{B}(V,V) = \mathcal{B}(V)$.

Satz 5.1.4. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbert Raum, $U \subseteq H$ abgeschlossener Unterraum, dann gibt es $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ so, dass:

1. $\forall v \in H : Pv \in U$ und $Qv \in U^\perp$
2. $\forall v \in H : Pv + Qv = v$

Außerdem gilt:

$$\|P\| = \begin{cases} 1 & U \neq \{0\} \\ 0 & U = \{0\} \end{cases}$$

Beweis: Da U abgeschlossener Unterraum von H, gibt es für jedes $v \in H$ eine eindeutige Zerlegung von $u \in U, u^\perp \in U^\perp$ mit $v = u + u^\perp$. Wir verwenden die Definitionen $Pv = u, Qv = u^\perp$ mit $v, w \in H$ und $v = Pv + Qv, w = Pw + Qw$. Betrachte:

$$v + w = \underbrace{(Pv + Pw)}_{\in U} + \underbrace{(Qv + Qw)}_{\in U^\perp}$$

Folglich

$$P(v + w) = Pv + Pw \text{ und } Q(v + w) = Qv + Qw.$$

(λv geht analog.) Wir setzen für $v \in H$ nun

$$\|v\|^2 = \|Pv + Qv\|^2 = \|Pv\|^2 + \|Qv\|^2 \text{ da } \langle Pv, Qv\rangle = 0$$

Daraus folgt $\|Pv\|^2 \leq \|v\|^2$ und $\|P\|, \|Q\| \leq 1$. Sei $v \in U, v \neq 0$, dann $Pv = v$ und damit $\|Pv\| = \|v\|$, also $\|P\| \geq 1$. □

Satz 5.1.5. Sei V ein normierter Raum, W ein Banachraum, dann ist $\mathcal{B}(V, W)$ ein Banachraum mit der Operatornorm.

Beweis: Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{B}(V, W)$, dann $\lim_{n,m\to\infty} \|A_n - A_m\| = 0$. Sei nun $v \in V$, dann

$$\lim_{n,m\to\infty} \|A_n v - A_m v\| \leq \lim_{n,m\to\infty} \|A_n - A_m\| \|v\|$$

und damit ist $(A_n v)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in W. Somit ist $Av = \lim_{n\to\infty} A_n v$. Definiere $A : V \to W$ nun als Abbildung aus diesem Grenzwert.

Hier gab es in der Vorlesung einen Nachtrag, allerdings sollte es so auch gehen.

Damit gilt schon

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|v\|\leq 1} \{\|Av - A_n v\|\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Sein nun $v, w \in V$, dann sehen wir die Linearität wie folgt:

$$A(v+w) = \lim_{n\to\infty} A_n(v + w) = \lim_{n\to\infty} A_n v + A_n w = \lim_{n\to\infty} A_n v + \lim_{n\to\infty} A_n w = Av + Aw \text{ (für } A(\lambda v) \text{ genauso)}$$

Zur Beschränktheit:

$$|\|A_n\| - \|A_m\|| \leq \|A_n - A_m\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0 \implies \lim_{n\to\infty} \|A_n\| =: c$$

Betrachte nun:

$$\|Av\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n v\| \leq \lim_{n\to\infty} \|A_n\| \, \|v\| = c\,\|v\|$$

und damit $A \in \mathcal{B}(V,W)$.

$\square$

Bemerkung 5.1.3. Es gibt soetwas wie eine Rückrichtung: Falls $\mathcal{B}(V,W)$ ein Banachraum ist, wobei V nicht der triviale Vektorraum ist, so ist auch W ein Banachraum. (Wäre V der Nullvektorraum, so gäbe es mit der Nullabbildung nur eine lineare Abbildung, damit wäre $\mathcal{B}(V,W)$ immer vollständig.)

5.2 Das Dual

Definition 5.2.1. Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum. Dann wird $V' = \mathcal{B}(V,\mathbb{K})$ als Dualraum von V bezeichnet. $\phi \in V'$ heißt auch linear beschränktes Funktional.

Definition 5.2.2.

Beispiel 5.2.1. Wir untersuchen den Dualraum von $V = L^p(\mu)$. Mittels der Hölderungleichung erhalten wir mit $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)$:

$$\left|\int fg d\mu\right| \leq (\int |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int |g|^q \, d\mu)^{\frac{1}{q}} \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Sei nun $\varphi_g := \int \cdot g d\mu \in V'$. Da

$$|\varphi_g| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

ist φ_g beschränkt und $\{\varphi_g : g \in L^q\} = (L^p(\mu))'$ und damit $L^p(\mu)'' \simeq L^p(\mu)$.

Satz 5.2.1 (Darstellungssatz von Riesz)**.** Jedes beschränkte lineare Funktional φ auf dem Hilberraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ hat die Form $\varphi(x) = \langle h_0, x\rangle$ für ein eindeutiges $h_0 \in H$ und $\|\varphi\|_{H'} = \|h_0\|$ und $h_0 \to \varphi$ anti-linear.

Beweis: **Existenz** Sei O.b.d.A $\varphi \neq 0$, d.h. $\ker\varphi = \{x \in H | \varphi(x) = 0\}$ ist ein echter abgeschlossener Teilraum. Dann muss aber auch $\ker\varphi^{\perp} \neq \{0\}$. Sei $z \in \ker\varphi$ mit $\|z\| > 0$ und o.B.d.A $\varphi(z) = 1$. Sei $h \in H$ beliebig, dann sehen wir

$$\varphi(\underbrace{\varphi(h)z - h}_{\in \ker\varphi \perp z}) = \varphi(h)\varphi(z) - \varphi(h) = 0.$$

Damit ist $z \perp \varphi(h)z - h$ und äquivalent dazu

$$0 = \langle z, \varphi(h)z - h\rangle = \varphi(h)\,\|z\|^2 - \langle z, h\rangle \text{ also } \varphi(h) = \left\langle \frac{z}{\|z\|^2}, h \right\rangle.$$

Eindeutigkeit
Nehmen wir an, dass $\langle h_1, h\rangle = \langle h_2, h\rangle$ mit $h = h_1 - h_2$ und sei

$$0 = \langle h_1 - h_2, h\rangle = \|h_1 - h_2\|^2 \implies h_1 = h_2.$$

Über die CBS-Ungleichung gilt außerdem:

$$|\langle h_0, h\rangle| \leq \|h_0\|\,\|h\| \implies \|\varphi\|_{H'} \leq \|h_0\|\,.$$

Da aber

$$|\varphi(h_0)| = \langle h_0, h_0 \rangle = \|h_0\|^2 = \|h_0\| \, \|h_0\| \implies \|\varphi\| = \|h_0\| .$$

□

Beispiel 5.2.2. Sei $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)'$ mit $\mu(\omega) < \infty$ und $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ und jeweils $\mu(\Omega_n) < \infty$. Sei $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ und $g \geq 0$, dann $\varphi^{\pm}(g) \geq 0$.
Sei o.B.d.A $\varphi \geq 0$. Dann ist $v_\varphi : \mathcal{F} \to [0, \infty], v_\varphi(E) = \varphi(1_E)$ ein Maß. Wenn $\varphi(E) = 0$, dann $v_\varphi(E) = 0$. Mit dem Satz von Radon-Nikodym (Satz 2.2.5)) folgt, dass es ein $h \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$ mit

$$\varphi(1_E) = v_\varphi(E) = \int 1_E h d\mu$$

Damit erhalten wir $\varphi(f) = \int f h d\mu$ und die Hölderungleichung.

Satz 5.2.2. Die Abbildung $\psi : H \to H', h \mapsto \langle h, \cdot \rangle$ ist eine (anti-lineare) isometrische Projektion.

Beweis: Wurde in der Vorlesung übersprungen. □

Bemerkung 5.2.1. In der Physik schreibt man auch:

$$\begin{aligned} \langle u| &:= \langle u, \cdot \rangle \; bra \\ |h\rangle &:= h, ket \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung von Notation gilt dann $\langle u|h \rangle := \langle u, h \rangle$

Definition 5.2.3. Seien H, K Hilberträume, dann heißt eine Sesquilinearform $u : H \times K \to \mathbb{K}$ beschränkt genau dann wenn

$$\exists M > 0, \forall h \in H, k \in \mathbb{K} : |u(h,k)| \leq M \|h\|_H \|k\|_K$$

Satz 5.2.3. Ein Operator u wie in 5.2.3 ist genau dann beschränkt, wenn

$$\exists A \in \mathcal{B}(K, H) : \forall h \in H, \forall k \in K : u(h,k) = \langle h, Ak \rangle$$

Beweis: $(\Longrightarrow)$
Sei k fixiert, $u(\cdot, k) \in H'$, da:

$$|u(h,k)| \leq M \|h\|_H \|k\|_K \leq (M \|k\|_K) \|h\|_H .$$

Mit 5.2.2 folgt:

$$\exists! A(k) \in H : \overline{u(\cdot, k)} = \langle A(k), \cdot \rangle \text{ bzw. } \forall h \in H : u(h,k) = \langle h, A(k) \rangle$$

Sei nun $k_1, k_2 \in K$, dann haben wir:

$$\langle h, A(k_1 + k_2) \rangle = u(h, k_1 + k_2) = u(h, k_1) + u(h, k_2) = \langle h, A(k_1) + A(k_2) \rangle$$

Sei nun $\lambda \in \mathbb{K}, k \in K$, so folgt:

$$\langle h, A(\lambda k) \rangle = u(h, \lambda k) = \lambda u(h,k) = \lambda \langle h, A(k) \rangle = \langle h, \lambda A(k) \rangle$$

Damit ist A linear.
Wir wissen für $\|h\| \leq 1$:

$$|\langle h, Ak\rangle| = |u(h,k)| \leq M\,\|h\|\,\|k\| \leq M\,\|k\|$$

Damit folgt $\|Ak\| \leq M\,\|k\|$ also ist A beschränkt. Folglich $A \in \mathcal{B}(H,K)$.

$(\Longleftarrow)$
Sei $A \in \mathcal{B}(K,H)$, dann haben wir folgende Abschätzung mittels CBS-Ungleichung:

$$|\langle h, Ak\rangle| \leq \|h\|\,\|Ak\| \leq \|A\|\,\|h\|\,\|k\|$$

□

Satz 5.2.4. Für alle $A \in \mathcal{B}(K,H)$ gibt es $A^* \in \mathcal{B}(H,K)$ mit der Eigenschaft

$$\forall h \in H, k \in K : \langle h, Ak\rangle = \langle A^*h, k\rangle\,.$$

Dieser adjungierte Operator hat folgende Eigenschaften:

1. $A \to A^*$ ist antilinear
2. $A^{**} = A$
3. $(AB)^* = B^*A^*$
4. $\|A^*\| = \|A\|$ und $\|A^*A\| = \|A\|^2$ $(C^* - Axiom)$

Beweis: **Existenz:**
Mittel der CBS-Ungleichung erhalten wir:

$$|\langle h, Ak\rangle| \leq \|h\|\,\|Ak\| \leq \|A\|\,\|h\|\,\|k\|\,.$$

Aber es gilt $|\langle h, Ak\rangle| = |\langle Ah, k\rangle|$ Damit ist $u(k,h) := \langle Ak, h\rangle$ sesquilinear auf $K \times H$. Damit gibt es aber ein eindeutiges A^* mit

$$\overline{\langle Ak, h\rangle} = \overline{u(h,k)} = \overline{\langle k, A^*h\rangle}$$

zu 1: Es gilt $\langle(\lambda A)^*h, k\rangle = \langle h, \lambda Ak\rangle = \lambda\,\langle h, Ak\rangle = \left\langle\overline{\lambda}A^*h, k\right\rangle$
zu 2: $\langle A^{**}k, h\rangle = \langle k, A * h\rangle = \overline{\langle A^*h, k\rangle} = \overline{\langle h, Ak\rangle} = \langle Ak, h\rangle$ mit $h = A^{**} - Ak$. Dann:

$$0 = \langle A^{**}k, h\rangle - \langle Ak, h\rangle = \langle (A^{**} - A)k, (A^{**} - A)k\rangle \implies \|A^{**}k - Ak\| = 0$$

Damit gilt dann die Gleichheit.
zu 3: Sei $A \in \mathcal{B}(K,H), B \in \mathcal{B}(L,K)$ und $AB \in \mathcal{B}(L,H)$. Außerdem gilt: $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$. Des Weiteren:

$$\forall h \in H, l \in L : \langle (AB)^*, l\rangle = \langle h, A(Bl)\rangle = \langle A^*l, Bl\rangle = \langle B^*A^*h, l\rangle$$

zu 4: Sei $k \in K$ mit $\|k\| = 1$. Dann gilt mit der CBS-Ungleichung

$$\|Ak\|^2 = \langle Ak, Ak\rangle) = \langle A * Ak, k\rangle \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\|\,\|A\|$$

Auf der anderen Seite:

$$\sup_{\|k\| \leq 1} \|Ak\| = \|A\|^2 \leq \|A^*\|\,\|A\| \implies \|A^*\| \geq \|A\|$$

Aufgrund von 2. haben wir auch hier Gleichheit. Damit haben wir dann:

$$\|A\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| \, \|A\| = \|A\|^2$$

□

Beispiel 5.2.3. *„bra's adjoint"*
Sei nun $A := \langle v| : H \to \mathbb{K}$ und wir betrachten den dazu adjungierten Operator $A^* : \mathbb{K} \to H$. Wir haben:

$$\forall h \in H, \lambda \in \mathbb{K} : \langle A^*\lambda, h\rangle = \langle \lambda, Ah\rangle_{\mathbb{K}} = \overline{\lambda} Ah = \overline{\lambda} \langle v, h\rangle = \lambda \langle v, h\rangle .$$

Daraus folgt dann $A^*\lambda = \lambda v$ und damit $\langle v|^* = |v\rangle$

Beispiel 5.2.4. Sei H ein Hilbertraum, $K \subseteq H$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei des Weiteren noch $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ mit $Ph \in K, Qh \in K^{\perp}, P + Q = I_H$ wobei I_H der Identitätsoperator ist. Gesucht ist nun P^*.
Betrachten wir dazu:

$$\langle P^*h, h'\rangle = \langle h, Ph'\rangle = \langle Ph, Ph\rangle + \underbrace{\langle Qh, Ph'\rangle}_{=0} = \langle P^*Ph, h'\rangle .$$

Damit haben wir $P^* = P^*P$ und da

$$P = (P^*P)^* = P^*P^{**} = P^*P = P^* \text{ und damit } P = P^* = P^2$$

Des Weiteren haben wir $h - Ph \perp Ph$:

$$\langle h - Ph, Ph\rangle = \langle Ph\rangle - \langle h, P^*Ph\rangle = 0$$

(Für Q analog.)

