

# Skript Funktionalanalysis

Prof. Volkmar Liebscher SoSe2024

Jonas Harder und Jakob Kropf

Version vom 9. Juni 2024

# Todo-Liste

Dieser Beweis muss noch beendet werden. . . . .	24
??? . . . . .	27
Hier gab es in der Vorlesung einen Nachtrag, allerdings sollte es so auch gehen. . . . .	29
In der Vorlesung wurde im Lemma $\ \varphi\  \geq \ \varphi_0\ $ angegeben, aber dies sollte direkt aus $\varphi _U = \varphi_0$ folgen und wir zeigen im Lemma $\leq$ und somit Gleichheit, oder? . . . . .	34
Es ist nicht ganz klar, wozu die letzte Abschätzung nötig ist und wieso die Eindeutigkeit gilt. .	36
Label fehlt . . . . .	46

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Metrische Räume</b>	<b>3</b>
1.1	Definitionen . . . . .	3
1.2	Konvergenz und Stetigkeit . . . . .	3
1.3	Offene und abgeschlossene Mengen . . . . .	4
1.4	Vollständigkeit . . . . .	4
1.5	Kompaktheit . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Maß- und Integrationstheorie</b>	<b>10</b>
2.1	Grundlegende Konstruktionen . . . . .	10
2.2	Integration . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Normierte Räume</b>	<b>13</b>
3.1	Definitionen . . . . .	13
3.2	Vervollständigung . . . . .	13
3.3	$L^p$ -Räume . . . . .	14
3.4	Beispiele für normierte Räume . . . . .	18
3.5	Äquivalenz von Normen . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Hilberträume</b>	<b>20</b>
4.1	Definitionen . . . . .	20
4.2	Beispiele . . . . .	21
4.3	Orthogonalbasen . . . . .	22
4.4	Projektionen . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Lineare Operatoren</b>	<b>27</b>
5.1	Definitionen . . . . .	27
5.2	Das Dual . . . . .	30
5.3	Der Satz von Hahn-Banach . . . . .	34
5.4	Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit . . . . .	37
5.5	Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit . . . . .	39
5.6	Der Satz von der offenen Abbildung . . . . .	39
5.7	Der Satz vom abgeschlossenen Graphen . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Kompakte Operatoren</b>	<b>45</b>
6.1	Definitionen und Eigenschaften . . . . .	45

# Kapitel 1

## Metrische Räume

### 1.1 Definitionen

**Definition 1.1.1.** Eine Menge  $T$ , versehen mit einer Abbildung  $d : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften ( $s, t, u \in T$  beliebig)

1.  $d(s, t) \geq 0$ ,
2.  $d(s, t) = d(t, s)$
3.  $d(s, u) \leq d(s, t) + d(t, u)$
4.  $d(s, t) = 0 \iff s = t$

ist *metrischer Raum* mit *Metrik*  $d$ . Falls nur ( $\Leftarrow$ ) in 4. gilt, handelt es sich um eine *Halbmetrik*.

**Beispiel 1.1.1.**  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  ist ein metrischer Raum.

**Beispiel 1.1.2.**  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  ist ein metrischer Raum.

**Beispiel 1.1.3.**  $(\mathbb{R}^n, d_i)$  mit  $i \in \{1, 2, \infty\}$  sind metrische Räume, wobei für  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$d_1 := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)}, \quad d_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad d_\infty := \max\{|x_i - y_i| \mid i : 1, \dots, n\}$$

**Definition 1.1.2.** Sei  $X, d$  ein metrischer Raum. Dann definieren wir die offene bzw. abgeschlossene Kugel um  $x \in X$  wie folgt.

$$K_\nu(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq \nu\} \quad \overline{K_\nu(x)} := \{y \in X \mid d(x, y) \leq \nu\}$$

Weiterhin ist  $U$  eine Umgebung von  $x \iff \exists \nu > 0 : K_\nu(x) \subseteq U$ .

### 1.2 Konvergenz und Stetigkeit

**Definition 1.2.1.** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $X$  heißt *konvergent* gegen  $x \in X$  (bez.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

**Satz 1.2.1.** Der Limes einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

**Satz 1.2.2.** Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent und hat den gleichen Grenzwert.

**Definition 1.2.2.** Sei  $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann heißt  $f$  *stetig an der Stelle*  $x_0 \in X_1$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_1(x, x_0) < \delta \implies d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

**Satz 1.2.3.** Sei  $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1.  $f$  ist stetig an  $x_0$
2.  $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in X_1 \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \in X_1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

**Satz 1.2.4.** Seien  $f : X_1 \rightarrow X_2, g : X_2 \rightarrow X_3$  stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Dann ist die Verknüpfung  $g \circ f : X_1 \rightarrow X_3$  stetig.

### 1.3 Offene und abgeschlossene Mengen

**Definition 1.3.1.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, dann heißt

1.  $G \subseteq X$  offen :  $\iff \forall x \in G \exists \nu > 0 : K_\nu(x) \subseteq G$
2.  $F \subseteq X$  abgeschlossen :  $\iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in F \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \implies x \in F$
3.  $S \subseteq X$  liegt dicht in  $X$  :  $\iff \forall x \in X \exists (s_n)_{n \in \mathbb{N}}, s_n \in S : \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$

**Definition 1.3.2.** Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt *separabel*, wenn es eine höchstens abzählbare Teilmenge  $S \subseteq X$  gibt, die in diesem Raum dicht liegt.

**Beispiel 1.3.1.** Der Banachraum

$$l^\infty(\mathbb{N}) := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt} \} \quad \text{mit } d_\infty((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$$

ist nicht separabel.

**Satz 1.3.1.** Sei  $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind äquivalent:

1.  $f$  ist stetig.
2.  $\forall G \subseteq X_2 : G \text{ offen} \implies f^{-1}(G) \text{ offen.}$
3.  $\forall F \subseteq X_2 : F \text{ abgeschlossen} \implies f^{-1}(F) \text{ abgeschlossen.}$

*Bemerkung 1.3.1.* Aus Satz 1.3.1 folgt:  $K_\varepsilon(x)$  offen, da  $K_\varepsilon(x) = d(x, \cdot)^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ .

### 1.4 Vollständigkeit

**Definition 1.4.1.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, dann heißt  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X$  *Cauchyfolge*, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

**Satz 1.4.1.** Jede konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $(X, d)$  ist eine Cauchy-Folge.

**Definition 1.4.2.** Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt *vollständig*, falls jede Cauchyfolge konvergiert.

**Beispiel 1.4.1.**  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  und  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  sind vollständige metrische Räume.

**Beispiel 1.4.2.** Die metrischen Räume  $(\mathbb{R}^n, f_p)$  mit  $p \in [1, \infty]$  sind vollständig.

**Satz 1.4.2.** Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:

$$Y \subseteq X \text{ vollständig} \iff Y \text{ abgeschlossen.}$$

**Satz 1.4.3.** Sei  $(X_1, d_1)$  ein metrischer Raum  $(X_2, d_2)$  ein vollständiger metrischer Raum sowie  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  isometrisch. Dann gibt es genau eine isometrisches  $\hat{\varphi} : X_1 \rightarrow X_2$  mit  $\hat{\varphi}|_S = \varphi$ .

*Beweis.* Sei  $x \in X_1$ , dann gibt es eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in S$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Somit ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  insbesondere eine Cauchyfolge. Folglich ist auch  $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und mit der Vollständigkeit von  $X_2$  gilt

$$\exists y \in X_2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = y := \hat{\varphi}(x) .$$

Wir setzen also für solche Folgen

$$\hat{\varphi} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) .$$

Zeige nun  $\hat{\varphi}$  ist wohldefiniert. Sei eine weitere Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegeben mit  $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in S$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ . Es folgt:

$$d_2(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = d_1(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d_1(x, x) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(y_n) = y .$$

Somit ist  $\hat{\varphi}$  in der Tat wohldefiniert. Weiterhin gilt  $\hat{\varphi}|_S = \varphi$ , denn wir wählen für  $x \in S$  die Folge  $(x)_{n \in \mathbb{N}}$ , somit gilt

$$\hat{\varphi} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = \hat{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x) = \varphi(x) .$$

Zeige nun  $\hat{\varphi}$  ist eine Isometrie. Seien dazu  $x, y \in X$  mit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen in  $S$ , wobei  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Somit

$$d_2(\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_2(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x_n, y_n) = d(x, y) .$$

□

**Satz 1.4.4.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum  $(\hat{X}, \hat{d})$  (bez. Vervollständigung von  $X$ ) und eine Isometrie  $\varphi : X \rightarrow \hat{X}$  (d. h.  $\forall x, y \in X : d(x, y) = \hat{d}(\varphi(x), \varphi(y))$ ), sodass das Bild  $\varphi(X)$  dicht in  $\hat{X}$  ist. Haben  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  und  $\tilde{\varphi}$  die gleiche Eigenschaft, so gibt es eine Bijektion  $\psi : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$  mit  $\tilde{\varphi} = \psi \circ \varphi$ .

*Beweis.* Definiere die Menge aller Cauchyfolgen in  $X$  durch

$$\hat{X}_0 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in X, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge}\} .$$

Definiere weiterhin eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $\hat{X}_0$  mit

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 .$$

Wir setzen  $\hat{X}$  als die Menge aller Äquivalenzklassen an, d. h.

$$\hat{X} = \hat{X}_0 / \sim = \{[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{X}_0\} \text{ wobei } [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] = \{(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}}\} .$$

Nun konstruieren wir die Metrik  $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow [0, \infty)$ , wobei für  $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \hat{X}$  gilt

$$\hat{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, y_m) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N, M \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall m \geq M : d(x_n, y_m) < \varepsilon .$$

Zeigen nun, dass  $\hat{d}$  wohldefiniert. Seien  $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{X}_0$  mit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dann nach Definition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y'_n) = 0.$$

Anwenden der Dreiecksungleichung ergibt

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n) \\ d(x'_n, y'_n) &\leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n). \end{aligned}$$

Somit

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \rightarrow 0.$$

Da  $(d(x_n, y_n))$  und  $(d(x'_n, y'_n))$  konvergent, folgt

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, y_m) = \lim_{n', m' \rightarrow \infty} d(x'_{n'}, y'_{m'})$$

und somit ist  $\hat{d}$  wohldefiniert. Nun gilt nach Def. 1.1.1 zu zeigen, dass  $\hat{d}$  eine Metrik auf  $\hat{X}$  ist. Wir zeigen hier nur die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, y_m) &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, z_k) + d(z_k, y_m) \iff \\ \hat{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]) &\leq \hat{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(z_k)_{k \in \mathbb{N}}]) + \hat{d}([(z_k)_{k \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]). \end{aligned}$$

Setze nun  $\varphi : X \rightarrow \hat{X}$ ,  $x \mapsto [(x)_{n \in \mathbb{N}}]$ , dies ist offensichtlich eine Isometrie. Zeigen nun, dass  $\varphi(X)$  dicht in  $\hat{X}$ . Sei  $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \hat{X}$ . Nach Voraussetzung ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge, d. h.  $\exists N_0 \in \mathbb{N}$  sodass  $\forall m, n \geq N_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon$ . Somit  $\hat{x}_{N_0} := [(x_{N_0})_{n \in \mathbb{N}}] = \varphi(x_{N_0}) \in \varphi(X)$  und

$$\hat{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], \hat{x}_{N_0}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{N_0}) < \varepsilon.$$

Somit  $\hat{x}_{N_0} \in K_\varepsilon([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]) \cap \varphi(X)$  und folglich ist  $\varphi(X)$  dicht in  $\hat{X}$ . Nun gilt zu zeigen, dass  $(\hat{X}, \hat{d})$  vollständig ist. Zeige dafür zunächst folgendes Lemma.

**Lemma 1.4.1.** Sei  $X, d$  metrischer Raum,  $S \subseteq X$  dicht in  $X$ , sodass jede Cauchyfolge in  $S$  in  $X$  konvergiert. Dann ist  $X$  vollständig.

*Beweis.* Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $X$ . Da  $S$  dicht in  $X$  gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists y_n \in S : d(x_n, y_n) < 1/n.$$

Somit ist  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch eine Cauchyfolge in  $S$ , da

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) < 1/m + d(x_m, x_n) + 1/n.$$

Nach Annahme existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n =: x \in X$ . Da

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, x) < 1/n + d(y_n, x)$$

folgt in der Tat  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . □

Nach Lemma 1.4.1 g. z. z., dass jede Cauchyfolge in  $\varphi(X)$  in  $\hat{X}$  konvergiert. Sei  $(\hat{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge in  $\varphi(X)$ , d. h.  $\hat{x}_k := (x_k, x_k, \dots)$ . Da  $\varphi$  eine Isometrie, ist  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $X$  durch

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) = \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) .$$

Somit  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \hat{X}_0$ ,  $[(x_k)_{k \in \mathbb{N}}] \in \hat{X}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , dann  $\exists N \in \mathbb{N}$  mit  $\forall k, n \geq N : d(x_k, x_n) < \varepsilon$ . Somit gilt  $\forall k \geq N$ :

$$\hat{d}(\hat{x}_k, \hat{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_k, x_n) < \varepsilon .$$

Folglich konvergiert  $(\hat{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $\hat{x} \in \hat{X}$  und  $\hat{X}$  ist vollständig. Betrachte nun  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  sowie  $\tilde{\varphi}$  mit den gleichen Eigenschaften. Wir definieren

$$\psi_0 : \varphi(X) \rightarrow \tilde{X}, \quad \psi_0(\varphi(x)) = \tilde{\varphi}(x) .$$

Dies ist eine Isometrie, da für  $x, y \in X$  gilt

$$\tilde{d}(\psi_0(\varphi(x)), \psi_0(\varphi(y))) = \tilde{d}(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)) = d(x, y) = \hat{d}(\varphi(x), \varphi(y)) .$$

Nach Satz 1.4.3 existiert eine eindeutige Erweiterung  $\psi : \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$  Isometrie mit  $\psi|_{\varphi(X)} = \psi_0$ . Da  $\psi_0$  als Isometrie injektiv ist, g. z. z.  $\psi_0$  ist surjektiv. Sei also  $z \in \tilde{X}$ , dann wegen der Dichtheit von  $\tilde{\varphi}(X)$

$$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(x_n) = z .$$

Somit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge  $\implies (\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyfolge. Da  $\hat{X}$  vollständig

$$\exists w \in \hat{X} : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = w .$$

Da  $\psi$  eine Isometrie ist folgt schließlich  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(\varphi(x_n)) = \psi(w) = z$  und somit ist  $\psi$  bijektiv.  $\square$

## 1.5 Kompaktheit

**Definition 1.5.1.** Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. D. h., wenn  $(G_i)_{i \in I}$  eine Familie offener Mengen, mit  $X = \bigcup_{i \in I} G_i$ , dann existieren endlich viele  $G_{i_1}, \dots, G_{i_n}$  mit  $X = \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}$ .

**Satz 1.5.1.** Sei  $X, d$  metrischer Raum,  $K \subseteq X$  kompakt. Dann ist  $K$  beschränkt und abgeschlossen (Umkehrung gilt i. A. nicht).

**Satz 1.5.2.** Sei  $X, d$  metrischer Raum. Dann gilt

$$X \text{ kompakt} \iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ Teilfolge } \exists y \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y$$

**Satz 1.5.3** (Heine-Borel). Betrachte die metrischen Räume  $(\mathbb{R}^n, d_p)$  mit  $p \in [1, \infty]$ . Dann ist  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt  $\iff X$  beschränkt und abgeschlossen.

**Definition 1.5.2.** Sei  $(X, d)$  metrischer Raum. Dann heißt  $Y \subseteq X$  totalbeschränkt falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \exists x_1, \dots, x_M \in Y : Y \subseteq \bigcup_{i=1}^M K_\varepsilon(x_i)$$

**Satz 1.5.4.** Sei  $X, d$  ein vollständiger metrischer Raum,  $Y \subseteq X$ . Dann ist  $Y$  kompakt  $\iff Y$  abgeschlossen und total beschränkt.



*Beweis.* ( $\Rightarrow$ )

Sei  $Y$  kompakt.  $Y$  abgeschlossen folgt aus Satz 1.5.1. Zeige nun die totale Beschränktheit, sei  $\varepsilon > 0$  dafür fixiert. Dann gilt offensichtlich

$$Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} K_\varepsilon(y) \xrightarrow{Y \text{ kompakt}} \exists y_1, \dots, y_M : Y \subseteq \bigcup_{i=1}^M K_\varepsilon(y_i)$$

Somit ist  $Y$  total beschränkt.

( $\Leftarrow$ )

Sei  $Y \subseteq X$  abgeschlossen und total beschränkt und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge aus  $Y$ . Es g. z. z., dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine in  $Y$  konvergente Teilfolge besitzt. Wir nutzen die totale Beschränktheit zur Konstruktion der Teilfolge (TF).

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 : \exists \{y_i^1\}_{i=1, \dots, M_1}, Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_1} K_1(y_i^1) &\Rightarrow \exists \text{ TF } (x_{n_k}^1)_{k \in \mathbb{N}} \exists i_1 \in \{1, \dots, M_1\} \forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k}^1 \in K_1(y_{i_1}^1) \\ \varepsilon = \frac{1}{2} : \exists \{y_i^2\}_{i=1, \dots, M_2}, Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_2} K_{1/2}(y_i^2) &\Rightarrow \exists \text{ TTF } (x_{n_k}^2)_{k \in \mathbb{N}} \exists i_2 \in \{1, \dots, M_2\} \\ &\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k}^2 \in K_1(y_{i_1}^1) \cap K_{1/2}(y_{i_2}^2) \end{aligned}$$

Diese Konstruktion lässt sich nun auf  $l$  Schritte erweitern.

$$\begin{aligned} \varepsilon = 2^{-l} : \exists \{y_i^l\}_{i=1, \dots, M_l}, Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{M_l} K_{2^{-l}}(y_i^l) &\Rightarrow \exists \text{ TT...TF } (x_{n_k}^l)_{k \in \mathbb{N}} \exists i_l \in \{1, \dots, M_l\} \\ &\forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k}^l \in K_1(y_{i_1}^1) \cap K_{1/2}(y_{i_2}^2) \cap \dots \cap K_{2^{-(l-1)}}(y_{i_{l-1}}^{l-1}) \cap K_{2^{-l}}(y_{i_l}^l) \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist  $(x_{n_k}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  Teilfolge von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und für  $k, k' \geq l$  gilt

$$x_{n_k}^k, x_{n_{k'}}^{k'} \in K_{2^{-l}}(y_{i_l}^l) \Rightarrow d(x_{n_k}^k, x_{n_{k'}}^{k'}) < 2^{-(l-1)}.$$

Folglich ist  $(x_{n_k}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und da  $X$  nach Voraussetzung vollständig, gilt

$$\exists z \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}^k = z.$$

Da  $Y$  abgeschlossen, gilt insbesondere  $z \in Y$  und folglich  $Y$  kompakt. □

**Beispiel 1.5.1.** Betrachte

$$C[0, 1] := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}, \quad \|\cdot\|_\infty, \quad \text{für } f, g \in C[0, 1] : d(f, g) = \max \{|f(t) - g(t)| \mid t \in [0, 1]\}$$

Dann gilt  $Y \subseteq C[0, 1]$  ist kompakt  $\iff Y$  punktweise beschränkt, d. h.

$$\exists c > 0 \forall f \in Y \forall t \in [0, 1] : |f(t)| \leq c$$

und  $Y$  gleichgradig stetig, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in Y \forall s, t \in [0, 1] : |t - s| < \delta \implies |f(t) - f(s)| < \varepsilon.$$

**Satz 1.5.5.** Sei  $(X_1, d_1)$  ein kompakter metrischer Raum,  $(X_2, d_2)$  ein metrischer Raum, sowie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  stetig. Dann ist  $f(X_1)$  kompakt.

*Bemerkung 1.5.1.* Falls  $X_2 = \mathbb{R}$ , dann existieren nach dem Satz von Weierstraß  $x_+, x_- \in X_1$  mit  $f(x_+) = \sup f(X_1)$  und  $f(x_-) = \inf f(X_1)$ .

**Satz 1.5.6.** Sei  $(X_1, d_1)$  ein kompakter metrischer Raum,  $(X_2, d_2)$  ein metrischer Raum, sowie  $f : X_1 \rightarrow X_2$  stetig. Dann ist  $f$  gleichmäßig stetig, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon .$$

## Kapitel 2

# Maß- und Integrationstheorie

### 2.1 Grundlegende Konstruktionen

**Definition 2.1.1.** Sei  $\Omega \neq \emptyset$ . Dann heißt  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$   $\sigma$ -Algebra, falls

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$
2.  $\forall A \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : A \in \mathcal{F} \implies A^C \in \mathcal{F}$
3.  $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} A_n \in \mathcal{F} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

Bezeichne  $(\Omega, \mathcal{F})$  als messbaren Raum.

*Bemerkung 2.1.1.* Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum, dann ist die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(X)$  der Borelmengen die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die alle offenen Mengen von  $X$  enthält. Bez.  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) =: \mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}^n$ .

**Definition 2.1.2.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein messbarer Raum. Dann ist  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  ein Maß, falls

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{F}, \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset : \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$

Wir bezeichnen  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  als Maßraum.

**Definition 2.1.3.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum. Das Maß  $\mu$  wird als  $\sigma$ -endlich bezeichnet, falls gilt

$$\exists A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}, A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \text{ mit } \forall n \in \mathbb{N} : \mu(A_n) < \infty \text{ und } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega.$$

**Definition 2.1.4.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum. Ein Maß  $\nu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  heißt absolut stetig bzgl.  $\mu$  (bez.  $\nu \ll \mu$ ), falls

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0.$$

**Beispiel 2.1.1.** Sei  $\Omega$  beliebig und  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Dann können wir das Zählmaß  $\mu$  definieren mit  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & A \text{ endlich} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist  $\Omega$  meist abzählbar, z. B.  $\Omega = \mathbb{N}$  oder  $\Omega = \mathbb{Z}$

**Beispiel 2.1.2.** Sei  $\Omega = \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{F} = \mathcal{B}^n$ . Dann definieren wir das Lebesgue-Maß  $l^n$  mit

$$l^n \left( \bigtimes_{i=1}^n [a_i, b_i) \right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Für  $l = 1$  gilt damit insbesondere  $l^1([a, b)) =: l([a, b)) = b - a$ .

## 2.2 Integration

**Definition 2.2.1.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein messbarer Raum,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  heißt messbar (bez.  $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ ), falls

$$\forall r > 0, z \in \mathbb{C} : f^{-1}(K_r(z)) \in \mathcal{F} \quad [ \iff \forall U \in \mathcal{B}(\mathbb{C}) : f^{-1}(U) \in \mathcal{F} ] .$$

Analog ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar (bez.  $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ ), falls

$$\forall U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$$

*Bemerkung 2.2.1.* Wir bezeichnen weiterhin  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, [0, \infty)) := \mathcal{M}_+(\Omega)$ .

*Bemerkung 2.2.2.* Sei  $\Omega, \mathcal{F}$  ein messbarer Raum,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $f$  messbar

$$\iff \forall c \in \mathbb{R} : \{f > c\} := \{x \in \Omega \mid f(x) > c\} \in \mathcal{F} .$$

**Definition 2.2.2.** Sei  $A$  eine Menge. Eine Funktion der Form

$$1_A(\omega) \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

heißt *Indikatorfunktion* der Menge  $A$ .

**Satz 2.2.1** (Integral für nichtnegative, messbare Funktionen). Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum. Dann gibt es genau eine Abbildung  $\varphi : \mathcal{M}_+(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  mit:

1.  $\forall A \in \mathcal{F} : \varphi(1_A) = \mu(A)$
2.  $\forall f, g \in \mathcal{M}_+(\Omega), \lambda \in [0, \infty] : \varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$
3.  $\forall (f_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} f_{n+1} \geq f_n \geq 0 : \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(f_n)$

Wir schreiben  $\varphi(f) =: \int f d\mu =: \int f(\omega) d(\omega) =: \int f(\omega) \mu(d\omega)$ .

*Bemerkung 2.2.3.* 3. ist auch als Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz bekannt.

*Bemerkung 2.2.4.* Wir können in 2.  $\lambda \in [0, \infty]$  wählen unter Beachtung, dass auf den erweiterten reellen Zahlen  $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  gilt:

$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0 \quad \text{und} \quad (+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = 0 .$$

**Definition 2.2.3** (Integral für messbare Funktionen). Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum,  $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ . Dann definieren wir

$$f^+ := \max\{f, 0\}, \quad f^- := \max\{-f, 0\} \implies f = f^+ - f^- \quad \text{und} \quad |f| = f^+ + f^- .$$

Somit erhalten wir als Definition für das Integral (für integrierbare Funktionen, siehe Def. 2.2.4):

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu .$$

Sei nun  $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ , dann folgt  $\Re(f), \Im(f) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ . Somit können wir definieren:

$$\int f d\mu := \int \Re(f) d\mu + i \cdot \int \Im(f) d\mu .$$

**Definition 2.2.4.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum. Dann bezeichnen wir  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  als  $(\mu)$ -integrierbar, falls  $f \in \mathcal{L}^1$ , wobei gilt

$$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \mid \int |f| d\mu < \infty \right\}.$$

Wir schreiben kurz auch  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ .

*Bemerkung 2.2.5.* Analog definiert man  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ . Somit:

$$\int \cdot d\mu : \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R} [\mathbb{C}]) \rightarrow \mathbb{R} [\mathbb{C}]$$

*Bemerkung 2.2.6.* Für  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  gilt insbesondere  $|f| \geq \Re(f)$ ,  $|f| \geq \Im(f)$ , d. h. das Integral ist wohldefiniert.

**Satz 2.2.2.** Seien  $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  sowie eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  sowie  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

1.  $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$
2.  $\int \lambda f + g d\mu = \lambda \int f d\mu + \int g d\mu$
3.  $\mu(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}) = 0 \implies \int f d\mu = \int g d\mu \implies \int |f - g| d\mu = 0$
4.  $\mu(\{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| = \infty\}) = 0$
5.  $\exists h : \Omega \rightarrow [0, \infty], h \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \leq h \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \implies \int f d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$

*Bemerkung 2.2.7.* 5. ist auch als Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz bekannt.

**Definition 2.2.5.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum,  $\nu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  ein Maß. Dann besitzt  $\nu$  eine Dichte bzgl.  $\mu$ , falls

$$\exists f : \Omega \rightarrow [0, \infty) \text{ messbar} : \forall A \in \mathcal{F} : \nu(A) = \int_A f d\mu.$$

**Satz 2.2.3** (Satz von Radon-Nikodym). Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und  $\nu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  ein Maß mit  $\nu \ll \mu$ . Dann besitzt  $\nu$  eine Dichte bzgl.  $\mu$ .

# Kapitel 3

## Normierte Räume

### 3.1 Definitionen

*Bemerkung 3.1.1.* Wir betrachten hier Vektorräume über den Körpern  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Definition 3.1.1.** Eine *Norm* über einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit:

1.  $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
2.  $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
3.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$

Dann heißt  $V, \|\cdot\|$  normierter Raum.

*Bemerkung 3.1.2.* Falls 3. nicht gilt, bezeichnen wir die Abbildung als *Halbnorm*.

**Satz 3.1.1.** Ein normierter Raum  $(V, \|\cdot\|)$  ist ein metrischer Raum mit der Metrik  $d$ , definiert durch

$$\forall x, y \in V : d(x, y) = \|x - y\| .$$

**Beispiel 3.1.1.** In diesem Fall gilt für die Operationen  $+: V \times V \rightarrow V$  und  $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$  (mit  $\lambda \in \mathbb{K}, x, y, x, y' \in V$ ):

$$\begin{aligned} d(x' + y', x + y) &= \|x' + y' - (x + y)\| \leq \|x' + y'\| + \|x + y\| \\ d(\lambda x, \lambda x') &= \|\lambda(x - x')\| = |\lambda| \|x - x'\| = |\lambda| d(x, x') \end{aligned}$$

**Definition 3.1.2.** Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Raum.

### 3.2 Vervollständigung

**Satz 3.2.1.** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum, dann existiert eine Vervollständigung  $(\hat{V}, \hat{\|\cdot\|})$ , d. h.  $V$  kann in einen Banachraum eingebettet werden.

*Beweis.* Definiere Analog zu Satz 1.4.4:

$$\hat{V}_0 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in V, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge}\}.$$

$$\text{Äquivalenzrelation } \sim \text{ auf } \hat{V}_0: (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}} : \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

$$\text{Menge aller Äquivalenzklassen: } \hat{V} = \hat{V}_0 / \sim = \{[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{X}_0\}$$

Dabei ist  $\hat{V}$  ein Vektorraum mit  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{V}_0$  :

$$\lambda [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] := [(\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \quad \text{und} \quad [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] + [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] = [(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}] .$$

Als Norm auf  $\hat{V}$  definieren wir

$$\hat{\|} [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| .$$

Zeige zunächst die Wohldefiniertheit. Der obige Grenzwert existiert, da für  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{V}_0$  die Folge  $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist, mit

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} |\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0 .$$

Betrachte nun  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{V}_0$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\|x_n\| - \|y_n\|| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

und somit ist  $\hat{\|} \cdot \hat{\|}$  unabhängig vom Repräsentanten. Für die Normeigenschaften zeige hier nur die Dreiecksungleichung und Definitheit (1. Eigenschaft trivial):

$$\begin{aligned} \hat{\|} [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] + [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| + \|y_n\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = \hat{\|} [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} + \hat{\|} [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} \end{aligned}$$

Weiterhin:

$$\hat{\|} [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \hat{\|} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0 \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (0)_{n \in \mathbb{N}} \iff [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] = [(0)_{n \in \mathbb{N}}] = 0_{\hat{V}}$$

□

### 3.3 $L^p$ -Räume

**Definition 3.3.1.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum,  $p \in [1, \infty)$ , dann definieren wir

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}), \int_{\Omega} |f|^p < \infty \right\} .$$

Wir schreiben kurz auch  $\mathcal{L}^p(\mu)$ .

*Bemerkung 3.3.1.*  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  definiert einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

**Satz 3.3.1.**  $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(\mu) \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\|f\|_p := \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}$  ist eine Halbnorm.

*Beweis.* Siehe nach Satz 3.3.2. □

*Bemerkung 3.3.2.*  $\|\cdot\|_p$  ist keine Norm.

**Beispiel 3.3.1.** Betrachte  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $f = 1_C \neq 0$ ,  $\mu = l$ , wobei  $C$  die Cantormenge und  $l$  das Lebesgue-Maß sind. Dann gilt:

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} (1_C)^p dl \right)^{\frac{1}{p}} = l(C)^{\frac{1}{p}} = 0$$

**Lemma 3.3.1** (Youngsche Ungleichung). Seien  $u, v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $p, q \in \mathbb{R}_{>1}$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt

$$u \cdot v \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} .$$

**Satz 3.3.2** (Hölder Ungleichung). Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum,  $p, q \in (1, \infty)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  und  $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ ,  $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ . Dann gilt  $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$  und  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ .

*Beweis.* Nehmen o. B. d. A. an  $f, g \geq 0$ ,  $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ . Mit Lemma 3.3.1 gilt

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 &= \int_{\Omega} f(x)g(x)\mu(dx) \leq \int_{\Omega} \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q} \mu(dx) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} f(x)^p \mu(dx) + \frac{1}{q} \int_{\Omega} g(x)^q \mu(dx) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q \end{aligned}$$

□

**Zu Satz 3.3.1.** 1. Eigenschaft ist trivial. Zeige nun noch die Dreiecksungleichung. Seien dafür  $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ . Dann gilt auch die Abschätzung:

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} |f + g| \leq |f + g|^{p-1} |f| + |f + g|^{p-1} |g| .$$

Sei  $q \in \mathbb{R}$  so gewählt, dass  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff p + q = pq$ . Dann gilt  $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\mu)$ , da

$$\left(|f + g|^{p-1}\right)^q = |f + g|^{pq-q} = |f + g|^p$$

Dies ist in der Tat integrierbar, da  $|f + g|^p \leq |f|^p + |g|^p$  und nach Voraussetzung  $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ . Somit erhalten wir

$$\|f + g\|_p^p = \int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \leq \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |f| + |f + g|^{p-1} |g| d\mu = \|(f + g)^{p-1} f\|_1 + \|(f + g)^{p-1} g\|_1 .$$

Anwenden der Hölder Ungleichung ergibt

$$\leq \|f + g\|_q \|f\|_p + \|f + g\|_q \|g\|_p = \left(\int_{\Omega} |f + g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} (\|f\|_p + \|g\|_p) = \left(\int_{\Omega} |f + g|^p\right)^{\frac{1}{q}} (\|f\|_p + \|g\|_p) .$$

Sei o. B. d. A.  $f + g \neq 0$  fast überall (sonst Beh. trivial), dann gilt:

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^{p/q} (\|f\|_p + \|g\|_p) \iff \|f + g\|_p^{p(1-1/q)} \leq \|f\|_p + \|g\|_p \iff \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

□

**Definition 3.3.2.** Sei  $\Omega, \mathcal{F}, \mu$  ein Maßraum sowie  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ . Dann definieren wir

$$f \stackrel{\mu}{=} g : \iff \mu(\{\omega \in \Omega | f(\omega) \neq g(\omega)\}) =: \mu(\{f \neq g\}) = 0 .$$

Man sagt auch  $f = g$   $\mu$ -fast überall.

*Bemerkung 3.3.3.* Die Relation  $\stackrel{\mu}{=}$  ist eine Äquivalenzrelation.