Definition 5.2.4. Sei $A \in \mathcal{B}(H)$, dann heißt A:

- selbstadjungiert, falls $A^* = A$
- normal, falls $A^*A = AA^*$
- unitär, falls $A^*A = \mathrm{Id}_H = AA^*$

Beispiel 5.2.5. Wir betrachten den $L^2(\mu)$ mit dem Multiplikationsoperator $M_\varphi f(x) = \varphi(x)f(x)$. Dann gilt:

$$\left\langle M_\varphi^* h, f\right\rangle = \langle h, M_\varphi f\rangle = \int \bar{h}(x)\varphi(x)f(x)\mu(dx) = \int \overline{\bar{\varphi}(x)h(x)} f(x)\mu(dx) = \langle M_{\bar{\varphi}}h, f\rangle .$$

Somit erhalten wir $M_\varphi^* = M_{\bar{\varphi}}$. Falls außerdem $\mathrm{Im}\varphi \subseteq \mathbb{R}$, dann ist der Operator selbstadjungiert. Des Weiteren ist er normal, da:

$$M_\varphi^* M_\varphi = M_{\bar{\varphi}} M_\varphi = M_{|\varphi|^2} = M_\varphi M_\varphi^*$$

5.3 Der Satz von Hahn-Banach

Definition 5.3.1. Eine partielle Ordnung auf einer Menge X ist eine Relation $\leq$, sodass für alle $a, b, c \in X$ gilt:

1. Transitivität: $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$
2. Reflexivität: $a \leq a$
3. Anti-Symmetrie: $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$

Falls für alle $a, b \in X$ gilt $a \leq b \vee b \leq a$, dann wird X als total geordnet bezeichnet.

Satz 5.3.1 (Lemma von Zorn)**.** Sei $(Z, \leq)$ eine partiell geordnete Menge mit der Eigenschaft, dass jede total geordnete Teilmenge (bez. *Kette*) eine obere Schranke in Z hat. Dann hat Z ein maximales Element.

Lemma 5.3.1. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Unterraum, $z \in V \setminus U$ so, dass $V = \operatorname{span}\{U \cup \{z\}\}$ sowie $\varphi_0 \in U'$. Dann gibt es $\varphi \in V'$ mit $\forall u \in U : \varphi(u) = \varphi_0(u)$ und $\|\varphi\| = \|\varphi_0\|$.

In der Vorlesung wurde im Lemma $\|\varphi\| \geq \|\varphi_0\|$ angegeben, aber dies sollte direkt aus $\varphi|_U = \varphi_0$ folgen und wir zeigen im Lemma $\leq$ und somit Gleichheit, oder?

Beweis. Wir zeigen hier nur den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nehmen o. B. d. A. an, dass $\varphi_0 \neq 0$ (ansonsten setze $\varphi = 0$) und $\|\varphi_0\| = 1$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung

$$V = \operatorname{span}\{U \cup \{z\}\} = \{u + \alpha z \mid u \in U, \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha z - u \mid u \in U, \alpha \in \mathbb{R}\} \ .$$

Zeige nun, dass die Darstellung $v = \alpha z - u \in V$ durch $u \in U, \alpha \in \mathbb{R}$ eindeutig ist. Angenommen für $u_1, u_2 \in U, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gilt $v = u_1 + \alpha_1 z = u_2 + \alpha_2 z$, dann folgt

$$u_1 + \alpha_1 z = u_2 + \alpha_2 z \iff \overbrace{(\alpha_2 - \alpha_1) z}^{\notin U} = \overbrace{u_1 - u_2}^{\in U} \implies \alpha_1 = \alpha_2 \implies u_1 = u_2 \ .$$

Betrachte nun $x, y \in U$, dann gilt (mit $\|\varphi_0\| = 1$)

$$\begin{aligned} \overbrace{\varphi_0(x) - \varphi_0(y)}^{\in \mathbb{R}} &\leq |\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| = |\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| \\ &= |\varphi_0(x - y)| \leq \|\varphi_0\| \, \|x - y\| = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|y - z\| \\ &\iff \varphi(x) - \|x - z\| \leq \varphi_0(y) + \|y - z\| \ . \end{aligned}$$

Somit existiert $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\sup_{x \in U} \varphi_0(x) - \|x - z\| \leq c \leq \inf_{y \in U} \varphi_0(y) + \|y - z\| \ .$$

Damit können wir nun die Forsetzung definieren, wobei für $v \in V$ (wie oben) gilt

$$\varphi(v) = \varphi(\alpha z - u) := \alpha c - \varphi_0(u) \ .$$

Wir prüfen nun die geforderten Eigenschaften. Es gilt offensichtlich $\varphi|_U = \varphi_0$ (setzen $\alpha = 0$ in eindeutiger Darstellung) und somit automatisch $\|\varphi\| \geq \|\varphi_0\|$. Zeige nun die Normabschätzung. Zunächst gilt $\forall \tilde{u} \in U$

$$\begin{aligned} &\varphi_0(\tilde{u}) - \|\tilde{u} - z\| \leq c \leq \varphi_0(\tilde{u}) + \|\tilde{u} - z\| \\ \iff &-\|\tilde{u} - z\| \leq c - \varphi_0(\tilde{u}) \leq \|\tilde{u} - z\| \\ \iff &|c - \varphi_0(\tilde{u})| \leq \|\tilde{u} - z\| \end{aligned}$$

Somit erhalten wir $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, u \in U$ (d.h. für $v \in V \setminus U$)

$$|\varphi(\alpha z - u)| = |\alpha| \left|\varphi\left(z - \frac{u}{\alpha}\right)\right| = |\alpha| \cdot \left|c - \varphi_0\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right| \leq |\alpha| \left\|\frac{u}{\alpha} - z\right\| = \|\alpha z - u\| \ .$$

Folglich gilt $|\varphi(\alpha z - u)| \leq \|\varphi_0\| \, \|az - u\| \implies \|\varphi\| \leq \|\varphi_0\|$ und es folgt Normgleichheit. $\square$

Satz 5.3.2 (Hahn-Banach)**.** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Unterraum und $\varphi_0 \in U'$. Dann gibt es ein $\varphi \in V'$ mit $\varphi|_U = \varphi_0$ und $\|\varphi\|_{V'} = \|\varphi_0\|_{U'}$. D. h. jedes beschränkte, lineare Funktional kann normgleich fortgesetzt werden.

Beweis. O. B. d. A $\|\varphi_0\| = 1$. Wir setzen

$$Z := \left\{(W, \psi) \;\middle|\; U \subseteq W \subseteq V \text{ Unterraum}, \ \psi \in W', \ \psi|_U = \psi_0, \ \|\psi\| = \|\varphi_0\| = 1\right\} \ .$$

Definieren partielle Ordnung auf Z über

$$(W, \psi) \leq (\tilde{W}, \tilde{\psi}) :\iff W \subseteq \tilde{W} \text{ und } \tilde{\psi}|_W = \psi \ .$$

Sei nun $Z_0 \subseteq Z$ eine total geordnete Teilmenge, womit wir $W^* \subseteq V$ wie folgt definieren

$$Z_0 := \{(W_i, \psi_i) \mid i \in I\} \quad \text{und} \quad W^* := \bigcup_{i \in I} W_i \ .$$

Dabei ist W^* ein Unterraum, da für $x, y \in W^*$ existieren $i_1, i_2 \in I$, sodass $x \in W_{i_1}$ und $y \in W_{i_2}$. Sei o. B. d. A. $(W_{i_2}, \psi_{i_2}) \geq (W_{i_1}, \psi_{i_1})$, dann gilt nach Voraussetzung auch $x \in W_{i_2}$, dies ist ein Unterraum und somit $x + y \in W^*$. Wir definieren nun ein lineares Funktional ψ^* auf W^*, wobei für $w \in W^*$

$$\exists \hat{i} \in I : w \in W_{\hat{i}} \text{ und somit } \psi^*(w) := \psi_{\hat{i}}(w) \ .$$

Zeige nun, dass ψ^* wohldefiniert ist. Seien $(W_{i_j}, \psi_{i_j}) \in Z_0$, $j \in \{1, 2\}$, $w \in W_{i_1}$, o. B. d. A. $W_{i_1} \subseteq W_{i_2}$ und $\psi_{i_2}|_{W_{i_1}} = \psi_{i_1}$. Dann gilt $\psi_{i_2}(w) = \psi_{i_1}(w)$, d. h. ψ^* ist wohldefiniert. Weiterhin existiert für alle $w \in W^*$ ein $i^* \in I$ mit

$$|\psi^*(w)| = |\psi_{i^*}(w)| \leq \|\psi_{i^*}\| \, \|w\| = \|\varphi_0\| \, \|w\| = \|w\| \implies \|\psi^*\| \leq 1 \ .$$

Da offensichtlich $\|\psi^*\| \geq \|\varphi_0\|$ (wegen $\psi^*|_U = \varphi_0$), folgt $\|\psi^*\| = 1$. Somit $(W^*, \psi^*) \in Z$ und für $(W, \psi) \in Z_0$ beliebig gilt nach Konstruktion

$$W \subseteq W^* \text{ und } \forall w \in W : \psi^*(w) = \psi(w) \implies (W, \psi) \leq (W^*, \psi^*) \ .$$

Somit ist (W^*, ψ^*) eine obere Schranke von Z_0. Nach dem Lemma von Zorn hat Z_0 also ein Maximum, bez. dieses mit (W_0, ψ_0). Angenommen $W_0 \neq V$. Dann können wir für $z \in V \setminus W_0$ Lemma 5.3.1 anwenden auf $W_1 := \operatorname{span}\{W_0 \cup \{z\}\}$, d. h.

$$\exists \eta \in W_1' : \ \eta|_{W_0} = \psi_0 \text{ und } \|\eta\| = \|\psi_0\| = \|\varphi_0\| \ .$$

Dann folgt jedoch $(W_1, \eta) \in Z$ mit $(W_1, \eta) > (W_0, \psi_0)$, was ein Widerspruch dazu ist, dass (W_0, ψ_0) eine obere Schranke ist. Somit leistet $W_0 = V$ und $\varphi := \psi_0$ das Verlangte. $\square$

Beispiel 5.3.1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $U \subseteq V$ ein dichter Teilraum von V und $\varphi_0 \in U'$. Nach Voraussetzung existiert für jedes $x \in V$ eine Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in U$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Da φ_0 beschränkt und linear (und somit stetig), folgt, dass auch $(\varphi_0(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge auf

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (und somit konvergent) ist. Wir definieren die (eindeutige) Fortsetzung $\varphi \in V'$ mit

$$\forall x \in V' : \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_0(x_n) \ .$$

Weiterhin gilt

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_0(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} \|\varphi_0\| \, \|x_n\| = \|\varphi_0\| \, \|x\| \ .$$

Es ist nicht ganz klar, wozu die letzte Abschätzung nötig ist und wieso die Eindeutigkeit gilt.

Satz 5.3.3. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, wobei $V \neq \{0\}$. Dann gibt es für jedes $x_0 \neq 0 \in V$ ein $\varphi \in V'$ mit $\varphi(x_0) = \|x_0\|$ und $\|\varphi\| = 1$.

Beweis. Wir setzen $U := \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$, damit ist $U \subseteq V$ ein Unterraum. Definieren $\varphi_0 \in U'$ über

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} : \varphi_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\| \implies \varphi_0(x_0) = \|x_0\| \ .$$

Weiterhin gilt

$$\|\varphi_0\| = \sup\left\{|\varphi_0(\alpha x_0)| \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{K}, |\alpha| \, \|x_0\| \leq 1\right\} = \sup\left\{|\alpha| \, \|x_0\| \;\middle|\; |\alpha| \, \|x_0\| \leq 1\right\} = 1 \ .$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach können wir nun φ_0 normgleich nach V' fortsetzen und erhalten somit die geforderten Eigenschaften. □

Satz 5.3.4. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist

$$\psi : V \to V'', \ x \mapsto (x'' : \varphi \mapsto \varphi(x))$$

eine isometrische Abbildung.