**Satz 3.3.3.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum sowie  $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ ,  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ . Dann gilt

$$f \stackrel{\mu}{=} g \implies g \in \mathcal{L}^p(\mu) \text{ und } \|f\|_p = \|g\|_p .$$

*Beweis.* Gelte o. B. d. A.  $g \stackrel{\mu}{=} 0$ . Betrachte hier  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \cup \{-\infty, \infty\}$ , sei  $A := \{\omega \in \Omega \mid g(\omega) \neq 0\}$ . Nach Voraussetzung gilt  $\mu(A) = 0$  und somit

$$|g| \leq \infty \cdot 1_A \implies \int_{\Omega} |g|^p d\mu \leq \infty \cdot \int_{\Omega} 1_A d\mu = \infty \cdot 0 = 0 .$$

Folglich gilt also in der Tat  $g \in \mathcal{L}^p$ . Zeige nun  $\|f\|_p = \|g\|_p$ . Dabei nutzen wir  $f \stackrel{\mu}{=} g \iff g - f \stackrel{\mu}{=} 0 \implies \|g - f\|_p = 0$ . Es folgt

$$\|g\|_p = \|f + (g - f)\|_p \leq \|f\|_p + \|g - f\|_p = \|f\|_p$$

Analog erhalten wir  $\|f\|_p \leq \|g\|_p$  und somit in der Tat  $\|f\|_p = \|g\|_p$ .  $\square$

**Satz 3.3.4.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum, dann wird  $\mathcal{L}^p(\mu) / \stackrel{\mu}{=}$  mit  $\forall f \in \mathcal{L}^p(\mu) : \| [f] \|_p := \|f\|_p$  ein normierter Raum.

*Beweis.* Die Wohldefiniertheit der Norm folgt aus Satz 3.3.3. Weiterhin lassen sich die Halbnormseigenschaften auf Satz 3.3.1 zurückführen. Es g. z. z., dass  $\|\cdot\|_p$  auf  $\mathcal{L}^p(\mu) / \stackrel{\mu}{=}$  definit ist. Angenommen für  $[f] \in \mathcal{L}^p(\mu) / \stackrel{\mu}{=}$  gilt  $\|[f]\|_p = 0 \iff \int_{\Omega} |f|^p = 0$ . Nehme weiterhin an, dass  $f \stackrel{\mu}{\neq} 0 \iff 0 < \mu(\{|f| > 0\})$ . Somit

$$0 < \mu(\{|f| > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{|f| > \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\left\{|f| > \frac{1}{n}\right\}\right) .$$

Folglich  $\exists c > 0 : \mu(\{|f| \geq c\}) > 0$ . Damit erhalten wir mit  $A := \{|f| > c\}$

$$|f|^p \geq c^p \cdot 1_A \implies \int |f|^p \geq c^p \mu(A) > 0 .$$

Dies ist ein Widerspruch und folglich gilt  $f \stackrel{\mu}{=} 0$ .  $\square$

**Definition 3.3.3.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum, dann

$$L^p(\mu) := L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) / \stackrel{\mu}{=}$$

Wir schreiben meist  $L^p(\mu)$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $L^p(\mu, \mathbb{C})$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

*Bemerkung 3.3.4.* Statt  $[f] \in L^p$  schreiben wir nur  $f \in L^p$ .

**Definition 3.3.4.**  $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  heißt *wesentlich beschränkt* ( $\iff f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ ), falls

$$\exists c \in \mathbb{R}_{>0} : \mu(\{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| > c\}) = 0 .$$

Dann definieren wir

$$\|f\|_\infty := \inf \{c \mid \mu(\{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| > c\}) = 0\} .$$

**Satz 3.3.5.**  $\|\cdot\|_\infty$  ist eine Halbnorm und es gilt  $f \stackrel{\mu}{=} g \iff \|f - g\|_\infty = 0$ .

*Beweis.* Die 1. Eigenschaft und die zweite Aussage sind trivial, wir zeigen hier wieder nur die Dreiecksungleichung. Seien  $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  wesentlich beschränkt,  $c, d > 0$  und  $A := \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| > c\}$ ,  $B := \{\omega \in \Omega \mid |g(\omega)| > d\}$ . Somit

$$\mu(A) = \mu(B) = 0 \implies \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0.$$

Es gilt

$$D := \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega) + g(\omega)| > c + d\} \subseteq A \cup B$$

und somit auch  $\mu(D) = 0$ . Sei nun  $\omega \in (A \cup B)^C$ , dann

$$|f(\omega)| \leq c \wedge |g(\omega)| \leq d \implies |f(\omega) + g(\omega)| \leq |f(\omega)| + |g(\omega)| \leq c + d.$$

D. h.  $f + g$  ist wesentlich durch  $c + d$  beschränkt und somit folgt in der Tat

$$\|f + g\|_\infty \leq c + d \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

□

**Satz 3.3.6.** Sei  $\Omega, \mathcal{F}, \mu$  ein Maßraum. Dann ist  $\mathcal{L}^\infty(\mu) / \underline{\mu}$  mit  $\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mu) : \|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty$  ein normierter Raum.

**Definition 3.3.5.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum, dann

$$L^\infty(\mu) := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu) / \underline{\mu}.$$

Wir schreiben meist  $L^\infty(\mu)$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $L^\infty(\mu, \mathbb{C})$  für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

*Bemerkung 3.3.5.*  $L^p(\mu)$  für  $p \in [1, \infty]$  sind keine direkten Funktionenräume.

**Satz 3.3.7.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum, dann ist  $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$  ein Banachraum für  $p \in [1, \infty]$ .

*Beweis.* Betrachte hier nur den Fall  $p = 1$ . Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $L^p(\mu)$ , d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N_0 : \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon.$$

Daher gilt insbesondere

$$\forall k > 0 \exists n_k \forall m \geq n_k : \|f_m - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}.$$

Somit können wir solche  $n_k$  mit  $n_{k+1} > n_k$  wählen und erhalten eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}$ . Für  $p = 1$  mit Beppo-Levi und  $g_k := |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_\Omega g_k d\mu = \int_\Omega \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k d\mu < \infty.$$

Somit gilt insbesondere

$$\mu \left( \left\{ \omega \in \Omega \mid \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(\omega) = \infty \right\} \right) = 0.$$

Nehmen hier o. B. d. A. an, dass  $\forall \omega \in \Omega : \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(\omega) < \infty$ . Somit bildet  $\forall \omega \in \Omega$  die Folge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und ist somit konvergent, d. h.  $\forall \omega \in \Omega : f(\omega) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(\omega)$  existiert. Somit gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega) = f_{n_0}(\omega) - f(\omega)$$

Wir können eine integrierbare Majorante für die  $f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega)$  finden mit

$$|f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega)| \leq \sum_{l=0}^{k-1} |f_{n_l}(\omega) - f_{n_{l+1}}(\omega)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(\omega) =: g(\omega) \text{ mit } \int_{\Omega} g d\mu < \infty .$$

Nach dem Satz von Lebesgue folgt somit, dass  $f$  integrierbar (d. h.  $f \in L^1(\mu)$ ) und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_{n_0}(\omega) - f_{n_k}(\omega) - (f_{n_0}(\omega) - f(\omega))| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f\|_1 = 0 .$$

Also ist  $L^1(\mu)$  in der Tat vollständig. □

### 3.4 Beispiele für normierte Räume

**Beispiel 3.4.1.** Betrachte

$$\Omega = \{1, \dots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}_{>0} \quad \text{mit} \quad \forall A \subseteq \Omega : \mu(A) = |A| .$$

Dann gilt wegen der Korrespondenz als Vektorraum

$$L^p(\mu) = \mathbb{R}^n \text{ und } L^p(\mu, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$$

wegen der Korrespondenz

$$f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix} .$$

**Beispiel 3.4.2** (Folgenräume). Folgende Vektorräume

$$\begin{aligned} c_0 &:= \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\} \\ c &:= \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert} \right\} \\ \ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) &:= \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c \right\} \end{aligned}$$

sind normierte Vektorräume (insbesondere Banachräume) mit der Supremumsnorm

$$\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| .$$

Betrachte weiterhin die Folgenräume  $\ell^p$  mit  $p \in [1, \infty)$ , wobei  $\mu$  das Zählmaß:

$$\ell_{\mathbb{K}}^p = L^p(\mathbb{N}, \mu, \mathbb{K}) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$$

mit der Norm  $\|\cdot\|_p$  definiert durch

$$\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p : \|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Dabei sind  $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$  für  $p \in [1, \infty)$  Banachräume.

**Beispiel 3.4.3.** Betrachte

$$\Omega = \mathbb{R} \text{ bzw. } \Omega = \mathbb{R}^d \text{ mit Lebesgue-Maß } l \text{ bzw. } l^d .$$

mit den entsprechenden Räumen  $L^p(l)$ ,  $L^p(l, \mathbb{C})$  bzw.  $L^p(l^d)$  und den bekannten Normen. Betrachte

$$\Omega = [0, 1] \text{ mit Lebesgue-Maß } l$$

dann ergibt sich

$$L^p([0, 1], l) \text{ mit } \forall f \in L^p([0, 1], l) : \|f\|_p = \int_0^1 |f(x)|^p dx$$

Der normierte Raum  $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$  ist ein Banachraum, wobei

$$C^0([0, 1]) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\} \quad \text{und} \quad \forall f \in C^0([0, 1]) : \|f\|_\infty = \sup \{|f(t)| \mid t \in [0, 1]\}$$

Hingegen ist  $C^0([0, 1])$  nicht vollständig bzgl. der Norm  $\|f\|_p = \int_0^1 |f(t)|^p dt$ . Der Raum  $(C^r([0, 1]), \|\cdot\|_{k,\infty})$

$$C^r([0, 1]) = \{f \in C^0([0, 1]) \mid f \text{ } r\text{-mal stetig differenzierbar}\} \quad \text{und} \quad \forall f \in C^r([0, 1]) : \|f\|_{k,\infty} = \sum_{j=0}^r \|f^{(j)}\|_\infty$$

ist ein Banachraum. Man kann auch weitere Normen auf  $C^r([0, 1])$  definieren, bspw. für  $r = 1$  und  $f \in C^1([0, 1])$

$$\|\cdot\|_{1,p} = \|f\|_p + \|f'\|_p \quad \text{oder} \quad \hat{\|f\|}_{1,p} = \left( \int_0^1 |f'(x)|^p + |f(x)|^p dx \right)^{1/p} .$$

*Bemerkung 3.4.1.* Es gibt eine Inklusion  $C^0([0, 1]) \hookrightarrow L^p([0, 1])$ , da in jeder Äquivalenzklasse nur eine stetige Funktion ist.

### 3.5 Äquivalenz von Normen

**Definition 3.5.1.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\|\cdot\|, \hat{\|\cdot\|} : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  Normen. Diese heißen äquivalent, falls

$$\exists 0 < c_1 < c_2 \quad \forall x \in V : c_1 \|x\| \leq \hat{\|x\|} \leq c_2 \|x\| .$$

**Beispiel 3.5.1.** Betrachte  $\mathbb{R}^n$  mit den Normen  $(x \in \mathbb{R}^n) : \|x\|_\infty = \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}$  und  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ , dann gilt  $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$$

d. h.  $\|\cdot\|_\infty$  und  $\|\cdot\|_1$  sind äquivalent.

**Beispiel 3.5.2.** Betrachte  $C^1([0, 1])$  mit den Normen  $\|\cdot\|_\infty$  und  $\|\cdot\|_{1,\infty}$ , wie in Bsp. 3.4.3 definiert. Diese sind nicht äquivalent. Definiere  $f_n(x) = x^n \in C^1([0, 1])$ , somit  $f'_n(x) = n \cdot x^{n-1}$ . Folglich

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad \text{und} \quad \|f_n\|_{1,\infty} = \|f_n\|_\infty + \|f'_n\|_\infty = 1 + n$$

und es existieren offensichtlich keine Konstanten  $0 < c_1 < c_2$  mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : c_1 \leq n + 1 \leq c_2 .$$

**Satz 3.5.1.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ . Dann sind alle Normen auf  $V$  äquivalent und jeder solche normierte Vektorraum ist ein Banachraum.

# Kapitel 4

## Hilberträume

### 4.1 Definitionen

**Definition 4.1.1.** Sei  $H$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  heißt eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  *Skalarprodukt* (oder *inneres Produkt*), falls

1.  $\forall x \in H : \langle x, \cdot \rangle, \langle \cdot, x \rangle : H \rightarrow \mathbb{R}$  sind linear
2.  $\forall x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0$
3.  $\forall x \in H : \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
4.  $\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  muss gelten:

1.  $\forall x \in H : \langle x, \cdot \rangle : H \rightarrow \mathbb{C}$  ist linear,  $\langle \cdot, x \rangle : H \rightarrow \mathbb{C}$  ist antilinear, d. h.  $\forall y, z \in H, \lambda \in \mathbb{C} :$   
 $\langle \lambda x + y, z \rangle = \bar{\lambda} \langle y, z \rangle + \langle x, z \rangle$
2.  $\forall x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0$
3.  $\forall x \in H : \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
4.  $\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

*Bemerkung 4.1.1.* Für das Skalarprodukt über  $\mathbb{C}$  kann nur Sesquilinearität und keine Bilinearität gefordert werden, um die positive Definitheit beizubehalten. Angenommen das Skalarprodukt über  $\mathbb{C}$  wäre bilinear und positiv definit, dann

$$\forall x \in H : \langle x, x \rangle \geq 0 \implies 0 \leq \langle ix, ix \rangle = -\langle x, x \rangle \leq 0 \implies \langle x, x \rangle = 0 .$$

**Satz 4.1.1** (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). Sei  $H$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , dann gilt

$$\forall x, y \in H : |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle .$$

*Bemerkung 4.1.2.* Mit Satz 4.1.2 schreibt man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auch als

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| .$$

**Satz 4.1.2.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Raum mit Skalarprodukt. Dann ist  $\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$  mit  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  für  $x \in H$  eine Norm auf  $H$ .

*Beweis.* Die 1. und 3. Eigenschaft sind trivial, zeige hier nur die Dreiecksungleichung. Es gilt für  $x, y \in H$

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 .$$

Mit  $\Re(\langle x, y \rangle) \leq |\langle x, y \rangle|$  und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir in der Tat:

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

□

**Definition 4.1.2.** Ein Raum  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit Skalarprodukt heißt *Hilbertraum*, wenn er bzgl. der vom Skalarprodukt induzierten Norm  $\|\cdot\|$  vollständig ist.

**Lemma 4.1.1** (Polarisationsformel). Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Raum mit Skalarprodukt und induzierter Norm  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  für  $x \in H$ . Dann gilt für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

und für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2) .$$

**Satz 4.1.3** (Parallelogrammgleichung). Ein normierter Raum  $(V, \|\cdot\|)$  (mit  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum) ist ein Raum mit Skalarprodukt  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die Norm induziert, genau dann wenn

$$\forall x, y \in V : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) .$$

*Beweis.* ( $\implies$ ) Es gilt:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ \implies \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 &= 2\langle x, y \rangle + 2\langle y, x \rangle \end{aligned}$$

( $\impliedby$ ) Man setzt für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  das Skalarprodukt gemäß der Polarisationsformeln nach Lemma 4.1.1 an und zeigt unter Ausnutzung der Parallelogrammgleichung, dass dies die Eigenschaften eines Skalarprodukts empfiehlt (explizit im *Werner* S. 222). □

## 4.2 Beispiele

**Beispiel 4.2.1.** Betrachte  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$ . Diese sind mit den Standardskalarprodukten Hilberträume, wobei für  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $u, v \in \mathbb{C}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{und} \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i$$

**Beispiel 4.2.2.**  $\ell_{\mathbb{K}}^2$  ist ein Hilbertraum, wobei die Norm von folgendem Skalarprodukt induziert wird

$$\langle (a_i)_{i \in \mathbb{N}}, (b_i)_{i \in \mathbb{N}} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i .$$

**Beispiel 4.2.3.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum. Dann ist  $L^2(\mu, \mathbb{K})$  ein Maßraum mit dem Skalarprodukt  $(f, g \in L^2(\mu, \mathbb{K}))$

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} fg \, d\mu \quad \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \langle f, g \rangle = \int_{\Omega} \overline{f}g \, d\mu \quad \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C} .$$

**Beispiel 4.2.4.** Betrachte  $C^0([0, 1])$ , dann ist für  $f, g \in C^0([0, 1])$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t) \, dt$$

ein Skalarprodukt aber  $(C^0([0, 1]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  kein Hilbertraum.

**Beispiel 4.2.5.** (Bergmanraum) Sei  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ . Dann ist  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum, wobei mit  $f, g \in H$ ,  $x := \Re(z)$ ,  $y := \Im(z)$  gilt

$$H = \left\{ f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph, } \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dx dy < \infty \right\} \quad \text{und} \quad \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} \overline{f(z)}g(z) \, dx dy .$$

*Bemerkung 4.2.1.* Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen heißt holomorph, falls  $f$  komplex differenzierbar an allen Punkten  $z_0 \in U$ , d. h. falls folgender Grenzwert existiert

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} .$$

### 4.3 Orthogonalbasen

**Definition 4.3.1.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Raum mit Skalarprodukt. Wir bezeichnen  $x, y \in H$  orthogonal, bzw.  $x \perp y$ , falls  $\langle x, y \rangle = 0$ . Zwei Teilmengen  $X, Y \subseteq H$  heißen orthogonal, bzw.  $X \perp Y$ , falls  $\forall x \in X, y \in Y : \langle x, y \rangle = 0$ .

**Lemma 4.3.1** (Satz des Pythagoras). Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Raum mit Skalarprodukt. Dann ergibt sich direkt aus der Definition für  $x, y \in H$

$$x \perp y \implies \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2 .$$

**Definition 4.3.2.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum. Eine Familie  $(e_s)_{s \in S}$ ,  $\forall s \in S : e_s \in H$  heißt *Orthonormalsystem*, falls

$$\forall s, t \in S : \langle e_s, e_t \rangle = \delta_{st} .$$

Eine Familie  $(e_s)_{s \in S}$ ,  $\forall s \in S : e_s \in H$  heißt *vollständig*, falls

$$\forall y \in H : y \perp \{e_s \mid s \in S\} \implies y = 0 .$$

Ein vollständiges Orthonormalsystem heißt *Orthonormalbasis*.

**Beispiel 4.3.1.** Betrachte den Hilbertraum  $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}) := \{(a_t)_{t \in \mathbb{R}} \mid \forall t \in \mathbb{R} : a_t \in \mathbb{C}, \sum_{t \in \mathbb{R}} |a_t|^2 < \infty\}$ . Dabei ist das Skalarprodukt definiert als

$$\forall (a_t)_{t \in \mathbb{R}}, (b_t)_{t \in \mathbb{R}} \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}) : \langle (a_t)_{t \in \mathbb{R}}, (b_t)_{t \in \mathbb{R}} \rangle = \sum_{t \in \mathbb{R}} \overline{a_t} b_t .$$

Definiere  $e_t = (\delta_{s,t})_{s \in \mathbb{R}} \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$ . Dann ist  $(e_t)_{t \in \mathbb{R}}$  eine Orthonormalbasis, da für  $a := (a_t)_{t \in \mathbb{R}} \in l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R})$

$$a \perp \{e_t \mid t \in \mathbb{R}\} \iff \forall t \in \mathbb{R} : \langle a, e_t \rangle = \overline{a_t} = 0 \iff a = 0 .$$

**Beispiel 4.3.2.** Betrachte den Hilbertraum  $H = L^2([0, 1], l, \mathbb{C})$ . Dann erhalten wir die (vollständige) Fourierbasis

$$(f_k(x))_{k \in \mathbb{Z}} \text{ mit } f_k(x) := \exp(2\pi i k x) .$$

Die Orthogonalität kann man wie folgt zeigen (mit  $k, l \in \mathbb{Z}$ )

$$\int_0^1 \exp(-2\pi i k x) \exp(2\pi i l x) dx = \int_0^1 \exp(2\pi i (l - k)x) dx = \delta_{kl}$$

**Satz 4.3.1.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum,  $(e_s)_{s \in S}, \forall s \in S : e_s \in H$  ein Orthonormalsystem. Dann existiert für jedes  $\lambda := (\lambda_s)_{s \in S} \in \ell_{\mathbb{C}}^2(S) := \left\{ (a_s)_{s \in S} \mid \forall s \in S : a_s \in \mathbb{C}, \sum_{s \in S} |a_s|^2 < \infty \right\}$  ein abzählbares  $S_0 \subseteq S$  mit  $|\lambda_s| > 0 \implies s \in S_0$ . Sei  $S_0 := \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  und  $x_n = \sum_{m=0}^n \lambda_{s_m} e_{s_m}$ . Dann existiert ein  $x \in H$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , wir schreiben  $x = \sum_{s \in S} \lambda_s e_s$ .

*Beweis.* Wir zeigen hier nur den 2. Teil des Satzes (???). Da  $H$  vollständig, g. z. z., dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist. Dabei ist bekannt (unter Ausnutzung von Teil 1 des Satzes)

$$\|\lambda\|_{\ell^2(S)}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} |\lambda_{s_m}|^2 < \infty .$$

Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $N \in \mathbb{N}$  hinreichend groß, sodass  $\sum_{m=N+1}^{\infty} |\lambda_{s_m}|^2 < \varepsilon^2$ . Seien nun  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ,  $n_1, n_2 \geq N$ ,  $n_1 < n_2$ . Dann

$$\|x_{n_2} - x_{n_1}\|^2 = \left\| \sum_{m=n_1+1}^{n_2} \lambda_{s_m} \cdot e_{s_m} \right\|^2 .$$

Dabei gilt für  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq l$

$$\left\| \sum_{i=l}^k \lambda_{s_i} e_{s_i} \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=l}^k \lambda_{s_i} e_{s_i}, \sum_{j=l}^k \lambda_{s_j} e_{s_j} \right\rangle = \sum_{i,j=l}^k \overline{\lambda_i} \lambda_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i,j=l}^k \overline{\lambda_i} \lambda_j \delta_{ij} = \sum_{i=l}^k |\lambda_i|^2 .$$

Somit ergibt sich

$$\|x_{n_2} - x_{n_1}\|^2 = \sum_{m=n_1+1}^{n_2} |\lambda_{s_m}|^2 < \varepsilon^2 .$$

Folglich ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in H$  existiert.  $\square$

*Bemerkung 4.3.1* (Motivation). Falls  $(e_s)_{s \in S}$  eine Orthonormalbasis von  $H$ . Dann ist die Abbildung  $F : H \rightarrow \ell_{\mathbb{C}}^2(S)$ ,  $x \mapsto (\langle x, e_s \rangle)_{s \in S}$  ein unitärer Isomorphismus. In diesem Fall gibt es eine Korrespondenz zwischen  $\lambda \in \ell_{\mathbb{C}}^2(S)$  und den Koeffizienten von  $x$  bzgl. der Orthonormalbasis  $(e_s)_{s \in S}$ .

**Lemma 4.3.2** (Besselsche Ungleichung). Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum,  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem und  $x \in H$ . Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

*Bemerkung 4.3.2.* Mit Satz 4.3.1 folgt die allgemeine Besselsche Ungleichung für Orthonormalsysteme. Sei  $(e_s)_{s \in S}, \forall s \in S : e_s \in H$  ein Orthonormalsystem und  $x \in H$ , dann

$$\sum_{s \in S} |\langle x, e_s \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$



**Satz 4.3.2.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum,  $(e_s)_{s \in S}$  ein Orthonormalsystem. Dann ist  $(e_s)_{s \in S}$  vollständig, genau dann wenn für jedes  $x \in H$  ein  $\lambda := (\lambda_s)_{s \in S} \in \ell_{\mathbb{C}}^2(S)$  existiert mit  $x = \sum_{s \in S} \lambda_s e_s$ . In diesem Fall ist  $\lambda$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* (Eindeutigkeit) Seien  $S_0 \subseteq S$  sowie  $x_n \in H$  wie in Satz 4.3.1. Sei  $\hat{s} \in S$ , dann

$$\langle e_{\hat{s}}, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle e_{\hat{s}}, x_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle e_{\hat{s}}, \sum_{m=0}^n \lambda_{s_m} e_{s_m} \right\rangle = \begin{cases} 0 & \hat{s} \notin S_0 \\ \lambda_{\hat{s}} & \hat{s} \in S_0 \end{cases}$$

Somit folgt die Eindeutigkeit aus der Eindeutigkeit der Darstellung der  $x_n$ .

(Existenz) Angenommen  $(e_s)_{s \in S}$  ist vollständig und  $x$  ist nicht durch die Orthonormalbasis darstellbar. Bezeichne die Menge der darstellbaren Elemente in  $H$  mit

$$H_0 = \left\{ \sum_{s \in S} \lambda_s e_s \mid (\lambda_s)_{s \in S} \in \ell_{\mathbb{C}}^2(S) \right\}.$$

Für eine Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in H_0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \implies y \in H_0$ . Setze  $\mu_s = \langle e_s, x \rangle$ . Sei  $S_0 \subseteq S$  höchstens abzählbar, dann gilt mit Satz 4.3.2

$$\sum_{s \in S_0} |\mu_s|^2 = \sum_{s \in S_0} |\langle e_s, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty.$$

Für  $t \in S_0$  gilt weiterhin

$$\left\langle e_t, x - \sum_{s \in S_0} \mu_s e_s \right\rangle = \langle e_t, x \rangle - \sum_{s \in S_0} \langle e_t, \langle e_s, x \rangle e_s \rangle = 0.$$

Dieser Beweis muss noch beendet werden.

□

**Satz 4.3.3.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum. Dann existiert eine abzählbare Orthonormalbasis, genau dann wenn  $H$  separabel ist.

*Beweisidee.* Man wendet das Gram-Schmidt-Verfahren auf einer dichten Teilmenge an. □

*Bemerkung 4.3.3.* Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt separabel, falls ein  $A \subseteq X$  existiert, sodass  $A$  abzählbar und  $A$  dicht in  $X$ .

## 4.4 Projektionen

**Satz 4.4.1.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum,  $K \subseteq H$  nicht leer, konvex und abgeschlossen. Dann existiert für jedes  $x \in H$  genau ein  $y \in K$  mit

$$\|y - x\| = \inf \{ \|z - x\| \mid z \in K \}.$$

*Beweis.* Nehmen o. B. d. A. an  $x \notin K$  (sonst wähle  $y = x$ ) und  $x = 0$  (sonst verschiebe um  $-x$ ).

(Existenz) Setze  $d := \inf \{ \|z - x\| \mid z \in K \} = \inf \{ \|z\| \mid z \in K \}$ . Dann existiert eine Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in K$  mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|y_n\| < d + \frac{1}{n} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = d.$$

Wir zeigen nun, dass  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist. Mit der Parallelogrammgleichung gilt für  $n, m \in \mathbb{N}$ :

$$\left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{y_n - y_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2) .$$

Da  $K$  konvex, gilt  $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in K$  und folglich  $\left\| \frac{1}{2}(y_n + y_m) \right\| \geq d^2$ . Da

$$\frac{1}{2}(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2) \leq \frac{1}{2} \left( \left( d + \frac{1}{n} \right)^2 + \left( d + \frac{1}{m} \right)^2 \right) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} d^2$$

folgt also  $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$ , d. h.  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist in der Tat eine Cauchyfolge und da  $H$  ein Hilbertraum, existiert  $y := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in H$ . Da  $K$  abgeschlossen ist, gilt  $y \in K$ . Weiterhin gilt  $\|y\| = d$ , da

$$\|y\| \geq d \text{ da } y \in K \text{ und } \|y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq d + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d .$$

(*Eindeutigkeit*) Angenommen für  $y, \tilde{y} \in K$  gilt

$$\|y\| = \|\tilde{y}\| = \inf \{ \|z\| \mid z \in K \} = d .$$

Sei  $\lambda \in [0, 1]$  wegen der Konvexität von  $K$  gilt

$$\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y} \in K \implies \|\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y}\| \geq d .$$

Weiterhin gilt

$$\|\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y}\| \leq \lambda \|y\| + (1 - \lambda) \|\tilde{y}\| = d$$

und folglich  $\|\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y}\| = d$ . Somit

$$\begin{aligned} d^2 &= \|\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y}\|^2 = \lambda^2 \langle y, y \rangle + 2\lambda(1 - \lambda)\Re(\langle y, \tilde{y} \rangle) + (1 - \lambda)^2 \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle \\ &= \lambda^2(\langle y, y \rangle - 2\Re(\langle y, \tilde{y} \rangle) + \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle) + \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle + 2\lambda(\Re(\langle y, \tilde{y} \rangle) - \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle) \\ &= \lambda^2 \|y - \tilde{y}\|^2 + \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle - \lambda \langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle + \lambda \langle y, y \rangle - \lambda(\langle \tilde{y}, \tilde{y} \rangle - 2\Re(\langle y, \tilde{y} \rangle) + \langle y, y \rangle) \\ &= (\lambda^2 - \lambda) \|y - \tilde{y}\|^2 + d^2 \end{aligned}$$

Dies muss insbesondere auch für  $\lambda \in (0, 1) \implies \lambda^2 \neq \lambda$  gelten und somit folgt in der Tat.  $\|y - \tilde{y}\| = 0 \iff y = \tilde{y}$ .  $\square$

**Beispiel 4.4.1.** Betrachte  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$  sowie  $x = (0, 0)$  und  $K = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \geq 1\}$ . Dies ist kein Hilbertraum und die Projektion ist hier auch nicht eindeutig, da

$$P = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 = 1, y_2 \in [-1, 1]\} \implies \forall p \in P : \|x - p\|_\infty = 1 = \inf \{ \|x - z\|_\infty \mid z \in K \} .$$

**Beispiel 4.4.2.** Betrachte  $\mathbb{R}^{2n}, \|\cdot\|_1$  sowie

$$K = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} =: \lambda \cdot \hat{y} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} .$$

Sei  $m := \text{med}\{x_1, \dots, x_{2n}\}$ , d. h.

$$m = \underset{a}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{2n} |x_i - a| = \underset{a}{\operatorname{argmin}} \|x - a\hat{y}\|_1 .$$

Dann gilt  $\|x - m\hat{y}\|_1 = \inf \{ \|x - z\|_1 \mid z \in K \}$ .

**Definition 4.4.1.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Raum mit Skalarprodukt und  $X \subseteq H$ . Dann heißt

$$X^\perp := \{y \in H \mid \forall x \in X : x \perp y\}$$

orthogonales Komplement von  $X$ .

**Satz 4.4.2.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum,  $U \subseteq H$  ein abgeschlossener Unterraum. Dann gibt es für alle  $x \in H$  eindeutig bestimmte  $y_1 \in U, y_2 \in U^\perp$  mit  $x = y_1 + y_2$ .

*Beweis. (Existenz)* Da  $U$  ein Unterraum ist, ist  $U$  insbesondere konvex und nichtleer. Somit wählen wir  $y_1 \in U$  eindeutig (nach Satz 4.4.1) mit

$$\|y_1 - x\| = \inf \{\|x - u\| \mid u \in U\} .$$

Wir zeigen nun  $x - y_1 \in U^\perp$ . Seien  $u \in U, \lambda \in \mathbb{K}$ , dann

$$\|x - y_1\|^2 \leq \|x - y_1 - \lambda u\|^2 = \|x - y_1\|^2 - 2\lambda \Re(\langle x - y_1, u \rangle) + |\lambda|^2 \|u\|^2$$

Da  $\lambda, u$  beliebig, muss also in der Tat  $\langle x - y_1, u \rangle = 0$  gelten.

*(Eindeutigkeit)* Angenommen  $x = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$  mit  $\hat{y}_1 \in U, \hat{y}_2 \in U^\perp$ . Sei  $u \in U$ , dann gilt wegen der Orthogonalität

$$\|x - (\hat{y}_1 + u)\|^2 = \|x - \hat{y}_1\|^2 + \|u\|^2 \geq \|x - \hat{y}_1\|^2 .$$

Dies ist nur erfüllt, wenn wir  $\hat{y}_1 = y_1$  nach Satz 4.4.1 wählen, woraus die Eindeutigkeit folgt.  $\square$

**Beispiel 4.4.3.** Betrachte  $L^2([0, 1])$ , dann ist  $U = C^0(S^1) = \{u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} \mid u(0) = u(1)\}$  dicht.

# Kapitel 5

## Lineare Operatoren

### 5.1 Definitionen

**Definition 5.1.1.** Seien  $(V_1, \|\cdot\|)$  und  $(V_2, \|\cdot\|')$  normierte Räume, dann heißt eine lineare Abbildung (Operator)  $A : V_1 \rightarrow V_2$  beschränkt, wenn gilt:

$$\exists c \geq 0 \forall v \in V_1 : \|Av\|' \leq c \|v\|$$

*Bemerkung 5.1.1.*  $B(V_1, V_2) = \{A : V_1 \rightarrow V_2 \mid A \text{ linear beschränkt}\}$

**Satz 5.1.1.** In dieser Situation sind äquivalent:

1.  $A \in B(V_1, V_2)$
2.  $A$  ist stetig
3.  $A$  ist gleichmäßig stetig
4.  $A$  ist Lipschitz-stetig
5.  $A$  ist stetig in 0

*Beweis:* Siehe Analysis 2. □

???

**Satz 5.1.2.** Jedes lineare Funktional  $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  ist beschränkt.

*Beweis:* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung übersprungen. □

**Beispiel 5.1.1** (Volterra-Operator). Betrachte  $C^0([0, 1])$ ,  $\|A\|_\infty$ , wobei

$$I : C^0([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1]), f(z) \mapsto \int_0^z f(x) dx.$$

Dann gilt

$$|If(z)| = \left| \int_0^z f(x) dx \right| = \|f\|_\infty \cdot t \leq \|f\|_\infty$$

und mit

$$\|If\| = \sup |If(z)| : t \in [0, 1] \leq \|f\|_\infty$$

ist die Operatornorm  $\|I\| \leq 1$ . Wähle nun  $f_{[0,1]}$ , dann ist  $If(t) = t$  und damit  $\|I\| = 1$ .