Beweis. Es gilt

$$\left\|x''\right\| = \sup\left\{|\varphi(x)| \;\middle|\; \varphi \in V', \|\varphi\| \leq 1\right\}$$

Dabei gilt $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \, \|x\| \leq \|x\|$ für $\|\varphi\| \leq 1$. Somit $\|x''\| \leq \|x\|$. Da $\varphi_x \in V'$ mit $\varphi_x(x) := \|x\|$, folgt die Gleichheit $\|x''\| = \|x\|$.

□

Definition 5.3.2. Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, $V^{'}$ der Dualraum und $V^{''}$ der Bidualraum. Dann ist die natürliche Einbettung ι definiert durch:

$$\iota : V \to V^{''}, \iota(v)(\varphi) = \varphi(v) \text{ für alle } v \in V, \varphi \in V'$$

Außerdem ist ι per Definition injektiv und linear. Des Weiteren erhält ι die Norm:

$$\|\iota(v)\|_{V'} = \|v\|_V$$

Definition 5.3.3. Ein normierter Raum X heißt reflexiv, wenn die natürliche Einbettung $X \to X^{''}$ bijektiv (bzw. surjektiv) ist.

Bemerkung 5.3.1. Sei $X'' = (X')'$ ein Banachraum, dann ist X ein Banachraum. Es gibt damit keine nichtvollständigen reflexiven Räume.

Beispiel 5.3.2. Sei $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann gilt $L^p(\mu)' = L^q(\mu)$ für σ-endliche Maße. Wir sehen aber ebenfalls $L^q(\mu)' = L^p(\mu)$, also ist $L^p(\mu)$ tatsächlich reflexiv.

Am einfachsten ist $p = q = 2$. Also ist $L^2(\mu)$ ein Selbstdual.

Bemerkung 5.3.2. Wir haben also meistens eine von beiden Ketten:

$$X \xrightarrow{\iota} X' \xrightarrow{\iota'} X'' \simeq X$$
$$X \xrightarrow{\iota} X' \simeq X$$

Tatsächlich kann es sonst nur unendlich lange Ketten geben. Betrachte das folgende Beispiel:

Beispiel 5.3.3. Wir untersuchen nun die Dualkette von

$$c_0 = \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\}$$

Es stellt sich heraus, dass $c_0' = \ell^1$. Außerdem stellt sich heraus, dass $(\ell^1)' = \ell^\infty$ und wiederum $(\ell^\infty)' = \left\{\mu : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R},\ \mu \text{ ist endlich additiv}\right\}$. Bei μ handelt es sich nicht nur um Maße, sondern um Inhalte. Diese Kette zieht sich so fort.

5.4 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Definition 5.4.1. Sei (X, ρ) ein Maßraum, dann heißt $S \subset X$ nirgends dicht, wenn die Vervollständigung $\bar{S}$ keine Kugel enthält. Mit

$$\bar{S} = \left\{ x \in X : \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in S : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \right\} \text{ und } \bar{S} = S \cup \partial S.$$

Das Innere ist definiert als

$$S^{\mathrm{o}} = \{x \in X \mid \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(X) \subseteq S\}.$$

S ist genau dann nirgends dicht, wenn $\bar{S}^{\mathrm{o}} = \emptyset$.

Definition 5.4.2. Sei $Y \subset X$, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie nirgends dichter Mengen, dann heißt Y mager genau dann, wenn $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

Beispiel 5.4.1. Sei $X = \mathbb{R}$.

1. Die Cantormenge C ist nirgends dicht.
2. $\mathbb{Q}$ ist nirgends dicht.

Lemma 5.4.1. Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ sowie $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume, $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $r, \varepsilon > 0$, $x_0 \in V$ mit $\overline{K_\varepsilon(x_0)} \subset T^{-1}(\overline{K_r(0)})$, dann ist T beschränkt und $\|T\| \leq \frac{2r}{\varepsilon}$.

Beweis: Sei $y \in V$ und $\|y\| \leq \varepsilon$, dann $x_0, x_0 + y \in T^{-1}(\overline{K_r(0)})$, also $\|Tx_0\| \leq r$ und $\|T(x_0 + y)\| \leq r$. Mit der Dreiecksungleichung folgt:

$$\|Ty\| = \|T(x_0 + y) - T(x_0)\| \leq 2r.$$

Sei nun $x \in V$, $\|x\|_V \leq 1$, dann sehen wir

$$\|Tx\| = \frac{1}{\varepsilon} \|T(\varepsilon x)\| \leq 2\frac{r}{\varepsilon}$$

□

Bemerkung 5.4.1. Die Kategorien sind wie folgt definiert:

1. Eine Menge M heißt von *Kategorie 1*, wenn es eine Folge $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nirgends dichter Mengen gibt mit $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

2. Eine Menge M heißt von *Kategorie 2*, wenn M nicht von Kategorie 1 ist.

Satz 5.4.1 (Cantor'scher Schnitt)**.** Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge nichtleerer abgeschlossener Mengen in X, mit $K_{n+1} \subset K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei außerdem $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$, dann gibt es $x \in X$ mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$.

Satz 5.4.2. Sei (X, ρ) ein vollständiger metrischer Raum und $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nirgends dichter Mengen, dann gibt es $x \in X$ mit $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

Beweis: Da S_n nirgends dicht ist, ist $S_n^{\circ} = \emptyset$. Nach Definition gibt es zu jedem S_n und jeder offenen Menge $U \subseteq X$ eine Menge $B \subseteq U$ mit $\bar{B} \cap S_n = \emptyset$. Sei B_1 nun eine beliebige nicht-leere offene Teilmenge von X. Da S_1 nirgends dicht ist, gibt es $B_2 \subset B_1$ mit $\bar{B}_2 \cap S_1 = \emptyset$. So definiere man sich eine Folge absteigend nicht-leerer offener Mengen $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wobei $B_{n+1} \subseteq B_n$ und $\bar{B}_{n+1} \cap S_n = \emptyset$. Da X vollständig ist, garantiert der Satz von Cantor, dass der Durchschnitt der abgeschlossenen Mengen $\bar{B}_n$ nicht leer ist, also $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \neq \emptyset$. □

Satz 5.4.3 (Gleichmäßige Beschränktheit)**.** Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume und $\mathcal{F}$ eine Familie von Operatoren mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(V, W)$ mit

$$\forall x \in V : \sup\{\|Tx\|_W : T \in \mathcal{F}\} < \infty,$$

dann gilt $\sup\left\{\|T\|_{V,W} : T \in \mathcal{F}\right\} < \infty$.

Beweis: Wir zerlegen V zunächst in abzählbare Mengen mit

$$S_n := \{x \in V : \forall T \in \mathcal{F}, \|Tx\| \leq n\}$$

und $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Aufgrund von 5.4.2 hat $\bar{S}_n$ ein nichtleeres Inneres für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. S_n ist abgeschlossen: Sei $x_m \in S_n$ mit $m = 1, 2, \ldots$ und $x_m \to x$. Dann gilt für alle $T \in \mathcal{F}$, dass $\|Tx_m\| \leq n$, mit Stetigkeit aber $\|Tx_m\| \to \|Tx\|$. Also $\|Tx\| \leq n$ für alle $T \in \mathcal{F}$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ fixiert, dann hat S_n einen inneren Punkt x_0. Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass

$$\overline{K_\varepsilon(x_0)} \subseteq S_n \subseteq \{x \in V : \|Tx\| \leq n, T \in \mathcal{F}\},$$

dann folgt mit 5.4.1 $\|T\| \leq \frac{2n}{\varepsilon}$. □

Satz 5.4.4 (Banach-Steinhaus)**.** Sei $\{T_n\}$ eine Folge beschränkter linearer Operatoren mit $T_n \in \mathcal{B}(X, Y)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem existiere für alle $x \in X$ auch $\lim_{n\to\infty} T_n x$. Definiere $T : X \to Y$ durch $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$. Dann ist $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Beweis: T ist offensichtlich linear. Sei $x \in X$, dann ist $\sup_n \|T_n x\| < \infty$, da $\{T_n x\}$ nach Voraussetzung konvergiert und konvergente Folgen in metrischen Räumen beschränkt sind. 5.4.3 liefert uns nun, dass $\sup \|T_n\| = M < \infty$. Damit folgt über die CBS-Ungleichung für alle $x \in X, n \in \mathbb{N}$, dass $\|T_n x\| \leq M \|x\|$. □

5.5 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Satz 5.5.1. Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Raum und $A \subseteq V$ eine Teilmenge mit

$$\forall \varphi \in V' : \sup \left\{ |\varphi(x)| \;\middle|\; x \in A \right\} < \infty \,.$$

Dann ist A beschränkt.

Beweis. Betrachte die kanonische Einbettung $\Phi : V \to V''$, $\Phi(x)(\varphi) = \varphi(x)$. Diese ist isometrisch, wie in Satz 5.3.4 gezeigt. Sei nun

$$\mathcal{F} = \Phi(A) = \{\Phi(x) \mid x \in A\} \subseteq V'' = \mathcal{B}(V', \mathbb{K}) \,.$$

Damit gilt nun für alle $\varphi \in V'$

$$\begin{aligned} &\sup \left\{ \|Y(\varphi)\| \;\middle|\; Y \in \Phi(A) \right\} = \sup \left\{ |Y(\varphi)| \;\middle|\; Y \in \Phi(A) \right\} \\ =& \sup \left\{ \left|\varphi(\Phi^{-1}(Y))\right| \;\middle|\; Y \in \Phi(A) \right\} = \sup \left\{ |\varphi(x)| \;\middle|\; x \in A \right\} < \infty \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der zweiten Zeile $\Phi^{-1}(\Phi(A)) = A$ (da Φ injektiv) ausgenutzt. Nach Satz 5.1.5 ist V' ein Banachraum, das heißt wir können den Satz zur gleichmäßigen Beschränktheit anwenden, mit $\mathcal{F}$ wie oben definiert. Es gilt also

$$\begin{aligned} &\sup \left\{ \|Y(\varphi)\| \;\middle|\; Y \in \Phi(A) \right\} < \infty \implies \\ &\qquad \infty > \sup \left\{ \|Y\|_{V''} \;\middle|\; Y \in \Phi(A) \right\} = \sup \left\{ \|\Phi(x)\|_{V''} \;\middle|\; x \in A \right\} = \sup \left\{ \|x\|_V \;\middle|\; x \in A \right\} \,. \end{aligned}$$

Somit ist A in der Tat beschränkt. □

Bemerkung 5.5.1. Seien V, A wie im Satz. Wir bezeichnen die A als schwach beschränkt, falls

$$\forall \varphi \in V' : \sup \left\{ |\varphi(x)| \;\middle|\; x \in A \right\} < \infty \,.$$

und als stark beschränkt, falls

$$\sup \left\{ \|x\|_V \;\middle|\; x \in A \right\} < \infty \,.$$

Wir zeigen hier tatsächlich die Äquivalenz von starker und schwacher Beschränktheit, die Gegenrichtung gilt ebenfalls. Die Konzepte stark (bzgl. $\|\cdot\|_V$) und schwach bzgl. aller $\varphi \in V'$ lassen sich auch auf weitere Begriffe (z. B. Kompaktheit, Abgeschlossenheit) übertragen.

5.6 Der Satz von der offenen Abbildung

Bemerkung 5.6.1 (Motivation). Seien V, W Banachräume sowie $T \in \mathcal{B}(V, W)$, d. h. $T : V \to W$ bijektiv, linear und beschränkt. Somit existiert $T^{-1} : W \to V$. Die Umkehrabbildung ist linear, da aus

$$T(T^{-1}(x+y)) = x + y \;\text{ und }\; T(T^{-1}(x) + T^{-1}(y)) = T(T^{-1}(x)) + T(T^{-1}(y)) = x + y$$

unter Ausnutzung der Injektivität von T folgt, dass $T^{-1}(x+y) = T^{-1}(x) + T^{-1}(y)$. Weiterhin stellt sich die Frage, ob T^{-1} auch beschränkt ist. Nach Satz 5.1.1 g. z. z., dass T^{-1} stetig. Dafür ist folgende Bedingung notwendig

$$\forall G \subseteq V \text{ offen} : (T^{-1})^{-1}(G) = T(G) \subseteq W \text{ offen} \,.$$

Beispiel 5.6.1. Betrachte die Banachräume $V = W = (C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Dann ist $T \in \mathcal{B}(V,W)$

$$\forall f \in C^0([0,1]) : T(f) = \int_0^x f(y)dy$$

ein injektiver Operator. Dann können wir $\tilde{T}^{-1}$ definieren mit

$$\tilde{T}^{-1}(g(x)) = g'(x) \ .$$

Da T nicht bijektiv ist existiert in diesem Fall jedoch keine Umkehrabbildung.

Satz 5.6.1 (Satz von der offenen Abbildung)**.** Seien V, W Banachräume und $T \in \mathcal{B}(V,W)$. Falls $T(V) = W$, dann ist für alle $G \subseteq V$ offen auch $T(G)$ offen.

Wir zeigen zunächst zwei Lemmata.