**Beispiel 5.1.2.** Sei  $V_1 = C^1([0, 1])$  mit  $\|\cdot\|_\infty$  und  $V_2 = C^0([0, 1])$  mit  $\|\cdot\|_\infty$  sowie eine Abbildung

$$D : V_1 \rightarrow V_2, f(t) \mapsto f'(t)$$

Definiere  $f_n(t) = t^n$ , dann ist  $\|f_n\|_\infty = 1$  und da  $f'_n(t) = n \cdot t^{n-1}$  auch  $\|Df_n\| = n$  ??

**Satz 5.1.3.** Seien  $V$  und  $W$ ,  $\|\cdot\|_W$  normierte Räume mit  $A \in B(V, W)$  mit

$$\|A\|_{V,W} = \inf \{c \in \mathbb{R} \mid \forall v \in V : \|Av\|_W \leq c\}$$

Dann gilt:

1.  $\|A\| = \sup \{\|Av\|_W : \|v\|_V = 1\} = \sup \{\|Av\|_W : \|v\|_V \leq 1\} = \sup \left\{ \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V}, v \in V, v \neq 0 \right\}$
2.  $B \in B(V, W) : \|A + B\| = \|A\| + \|B\|$  sowie  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
3. Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  normierter Raum,  $B \in B(W, X)$ , dann gilt

$$\|AB\|_{V,X} \leq \|A\|_{V,W} \cdot \|B\|_{W,X}$$

*Beweis:* 1. Sei  $M := \sup \left\{ \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V}, v \in V, v \neq 0 \right\}$ . Für  $v = 0$ , gilt  $\|Av\| = 0$ , für  $v \neq 0$  gilt:

$$\frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} \leq M \implies \|Av\|_W \leq M \|v\|_V \implies M \geq \|A\|$$

Andererseits gilt für alle  $v \neq 0$ :

$$\frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} \leq \|A\| \implies M \leq \|A\|$$

2. Wir nutzen die Supremums- und Dreiecksungleichung aus:

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup \{\|(A + B)v\|_W : \|v\| = 1\} \leq \sup \{\|Av\|_W + \|Bv\|_W : \|v\| = 1\} \\ &\leq \sup \{\|Av\|_W : \|v\| = 1\} + \sup \{\|Bv\|_W : \|v\| = 1\} = \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

3. Gilt, da  $\|BAv\| \leq \|B\| \cdot \|Av\|_W \leq \|B\| \|A\| \|v\|_V$

□

**Beispiel 5.1.3.** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum,  $\phi \in L^2(\mu)$  und

$$M_\phi : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu), f \mapsto \phi \cdot f \text{ mit } M_\phi \cdot M_\psi = M_\psi \cdot M_\phi = M_{\phi \cdot \psi}$$

Dann gilt:

$$\|M_\phi f\|^2 = \int |\phi(x)|^2 |f(x)|^2 dx \leq \int \|\phi\|_\infty^2 |f(x)|^2 dx = \|\phi\|_\infty^2 \|f\|^2 \leq \|\phi\|_\infty^2 \mu - \text{fast überall}$$

Wir haben also  $M_\phi \in B(L^2(\mu), L^2(\mu))$  und  $\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$ .

Gleichheit gilt tatsächlich für  $\mu(\Omega) < \infty$ .

Sei  $\alpha < \|\phi\|_\infty$  und definiere

$$E = \{x : |\phi(x)| > \alpha\}$$

dann ist  $\mu(E) > 0$ . Sei nun  $f = 1_E$ , dann

$$\|M_\phi f\|^2 = \int_E \|\phi(x)\|^2 \geq \alpha \mu(E) = \alpha \|1_E\|^2$$

*Bemerkung 5.1.2.* Nach Konvention gilt  $B(V, V) = B(V)$ .

**Satz 5.1.4.** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbert Raum,  $U \subseteq H$  abgeschlossener Unterraum, dann gibt es  $P, Q \in B(H)$  so, dass:

1.  $\forall v \in H : Pv \in U$  und  $Qv \in U^\perp$
2.  $\forall v \in H : Pv + Qv = v$

Außerdem gilt:

$$\|P\| = \begin{cases} 1 & U \neq \{0\} \\ 0 & U = \{0\} \end{cases}$$

*Beweis:* Da  $U$  abgeschlossener Unterraum von  $H$ , gibt es für jedes  $v \in H$  eine eindeutige Zerlegung von  $v \in U, u^\perp \in U^\perp$  mit  $v = u + u^\perp$ . Wir verwenden die Definitionen  $Pv = u, Qv = u^\perp$  mit  $v, w \in H$  und  $v = Pv + Qv, w = Pw + Qw$ . Betrachte:

$$v + w = \underbrace{(Pv + Pw)}_{\in U} + \underbrace{(Qv + Qw)}_{\in U^\perp}$$

Folglich

$$P(v + w) = Pv + Pw \text{ und } Q(v + w) = Qv + Qw.$$

( $\lambda v$  geht analog.) Wir setzen für  $v \in H$  nun

$$\|v\|^2 = \|Pv + Qv\|^2 = \|Pv\|^2 + \|Qv\|^2 \text{ da } \langle Pv, Qv \rangle = 0$$

Daraus folgt  $\|Pv\|^2 \leq \|v\|^2$  und  $\|P\|, \|Q\| \leq 1$ . Sei  $v \in U, v \neq 0$ , dann  $Pv = v$  und damit  $\|Pv\| = \|v\|$ , also  $\|P\| \geq 1$ .  $\square$

**Satz 5.1.5.** Sei  $V$  ein normierter Raum,  $W$  ein Banachraum, dann ist  $B(V, W)$  ein Banachraum mit der Operatornorm.

*Beweis:* Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $B(V, W)$ , dann  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|A_n - A_m\| = 0$ . Sei nun  $v \in V$ , dann

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|A_n v - A_m v\| \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|A_n - A_m\| \|v\|$$

und damit ist  $(A_n v)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $W$ . Somit ist  $Av = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n v$ . Definiere  $A : V \rightarrow W$  nun als Abbildung aus diesem Grenzwert.

Hier gab es in der Vorlesung einen Nachtrag, allerdings sollte es so auch gehen.

Damit gilt schon

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \{\|Av - A_n v\|\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Seien nun  $v, w \in V$ , dann sehen wir die Linearität wie folgt:

$$A(v+w) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(v+w) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n v + A_n w = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n v + \lim_{n \rightarrow \infty} A_n w = Av + Aw \text{ (für } A(\lambda v) \text{ genauso)}$$

Zur Beschränktheit:

$$|\|A_n\| - \|A_m\|| \leq \|A_n - A_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| =: c$$

Betrachte nun:

$$\|Av\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n v\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \|v\| = c \|v\|$$

und damit  $A \in B(V, W)$ .

□

*Bemerkung 5.1.3.* Es gibt soetwas wie eine Rückrichtung: Falls  $B(V, W)$  ein Banachraum ist, wobei  $V$  nicht der triviale Vektorraum ist, so ist auch  $W$  ein Banachraum. (Wäre  $V$  der Nullvektorraum, so gäbe es mit der Nullabbildung nur eine lineare Abbildung, damit wäre  $B(V, W)$  immer vollständig.)

## 5.2 Das Dual

**Definition 5.2.1.** Sei  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein Banachraum. Dann wird  $V' = B(V, \mathbb{K})$  als Dualraum von  $V$  bezeichnet.  $\phi \in V'$  heißt auch linear beschränktes Funktional.

**Definition 5.2.2.**

**Beispiel 5.2.1.** Wir untersuchen den Dualraum von  $V = L^p(\mu)$ . Mittels der Hölderungleichung erhalten wir mit  $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)$ :

$$\left| \int f g d\mu \right| \leq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Sei nun  $\varphi_g := \int \cdot g d\mu \in V'$ . Da

$$|\varphi_g| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

ist  $\varphi_g$  beschränkt und  $\{\varphi_g : g \in L^p\} = (L^p(\mu))'$  und damit  $L^p(\mu)'' \simeq L^p(\mu)$ .

**Satz 5.2.1.** Jedes beschränkte lineare Funktional  $\varphi$  auf dem Hilbertraum  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  hat die Form  $\varphi(x) = \langle h_0, x \rangle$  für ein eindeutiges  $h_0 \in H$  und  $\|\varphi\|_{H'} = \|h_0\|$  und  $h_0 \rightarrow \varphi$  anti-linear.

*Beweis: Existenz* Sei o.B.d.A  $\varphi \neq 0$ , d.h.  $\ker \varphi = \{x \in H \mid \varphi(x) = 0\}$  ist ein echter abgeschlossener Teilraum. Dann muss aber auch  $\ker \varphi^\perp \neq \{0\}$ . Sei  $z \in \ker \varphi$  mit  $\|z\| > 0$  und o.B.d.A  $\varphi(z) = 1$ . Sei  $h \in H$  beliebig, dann sehen wir

$$\varphi(\underbrace{\varphi(h)z - h}_{\in \ker \varphi}) = \varphi(h)\varphi(z) - \varphi(h) = 0.$$

Damit ist  $z \perp \varphi(h)z - h$  und äquivalent dazu

$$0 = \langle z, \varphi(h)z - h \rangle = \varphi(h) \|z\|^2 - \langle z, h \rangle \text{ also } \varphi(h) = \left\langle \frac{z}{\|z\|^2}, h \right\rangle.$$

### Eindeutigkeit

Nehmen wir an, dass  $\langle h_1, h \rangle = \langle h_2, h \rangle$  mit  $h = h_1 - h_2$  und sei

$$0 = \langle h_1 - h_2, h \rangle = \|h_1 - h_2\|^2 \implies h_1 = h_2.$$

Über die CBS-Ungleichung gilt außerdem:

$$|\langle h_0, h \rangle| \leq \|h_0\| \|h\| \implies \|\varphi\|_{H'} \leq \|h_0\|.$$

Da aber

$$|\varphi(h_0)| = \langle h_0, h_0 \rangle = \|h_0\|^2 = \|h_0\| \|h_0\| \implies \|\varphi\| = \|h_0\|.$$

□

**Beispiel 5.2.2.** Sei  $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)'$  mit  $\mu(\omega) < \infty$  und  $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$  und jeweils  $\mu(\Omega_n) < \infty$ . Sei  $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$  und  $g \geq 0$ , dann  $\varphi^\pm(g) \geq 0$ .

Sei o.B.d.A  $\varphi \geq 0$ . Dann ist  $v_\varphi : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ ,  $v_\varphi(E) = \varphi(1_E)$  ein Maß. Wenn  $\varphi(E) = 0$ , dann  $v_\varphi(E) = 0$ . Mit dem Satz von Radon-Nikodim (LABEL???) folgt, dass es ein  $h \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}_{\geq 0})$  mit

$$\varphi(1_E) = v_\varphi(E) = \int 1_E h d\mu$$

Damit erhalten wir  $\varphi(f) = \int f h d\mu$  und die Hölderungleichung.

**Satz 5.2.2.** Die Abbildung  $\psi : H \rightarrow H', h \mapsto \langle h, \cdot \rangle$  ist eine (anti-lineare) isometrische Projektion.

*Beweis:* Wurde in der Vorlesung übersprungen. □

*Bemerkung 5.2.1.* In der Physik schreibt man auch:

$$\begin{aligned} \langle u | &:= \langle u, \cdot \rangle \text{ bra} \\ |h \rangle &:= h, \text{ ket} \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung von Notation gilt dann  $\langle u | h \rangle := \langle u, h \rangle$

**Definition 5.2.3.** Seien  $H, K$  Hilberträume, dann heißt eine Sesquilinearform  $u : H \times K \rightarrow \mathbb{K}$  beschränkt genau dann wenn

$$\exists M > 0, \forall h \in H, k \in K : |u(h, k)| \leq M \|h\|_H \|k\|_K$$

**Satz 5.2.3.** Ein Operator  $u$  wie in 5.2.3 ist genau dann beschränkt, wenn

$$\exists A \in B(K, H) : \forall h \in H, \forall k \in K : u(h, k) = \langle h, Ak \rangle$$

*Beweis:* ( $\implies$ )

Sei  $k$  fixiert,  $u(\cdot, k) \in H'$ , da:

$$|u(h, k)| \leq M \|h\|_H \|k\|_K \leq (M \|k\|_K) \|h\|_H.$$

Mit 5.2.2 folgt:

$$\exists ! A(k) \in H : \overline{u(\cdot, k)} = \langle A(k), \cdot \rangle \text{ bzw. } \forall h \in H : u(h, k) = \langle h, A(k) \rangle$$

Sei nun  $k_1, k_2 \in K$ , dann haben wir:

$$\langle h, A(k_1 + k_2) \rangle = u(h, k_1 + k_2) = u(h, k_1) + u(h, k_2) = \langle h, A(k_1) + A(k_2) \rangle$$

Sei nun  $\lambda \in \mathbb{K}, k \in K$ , so folgt:

$$\langle h, A(\lambda k) \rangle = u(h, \lambda k) = \lambda u(h, k) = \lambda \langle h, A(k) \rangle = \langle h, \lambda A(k) \rangle$$

Damit ist  $A$  linear.

Wir wissen für  $\|h\| \leq 1$  :

$$|\langle h, Ak \rangle| = |u(h, k)| \leq M \|h\| \|k\| \leq M \|k\|$$

Damit folgt  $\|Ak\| \leq M \|k\|$  also ist  $A$  beschränkt. Folglich  $A \in B(H, K)$ .

( $\impliedby$ )

Sei  $A \in B(K, H)$ , dann haben wir folgende Abschätzung mittels CBS-Ungleichung:

$$|\langle h, Ak \rangle| \leq \|h\| \|Ak\| \leq \|A\| \|h\| \|k\|$$

□



**Satz 5.2.4.** Für alle  $A \in B(K, H)$  gibt es  $A^* \in B(H, K)$  mit der Eigenschaft

$$\forall h \in H, k \in K : \langle h, Ak \rangle = \langle A^*h, k \rangle.$$

Dieser adjungierte Operator hat folgende Eigenschaften:

1.  $A \rightarrow A^*$  ist antilinear
2.  $A^{**} = A$
3.  $(AB)^* = B^*A^*$
4.  $\|A^*\| = \|A\|$  und  $\|A^*A\| = \|A\|^2$  ( $C^*$  – Axiom)

*Beweis: Existenz:*

Mittel der CBS-Ungleichung erhalten wir:

$$|\langle h, Ak \rangle| \leq \|h\| \|Ak\| \leq \|A\| \|h\| \|k\|.$$

Aber es gilt  $|\langle h, Ak \rangle| = |\langle Ah, k \rangle|$ . Damit ist  $u(k, h) := \langle Ak, h \rangle$  sesquilinear auf  $K \times H$ . Damit gibt es aber ein eindeutiges  $A^*$  mit

$$\overline{\langle Ak, h \rangle} = \overline{u(h, k)} = \overline{\langle k, A^*h \rangle}$$

zu 1: Es gilt  $\langle (\lambda A)^*h, k \rangle = \langle h, \lambda Ak \rangle = \lambda \langle h, Ak \rangle = \langle \bar{\lambda} A^*h, k \rangle$

zu 2:  $\langle A^{**}k, h \rangle = \langle k, A^*h \rangle = \overline{\langle A^*h, k \rangle} = \overline{\langle h, Ak \rangle} = \langle Ak, h \rangle$  mit  $h = A^{**} - Ak$ . Dann:

$$0 = \langle A^{**}k, h \rangle - \langle Ak, h \rangle = \langle (A^{**} - A)k, (A^{**} - A)k \rangle \implies \|A^{**}k - Ak\| = 0$$

Damit gilt dann die Gleichheit.

zu 3: Sei  $A \in B(K, H), B \in B(L, K)$  und  $AB \in B(L, H)$ . Außerdem gilt:  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ . Des Weiteren:

$$\forall h \in H, l \in L : \langle (AB)^*, l \rangle = \langle h, A(Bl) \rangle = \langle A^*l, Bl \rangle = \langle B^*A^*h, l \rangle$$

zu 4: Sei  $k \in K$  mit  $\|k\| = 1$ . Dann gilt mit der CBS-Ungleichung

$$\|Ak\|^2 = \langle Ak, Ak \rangle = \langle A^*Ak, k \rangle \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\|$$

Auf der anderen Seite:

$$\sup_{\|k\| \leq 1} \|Ak\| = \|A\|^2 \leq \|A^*\| \|A\| \implies \|A^*\| \geq \|A\|$$

Aufgrund von 2. haben wir auch hier Gleichheit. Damit haben wir dann:

$$\|A\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2$$

□

**Beispiel 5.2.3.** „bra's adjoint“

Sei nun  $A := \langle v| : H \rightarrow \mathbb{K}$  und wir betrachten den dazu adjungierten Operator  $A^* : \mathbb{K} \rightarrow H$ . Wir haben:

$$\forall h \in H, \lambda \in \mathbb{K} : \langle A^*\lambda, h \rangle = \langle \lambda, Ah \rangle_{\mathbb{K}} = \bar{\lambda} Ah = \bar{\lambda} \langle v, h \rangle = \lambda \langle v, h \rangle.$$

Daraus folgt dann  $A^*\lambda = \lambda v$  und damit  $\langle v|^* = |v\rangle$

**Beispiel 5.2.4.** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $K \subseteq H$  ein abgeschlossener Unterraum. Sei des Weiteren noch  $P, Q \in B(H)$  mit  $Ph \in K, Qh \in K^\perp, P + Q = I_H$  wobei  $I_H$  der Identitätsoperator ist. Gesucht ist nun  $P^*$ .

Betrachten wir dazu:

$$\langle P^*h, h' \rangle = \langle h, Ph' \rangle = \langle Ph, Ph \rangle + \underbrace{\langle Qh, Ph' \rangle}_{=0} = \langle P^*Ph, h' \rangle.$$

Damit haben wir  $P^* = P^*P$  und da

$$P = (P^*P)^* = P^*P^{**} = P^*P = P^* \text{ und damit } P = P^* = P^2$$

Des Weiteren haben wir  $h - Ph \perp Ph$ :

$$\langle h - Ph, Ph \rangle = \langle Ph \rangle - \langle h, P^*Ph \rangle = 0$$

(Für  $Q$  analog.)

**Definition 5.2.4.** Sei  $A \in B(H)$ , dann heißt  $A$ :

- selbstadjungiert, falls  $A^* = A$
- normal, falls  $A^*A = AA^*$
- unitär, falls  $A^*A = \text{Id}_H = AA^*$

**Beispiel 5.2.5.** Wir betrachten den  $L^2(\mu)$  mit dem Multiplikationsoperator  $M_\varphi f(x) = \varphi(x)f(x)$ . Dann gilt:

$$\langle M_\varphi^*h, f \rangle = \langle h, M_\varphi f \rangle = \int \bar{h}(x)\varphi(x)f(x)\mu(dx) = \int \overline{\bar{\varphi}(x)h(x)}f(x)\mu(dx) = \langle M_{\bar{\varphi}}h, f \rangle.$$

Somit erhalten wir  $M_\varphi^* = M_{\bar{\varphi}}$ . Falls außerdem  $\text{Im}\varphi \subseteq \mathbb{R}$ , dann ist der Operator selbstadjungiert. Des Weiteren ist er normal, da:

$$M_\varphi^*M_\varphi = M_{\bar{\varphi}}M_\varphi = M_{|\varphi|^2} = M_\varphi M_\varphi^*$$

### 5.3 Der Satz von Hahn-Banach

**Definition 5.3.1.** Eine partielle Ordnung auf einer Menge  $X$  ist eine Relation  $\leq$ , sodass für alle  $a, b, c \in X$  gilt:

1. Transitivität:  $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$
2. Reflexivität:  $a \leq a$
3. Anti-Symmetrie:  $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$

Falls für alle  $a, b \in X$  gilt  $a \leq b \vee b \leq a$ , dann wird  $X$  als total geordnet bezeichnet.

**Satz 5.3.1** (Lemma von Zorn). Sei  $(Z, \leq)$  eine partiell geordnete Menge mit der Eigenschaft, dass jede total geordnete Teilmenge (bez. *Kette*) eine obere Schranke in  $Z$  hat. Dann hat  $Z$  ein maximales Element.

**Lemma 5.3.1.** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum,  $U \subseteq V$  ein Unterraum,  $z \in V \setminus U$  so, dass  $V = \text{span}\{U \cup \{z\}\}$  sowie  $\varphi_0 \in U'$ . Dann gibt es  $\varphi \in V'$  mit  $\forall u \in U : \varphi(u) = \varphi_0(u)$  und  $\|\varphi\| = \|\varphi_0\|$ .

In der Vorlesung wurde im Lemma  $\|\varphi\| \geq \|\varphi_0\|$  angegeben, aber dies sollte direkt aus  $\varphi|_U = \varphi_0$  folgen und wir zeigen im Lemma  $\leq$  und somit Gleichheit, oder?

*Beweis.* Wir zeigen hier nur den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Nehmen o. B. d. A. an, dass  $\varphi_0 \neq 0$  (ansonsten setze  $\varphi = 0$ ) und  $\|\varphi_0\| = 1$ . Weiterhin gilt nach Voraussetzung

$$V = \text{span}\{U \cup \{z\}\} = \{u + \alpha z \mid u \in U, \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha z - u \mid u \in U, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Zeige nun, dass die Darstellung  $v = \alpha z - u \in V$  durch  $u \in U, \alpha \in \mathbb{R}$  eindeutig ist. Angenommen für  $u_1, u_2 \in U, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  gilt  $v = u_1 + \alpha_1 z = u_2 + \alpha_2 z$ , dann folgt

$$u_1 + \alpha_1 z = u_2 + \alpha_2 z \iff \overbrace{(\alpha_2 - \alpha_1)z}^{\notin U} = \overbrace{u_1 - u_2}^{\in U} \implies \alpha_1 = \alpha_2 \implies u_1 = u_2.$$

Betrachte nun  $x, y \in U$ , dann gilt (mit  $\|\varphi_0\| = 1$ )

$$\begin{aligned} \overbrace{\varphi_0(x) - \varphi_0(y)}^{\in \mathbb{R}} &\leq |\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| = |\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| \\ &= |\varphi_0(x - y)| \leq \|\varphi_0\| \|x - y\| = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|y - z\| \\ &\iff \varphi_0(x) - \|x - z\| \leq \varphi_0(y) + \|y - z\|. \end{aligned}$$

Somit existiert  $c \in \mathbb{R}$  mit

$$\sup_{x \in U} \varphi_0(x) - \|x - z\| \leq c \leq \inf_{y \in U} \varphi_0(y) + \|y - z\|.$$

Damit können wir nun die Fortsetzung definieren, wobei für  $v \in V$  (wie oben) gilt

$$\varphi(v) = \varphi(\alpha z - u) := \alpha c - \varphi_0(u).$$

Wir prüfen nun die geforderten Eigenschaften. Es gilt offensichtlich  $\varphi|_U = \varphi_0$  (setzen  $\alpha = 0$  in eindeutiger Darstellung) und somit automatisch  $\|\varphi\| \geq \|\varphi_0\|$ . Zeige nun die Normabschätzung. Zunächst gilt  $\forall \tilde{u} \in U$

$$\begin{aligned} \varphi_0(\tilde{u}) - \|\tilde{u} - z\| &\leq c \leq \varphi_0(\tilde{u}) + \|\tilde{u} - z\| \\ \iff -\|\tilde{u} - z\| &\leq c - \varphi_0(\tilde{u}) \leq \|\tilde{u} - z\| \\ \iff |c - \varphi_0(\tilde{u})| &\leq \|\tilde{u} - z\| \end{aligned}$$

Somit erhalten wir  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, u \in U$  (d.h. für  $v \in V \setminus U$ )

$$|\varphi(\alpha z - u)| = |\alpha| \left| \varphi \left( z - \frac{u}{\alpha} \right) \right| = |\alpha| \cdot \left| c - \varphi_0 \left( \frac{u}{\alpha} \right) \right| \leq |\alpha| \left\| \frac{u}{\alpha} - z \right\| = \|\alpha z - u\| .$$

Folglich gilt  $|\varphi(\alpha z - u)| \leq \|\varphi_0\| \|\alpha z - u\| \implies \|\varphi\| \leq \|\varphi_0\|$  und es folgt Normgleichheit.  $\square$

**Satz 5.3.2** (Hahn-Banach). Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum,  $U \subseteq V$  ein Unterraum und  $\varphi_0 \in U'$ . Dann gibt es ein  $\varphi \in V'$  mit  $\varphi|_U = \varphi_0$  und  $\|\varphi\|_{V'} = \|\varphi_0\|_{U'}$ . D. h. jedes beschränkte, lineare Funktional kann normgleich fortgesetzt werden.

*Beweis.* O. B. d. A.  $\|\varphi_0\| = 1$ . Wir setzen

$$Z := \left\{ (W, \psi) \mid U \subseteq W \subseteq V \text{ Unterraum, } \psi \in W', \psi|_U = \varphi_0, \|\psi\| = \|\varphi_0\| = 1 \right\} .$$

Definieren partielle Ordnung auf  $Z$  über

$$(W, \psi) \leq (\tilde{W}, \tilde{\psi}) : \iff W \subseteq \tilde{W} \text{ und } \tilde{\psi}|_W = \psi .$$

Sei nun  $Z_0 \subseteq Z$  eine total geordnete Teilmenge, womit wir  $W^* \subseteq V$  wie folgt definieren

$$Z_0 := \{(W_i, \psi_i) \mid i \in I\} \quad \text{und} \quad W^* := \bigcup_{i \in I} W_i .$$

Dabei ist  $W^*$  ein Unterraum, da für  $x, y \in W^*$  existieren  $i_1, i_2 \in I$ , sodass  $x \in W_{i_1}$  und  $y \in W_{i_2}$ . Sei o. B. d. A.  $(W_{i_2}, \psi_{i_2}) \geq (W_{i_1}, \psi_{i_1})$ , dann gilt nach Voraussetzung auch  $x \in W_{i_2}$ , dies ist ein Unterraum und somit  $x + y \in W^*$ . Wir definieren nun ein lineares Funktional  $\psi^*$  auf  $W^*$ , wobei für  $w \in W^*$

$$\exists \hat{i} \in I : w \in W_{\hat{i}} \text{ und somit } \psi^*(w) := \psi_{\hat{i}}(w) .$$

Zeige nun, dass  $\psi^*$  wohldefiniert ist. Seien  $(W_{i_j}, \psi_{i_j}) \in Z_0, j \in \{1, 2\}, w \in W_{i_1}$ , o. B. d. A.  $W_{i_1} \subseteq W_{i_2}$  und  $\psi_{i_2}|_{W_{i_1}} = \psi_{i_1}$ . Dann gilt  $\psi_{i_2}(w) = \psi_{i_1}(w)$ , d. h.  $\psi^*$  ist wohldefiniert. Weiterhin existiert für alle  $w \in W^*$  ein  $i^* \in I$  mit

$$|\psi^*(w)| = |\psi_{i^*}(w)| \leq \|\psi_{i^*}\| \|w\| = \|\varphi_0\| \|w\| = \|w\| \implies \|\psi^*\| \leq 1 .$$

Da offensichtlich  $\|\psi^*\| \geq \|\varphi_0\|$  (wegen  $\psi^*|_U = \varphi_0$ ), folgt  $\|\psi^*\| = 1$ . Somit  $(W^*, \psi^*) \in Z$  und für  $(W, \psi) \in Z_0$  beliebig gilt nach Konstruktion

$$W \subseteq W^* \text{ und } \forall w \in W : \psi^*(w) = \psi(w) \implies (W, \psi) \leq (W^*, \psi^*) .$$

Somit ist  $(W^*, \psi^*)$  eine obere Schranke von  $Z_0$ . Nach dem Lemma von Zorn hat  $Z_0$  also ein Maximum, bez. dieses mit  $(W_0, \psi_0)$ . Angenommen  $W_0 \neq V$ . Dann können wir für  $z \in V \setminus W_0$  Lemma 5.3.1 anwenden auf  $W_1 := \text{span}\{W_0 \cup \{z\}\}$ , d. h.

$$\exists \eta \in W_1' : \eta|_{W_0} = \psi_0 \text{ und } \|\eta\| = \|\psi_0\| = \|\varphi_0\| .$$

Dann folgt jedoch  $(W_1, \eta) \in Z$  mit  $(W_1, \eta) > (W_0, \psi_0)$ , was ein Widerspruch dazu ist, dass  $(W_0, \psi_0)$  eine obere Schranke ist. Somit leistet  $W_0 = V$  und  $\varphi := \psi_0$  das Verlangte.  $\square$

**Beispiel 5.3.1.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $U \subseteq V$  ein dichter Teilraum von  $V$  und  $\varphi_0 \in U'$ . Nach Voraussetzung existiert für jedes  $x \in V$  eine Cauchyfolge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in U$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Da  $\varphi_0$  beschränkt und linear (und somit stetig), folgt, dass auch  $(\varphi_0(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge auf

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  (und somit konvergent) ist. Wir definieren die (eindeutige) Fortsetzung  $\varphi \in V'$  mit

$$\forall x \in V' : \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0(x_n) .$$

Weiterhin gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_0\| \|x_n\| = \|\varphi_0\| \|x\| .$$

Es ist nicht ganz klar, wozu die letzte Abschätzung nötig ist und wieso die Eindeutigkeit gilt.

**Satz 5.3.3.** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum, wobei  $V \neq \{0\}$ . Dann gibt es für jedes  $x_0 \neq 0 \in V$  ein  $\varphi \in V'$  mit  $\varphi(x_0) = \|x_0\|$  und  $\|\varphi\| = 1$ .

*Beweis.* Wir setzen  $U := \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ , damit ist  $U \subseteq V$  ein Unterraum. Definieren  $\varphi_0 \in U'$  über

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} : \varphi_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\| \implies \varphi_0(x_0) = \|x_0\| .$$

Weiterhin gilt

$$\|\varphi_0\| = \sup \{ |\varphi_0(\alpha x_0)| \mid \alpha \in \mathbb{K}, |\alpha| \|x_0\| \leq 1 \} = \sup \{ |\alpha| \|x_0\| \mid |\alpha| \|x_0\| \leq 1 \} = 1 .$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach können wir nun  $\varphi_0$  normgleich nach  $V'$  fortsetzen und erhalten somit die geforderten Eigenschaften.  $\square$

**Satz 5.3.4.** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Dann ist

$$\psi : V \rightarrow V'', \quad x \mapsto (x'' : \varphi \mapsto \varphi(x))$$

eine isometrische Abbildung.

*Beweis.* Es gilt

$$\|x''\| = \sup \{ |\varphi(x)| \mid \varphi \in V', \|\varphi\| \leq 1 \}$$

Dabei gilt  $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\| \leq \|x\|$  für  $\|\varphi\| \leq 1$ . Somit  $\|x''\| \leq \|x\|$ . Da  $\varphi_x \in V'$  mit  $\varphi_x(x) := \|x\|$ , folgt die Gleichheit  $\|x''\| = \|x\|$ .  $\square$

**Definition 5.3.2.** Sei  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{K}$ ,  $V'$  der Dualraum und  $V''$  der Bidualraum. Dann ist die natürliche Einbettung  $\iota$  definiert durch:

$$\iota : V \rightarrow V'', \quad \iota(v)(\varphi) = \varphi(v) \text{ für alle } v \in V, \varphi \in V'$$

Außerdem ist  $\iota$  per Definition injektiv und linear. Des Weiteren erhält  $\iota$  die Norm:

$$\|\iota(v)\|_{V''} = \|v\|_V$$

**Definition 5.3.3.** Ein normierter Raum  $X$  heißt reflexiv, wenn die natürliche Einbettung  $X \rightarrow X''$  bijektiv (bzw. surjektiv) ist.

*Bemerkung 5.3.1.* Sei  $X'' = (X')'$  ein Banachraum, dann ist  $X$  ein Banachraum. Es gibt damit keine nichtvollständigen reflexiven Räume.

**Beispiel 5.3.2.** Sei  $1 < p < \infty$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , dann gilt  $L^p(\mu)' = L^q(\mu)$  für  $\sigma$ -endliche Maße. Wir sehen aber ebenfalls  $L^q(\mu)' = L^p(\mu)$ , also ist  $L^p(\mu)$  tatsächlich reflexiv.

Am einfachsten ist  $p = q = 2$ . Also ist  $L^2(\mu)$  ein Selbstdual.

*Bemerkung 5.3.2.* Wir haben also meistens eine von beiden Ketten:

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{\iota} X' \xrightarrow{\iota'} X'' \simeq X \\ X &\xrightarrow{\iota} X' \simeq X \end{aligned}$$

Tatsächlich kann es sonst nur unendlich lange Ketten geben. Betrachte das folgende Beispiel:

**Beispiel 5.3.3.** Wir untersuchen nun die Dualkette von

$$c_0 = \left\{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\}$$

Es stellt sich heraus, dass  $c'_0 = \ell^1$ . Außerdem stellt sich heraus, dass  $(\ell^1)' = \ell^\infty$  und wiederum  $(\ell^\infty)' = \{ \mu : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}, \mu \text{ ist endlich additiv} \}$ . Bei  $\mu$  handelt es sich nicht nur um Maße, sondern um Inhalte. Diese Kette zieht sich so fort.

## 5.4 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

**Definition 5.4.1.** Sei  $(X, \rho)$  ein Maßraum, dann heißt  $S \subset X$  nirgends dicht, wenn die Vervollständigung  $\bar{S}$  keine Kugel enthält. Mit

$$\bar{S} = \left\{ x \in X : \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in S : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \right\} \text{ und } \bar{S} = S \cup \partial S.$$

Das Innere ist definiert als

$$S^\circ = \{ x \in X \mid \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(x) \subseteq S \}.$$

$S$  ist genau dann nirgends dicht, wenn  $\bar{S}^\circ = \emptyset$ .