Lemma 5.6.1. Seien V, W Banachräume und $T \in \mathcal{B}(V,W),\ T(V) = W$. Dann gibt es ein $d > 0$ mit

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall y \in W\ \exists x \in V : \|Tx - y\| < \varepsilon \text{ und } \|x\| < d^{-1}\|y\| \ .$$

Beweis. Da T surjektiv ist, existiert für $y \in W$ beliebig ein $\tilde{x} \in V$ mit $T\tilde{x} = y$. Somit gilt

$$W = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} T(K_m(0)) \ .$$

Da W ein vollständiger metrischer Raum, können wir die Kontraposition des Bairschen Kategorientheorems anwenden. Demnach existieren $r \in \mathbb{R}_{>0},\ y_0 \in W,\ m \in \mathbb{N}$ mit

$$K_r(y_0) \subseteq \overline{T(K_m(0))} \ .$$

Falls für $\tilde{y} \in W : \|\tilde{y}\| < r$, dann folgt $y_0,\ y_0 + \tilde{y} \in K_r(y_0)$ und somit auch $y_0,\ y_0 + \tilde{y} \in \overline{T(K_m(0))}$. Nach Definition des Abschluss existieren Folgen $\left(x_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(x_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in V mit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ i \in \{1,2\} : \left\|x_n^i\right\| < m \text{ und } \lim_{n\to\infty} T\left(x_n^1\right) = y_0,\ \lim_{n\to\infty} T\left(x_n^2\right) = y_0 + \tilde{y} \ .$$

Definiere nun die Folge $\left(x_n^3\right)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $\forall n \in \mathbb{N} : x_n^3 = x_n^2 - x_n^1$. Damit gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \left\|x_n^3\right\| \leq 2m \text{ und } \lim_{n\to\infty} T\left(x_n^3\right) = \tilde{y} \ .$$

Wir wählen nun $y \in W,\ y \neq 0$ (sonst $x = 0$) und $\varepsilon > 0$ fixiert. Wende nun obige Rechnung auf folgendes $\tilde{y}$ an

$$\tilde{y} = \frac{r}{2}\frac{y}{\|y\|} \implies \|\tilde{y}\| < r \implies \exists \left(x_n^3\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n^3 \in V,\ \left\|x_n^3\right\| \leq 2m \text{ und } \lim_{n\to\infty} T(x_n^3) = \tilde{y} \ .$$

Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\|y\|}{r} x_n^3 = y \implies \exists n \in \mathbb{N} : \left\| T\left(\frac{2\|y\|}{r} x_n^3\right) - y \right\| < \varepsilon \ .$$

Setze nun $d := \frac{r}{4m}$, dann folgt

$$\left\| \frac{2\|y\|}{r} x_n^3 \right\| < \frac{2\|y\|}{r} 2m = \frac{4m}{r}\|y\| = d^{-1}\|y\| \ .$$

Dies war gerade zu zeigen. ☐

Lemma 5.6.2. Seien V, W Banachräume und $T \in \mathcal{B}(V, W), T(V) = W$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$K_\delta(0) \subseteq T(K_1(0)) \iff \forall y \in W \text{ mit } \|y\| < \delta \; \exists x \in V \text{ mit } \|x\| < 1 \text{ und } Tx = y \; .$$

Beweis. Wir erhalten die Behauptung durch iteratives Anwenden des vorhergehenden Lemmas. Setzen $\delta = d$, wobei d wie im vorherigen Lemma sei. Sei weiterhin $y_0 := y \in K_d(0)$ fixiert sowie $\varepsilon_0 = \frac{d}{2}$. Dann liefert Lemma 5.6.1

$$\exists x_0 \in K_1(0) : \|T(x_0) - y_0\| < \frac{d}{2} \; .$$

Dabei braucht nicht der Abschluss $\overline{K_1(0)}$ zu betrachtet werden, weil nach dem Lemma $\|x_0\| \leq d^{-1} \|y_0\| < d^{-1} d = 1$. Erneutes Anwenden des Lemmas auf $y_1 := y_0 - T(x_0)$ und $\varepsilon_1 = \frac{d}{4}$ liefert

$$\exists x_1 \in K_{\frac{1}{2}}(0) : \|T(x_1) - y_1\| = \|T(x_1) + T(x_0) - y\| < \frac{d}{4}$$

Dabei gilt $x_1 \in K_{\frac{1}{2}}(0)$, da

$$\|x_1\| \leq d^{-1} \|y_1\| = d^{-1} \|y_0 - T(x_0)\| < \frac{d}{2d} = \frac{1}{2} \; .$$

Iteration führt zu der allgemeinen Form, dass für $y_{n+1} = y_0 - T(x_n) - T(x_{n-1}) - \ldots - T(x_0)$ gilt

$$\exists x_{n+1} \in K_{2^{-(n+1)}}(0) : \|T(x_{n+1}) - y_{n+1}\| = \|T(x_{n+1}) + T(x_n) + \ldots + T(x_0) - y\| < d2^{-(n+2)} \; .$$

Nach Konstruktion gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2 < \infty$. Somit ist $\left(\sum_{n=0}^{m} x_n\right)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, denn es gilt für $m, m' \in \mathbb{N}, m' > m$

$$\left\| \sum_{n=0}^{m'} x_n - \sum_{n=0}^{m} x_n \right\| = \left\| \sum_{n=m+1}^{m'} x_n \right\| \leq \sum_{n=m+1}^{m'} \|x_n\| \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0 \; .$$

Da V ein Banachraum ist, existiert $x = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} x_n$, wobei $\|x\| < 2$. Da $T \in \mathcal{B}(V, W)$ und somit insbesondere stetig, gilt auch $\lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} T(x_n) = T(x)$. Somit gilt insbesondere

$$\lim_{m \to \infty} y - \sum_{n=0}^{m} T(x_n) = y - T(x) \; .$$

Nach der obigen iterativen Konstruktion gilt aber auch

$$\lim_{m \to \infty} \left\| y - \sum_{n=0}^{m} T(x_n) \right\| = 0 \; .$$

Daraus folgt also

$$\forall y \in K_d(0) \; \exists x \in \overline{K_2(0)} : Tx = y \; .$$

Setzen wir nun $\delta = \frac{d}{2}$, folgt die Behauptung. □

Beweis von Satz 5.6.1. Sei $G \subseteq V$ offen und $y \in T(G)$, d. h. es existiert $x_0 \in G : y = T(x_0)$. Für Offenheit g. z. z., dass $T(G)$ eine offene Kugel um y enthält. Wir setzen

$$\tilde{G} := G - x_0 = \{g - x_0 \mid g \in G\} \overset{T \text{ linear}}{\Longrightarrow} T(\tilde{G}) = T(G) - y \; .$$

Somit g. z. z. $\exists \tilde{\delta} > 0 : K_{\tilde{\delta}}(0) \subseteq T(\tilde{G})$. Da $\tilde{G}$ offen und $0 \in \tilde{G}$, existiert $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(0) \subseteq \tilde{G}$. Somit ergibt sich unter Ausnutzung der Linearität von T sowie mit δ wie in Lemma 5.6.2

$$T(\tilde{G}) \supseteq T(K_\varepsilon(0)) = \varepsilon T(K_1(0)) \supseteq \varepsilon K_\delta(0) = K_{\varepsilon\delta}(0) \; .$$

Setzen also $\tilde{\delta} = \varepsilon\delta$, dann gilt $K_{\tilde{\delta}}(0) \subseteq T(\tilde{G}) \iff K_{\tilde{\delta}}(y) \subseteq T(G)$. Somit ist $T(G)$ in der Tat offen. □

Satz 5.6.2 (Schlussfolgerung)**.** Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 5.6.1 T injektiv (d. h. T bijektiv), dann gilt $T^{-1} \in \mathcal{B}(W, V)$.

Beweis. Wie bereits zuvor motiviert, g. z. z., dass T^{-1} beschränkt und somit g. z. z., dass T^{-1} stetig. Es gilt

$$T^{-1} : W \to V \text{ stetig } \iff \forall G \subseteq V \text{ offen} : (T^{-1})^{-1}(G) = T(G) \subseteq W \text{ offen} .$$

Dies gilt nach Satz 5.6.1 und somit ist $T^{-1} \in \mathcal{B}(W, V)$. □

5.7 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Definition 5.7.1. Seien X, Y normierte Vektorräume, $f : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Dann bezeichnen wir

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$$

als den *Graph* von f.

Satz 5.7.1. Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume. Dann wird $V \times W$ unter eintragsweisen Operationen zu einem Vektorraum, d. h. für alle $x, x_1 \in V, y, y_1 \in W, \lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \quad \text{und} \quad (x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1) .$$

Mit jeder der Normen

$$\|(x, y)\|_1 := \|x\|_V + \|y\|_W , \quad \|(x, y)\|_2 := \sqrt{\|x\|_V^2 + \|y\|_W^2}, \quad \|(x, y)\|_3 := \max\{\|x\|_V , \|y\|_W\}$$

wird $V \times W$ ein Banachraum.

Beweis. Dass $V \times W$ ein Vektorraum ist, ist aus der linearen Algebra bekannt. Zeige nun, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm ist. Es gilt $\forall (x, y) \in V \times W$

$$0 = \|(x, y)\|_1 \iff \|x\|_V + \|y\|_W = 0 \iff \|x\|_V = 0 \wedge \|y\|_W = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0 .$$

Somit ist $\|\cdot\|_1$ definit. Die Homogenität ist klar. Zeige nun die Dreiecksungleichung mit

$$\|(x + x_1, y + y_1)\|_1 = \|x + x_1\|_V + \|y + y_1\|_W \leq \|x\|_V + \|x_1\|_V + \|y\|_W + \|y_1\|_W = \|(x, y)\|_1 + \|(x_1, y_1)\|_1 .$$

$\|\cdot\|_3$ ist offensichtlich eine Norm. Für $\|\cdot\|_2$ reicht es die Dreiecksungleichung zu zeigen, der Rest ist ebenfalls trivial. Es gilt

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \ \|(x + x_1, y + y_1)\|_2^2 &= \|x + x_1\|_V^2 + \|y + y_1\|_W^2 \leq (\|x\|_V + \|x_1\|_V)^2 + (\|y\|_W + \|y_1\|_W)^2 \\
&= \|x\|_V^2 + 2\|x\|_V \|x_1\|_V + \|x_1\|_V^2 + \|y\|_W^2 + 2\|y\|_W \|y_1\|_W + \|y_1\|_W^2 \\
\text{(ii)} \ (\|x, y\|_2 + \|x_1, y_1\|_2)^2 &= \left(\sqrt{\|x\|_V^2 + \|y\|_W^2} + \sqrt{\|x_1\|_V^2 + \|y_1\|_W^2}\right)^2 \\
&= \|x\|_V^2 + \|y\|_W^2 + \|x_1\|_V^2 + \|y_1\|_W^2 + 2\sqrt{(\|x\|_V^2 + \|y\|_W^2)(\|x_1\|_V^2 + \|y_1\|_W^2)} .
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \leq \text{(ii)} &\iff \|x\|_V \|x_1\|_V + \|y\|_W \|y_1\|_W \leq \sqrt{(\|x\|_V^2 + \|y\|_W^2)(\|x_1\|_V^2 + \|y_1\|_W^2)} \\
&\iff (\|x\|_V \|x_1\|_V + \|y\|_W \|y_1\|_W)^2 \leq (\|x\|_V^2 + \|y\|_W^2)(\|x_1\|_V^2 + \|y_1\|_W^2) \\
&\iff 2\|x\|_V \|x_1\|_V \|y\|_W \|y_1\|_W \leq \|x\|_V^2 \|y_1\|_W^2 + \|y\|_W^2 \|x_1\|_V^2 \\
&\iff 0 \leq (\|x\|_V \|y_1\|_W - \|y\|_W \|x_1\|_V)^2 .
\end{aligned}$$

Somit ist die Dreiecksungleichung in der Tat erfüllt. Wir zeigen nun, Vollständigkeit bzgl. $\|\cdot\|_1$. Sei $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in V, y_n \in W$ eine Cauchyfolge in $V \times W$. Dann sind nach Definition auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in W Cauchyfolgen, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} x_n := x \in V \text{ bzgl. } \|\cdot\|_V \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} y_n := y \in W \text{ bzgl. } \|\cdot\|_W \quad \text{existieren.}$$

Damit wählen wir $(x, y) \in V \times W$ als Kandidaten für den Grenzwert von $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$. In der Tat

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\|_1 = \|(x_n - x, y_n - y)\|_1 = \|x_n - x\|_V + \|y_n - y\|_W \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

$\square$

Bemerkung 5.7.1. Die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_3$ auf $V \times W$ sind äquivalent. Wir bezeichnen $V \times W$ auch mit $V \oplus W$.