**Definition 5.4.2.** Sei  $Y \subset X$ ,  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Familie nirgends dichter Mengen, dann heißt  $Y$  mager genau dann, wenn  $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ .

**Beispiel 5.4.1.** Sei  $X = \mathbb{R}$ .

1. Die Cantormenge  $C$  ist nirgends dicht.
2.  $\mathbb{Q}$  ist nirgends dicht.

**Lemma 5.4.1.** Seien  $(V, \|\cdot\|_V)$  sowie  $(W, \|\cdot\|_W)$  normierte Räume,  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Sei  $r, \varepsilon > 0$ ,  $x_0 \in V$  mit  $\overline{K_\varepsilon(x_0)} \subset T^{-1}(\overline{K_r(0)})$ , dann ist  $T$  beschränkt und  $\|T\| \leq \frac{2r}{\varepsilon}$ .

*Beweis:* Sei  $y \in V$  und  $\|y\| \leq \varepsilon$ , dann  $x_0, x_0 + y \in T^{-1}(\overline{K_r(0)})$ , also  $\|Tx_0\| \leq r$  und  $\|T(x_0 + y)\| \leq r$ . Mit der Dreiecksungleichung folgt:

$$\|Ty\| = \|T(x_0 + y) - Tx_0\| \leq 2r.$$

Sei nun  $x \in V$ ,  $\|x\|_V \leq 1$ , dann sehen wir

$$\|Tx\| = \frac{1}{\varepsilon} \|T(\varepsilon x)\| \leq 2 \frac{r}{\varepsilon}$$

□

*Bemerkung 5.4.1.* Die Kategorien sind wie folgt definiert:

1. Eine Menge  $M$  heißt von *Kategorie 1*, wenn es eine Folge  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  nirgends dichter Mengen gibt mit  $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ .
2. Eine Menge  $M$  heißt von *Kategorie 2*, wenn  $M$  nicht von Kategorie 1 ist.

**Satz 5.4.1** (Cantor'scher Schnitt). Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum,  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine absteigende Folge nichtleerer abgeschlossener Mengen in  $X$ , mit  $K_{n+1} \subset K_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei außerdem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(K_n) = 0$ , dann gibt es  $x \in X$  mit  $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$ .

**Satz 5.4.2.** Sei  $(X, \rho)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge nirgends dichter Mengen, dann gibt es  $x \in X$  mit  $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ .

*Beweis:* Da  $S_n$  nirgends dicht ist, ist  $S_n^o = \emptyset$ . Nach Definition gibt es zu jedem  $S_n$  und jeder offenen Menge  $U \subseteq X$  eine Menge  $B \subseteq U$  mit  $\bar{B} \cap S_n = \emptyset$ . Sei  $B_1$  nun eine beliebige nicht-leere offene Teilmenge von  $X$ . Da  $S_1$  nirgends dicht ist, gibt es  $B_2 \subset B_1$  mit  $\bar{B}_2 \cap S_1 = \emptyset$ . So definiere man sich eine Folge absteigend nicht-leerer offener Mengen  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  wobei  $B_{n+1} \subseteq B_n$  und  $\bar{B}_{n+1} \cap S_n = \emptyset$ . Da  $X$  vollständig ist, garantiert der Satz von Cantor, dass der Durchschnitt der abgeschlossenen Mengen  $\bar{B}_n$  nicht leer ist, also  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \neq \emptyset$ .  $\square$

**Satz 5.4.3** (Gleichmäßige Beschränktheit). Seien  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  normierte Räume und  $\mathcal{F}$  eine Familie von Operatoren mit  $\mathcal{F} \subseteq B(V, W)$  mit

$$\forall x \in V : \sup \{\|Tx\|_W : T \in \mathcal{F}\} < \infty,$$

dann gilt  $\sup \{\|T\|_{V,W} : T \in \mathcal{F}\} < \infty$ .

*Beweis:* Wir zerlegen  $V$  zunächst in abzählbare Mengen mit

$$S_n := \{x \in V : \forall T \in \mathcal{F}, \|Tx\| \leq n\}$$

und  $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ . Aufgrund von 5.4.2 hat  $\bar{S}_n$  ein nichtleeres Inneres für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ .  $S_n$  ist abgeschlossen: Sei  $x_m \in S_n$  mit  $m = 1, 2, \dots$  und  $x_m \rightarrow x$ . Dann gilt für alle  $T \in \mathcal{F}$ , dass  $\|Tx_m\| \leq n$ , mit Stetigkeit aber  $\|Tx_m\| \rightarrow \|Tx\|$ . Also  $\|Tx\| \leq n$  für alle  $T \in \mathcal{F}$ .

Sei nun  $n \in \mathbb{N}$  fixiert, dann hat  $S_n$  einen inneren Punkt  $x_0$ . Sei  $\varepsilon > 0$  so gewählt, dass

$$\overline{K_\varepsilon(x_0)} \subseteq S_n \subseteq \{x \in V : \|Tx\| \leq n, T \in \mathcal{F}\},$$

dann folgt mit 5.4.1  $\|T\| \leq \frac{2n}{\varepsilon}$ .  $\square$

**Satz 5.4.4** (Banach-Steinhaus). Sei  $\{T_n\}$  eine Folge beschränkter linearer Operatoren mit  $T_n \in B(X, Y)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Außerdem existiere für alle  $x \in X$  auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ . Definiere  $T : X \rightarrow Y$  durch  $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ . Dann ist  $T \in B(X, Y)$ .

*Beweis:*  $T$  ist offensichtlich linear. Sei  $x \in X$ , dann ist  $\sup_n \|T_n x\| < \infty$ , da  $\{T_n x\}$  nach Voraussetzung konvergiert und konvergente Folgen in metrischen Räumen beschränkt sind. 5.4.3 liefert uns nun, dass  $\sup \|T_n\| = M < \infty$ . Damit folgt über die CBS-Ungleichung für alle  $x \in X, n \in \mathbb{N}$ , dass  $\|T_n x\| \leq M \|x\|$ .  $\square$

## 5.5 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

**Satz 5.5.1.** Sei  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein normierter Raum und  $A \subseteq V$  eine Teilmenge mit

$$\forall \varphi \in V' : \sup \{ |\varphi(x)| \mid x \in A \} < \infty .$$

Dann ist  $A$  beschränkt.

*Beweis.* Betrachte die kanonische Einbettung  $\Phi : V \rightarrow V''$ ,  $\Phi(x)(\varphi) = \varphi(x)$ . Diese ist isometrisch, wie in Satz 5.3.4 gezeigt. Sei nun

$$\mathcal{F} = \Phi(A) = \{ \Phi(x) \mid x \in A \} \subseteq V'' = B(V', \mathbb{K}) .$$

Damit gilt nun für alle  $\varphi \in V'$

$$\begin{aligned} \sup \{ \|Y(\varphi)\| \mid Y \in \Phi(A) \} &= \sup \{ |\varphi(x)| \mid x \in A \} \\ &= \sup \{ |\varphi(\Phi^{-1}(Y))| \mid Y \in \Phi(A) \} = \sup \{ |\varphi(x)| \mid x \in A \} < \infty \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der zweiten Zeile  $\Phi^{-1}(\Phi(A)) = A$  (da  $\Phi$  injektiv) ausgenutzt. Nach Satz 5.1.5 ist  $V'$  ein Banachraum, das heißt wir können den Satz zur gleichmäßigen Beschränktheit anwenden, mit  $\mathcal{F}$  wie oben definiert. Es gilt also

$$\begin{aligned} \sup \{ \|Y(\varphi)\| \mid Y \in \Phi(A) \} < \infty &\implies \\ \infty &> \sup \{ \|Y\|_{V''} \mid Y \in \Phi(A) \} = \sup \{ \|\Phi(x)\|_{V''} \mid x \in A \} = \sup \{ \|x\|_V \mid x \in A \} . \end{aligned}$$

Somit ist  $A$  in der Tat beschränkt. □

*Bemerkung 5.5.1.* Seien  $V, A$  wie im Satz. Wir bezeichnen die  $A$  als schwach beschränkt, falls

$$\forall \varphi \in V' : \sup \{ |\varphi(x)| \mid x \in A \} < \infty .$$

und als stark beschränkt, falls

$$\sup \{ \|x\|_V \mid x \in A \} < \infty .$$

Wir zeigen hier tatsächlich die Äquivalenz von starker und schwacher Beschränktheit, die Gegenrichtung gilt ebenfalls. Die Konzepte stark (bzgl.  $\|\cdot\|_V$ ) und schwach bzgl. aller  $\varphi \in V'$  lassen sich auch auf weitere Begriffe (z. B. Kompaktheit, Abgeschlossenheit) übertragen.

## 5.6 Der Satz von der offenen Abbildung

*Bemerkung 5.6.1* (Motivation). Seien  $V, W$  Banachräume sowie  $T \in B(V, W)$ , d. h.  $T : V \rightarrow W$  bijektiv, linear und beschränkt. Somit existiert  $T^{-1} : W \rightarrow V$ . Die Umkehrabbildung ist linear, da aus

$$T(T^{-1}(x+y)) = x+y \quad \text{und} \quad T(T^{-1}(x) + T^{-1}(y)) = T(T^{-1}(x)) + T(T^{-1}(y)) = x+y$$

unter Ausnutzung der Injektivität von  $T$  folgt, dass  $T^{-1}(x+y) = T^{-1}(x) + T^{-1}(y)$ . Weiterhin stellt sich die Frage, ob  $T^{-1}$  auch beschränkt ist. Nach Satz 5.1.1 g. z. z., dass  $T^{-1}$  stetig. Dafür ist folgende Bedingung notwendig

$$\forall G \subseteq V \text{ offen} : (T^{-1})^{-1}(G) = T(G) \subseteq W \text{ offen} .$$



**Beispiel 5.6.1.** Betrachte die Banachräume  $V = W = (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ . Dann ist  $T \in B(V, W)$

$$\forall f \in C^0([0, 1]) : T(f) = \int_0^x f(y) dy$$

ein injektiver Operator. Dann können wir  $\tilde{T}^{-1}$  definieren mit

$$\tilde{T}^{-1}(g(x)) = g'(x) .$$

Da  $T$  nicht bijektiv ist existiert in diesem Fall jedoch keine Umkehrabbildung.

**Satz 5.6.1** (Satz von der offenen Abbildung). Seien  $V, W$  Banachräume und  $T \in B(V, W)$ . Falls  $T(V) = W$ , dann ist für alle  $G \subseteq V$  offen auch  $T(G)$  offen.

Wir zeigen zunächst zwei Lemmata.

**Lemma 5.6.1.** Seien  $V, W$  Banachräume und  $T \in B(V, W)$ ,  $T(V) = W$ . Dann gibt es ein  $d > 0$  mit

$$\forall \varepsilon > 0 \forall y \in W \exists x \in V : \|Tx - y\| < \varepsilon \text{ und } \|x\| < d^{-1} \|y\| .$$

*Beweis.* Da  $T$  surjektiv ist, existiert für  $y \in W$  beliebig ein  $\tilde{x} \in V$  mit  $T\tilde{x} = y$ . Somit gilt

$$W = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} T(K_m(0)) .$$

Da  $W$  ein vollständiger metrischer Raum, können wir die Kontraposition des Bairschen Kategoriensatzes anwenden. Demnach existieren  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $y_0 \in W$ ,  $m \in \mathbb{N}$  mit

$$K_r(y_0) \subseteq \overline{T(K_m(0))} .$$

Falls für  $\tilde{y} \in W : \|\tilde{y}\| < r$ , dann folgt  $y_0, y_0 + \tilde{y} \in K_r(y_0)$  und somit auch  $y_0, y_0 + \tilde{y} \in \overline{T(K_m(0))}$ . Nach Definition des Abschlusses existieren Folgen  $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $V$  mit

$$\forall n \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2\} : \|x_n^i\| < m \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n^1) = y_0, \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n^2) = y_0 + \tilde{y} .$$

Definiere nun die Folge  $(x_n^3)_{n \in \mathbb{N}}$  durch  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n^3 = x_n^2 - x_n^1$ . Damit gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \|x_n^3\| \leq 2m \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n^3) = \tilde{y} .$$

Wir wählen nun  $y \in W$ ,  $y \neq 0$  (sonst  $x = 0$ ) und  $\varepsilon > 0$  fixiert. Wende nun obige Rechnung auf folgendes  $\tilde{y}$  an

$$\tilde{y} = \frac{r}{2} \frac{y}{\|y\|} \implies \|\tilde{y}\| < r \implies \exists (x_n^3)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} x_n^3 \in V, \|x_n^3\| \leq 2m \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n^3) = \tilde{y} .$$

Somit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\|y\|}{r} x_n^3 = y \implies \exists n \in \mathbb{N} : \left\| T\left(\frac{2\|y\|}{r} x_n^3\right) - y \right\| < \varepsilon .$$

Setze nun  $d := \frac{r}{4m}$ , dann folgt

$$\left\| \frac{2\|y\|}{r} x_n^3 \right\| < \frac{2\|y\|}{r} 2m = \frac{4m}{r} \|y\| = d^{-1} \|y\| .$$

Dies war gerade zu zeigen. □

**Lemma 5.6.2.** Seien  $V, W$  Banachräume und  $T \in B(V, W), T(V) = W$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$  mit

$$K_\delta(0) \subseteq T(K_1(0)) \iff \forall y \in W \text{ mit } \|y\| < \delta \exists x \in V \text{ mit } \|x\| < 1 \text{ und } Tx = y.$$

*Beweis.* Wir erhalten die Behauptung durch iteratives Anwenden des vorhergehenden Lemmas. Setzen  $\delta = d$ , wobei  $d$  wie im vorherigen Lemma sei. Sei weiterhin  $y_0 := y \in K_d(0)$  fixiert sowie  $\varepsilon_0 = \frac{d}{2}$ . Dann liefert Lemma 5.6.1

$$\exists x_0 \in K_1(0) : \|T(x_0) - y_0\| < \frac{d}{2}.$$

Dabei braucht nicht der Abschluss  $\overline{K_1(0)}$  zu betrachtet werden, weil nach dem Lemma  $\|x_0\| \leq d^{-1} \|y_0\| < d^{-1}d = 1$ . Erneutes Anwenden des Lemmas auf  $y_1 := y_0 - T(x_0)$  und  $\varepsilon_1 = \frac{d}{4}$  liefert

$$\exists x_1 \in K_{\frac{1}{2}}(0) : \|T(x_1) - y_1\| = \|T(x_1) + T(x_0) - y\| < \frac{d}{4}$$

Dabei gilt  $x_1 \in K_{\frac{1}{2}}(0)$ , da

$$\|x_1\| \leq d^{-1} \|y_1\| = d^{-1} \|y_0 - T(x_0)\| < \frac{d}{2d} = \frac{1}{2}.$$

Iteration führt zu der allgemeinen Form, dass für  $y_{n+1} = y_0 - T(x_n) - T(x_{n-1}) - \dots - T(x_0)$  gilt

$$\exists x_{n+1} \in K_{2^{-(n+1)}}(0) : \|T(x_{n+1}) - y_{n+1}\| = \|T(x_{n+1}) + T(x_n) + \dots + T(x_0) - y\| < d2^{-(n+2)}.$$

Nach Konstruktion gilt  $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2 < \infty$ . Somit ist  $(\sum_{n=0}^m x_n)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge, denn es gilt für  $m, m' \in \mathbb{N}, m' > m$

$$\left\| \sum_{n=0}^{m'} x_n - \sum_{n=0}^m x_n \right\| = \left\| \sum_{n=m+1}^{m'} x_n \right\| \leq \sum_{n=m+1}^{m'} \|x_n\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Da  $V$  ein Banachraum ist, existiert  $x = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m x_n$ , wobei  $\|x\| < 2$ . Da  $T \in B(V, W)$  und somit insbesondere stetig, gilt auch  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m T(x_n) = T(x)$ . Somit gilt insbesondere

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y - \sum_{n=0}^m T(x_n) = y - T(x).$$

Nach der obigen iterativen Konstruktion gilt aber auch

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| y - \sum_{n=0}^m T(x_n) \right\| = 0.$$

Daraus folgt also

$$\forall y \in K_d(0) \exists x \in \overline{K_2(0)} : Tx = y.$$

Setzen wir nun  $\delta = \frac{d}{2}$ , folgt die Behauptung.  $\square$

*Beweis von Satz 5.6.1.* Sei  $G \subseteq V$  offen und  $y \in T(G)$ , d. h. es existiert  $x_0 \in G : y = T(x_0)$ . Für Offenheit g. z. z., dass  $T(G)$  eine offene Kugel um  $y$  enthält. Wir setzen

$$\tilde{G} := G - x_0 = \{g - x_0 \mid g \in G\} \xrightarrow{T \text{ linear}} T(\tilde{G}) = T(G) - y.$$

Somit g. z. z.  $\exists \tilde{\delta} > 0 : K_{\tilde{\delta}}(0) \subseteq T(\tilde{G})$ . Da  $\tilde{G}$  offen und  $0 \in \tilde{G}$ , existiert  $\varepsilon > 0$  mit  $K_\varepsilon(0) \subseteq \tilde{G}$ . Somit ergibt sich unter Ausnutzung der Linearität von  $T$  sowie mit  $\delta$  wie in Lemma 5.6.2

$$T(\tilde{G}) \supseteq T(K_\varepsilon(0)) = \varepsilon T(K_1(0)) \supseteq \varepsilon K_\delta(0) = K_{\varepsilon\delta}(0).$$

Setzen also  $\tilde{\delta} = \varepsilon\delta$ , dann gilt  $K_{\tilde{\delta}}(0) \subseteq T(\tilde{G}) \iff K_{\tilde{\delta}}(y) \subseteq T(G)$ . Somit ist  $T(G)$  in der Tat offen.  $\square$

**Satz 5.6.2** (Schlussfolgerung). Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 5.6.1  $T$  injektiv (d. h.  $T$  bijektiv), dann gilt  $T^{-1} \in B(W, V)$ .