Satz 5.7.2. Seien $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ und $(H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ Hilberträume. Dann ist $H = H_1 \times H_2$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = \langle x_1, x_2\rangle_1 + \langle y_1, y_2\rangle_2 \ .$$

Beweis. Man kann leicht einsehen, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die Norm $\|\cdot\|_2$ induziert. Der Rest folgt trivial. $\square$

Satz 5.7.3 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)**.** Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume und $T : V \to W$ linear. Dann gilt

$$T \in \mathcal{B}(V, W) \iff \Gamma_T \text{ abgeschlossen in } (V \times W) \ .$$

Bemerkung 5.7.2. Γ_T ist ein Untervektorraum von $V \times W$, da unter Ausnutzung der Linearität von T gilt für $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, x_1, x_2 \in V$

$$\begin{aligned}&\lambda(x, Tx) = (\lambda x, \lambda Tx) = (\lambda x, T(\lambda x))\\&(x_1, Tx_1) + (x_2, Tx_2) = (x_1 + x_2, Tx_1 + Tx_2) = (x_1 + x_2, T(x_1 + x_2)) \ .\end{aligned}$$

Weiterhin ist Γ_T abgeschlossen, genau dann wenn

$$\forall\, ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N}\ (x_n, y_n) \in \Gamma_T \text{ und } \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) =: (x, y) \in V\times W \text{ existiert } \implies (x, y) \in \Gamma_T \ .$$

Mit Satz 5.1.1 lässt sich dies äquivalent umformulieren zu

$$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in V,\ \lim_{n\to\infty} x_n =: x \in V \text{ und } \lim_{n\to\infty} Tx_n = y \in W \text{ existieren } \implies y = T(x)$$

Beweis. ($\Longrightarrow$)Sei $T \in \mathcal{B}(V, W)$ und sei $((x_n, Tx_n))_{n\in\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in V$ eine Folge in Γ_T, mit $\lim_{n\to\infty}(x_n, Tx_n) = (x, y) \in V \times W$. Somit

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_V = 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} \|Tx_n - y\|_W = 0 \ .$$

Aufgrund der Stetigkeit von T folgt in der Tat $T(x) = y$.
($\Longleftarrow$)Sei Γ_T abgeschlossen, dann ist Γ_T als Unterraum des Banachraums $(V \times W, \|\cdot\|_1)$ ebenfalls ein Banachraum. Wir definieren die stetigen, linearen Abbildungen

$$P_1 : \Gamma_T \to V,\ P_1(x, Tx) = x \quad \text{und} \quad P_2 : \Gamma_T \to W,\ P_2(x, Tx) = Tx \ .$$

Dabei gilt für die Operatornorm $\|P_1\|$

$$\|P_1(x,Tx)\|_V = \|x\|_V \leq \|x\|_V + \|Tx\|_W = \|(x,Tx)\|_1 \implies \\ \|P_1\| = \sup\left\{\|P_1(x,Tx)\|_V \;\middle|\; \|(x,Tx)\|_1 = 1\right\} \leq 1 \; .$$

Analog folgt $\|P_2\| \leq 1$. Weiterhin gilt $P_1(\Gamma_T) = V$, d. h. P_1 injektiv. Außerdem ist P_1 injektiv, da

$$P_1(x,Tx) = 0 \iff x = 0 \iff x = 0 \text{ und } Tx = 0 \iff (x,Tx) = 0_{V\times W} \; .$$

Aus der Bijektivität von P_1 folgt nun mit Satz 5.6.2 $P_1^{-1} \in \mathcal{B}(V,\Gamma_T)$ und mit $P_2 \in \mathcal{B}(\Gamma_T, W)$ nach Definition erhalten wir

$$T = P_2 \circ P_1^{-1} \in \mathcal{B}(V,W) \; .$$

Dies war gerade zu zeigen $\square$.

Satz 5.7.4. Sei V ein Vektorraum mit zwei Normen $\|\cdot\|_1, \; \|\cdot\|_2 : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, wobei $(V, \|\cdot\|_1)$ und $(V, \|\cdot\|_2)$ Banachräume sind. Außerdem gilt

$$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in V : \Big(\lim_{n\to\infty} x_n := x \in V \text{ bzgl. } \|\cdot\|_1 \text{ und} \\ \lim_{n\to\infty} x_n := y \in V \text{ bzgl. } \|\cdot\|_2 \text{ existieren} \Big) \implies x = y \; .$$

Dann sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent.

Beweis. Definiere $I : (V, \|\cdot\|_1) \to (V, \|\cdot\|_2)$ als die Identitätabbildung, welche linear ist. Wollen nun zeigen, dass Γ_T abgeschlossen. Sei dafür eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in V$ gegeben mit $\lim_{n\to\infty} x_n =: x$ in $(V, \|\cdot\|_1)$ sowie $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$ in $V, \|\cdot\|_2$. Nach Voraussetzung folgt $x = y$. Somit ist Γ_I abgeschlossen und mit Satz 5.7.3 gilt $I \in \mathcal{B}(V,V)$. Nach Satz 5.6.2 gilt auch $I^{-1} \in \mathcal{B}(V,V)$. Nach Definition der Beschränktheit folgt die Behauptung. $\square$

Kapitel 6

Kompakte Operatoren

Bemerkung 6.0.1 (Motivation). Die motivierende Idee des Kapitels ist es für $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume einen Unterraum von $B(V, W)$ zu finden, der aus Operatoren besteht, welche sich wie lineare Abbildungen auf endlichdimensionalen Räumen verhalten.

6.1 Definitionen und Eigenschaften

Definition 6.1.1. Seien $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume und $T : V \to W$ linear. Dann heißt T *kompakt* (bez. $T \in \mathcal{K}(V, W)$), falls für alle beschränkten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in V$ eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, sodass $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in W konvergiert. T ist also kompakt, wenn das Bild jeder beschränkten Folge eine in W konvergente Teilfolge enthält.

Bemerkung 6.1.1. Obige Definition ist äquivalent zur Forderung, dass das Bild jeder beschränkten Menge E in V unter T einen kompakten Abschluss besitzt.

Satz 6.1.1. Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume und $T \in \mathcal{K}(V, W)$. Dann ist T beschränkt.

Beweis. Angenommen $T \in \mathcal{K}(V, W)$ ist nicht beschränkt. Dann gilt nach Definition

$$\sup \left\{ \|Tx\|_W \;\middle|\; \|x\|_V \leq 1 \right\} = \infty \, .$$

Somit finden wir $\forall n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in V$ mit $\|x_n\|_V \leq 1$ und $\|Tx_n\|_W \geq n$. Da T kompakt ist, gilt für die somit konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\exists \, (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \, , \; y \in W, \; \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = y$$

Daraus folgt aber sofort $\lim_{k\to\infty} \|Tx_{n_k}\|_W = \|y\|_W$. Dies ist ein Widerspruch zur Konstruktion von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Somit ist T also beschränkt. □

Beispiel 6.1.1. Wir betrachten den in Beispiel 5.1.1 eingeführten Volterra-Operator $T : C^0([0, 1]) \to C^0([0, 1])$, wobei wir $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ betrachten mit

$$Tf(x) = \int_0^x f(t) \, dt \, .$$

Wir zeigen nun, dass der Volterra-Operator kompakt ist. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in C^0([0, 1])$ beschränkt, d. h. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty =: c < \infty$. Wir wenden den Satz von Arzelà-Ascoli nach Bem. 6.1.2 an. Bezeichne dabei $g_n := Tf_n$, dann ist $F := \{g_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq C^0([0, 1])$ punktweise beschränkt, da

$$\forall x \in [0, 1] : |Tf_n(x)| = \int_0^x f_n(t) \, dt \leq \|f_n\|_\infty \leq c < \infty \, .$$

Weiterhin ist F gleichgradig stetig, da für $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x, y \in [0,1] : |Tf_n(x) - Tf_n(y)| = \left| \int_x^y f_n(t)\ dt \right| \leq \|f_n\|_\infty |x-y| \ .$$

Somit leistet $\delta := \frac{\varepsilon}{c}$ das Verlangte. Anwenden des Satzes ergibt, dass $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} = (Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $C^0([0,1])$ konvergente Teilfolge besitzt. Damit ist T ein kompakter Operator.

Bemerkung 6.1.2 (Satz von Arzelà-Ascoli). Sei K ein kompakter metrischer Raum und $F \subseteq C^0(K)$ eine Teilmenge. Dann ist F genau dann *relativ kompakt* in $(C^0(K), \|\cdot\|_\infty)$ genau dann wenn

1. F *punktweise beschränkt*, d. h: $\forall f \in F\ \forall t \in \mathbb{K} : |g(t)| < \infty$ und
2. F *gleichgradig stetig*, d. h.: $\forall t \in K\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in F\ \forall s \in K : d(s,t) < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \varepsilon$.

Dabei bezeichnen wir F als relativ kompakt in $C^0(K)$, wenn $\overline{F}$ in $C^0(K)$ kompakt ist. Weiterhin ist F genau dann relativ kompakt, falls jede Folge in F eine in $C^0(K)$ konvergente Teilfolge hat.

Satz 6.1.2. Sei $T \in B(V,B)$ ist genau dann kompakt, wenn $\overline{TK_1^V(0)}$ totalbeschränkt. (Siehe 6.1.4)

Proof: $(\Rightarrow)$
Sei T kompakt, sei $y_n \in \overline{TK_1(0)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es

$$\forall \in \mathbb{N} \exists \tilde{y}_n \in TK_1(0) : \|y_n - \tilde{y}_n\| < \frac{1}{n}.$$

Also gibt es ein $x_n \in K_1(0) : \|y_n - Tx_n\| < \frac{1}{n}$. Da T kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(x_n)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $Tx_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} z$. Damit gilt dann aber auch $\tilde{y}_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} z$ und damit $y_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} z$. Also ist $z \in \overline{\overline{TK_1^V 0}}$ kompakt und damit ist $\overline{\overline{TK_1^V 0}}$ total beschränkt.

$(\Leftarrow)$
Sei $\overline{TK_1^V(0)}$ totalbeschränkt und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in V$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $c := \sup\{\|x_n\|\ |n \in \mathbb{N}\} < \infty$ und sein nun o.B.d.A $c > 0$. Sei $\tilde{x}_n = \frac{x_n}{c} \in \overline{K_1^V(0)}$, dann

$$T\tilde{x}_n \in T\overline{k_1^V(0)} \subseteq \overline{\overline{TK_1^V(0)}} \text{ ist kompakt}$$

Damit gibt es eine Teilfolge $(T\tilde{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}, z \in \overline{\overline{TK_1^V(0)}}$ und $T\tilde{x}_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} z$. Folglich $Tx_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} c \cdot z$.
□

Bemerkung 6.1.3. Sei V ein endlich-dimensionaler normierter Raum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, dann ist V ein Banachraum.

Beispiel 6.1.2. Sei $T \in B(V,W)$ beschränkt und $\dim TV < \infty$, dann ist T kompakt insbesondere ist TV ein endlichdimensionaler Banchraum. Dies ist eine direkte Konsequenz aus dem Satz von Heine-Borel. Es gilt nun:

$$T\overline{K_1(0)} \subseteq \overline{K_{\|T\|}^{TV}(0)}$$

Mit Heine-Borel ist $\overline{K_{\|T\|}^{TV}(0)}$ kompakt, also total beschränkt. Jede Teilmenge einer totalbeschränkten Menge ist totalbeschränkt, also ist $T\overline{K_1(0)}$ totalbeschränkt. Mit 6.1.2 folgt die Behauptung.

Beispiel 6.1.3. Sei H ein Hilbertraum, $u \in H, v \in H'$, dann

Satz 6.1.3. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Wir definieren

$$\operatorname{dist}(Y, W) = \inf\{\|y - w\|, w \in W\}.$$

Dann ist $Y \subset V$ totalbeschränkt, genau dann wenn Y beschränkt und

$$\forall \varepsilon > 0 \exists W \subset V, W \text{ endl. dim. } \forall y \in Y : \operatorname{dist}(Y, W) < \varepsilon. (*)$$

Proof: $(\Rightarrow)$

Sei Y totalbeschränkt, dann ist y beschränkt. Fixiere ein $\varepsilon > 0$. Dann gibt es

$$y_1, \ldots, y_m \in Y \text{ mit } Y \subseteq \cup_{i=1}^m K_\varepsilon(y_i)$$

und damit

$$\forall y \in Y \exists i : \|y - y_i\| < \varepsilon.$$

Setzen wir nun $W = \operatorname{span}\{y_i | i = 1, \ldots, m\}$ und wir sind fertig.

$(\Leftarrow)$
Sei Y beschränkt und gelte (*), $\varepsilon > 0, W$ gemäß (*) mit $\frac{\varepsilon}{2}$. Mit $M = \sup\{\|y\| : y \in Y\} < \infty$. Sei $Z \subseteq \overline{K_{m+\varepsilon}(0)} \cap W$. Dann ist Z totalbeschränkt, d.h.

$$\exists z_1, \ldots, z_m \in Z \subseteq \cup_{i=1}^m K_{\frac{\varepsilon}{2}}(z_i)$$

Sei nun $y \in Y$, dann gibt es ein $w \in W$ mit $\|y - w\| < \frac{\varepsilon}{2}$ und damit

$$\|w\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|y\| \leq M + \frac{\varepsilon}{2}$$

und damit $w \in Z$. Damit

$$\exists i : \|w - z_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies \|y - z_i\| < \varepsilon.$$

D.h. konkret:

$$Y \subseteq \cup_{i=1}^m K_\varepsilon(z_i) \implies \exists y_1, \ldots, y_m \in Y : Y \subseteq \cup_{i=1}^m K_{2\varepsilon}(y_i).$$

□

Satz 6.1.4. Seien V, W, U, X Banachräume und $S_1 \in B(W, X)$, $S_2 \in B(U, V)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ sowie $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(V, W)$. Dann sind $T_1 + T_2, \alpha T_1 \in \mathcal{K}(V, W)$ und $S_1 T_1 \in \mathcal{K}(V, X)$, $T_1 S_2 \in \mathcal{K}(U, W)$. D. h. die Addition kompakter Operatoren und deren Multiplikation mit Skalaren ergibt wieder einen kompakten Operator. Weiterhin ist die beidseitige Komposition eines beschränkten mit einem kompakten Operator wieder kompakt.

Beweis. Betrachte zunächst die Addition $T_1 + T_2$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in V$ eine beschränkte Folge. Da T_1 kompakt, gilt nach Definition

$$\exists \text{ TF } (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} : (T_1 x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } W .$$

Da die Folge $(x_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls wieder beschränkt ist und T_2 kompakt, gilt

$$\exists \text{ TTF } \left(x_{n_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}} : \left(T_2 x_{n_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}} \text{ und } \left(T_1 x_{n_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}} \text{ konvergieren in } W .$$

Damit konvergiert aber auch die Folge

$$\left((T_1 + T_2)x_{n_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}} = \left(T_2 x_{n_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}} + \left(T_1 x_{n_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}}$$

in W. Somit ist $T_1 + T_2 \in \mathcal{K}(V,W)$. $\alpha T_1 \in \mathcal{K}(V,W)$ ist trivial. Betrachte nun S_1T_1. Nach Satz 6.1.2 genügt zu zeigen, dass $S_1T_1\overline{K_1^V(0)}$ totalbeschränkt ist. Da T_1 ein kompakter Operator ist, gilt (mit Definition der Folgenkompaktheit), dass $\overline{T_1\overline{K_1^V(0)}}$ kompakt ist. Da stetige Abbildungen Kompaktheit erhalten, ist also auch $S_1\overline{T_1\overline{K_1^V(0)}}$ kompakt, d. h. insbesondere totalbeschränkt. Somit gilt (unter Ausnutzung von Bem. 6.1.4).

$$S_1T_1\overline{K_1^V(0)} \subseteq S_1\overline{T_1\overline{K_1^V(0)}} \text{ ist totalbeschränkt.}$$

Betrachte nun T_1S_2, auch hier genügt zu zeigen, dass $T_1S_2\overline{K_1^U(0)}$ totalbeschränkt ist. Mit $\|S_2u\| \leq \|S_2\|\,\|u\|$ für alle $u \in U$ gilt

$$S_2\overline{K_1^U(0)} \subseteq \overline{K_{\|S_2\|}^V(0)} = \|S_2\|\,\overline{K_1^V(0)} .$$

Damit gilt nun

$$T_1S_2\overline{K_1^U(0)} \subseteq T_1\,\|S_2\|\,\overline{K_1^V(0)} = \|S_2\|\,T_1\overline{K_1^V(0)} .$$

Da T_1 kompakt, ist also $T_1\overline{K_1^V(0)}$ totalbeschränkt und somit auch $T_1S_2\overline{K_1^U(0)}$. □

Bemerkung 6.1.4. Anders als bei kompakten Mengen, gilt für totalbeschränkte Mengen, dass jede Teilmenge einer totalbeschränkten Menge wieder totalbeschränkt ist.

Satz 6.1.5. Seien V, W Banchräume und $\forall n \in \mathbb{N} : T_n \in \mathcal{K}(V,W)$ sowie $T \in \mathcal{B}(V,W)$. Sei $\|\cdot\|$ die Operatornorm und gelte $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ bzgl. $\|\cdot\|$. Dann gilt auch $T \in \mathcal{K}(V,W)$.

Beweis. Es g. z. z., dass $T\overline{K_1^V(0)}$ total beschränkt ist. Sei $\varepsilon > 0$ fixiert und $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\|T - T_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da nach Voraussetzung T_n kompakt, ist $T_n\overline{K_1^V(0)}$ totalbeschränkt, d. h. nach Definition

$$\exists x_1, \dots, x_m \in \overline{K_1^V(0)} : T_n\overline{K_1^V(0)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} K_{\frac{\varepsilon}{3}}(T_n x_i) .$$

Sei nun $x \in \overline{K_1^V(0)}$, d. h. $\|x\|_V \leq 1$. Damit gilt

$$T_n x \in T_n\overline{K_1^V(0)} \implies \exists i \in \{1, \dots, m\} : \|T_n x - T_n x_i\| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Nun lässt sich die Dreiecksungleichung anwenden mit ($\|x\|_V \leq 1$, $\|x_i\|_V \leq 1$):

$$\begin{aligned}
\|Tx - Tx_i\| &\leq \|Tx - T_n x\| + \|T_n x - T_n x_i\| + \|T_n x_i - Tx_i\| \\
&= \|(T - T_n)x\| + \|T_n x - T_n x_i\| + \|(T_n - T)x_i\| \\
&< \|(T - T_n)x\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|(T_n - T)x_i\| \\
&\leq \|T - T_n\|\,\|x\|_V + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_n - T\|\,\|x_i\|_V \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Somit gilt also

$$T\overline{K_1^V(0)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} K_\varepsilon(x_i) \iff T\overline{K_1^V(0)} \text{ totalbeschränkt}$$

d. h. T ist in der Tat kompakt. □

6.2 Hilbert-Schmidt-Operatoren

Bemerkung 6.2.1 (Motivation). Betrachte eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, d. h. im Fall des endlichdimensionalen Vektorraums $\mathbb{C}^n$. Dann sind die Determinante $\det(A)$ und die Spur $\operatorname{tr}(A)$ definiert. Sei nun H ein Hilbertraum, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis und $T \in B(H)$. Wir können nun versuchen lineare Operatoren als unendliche Matrizen aufzufassen, mit (für $S, T \in B(H)$)

$$T_{nm} := \langle e_n, Te_m\rangle\,, \quad T \longleftrightarrow (T_{nm})_{n,m\in\mathbb{N}}, \quad (ST)_{nm} = \sum_{k\in\mathbb{N}} S_{nk}T_{km}\,.$$

Nun stellt sich die Frage, ob sich damit eine Spur für beschränkte lineare Operatoren definieren lässt, mit

$$\operatorname{tr}(T^*T) \text{ „}=\text{“} \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, T^*Te_n\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Te_n, Te_n\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2\,.$$

Dies ist jedoch i. A. nicht konvergent und folglich nicht wohldefiniert. Dies motiviert folgende Definition.

Definition 6.2.1. Sei H ein Hilbertraum, $(e_s)_{s\in S} \in H^S$ eine Orthonormalbasis und $T \in B(H)$. Dann ist T ein *Hilbert-Schmidt-Operator*, falls

$$\sum_{s\in S} \|Te_s\|^2 < \infty\,.$$

Bemerkung 6.2.2. Für die Wohldefiniertheit muss vorausgesetzt werden, dass $\{s \in S \mid \|Te_s\| > 0\}$ abzählbar ist. Hier nehmen wir o. B. d. A. an, dass S abzählbar und H separabel ist.

Satz 6.2.1. Sei H ein (separabler) Hilbertraum, $T \in \mathcal{B}(H)$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Orthonormalbasis von H. Dann gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2 < \infty \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Tf_n\|^2 < \infty \text{ und } \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Tf_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2\,.$$

Beweis. Da $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Orthonormalbasen sind, gilt

$$\forall x \in H : x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n, x\rangle\, e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f_n, x\rangle\, f_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, x\rangle|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f_n, x\rangle|^2\,.$$

In der Literatur wird für diese Identitäten die Parseval-Gleichung benötigt, welche wir nicht explizit in der Vorlesung gezeigt haben. Oder gibt es eine äquivalente Aussage dazu?

Somit gilt insbesondere für alle $n, j \in \mathbb{N}$

$$\|Te_n\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |\langle f_j, Te_n\rangle|^2\,, \quad \|T^*f_j\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, T^*f_j\rangle|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f_n, T^*f_j\rangle|^2\,.$$

Weiterhin gilt damit

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Tf_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} |\langle f_j, Tf_n\rangle|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} |\langle f_n, T^* f_j\rangle|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} \|T^* f_j\|^2 \ .$$

Dies können wir nun ausnutzen mit

$$\infty > \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f_j, Te_n\rangle|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, T^* f_j\rangle|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} \|T^* f_j\|^2 \ .$$

Dabei folgt die Vertauschbarkeit der Summen aus der vorausgesetzten Konvergenz der Reihe. Mit der Rechnung davor folgt also in der Tat

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Tf_n\|^2 \ .$$

□

Bemerkung 6.2.3. Die Aussage entspricht im endlichdimensionalen Fall der Invarianz der Spur unter Koordinatentransformationen.

Definition 6.2.2. Sei H ein separabler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$, $T \in B(H)$ Hilbert-Schmidt. Dann definiert

$$\|T\|_{HS} := \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2} \ .$$

eine Norm, die *Hilbert-Schmidt-Norm*. Die Wohldefiniertheit folgt aus Satz 6.2.1.

Bemerkung 6.2.4. Für einen separablen Hilbertraum H mit einer Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H^{\mathbb{N}}$ ist der Raum der Hilbert-Schmidt-Operatoren $HS(H)$ mit $\|\cdot\|_{HS}$ ebenfalls ein Hilbertraum, wobei die Norm von folgendem Skalarprodukt induziert wird:

$$\forall A, B \in HS(H) : \langle A, B\rangle_{HS} := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Ae_n, Be_n\rangle \ .$$

Satz 6.2.2. Sei H ein separabler Hilbert-Raum (mit Norm $\|\cdot\|_H$). Seien $T_1,\ T_2 \in \mathcal{B}(H)$ Hilbert-Schmidt und $S \in \mathcal{B}(H)$. Dann sind auch $T_1 + T_2,\ ST_1,\ T_1S,\ T^*$ Hilbert-Schmidt.

Beweis. Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H. Der Beweis für T^* ist trivial. Betrachte nun ST, dann gilt unter Verwendung der Eigenschaften der Operatornorm $\|\cdot\|$ und mit der Beschränktheit von S

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|STe_n\|_H^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|S\|^2 \|Te_n\|_H^2 < \infty \ .$$

Somit ist ST in der Tat Hilbert-Schmidt. Weiterhin gilt $TS = (S^*T^*)^*$, woraus die Behauptung für TS analog folgt. Betrachte nun die $T_1 + T_2$, dann gilt mit $\|T_1e_n\|_H \|T_2e_n\|_H \leq \|T_1\|_H^2 + \|T_2\|_H^2$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|(T_1+T_2)e_n\|_H^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\|T_1e_n\|_H + \|T_2e_n\|_H)^2 \leq 2\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|T_1e_n\|_H^2 + \|T_2e_n\|_H^2\right) < \infty \ .$$

Somit ist auch die Summe von Hilbert-Schmidt-Operatoren wieder Hilbert-Schmidt. □

Satz 6.2.3. Jeder Hilbert-Schmidt-Operator auf einem separablen Hilbertraum H ist kompakt.

Beweis. Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fixe Orthonormalbasis von H und $A \in \mathcal{B}(H)$ Hilbert-Schmidt. Wir stellen im Folgenden A als Limes von kompakten Operatoren dar, womit dann aus Satz 6.1.5 die Behauptung folgt. Bezeichne mit P_n die orthogonale Projektion auf den Unterraum span $\{e_1, \dots, e_n\}$. Setze nun $A_n = AP_n$. D. h. es gilt $\forall h \in H$:

$$P_n h = \sum_{j=0}^{n} \langle e_j, h\rangle\, e_j \implies A_n h = \sum_{j=0}^{n} \langle e_j, h\rangle\, Ae_j \; .$$

Offensichtlich ist A_n linear. Weiterhin gilt

$$A_n H \subseteq \operatorname{span}\{Ae_1, \dots, Ae_n\} \implies \dim A_n H < \infty \; .$$

Nach Beispiel 6.1.2 ist A_n folglich ein kompakter Operator. Mit $\forall h \in H : (A-A_n)h = \sum_{j>n} \langle e_j, h\rangle\, Ae_j$ und unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (bzgl. $\|\cdot\|_2$) gilt weiterhin

$$\|(A - A_n)h\|_H = \left\| \sum_{j>n} \langle e_j, h\rangle\, Ae_j \right\|_H \le \sum_{j>n} |\langle e_j, h\rangle|\, \|Ae_j\|_H \le \sqrt{\sum_{j>n} |\langle e_j, h\rangle|^2} \sqrt{\sum_{j>n} \|Ae_j\|_H^2} \; .$$

Dabei gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{j>n} \|Ae_j\|_H^2} = 0$, da A Hilbert-Schmidt ist. Folglich gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0 \; .$$

Somit ist A in der Tat kompakt. □

Bemerkung 6.2.5. Die Gegenrichtung des Satzes gilt nicht.

Beispiel 6.2.1. Betrachte den Hilbertraum $H = \ell^2(\mathbb{N})$ mit der Standardbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H^{\mathbb{N}}$, sowie dem Multiplikationsoperator (siehe Bsp. 5.1.3) $T = M_\lambda$ für $\lambda := (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, d. h.

$$Te_n = \lambda_n e_n \; .$$

Dann gilt, dass T ein Hilbert-Schmidt-Operator ist, genau dann wenn

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|^2 < \infty \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2 < \infty \iff \lambda \in l^2(\mathbb{N}) \; .$$

Satz 6.2.4. Sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum, $L^2(\mu)$ separabel und $k(x, y) \in \mathcal{L}^2(\mu \otimes \mu)$. Dann definiert

$$Kf(x) := \int_\Omega k(x, y) f(y) \mu(dy)$$

einen Hilbert-Schmidt-Operator $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$, insbesondere zuerst, dass $K : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$. Sei $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, $f \stackrel{\mu}{=} 0$ (d. h. $[f] = [0]$ in $L^2(\mu)$). Damit gilt in der Tat

$$\forall x \in \Omega : k(x, y) f(y) = 0 \text{ für } \mu\text{-fast alle } y \in \Omega \implies \forall x \in \Omega : Kf(x) = \int_\Omega k(x, y) f(y) \mu(dy) = 0 \; .$$

Nach Voraussetzung gilt $k(x, y) \in \mathcal{L}^2(\mu \otimes \mu)$, d. h. es gilt mit dem Satz von Fubini (Satz 2.2.4)

$$\infty > \int_{\Omega\times\Omega} |k(x, y)|^2\, \mu \otimes \mu(d(x, y)) = \int_\Omega \int_\Omega |k(x, y)|^2\, \mu(dy)\mu(dx) \; .$$

Folglich gilt

$$\int_\Omega |k(x,y)|^2 \,\mu(dy) < \infty \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \in \Omega \iff k(x,\cdot) \in L^2(\mu)\ .$$

Sei nun $f \in L^2(\mu)$. Wir wenden die Hölder-Ungleichung mit $p = q = 2$ an und erhalten

$$\forall x \in \Omega : \|k(x,\cdot)f\|_1 = \int_\Omega |k(x,y)f(y)|\,\mu(dy) < \|k(x,\cdot)\|_2 \,\|f\|_2 < \infty\ .$$

Hier wurde nur gezeigt, dass $Kf(x) \in L^1(\mu)$, woraus folgt dann, dass $Kf(x) \in L^2(\mu)$?

Nun zeigen wir, dass K beschränkt ist. Sei $f \in L^2(\mu)$, dann gilt mit Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\|Kf\|_2^2 &= \int_\Omega |Kf(x)|^2\,\mu(dx) = \int_\Omega \left|\int_\Omega k(x,y)f(y)\mu(dy)\right|^2 \mu(dx) = \int_\Omega \left|\int_\Omega \overline{k(x,y)}f(y)\mu(dy)\right|^2 \mu(dx)\\ &\le \int_\Omega\int_\Omega |k(x,y)|^2\,\mu(dy)\int_\Omega |f(z)|^2\,\mu(dz)\mu(dx) \le \|k\|^2_{L^2(\mu\otimes\mu)}\,\|f\|_2^2\ .\end{aligned}$$

Somit $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$. Zeigen nun die Hilbert-Schmidt-Eigenschaft. Da $L^2(\mu)$ separabel nach Voraussetzung, sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(\mu)^{\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis. Dann gilt

$$\|Ke_n\|_2^2 = \int_\Omega \left|\int_\Omega k(x,y)e_n(y)\mu(dy)\right|^2 \mu(dx) = \int_\Omega |\langle\overline{e_n}, k(x,\cdot)\rangle|^2\,\mu(dx)\ .$$

Wir wenden nun Beppo-Levi an und erhalten

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ke_n\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_\Omega |\langle\overline{e_n}, k(x,\cdot)\rangle|^2\,\mu(dx) = \int_\Omega \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle\overline{e_n}, k(x,\cdot)\rangle|^2\,\mu(dx)\ .$$

Es ist leicht einzusehen, dass $(\overline{e_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Orthonormalbasis von $L^2(\mu)$ ist. Somit

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle\overline{e_n}, k(x,\cdot)\rangle|^2 = \|k(x,\cdot)\|_2^2\ .$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Ke_n\|_2^2 &= \int_\Omega \|k(x,\cdot)\|_2^2\,\mu(dx) = \int_\Omega \left(\int_\Omega |k(x,y)|^2\,\mu(dy)\right)\mu(dx)\\ &= \int_{\Omega\times\Omega} |k(x,y)|^2\,\mu\otimes\mu(d(x,y)) < \infty\ .\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzen Schritt $k \in \mathcal{L}^2(\mu\otimes\mu)$ ausgenutzt. Somit ist K in der Tat Hilbert-Schmidt. □

6.3 Eigenwerte und Vektoren von kompakten Operatoren

In diesem Kapitel sei H immer ein Hilbertraum.

Definition 6.3.1. Sei H ein Hilbertraum, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{B}(H)$. Dann heißen $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert und $x \in H \setminus \{0\}$ zugehöriger Eigenvektor von T, wenn $Tx = \lambda x$.

Bemerkung 6.3.1. Es stellt sich die Frage, ob sich der Raum durch die Eigenvektoren aufspannen lässt. Im Allgemeinen hat aber nicht einmal jeder Operator einen Eigenwert. Betrachte dazu das folgende Beispiel:

Beispiel 6.3.1. Sei $H = L^2([0,1])$, $T = M_{\mathrm{id}}$, d.h. $Tf(x) = xf(x)$. Sei nun $f \neq 0$, und nehme an, es gäbe einen Eigenwert, dann

$$xf(x) = Tf(x) = \lambda f(x) \implies \forall x \in H : f(x)(\lambda - x) = 0 \implies f = 0.$$

Damit erhalten wir einen Widerspruch.

Satz 6.3.1. Sei $T \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert und λ Eigenwert, (dann gilt $\lambda \in \mathbb{R}$), sei x ein Eigenvektor zu λ, μ Eigenwert zu $y \in H$ mit $\lambda \neq \mu$, dann $x \perp y$.

Beweis: Betrachte:

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda \langle x, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \langle Tx, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \bar{\lambda} \langle x, x\rangle = \bar{\lambda} \|x\|^2$$

Damit sind $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Betrachte nun weiterhin:

$$\mu \langle x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle = \lambda ipx, y \implies \langle x, y\rangle = 0.$$

□

Satz 6.3.2. Sei λ ein Eigenwert von $T \in \mathcal{B}(H)$, dann $|\lambda| \leq \|T\|$.

Beweis: Betrachte:

$$|\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$$

□

Satz 6.3.3. Sei $T \in \mathcal{K}(H)$, dann ist für alle $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, $\dim(\mathrm{Kern}(T - \lambda\mathrm{id})) < \infty$.

Beweis: Nehme an $\dim(\mathrm{Kern}(T - \lambda\mathrm{id})) = \infty$, d.h. wir haben ein Orthonormalsystem $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{Kern}(T - \lambda)$ mit $\|\ell\| \leq 1$, dann betrachte:

$$\|T\ell_n - T\ell_m\| = \|\lambda - \ell_n - \lambda\ell_m\| = |\lambda| \|\ell_n - \ell_m\| = |\lambda| \sqrt{2}.$$

Damit ist $(T\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge. Damit gibt es kein $y \in H$ mit $T\ell_n \xrightarrow{n\to\infty} y$. Damit ist $T \notin \mathcal{K}(H)$.

□

Bemerkung 6.3.2. Falls $T \in \mathcal{B}(H)$, dann gilt

1. $\|T\| = \sup\{\|Ty\| : \|y\| \leq 1\}$,
2. $\|z\| = \sup\{|\langle x, z\rangle| : \|x\| \leq 1\}$,
3. Wir wissen also: $\|T\| = \sup\{|\langle x, Ty\rangle| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$.

Satz 6.3.4. Sei $T \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert, dann $\|T\| = \sup\{|\langle x, Tx\rangle| : \|x\| \leq 1\}$.

Beweis: Sei $M := \sup\{|\langle x, Tx\rangle| : \|x\| = 1\}$. Für alle $x \in H \setminus \{0\}$ gilt nun $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$. Damit folgt (auch für $x = 0$):

$$|\langle x, Tx\rangle| = \|x\|^2 \left|\left\langle \frac{x}{\|x\|}, T\frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right| \leq \|x\|^2 M.$$

Für alle $x \in H$ mit $\|x\| = 1$ gilt mit der CBS-Ungleichung:

$$|\langle x, Tx\rangle| \leq \|x\| \|Tx\| \leq \|x\|^2 \|T\| = \|T\| \implies M \leq \|T\|.$$

Sei nun $f, g \in H$, dann können wir ausrechnen:

$$\langle f+g, T(f+g)\rangle - \langle f-g, T(f-g)\rangle = 2\langle f, Tg\rangle + 2\langle g, Tf\rangle = 2\langle f, Tg\rangle + 2\langle Tg, f\rangle = 4\mathrm{Re}\{\langle f, Tg\rangle\}.$$

Seien nun $x, y \in H$, dann können wir ausrechnen:

$$\langle x, Tg\rangle - \langle y, Ty\rangle \leq |\langle x, Tx\rangle| + |\langle y, Ty\rangle| \leq M(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \frac{M}{2}(\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2).$$

Sei nun $v \in H$ mit $\|v\| \leq 1$, $Tv \neq 0$, $g = v$ und $f = \frac{1}{\|Tv\|}Tv$. Definieren wir uns nun

- $x = f + g = v + \frac{1}{\|Tv\|}Tv$,
- $y = f - g = -v + \frac{1}{\|Tv\|}Tv$.

so, dass $\|x\|, \|y\| \leq 2$, dann können wir abschätzen:

$$\|x, Tx\| - \|y, Ty\| \leq \frac{M}{2}(\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2) = 4M.$$

Wenn wir nun alle Puzzelteile zusammensetzen erhalten wir unser Ergebis:

$$4\|Tv\| = 4\mathrm{Re}\left\langle \frac{1}{\|Tv\|}Tv, Tv\right\rangle = \langle x, Tx\rangle - \langle y, Ty\rangle \leq 4M \implies \|T\| \leq M.$$

□

Satz 6.3.5. Sei $T \in \mathcal{K}(H)$ selbstadjungiert, dann ist $\|T\|$ oder $-\|T\|$ ein Eigenwert.

Beweis: Sei o.B.d.A $\|T\| \neq 0$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\|x_n\| = 1$ mit $|\langle x_n, Tx_n\rangle| \xrightarrow{n\to\infty} \|T\|$. Damit gibt es $\lambda \in \{\|T\|, -\|T\|\}$ und eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\langle x_{n_k}, Tx_{n_k}\rangle \xrightarrow{k\to\infty} \lambda$. Da T kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(x_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ und ein $y \in H$ mit $x_{n_{k_l}} \xrightarrow{l\to\infty} y$. Betrachte nun:

$$\left\|Tx_{n_{k_l}} - \lambda x_{n_{k_l}}\right\|^2 = \underbrace{\left\|Tx_{n_{k_l}}\right\|^2}_{\leq\|T\|^2=\lambda^2} - 2\lambda \underbrace{\left\langle x_{n_{k_l}}, Tx_{n_{k_l}}\right\rangle}_{\xrightarrow{l\to\infty}\lambda} + \lambda^2 \left\|x_{n_{k_l}}\right\|^2 \xrightarrow{l\to\infty} 0.$$

Da T stetig ist, folgt mit

$$Tx_{n_{k_l}} \xrightarrow{l\to\infty} Ty \implies \lambda x_{n_{k_l}} \xrightarrow{l\to\infty} Ty.$$

Da T kompakt und der Grenzwert eindeutig ist, folgt:

$$\lambda x_{n_{k_l}} \xrightarrow{l\to\infty} \lambda y = Ty.$$

Wobei $\left\|x_{n_{k_l}}\right\| = 1$ und damit $\|y\| = 1$, also $\|y\| \neq 0$. Folglich $Ty = \lambda y$ und y ist ein Eigenvektor zu λ von T.

$\square$

Satz 6.3.6. Sei $T \in \mathcal{B}(H)$ und $L \subseteq H$ abgeschlossen, dann gilt

$$TL^{\perp} \subseteq L^{\perp} = \{v \in H : \forall w \in L, v \perp w\}.$$

Beweis: Sei $v \in L^{\perp}$ und für alle $w \in L : \langle v, w\rangle = 0$. Sei $w \in L$ beliebig, $\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle = 0$.

$\square$

Satz 6.3.7. Sei H ein Hilbertraum, $T \in \mathcal{B}(H)$ ein kompakter, selbstadjungierter Operator. Dann ist

$$\Sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \exists x \in H \setminus \{0\} : Tx = \lambda x\}$$

eine endliche oder abzählbar unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$. Im letzteren Fall gibt es eine Teilfolge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \neq m : \lambda_n \neq \lambda_m$, wobei $\Sigma(T) := \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Wieso schließen wir 0 als Eigenwert aus?

Beweis. Die Behauptung $\Sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ folgt aus Satz 6.3.1. Falls $\Sigma(T)$ endlich ist, dann sind wir fertig. Nehmen wir also an, dass $\Sigma(T)$ unendlich ist. Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen nun per Widerspruch, dass

$$M := \{\lambda_n \in \Sigma(T) \mid |\lambda_n| > \varepsilon\}$$

endlich ist. Angenommen M ist unendlich, d. h.

$$\exists\, (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \forall n \neq m : \lambda_n \neq \lambda_m,\ \forall n \in \mathbb{N} : |\lambda_n| > \varepsilon, \lambda_n \in \Sigma(T)\,.$$

Damit gibt es Eigenvektoren

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in H \setminus \{0\}\,, Tx_n = \lambda_n x_n\,.$$

Dabei nehmen wir o. B. d. A. an, dass $\forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\| = 1$. Nach Satz *[...]* gilt $\forall n \in N : |\lambda_n| \leq \|T\|$, d. h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Da T kompakt ist, existiert ein $y \in H$ sowie eine Teilfolge

$$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = y\,.$$

Insbesondere ist $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Weiterhin gilt

$$\forall k, l \in \mathbb{N},\ k \neq l : x_{n_k} \perp x_{n_l} \implies Tx_{n_k} = \lambda_{n_k} x_{n_k} \perp \lambda_{n_l} x_{n_l} = Tx_{n_l}\,.$$

Somit folgt

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\|^2 = \|Tx_{n_k}\|^2 + \|Tx_{n_l}\|^2 = \lambda_{n_k}^2 + \|x_{n_k}\|^2 + \lambda_{n_l}^2 \|x_{n_l}\|^2 > 2\varepsilon^2\,.$$

Dies ist ein Wiederspruch zur Definition der Cauchyfolge. Damit ist

$$\forall \varepsilon > 0 : \{\lambda \in \Sigma(T) \mid |\lambda| > \varepsilon\} \text{ endlich.}$$

Folglich ist $\Sigma(T)$ abzählbar, da insbesondere

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left\{\lambda \in \Sigma(T) \,\middle|\, |\lambda| > \frac{1}{n}\right\} \text{ endlich.}$$

Außerdem folgt daraus, dass die Eigenwerte im abzählbar unendlichen Fall eine Nullfolge bilden. $\boxplus$

Bemerkung 6.3.3. Die Separabilität des Hilbertraums H ist keine notwendige Voraussetzung.

Satz 6.3.8. Sei H ein Hilbertraum, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ und $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthogonale Projektionen, d. h.

$$\forall n \in \mathbb{N} : P_n \in \mathcal{B}(H),\ P_n = P_n^* = P_n^2\ .$$

Gelte weiterhin $\forall n \neq m : P_n P_m = P_m P_n = 0$. Dann existiert $T = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n P_n$ in Operatornorm.

Beweis. Es g. z. z., dass $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ mit $T_N := \sum_{n=0}^{N} \lambda_n P_n$ eine Cauchyfolge bzgl. der Operatornorm $\|\cdot\|$ ist (da $\mathcal{B}(H)$ insbesondere ein Banachraum). Sei $x \in H$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\|T_N x\|_H^2 &= \left\langle \sum_{n=0}^{N} \lambda_n P_n x, \sum_{m=0}^{N} \lambda_m P_m x \right\rangle = \sum_{n,m=0}^{N} \overline{\lambda_n}\lambda_m \langle P_n x, P_m x\rangle = \sum_{n,m=0}^{N} \overline{\lambda_n}\lambda_m \overbrace{\langle x, P_n P_m x\rangle}^{=0 \text{ für } n\neq m} \\
&= \sum_{n=0}^{N} |\lambda_n|^2 \|P_n x\|_H^2 \leq \max\{|\lambda_n| \mid 0 \leq n \leq N\}^2 \sum_{n=0}^{N} \|P_n x\|_H^2 \\
&\leq \max\{|\lambda_n| \mid 0 \leq n \leq N\}^2 \|x\|_H^2
\end{aligned}$$

Wir begründen nun die letzte Abschätzung $\sum_{n=0}^{N} \|P_n x\|_H^2 \leq \|x\|_H^2$. Wegen der paarweisen Orthogonalität der Unterräume, auf die projiziert wird, gilt

$$\left\| \left(\sum_{n=0}^{N} P_n \right) x \right\|_H^2 = \left\langle \sum_{n=0}^{N} P_n x, \sum_{n=0}^{N} P_n x \right\rangle = \sum_{n=0}^{N} \|P_n x\|_H^2\ .$$

Außerdem ist mit dieser Voraussetzung auch $P := \sum_{n=0}^{N} P_n$ wieder eine orthogonale Projektion. $P^* = P$ ist klar und $P^2 = P$ folgt aus der Orthogonalitätsbedingung für die Unterräume (d. h. $\forall n \neq m : P_n P_m = P_m P_n = 0$). Es gilt also

$$\sum_{n=0}^{N} \|P_n x\|_H^2 = \|Px\|_H^2\ .$$

Weiterhin gilt $\|P\| \leq 1$. Sei nämlich $\|P\| > 0$ (sonst fertig), dann gilt für $x \in H$ mit Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
&\|Px\|_H^2 = |\langle Px, Px\rangle| = |\langle x, PPx\rangle| = |\langle x, Px\rangle| \leq \|x\|_H \|Px\|_H \\
&\implies \frac{\|Px\|_H}{\|x\|_H} \leq 1 \implies \|P\| \leq 1\ .
\end{aligned}$$

Wir erhalten also insgesamt

$$\|T_N\| = \left\| \sum_{n=0}^{N} \lambda_n P_n \right\| \leq \max\{|\lambda_n| \mid 0 \leq n \leq N\}\ .$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ fixiert und $N_0 \in N$ so groß, dass $\forall n \geq N_0 : |\lambda_n| < \varepsilon$. Dann gilt für $N, M \geq N_0$, o. B. d. A. $N \leq M$

$$\left\| \sum_{n=0}^{M} \lambda_n P_n - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n P_n \right\| = \left\| \sum_{N+1}^{M} \lambda_n P_n \right\| \leq \max\{|\lambda_n| \mid N+1 \leq n \leq M\} < \varepsilon\ .$$

$\square$

Satz 6.3.9 (Spektralsatz für kompakte Operatoren)**.** Sei H ein Hilbertraum und $T \neq 0$, $T \in \mathcal{K}(H)$ selbstadjungiert. Bezeichne hier

$$\Sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists x \in H \setminus \{0\} : Tx = \lambda x\} =: \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad N(\lambda) := \ker(T - \lambda I) \, .$$

Dabei gilt nach Satz 6.3.7 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Dann gilt in Operatornorm (wobei $P_{N(\lambda)}$ die Projektion auf den Eigenraum zu λ bezeichnet)

$$T = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n P_{N(\lambda_n)} \, . \quad (*)$$

Speziell gibt es ein ONS $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\Sigma(T) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, sodass bzgl. der Operatornorm gilt

$$T = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n |e_n\rangle\langle e_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n P_{\mathbb{C}e_n} \, . \quad (**)$$

Bemerkung 6.3.4. In der Bra-Ket-Notation gilt

$$\forall x \in H : (|e_n\rangle\langle e_n|)(x) = \langle e_n|x\rangle \, |e_n\rangle \, .$$

Beweis. Bei den Eigenräumen handelt es sich um paarweise orthogonale Unterräume, d. h. es gilt

$$\forall \lambda_n, \lambda_m \in \Sigma(T) : \lambda_n \neq \lambda_m \implies N(\lambda_n) \perp N(\lambda_m) \, .$$

Somit erfüllen die Projektionen auf die Eigenräume gerade die Voraussetzungen von Satz 6.3.8, d. h. die rechte Seite von $(*)$ existiert. Bezeichne nun

$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n P_{N(\lambda_n)} \in \mathcal{B}(H) \quad \text{und} \quad L = \overline{\operatorname{span}\{x \in N(\lambda) \mid \lambda \in \Sigma(T)\}} \, .$$

Dabei gilt nun

$$\forall \lambda \in \Sigma(T) \; \forall x \in N(\lambda) : Tx = \lambda x \in N(\lambda) \implies TL \subseteq L \, .$$

Außerdem haben wir bereits gezeigt $TL^\perp \subseteq L^\perp$. Da L ein abgeschlossener Unterraum ist, können wir Satz 5.1.4 anwenden, d. h. es existieren $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ mit

$$\forall x \in H : Px \in L, \; Qx \in L^\perp \text{ und } Px + Qx = x \, .$$

Dabei ist bekannt, dass $H \cong L \oplus L^\perp$ sowie $P = P_L$ und $Q = P_{L^\perp}$, d. h. wir können schreiben $T = TP + TQ$. Es gilt insbesondere $PTP = P$ (analog für Q). Insgesamt erhalten wir damit die Darstellung

$$T = PTP + QTQ \, .$$

Aufgrund der Definition von S ist klar, dass gilt

$$SL \subseteq L, \; SL^\perp \subseteq L^\perp, \; S = S^* \text{ und } S|_{L^\perp} = 0$$

Analog gilt also

$$S = PSP + \overbrace{QSQ}^{=0} = PSP \, .$$

Sei nun $x \in N(\lambda_n) \subseteq L$ (d. h. $Tx = \lambda_n x$), dann gilt

$$Sx = \sum_{m\in\mathbb{N}} \lambda_m \overbrace{P_{N(\lambda_m)} x}^{=0 \text{ für } m\neq n} = \lambda_n x = Tx = PTPx \, .$$

Für $x \in L^\perp$ gilt offensichtlich ebenfalls $Sx = PTPx$, d. h. es gilt

$$S = PTP \, .$$

Nach Satz 6.1.4 gilt $QTQ \in \mathcal{K}(H)$. Angenommen es gelte $\|QTQ\| > 0$. Nach Satz 6.3.5 folgt dann, dass $\|QTQ\|$ oder $-\|QTQ\|$ ist Eigenwert von QTQ, bezeichne diesen Eigenwert hier mit λ. Folglich gilt (unter Verwendung von $\forall y \in L^\perp : Qy = P_{L^\perp} y = y$)

$$\exists x \in L^\perp \text{ mit } Qx = x \neq 0 : TQx = QTQx = \lambda x = \lambda Qx \implies \lambda \in \Sigma(T) \, .$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $x \in L^\perp$, d. h. es muss $\|QTQ = 0\| \implies QTQ = 0$ gelten. Daraus folgt sofort $T = S$, womit $(*)$ gezeigt ist. Betrachte nun die zweite Identität. Sei dazu

$$(e_{nm})_{m=1}^{\dim(N(\lambda_n))} \text{ eine ONB von } N(\lambda_n) \, .$$

Dann ist

$$\{e_{nm} \mid n \in \mathbb{N},\ m = 1, \ldots, \dim(N(\lambda_n))\} \text{ ein ONS mit } P_{N(\lambda_n)} = \sum_{m=1}^{\dim(N(\lambda_n))} |e_{nm}\rangle \langle e_{nm}| \, .$$

$\square$

Durch Aufzählen entsteht der geforderte Ausdruck $(**)$.

6.4 Kompakte Operatoren und Operatoren von endlichem Rang

Definition 6.4.1. Sei H ein Hilbertraum. Dann hat $T \in \mathcal{B}(H)$ *endlichen Rang*, falls $\dim TH < \infty$.

Bemerkung 6.4.1. Wir haben bereits gezeigt, dass aus $T \in \mathcal{B}(H)$ endlicher Rang auch $T \in \mathcal{K}(H)$ folgt. Falls andersherum $T \in \mathbb{K}(H)$ selbstadjungiert ist, gilt bezüglich der Operatornorm

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{n \in \mathbb{N},\ |\lambda_n| > \varepsilon} \lambda_n P_{N(\lambda_n)} = T \, .$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\dim P_{N(\lambda_n)} < \infty$ und auch die Summe endlich, wodurch T dann endlichen Rang hat.

Satz 6.4.1. Sei H ein Hilbertraum, $T \in \mathcal{K}(H)$. Dann gibt es $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ und $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : \|e_n\| = 1$, sodass bezüglich der Operatornorm gilt

$$T = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n |e_n\rangle \langle e_n| \, .$$

Bemerkung 6.4.2. Hier ist $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kein Orthonormalsystem!

Beweis. Wir definieren

$$\Re(T) := \frac{1}{2}(T + T^*) \text{ und } \Im(T) := \frac{1}{2i}(T - T^*) \, .$$

Diese Operatoren sind offensichtlich selbstadjungiert und kompakt. Nach Satz 6.3.9 existieren somit Orthonormalsysteme $\left(e_n^1\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(e_n^2\right)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H^{\mathbb{N}}$ sowie $\left(\lambda_n^1\right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\lambda_n^2\right)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}^n$ mit

$$\Re(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^1 \, |e_n^1\rangle \, \langle e_n^1| \text{ und } \Im(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^2 \, |e_n^2\rangle \, \langle e_n^2| \, .$$

Folglich gilt in der Tat

$$T = \Re(T) + i\Im(T) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^1 \left|e_n^1\right\rangle \left\langle e_n^1\right| + \sum_{n\in\mathbb{N}} i\lambda_n^2 \left|e_n^2\right\rangle \left\langle e_n^2\right| .$$

□

Satz 6.4.2. Sei H ein Hilbertraum, $T \in \mathbb{K}(H)$. Dann existiert eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $\forall n \in \mathbb{N} : T_n \in \mathcal{B}(H)$ endlichen Rang und $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ bezüglich der Operatornorm.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 6.4.1, wobei wir

$$T_n := \sum_{m=0}^{n} \lambda_m \left|e_m\right\rangle \left\langle e_m\right|$$

setzen, was endlichen Rang hat. □

Bemerkung 6.4.3. Der Satz gilt nicht auf allgemeinen Banachräumen.