*Beweis.* Wie bereits zuvor motiviert, g. z. z., dass  $T^{-1}$  beschränkt und somit g. z. z., dass  $T^{-1}$  stetig. Es gilt

$$T^{-1} : W \rightarrow V \text{ stetig} \iff \forall G \subseteq V \text{ offen} : (T^{-1})^{-1}(G) = T(G) \subseteq W \text{ offen} .$$

Dies gilt nach Satz 5.6.1 und somit ist  $T^{-1} \in B(W, V)$ .  $\square$

## 5.7 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

**Definition 5.7.1.** Seien  $X, Y$  normierte Vektorräume,  $f : X \rightarrow Y$  eine lineare Abbildung. Dann bezeichnen wir

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$$

als den *Graph* von  $f$ .

**Satz 5.7.1.** Seien  $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$  Banachräume. Dann wird  $V \times W$  unter eintragsweisen Operationen zu einem Vektorraum, d. h. für alle  $x, x_1 \in V, y, y_1 \in W, \lambda \in \mathbb{K}$  gilt

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \quad \text{und} \quad (x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1) .$$

Mit jeder der Normen

$$\|(x, y)\|_1 := \|x\|_V + \|y\|_W, \quad \|(x, y)\|_2 := \sqrt{\|x\|_V^2 + \|y\|_W^2}, \quad \|(x, y)\|_3 := \max\{\|x\|_V, \|y\|_W\}$$

wird  $V \times W$  ein Banachraum.

*Beweis.* Dass  $V \times W$  ein Vektorraum ist, ist aus der linearen Algebra bekannt. Zeige nun, dass  $\|\cdot\|_1$  eine Norm ist. Es gilt  $\forall (x, y) \in V \times W$

$$0 = \|(x, y)\|_1 \iff \|x\|_V + \|y\|_W = 0 \iff \|x\|_V = 0 \wedge \|y\|_W = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0 .$$

Somit ist  $\|\cdot\|_1$  definit. Die Homogenität ist klar. Zeige nun die Dreiecksungleichung mit

$$\|(x + x_1, y + y_1)\|_1 = \|x + x_1\|_V + \|y + y_1\|_W \leq \|x\|_V + \|x_1\|_V + \|y\|_W + \|y_1\|_W = \|(x, y)\|_1 + \|(x_1, y_1)\|_1 .$$

$\|\cdot\|_3$  ist offensichtlich eine Norm. Für  $\|\cdot\|_2$  reicht es die Dreiecksungleichung zu zeigen, der Rest ist ebenfalls trivial. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \|(x + x_1, y + y_1)\|_2^2 &= \|x + x_1\|_V^2 + \|y + y_1\|_W^2 \leq (\|x\|_V + \|x_1\|_V)^2 + (\|y\|_W + \|y_1\|_W)^2 \\ &= \|x\|_V^2 + 2\|x\|_V\|x_1\|_V + \|x_1\|_V^2 + \|y\|_W^2 + 2\|y\|_W\|y_1\|_W + \|y_1\|_W^2 \\ \text{(ii)} \quad (\|(x, y)\|_2 + \|(x_1, y_1)\|_2)^2 &= \left( \sqrt{\|x\|_V^2 + \|y\|_W^2} + \sqrt{\|x_1\|_V^2 + \|y_1\|_W^2} \right)^2 \\ &= \|x\|_V^2 + \|y\|_W^2 + \|x_1\|_V^2 + \|y_1\|_W^2 + 2\sqrt{(\|x\|_V^2 + \|y\|_W^2)(\|x_1\|_V^2 + \|y_1\|_W^2)} . \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \text{(i)} \leq \text{(ii)} &\iff \|x\|_V\|x_1\|_V + \|y\|_W\|y_1\|_W \leq \sqrt{(\|x\|_V^2 + \|y\|_W^2)(\|x_1\|_V^2 + \|y_1\|_W^2)} \\ &\iff (\|x\|_V\|x_1\|_V + \|y\|_W\|y_1\|_W)^2 \leq (\|x\|_V^2 + \|y\|_W^2)(\|x_1\|_V^2 + \|y_1\|_W^2) \\ &\iff 2\|x\|_V\|x_1\|_V\|y\|_W\|y_1\|_W \leq \|x\|_V^2\|y_1\|_W^2 + \|y\|_W^2\|x_1\|_V^2 \\ &\iff 0 \leq (\|x\|_V\|y_1\|_W - \|y\|_W\|x_1\|_V)^2 . \end{aligned}$$

Somit ist die Dreiecksungleichung in der Tat erfüllt. Wir zeigen nun, Vollständigkeit bzgl.  $\|\cdot\|_1$ . Sei  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in V, y_n \in W$  eine Cauchyfolge in  $V \times W$ . Dann sind nach Definition auch  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $V$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $W$  Cauchyfolgen, d. h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n := x \in V \text{ bzgl. } \|\cdot\|_V \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n := y \in W \text{ bzgl. } \|\cdot\|_W \quad \text{existieren.}$$

Damit wählen wir  $(x, y) \in V \times W$  als Kandidaten für den Grenzwert von  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ . In der Tat

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\|_1 = \|(x_n - x, y_n - y)\|_1 = \|x_n - x\|_V + \|y_n - y\|_W \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

*Bemerkung 5.7.1.* Die Normen  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_3$  auf  $V \times W$  sind äquivalent. Wir bezeichnen  $V \times W$  auch mit  $V \oplus W$ .

**Satz 5.7.2.** Seien  $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  und  $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$  Hilberträume. Dann ist  $H = H_1 \times H_2$  ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_1 + \langle y_1, y_2 \rangle_2.$$

*Beweis.* Man kann leicht einsehen, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die Norm  $\|\cdot\|_2$  induziert. Der Rest folgt trivial. □

**Satz 5.7.3** (Satz vom abgeschlossenen Graphen). Seien  $(V, \|\cdot\|_V)$ ,  $(W, \|\cdot\|_W)$  Banachräume und  $T : V \rightarrow W$  linear. Dann gilt

$$T \in B(V, W) \iff \Gamma_T \text{ abgeschlossen in } (V \times W).$$

*Bemerkung 5.7.2.*  $\Gamma_T$  ist ein Untervektorraum von  $V \times W$ , da unter Ausnutzung der Linearität von  $T$  gilt für  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $x, x_1, x_2 \in V$

$$\begin{aligned} \lambda(x, Tx) &= (\lambda x, \lambda Tx) = (\lambda x, T(\lambda x)) \\ (x_1, Tx_1) + (x_2, Tx_2) &= (x_1 + x_2, Tx_1 + Tx_2) = (x_1 + x_2, T(x_1 + x_2)). \end{aligned}$$

Weiterhin ist  $\Gamma_T$  abgeschlossen, genau dann wenn

$$\forall ((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} (x_n, y_n) \in \Gamma_T \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) =: (x, y) \in V \times W \text{ existiert} \implies (x, y) \in \Gamma_T.$$

Mit Satz 5.1.1 lässt sich dies äquivalent umformulieren zu

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \forall n \in \mathbb{N} x_n \in V, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n =: x \in V \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = y \in W \text{ existieren} \implies y = T(x)$$

*Beweis.* ( $\implies$ ) Sei  $T \in B(V, W)$  und sei  $((x_n, Tx_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} x_n \in V$  eine Folge in  $\Gamma_T$ , mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, Tx_n) = (x, y) \in V \times W$ . Somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_V = 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - y\|_W = 0.$$

Aufgrund der Stetigkeit von  $T$  folgt in der Tat  $T(x) = y$ .

( $\impliedby$ ) Sei  $\Gamma_T$  abgeschlossen, dann ist  $\Gamma_T$  als Unterraum des Banachraums  $(V \times W, \|\cdot\|_1)$  ebenfalls ein Banachraum. Wir definieren die stetigen, linearen Abbildungen

$$P_1 : \Gamma_T \rightarrow V, P_1(x, Tx) = x \quad \text{und} \quad P_2 : \Gamma_T \rightarrow W, P_2(x, Tx) = Tx.$$

Dabei gilt für die Operatornorm  $\|P_1\|$

$$\begin{aligned} \|P_1(x, Tx)\|_V &= \|x\|_V \leq \|x\|_V + \|Tx\|_W = \|(x, Tx)\|_1 \implies \\ \|P_1\| &= \sup \{ \|P_1(x, Tx)\|_V \mid \|(x, Tx)\|_1 = 1 \} \leq 1 . \end{aligned}$$

Analog folgt  $\|P_2\| \leq 1$ . Weiterhin gilt  $P_1(\Gamma_T) = V$ , d. h.  $P_1$  injektiv. Außerdem ist  $P_1$  injektiv, da

$$P_1(x, Tx) = 0 \iff x = 0 \iff x = 0 \text{ und } Tx = 0 \iff (x, Tx) = 0_{V \times W} .$$

Aus der Bijektivität von  $P_1$  folgt nun mit Satz 5.6.2  $P_1^{-1} \in B(V, \Gamma_T)$  und mit  $P_2 \in B(\Gamma_T, W)$  nach Definition erhalten wir in der Tat

$$T = P_2 \circ P_1^{-1} \in B(V, W) .$$

□

**Satz 5.7.4.** Sei  $V$  ein Vektorraum mit zwei Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , wobei  $(V, \|\cdot\|_1)$  und  $(V, \|\cdot\|_2)$  Banachräume sind. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in V : \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n := x \in V \text{ bzgl. } \|\cdot\|_1 \text{ und } \right. \\ \left. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n := y \in V \text{ bzgl. } \|\cdot\|_2 \text{ existieren} \right) \implies x = y . \end{aligned}$$

Dann sind  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  äquivalent.

*Beweis.* Definiere  $I : (V, \|\cdot\|_1) \rightarrow (V, \|\cdot\|_2)$  als die Identitätsabbildung, welche linear ist. Wollen nun zeigen, dass  $\Gamma_I$  abgeschlossen. Sei dafür eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in V$  gegeben mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =: x$  in  $(V, \|\cdot\|_1)$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = y$  in  $(V, \|\cdot\|_2)$ . Nach Voraussetzung folgt  $x = y$ . Somit ist  $\Gamma_I$  abgeschlossen und mit Satz 5.7.3 gilt  $I \in B(V, V)$ . Nach Satz 5.6.2 gilt auch  $I^{-1} \in B(V, V)$ . Nach Definition der Beschränktheit folgt die Behauptung. □

## Kapitel 6

# Kompakte Operatoren

*Bemerkung 6.0.1* (Motivation). Die motivierende Idee des Kapitels ist es für  $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$  Banachräume einen Unterraum von  $B(V, W)$  zu finden, der aus Operatoren besteht, welche sich wie lineare Abbildungen auf endlichdimensionalen Räumen verhalten.

### 6.1 Definitionen und Eigenschaften

**Definition 6.1.1.** Seien  $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$  Banachräume und  $T : V \rightarrow W$  linear. Dann heißt  $T$  *kompakt* (bez.  $T \in \mathcal{K}(V, W)$ ), falls für alle beschränkten Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in V$  eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  existiert, sodass  $(Tx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  in  $W$  konvergiert.  $T$  ist also kompakt, wenn das Bild jeder beschränkten Folge eine in  $W$  konvergente Teilfolge enthält.

*Bemerkung 6.1.1.* Obige Definition ist äquivalent zur Forderung, dass das Bild jeder beschränkten Menge  $E$  in  $V$  unter  $T$  einen kompakten Abschluss besitzt.

**Satz 6.1.1.** Seien  $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$  Banachräume und  $T \in \mathcal{K}(V, W)$ . Dann ist  $T$  beschränkt.

*Beweis.* Angenommen  $T \in \mathcal{K}(V, W)$  ist nicht beschränkt. Dann gilt nach Definition

$$\sup \{ \|Tx\|_W \mid \|x\|_V \leq 1 \} = \infty .$$

Somit finden wir  $\forall n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in V$  mit  $\|x_n\|_V \leq 1$  und  $\|Tx_n\|_W \geq n$ . Da  $T$  kompakt ist, gilt für die somit konstruierte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}, y \in W, \lim_{k \rightarrow \infty} Tx_{n_k} = y$$

Daraus folgt aber sofort  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Tx_{n_k}\|_W = \|y\|_W$ . Dies ist ein Widerspruch zur Konstruktion von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Somit ist  $T$  also beschränkt.  $\square$

**Beispiel 6.1.1.** Wir betrachten den in Beispiel 5.1.1 eingeführten Volterra-Operator  $T : C^0([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1])$ , wobei wir  $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$  betrachten mit

$$Tf(x) = \int_0^x f(t) dt .$$

Wir zeigen nun, dass der Volterra-Operator kompakt ist. Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N} : f_n \in C^0([0, 1])$  beschränkt, d. h.  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty =: c < \infty$ . Wir wenden den Satz von Arzelà-Ascoli Arzelà-Ascoli

nach Bem. 6.1.2 an. Bezeichne dabei  $g_n := Tf_n$ , dann ist  $F := \{g_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq C^0([0, 1])$  punktweise beschränkt, da

$$\forall x \in [0, 1] : |Tf_n(x)| = \int_0^x f_n(t) dt \leq \|f_n\|_\infty \leq c < \infty .$$

Weiterhin ist  $F$  gleichgradig stetig, da für  $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x, y \in [0, 1] : |Tf_n(x) - Tf_n(y)| = \left| \int_x^y f_n(t) dt \right| \leq \|f_n\|_\infty |x - y| .$$

Somit leistet  $\delta := \frac{\varepsilon}{c}$  das Verlangte. Anwenden des Satzes ergibt, dass  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} = (Tf_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine in  $C^0([0, 1])$  konvergente Teilfolge besitzt. Damit ist  $T$  ein kompakter Operator.

*Bemerkung 6.1.2* (Satz von Arzelà-Ascoli). Sei  $K$  ein kompakter metrischer Raum und  $F \subseteq C^0(K)$  eine Teilmenge. Dann ist  $F$  genau dann *relativ kompakt* in  $(C^0(K), \|\cdot\|_\infty)$  genau dann wenn

1.  $F$  *punktweise beschränkt*, d. h.:  $\forall f \in F \forall t \in \mathbb{K} : |g(t)| < \infty$  und
2.  $F$  *gleichgradig stetig*, d. h.:  $\forall t \in K \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in F \forall s \in K : d(s, t) < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \varepsilon$ .

Dabei bezeichnen wir  $F$  als relativ kompakt in  $C^0(K)$ , wenn  $\overline{F}$  in  $C^0(K)$  kompakt ist. Weiterhin ist  $F$  genau dann relativ kompakt, falls jede Folge in  $F$  eine in  $C^0(K)$  konvergente Teilfolge hat.

[\*\*\*\*\*Hier fehlt noch der 1. Teil der Vorlesung vom 06.06.\*\*\*\*\*]

**Satz 6.1.2.** Seien  $V, W, U, X$  Banachräume und  $S_1 \in B(W, X)$ ,  $S_2 \in B(U, V)$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$  sowie  $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(V, W)$ . Dann sind  $T_1 + T_2, \alpha T_1 \in \mathcal{K}(V, W)$  und  $S_1 T_1 \in \mathcal{K}(V, X)$ ,  $T_1 S_2 \in \mathcal{K}(U, W)$ . D. h. die Addition kompakter Operatoren und deren Multiplikation mit Skalaren ergibt wieder einen kompakten Operator. Weiterhin ist die beidseitige Komposition eines beschränkten mit einem kompakten Operator wieder kompakt.

*Beweis.* Betrachte zunächst die Addition  $T_1 + T_2$ . Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in V$  eine beschränkte Folge. Da  $T_1$  kompakt, gilt nach Definition

$$\exists \text{TF } (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} : (T_1 x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert in } W .$$

Da die Folge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  ebenfalls wieder beschränkt ist und  $T_2$  kompakt, gilt

$$\exists \text{TF } (x_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}} : (T_2 x_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}} \text{ und } (T_1 x_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}} \text{ konvergieren in } W .$$

Damit konvergiert aber auch die Folge

$$\left( (T_1 + T_2) x_{n_{k_l}} \right)_{l \in \mathbb{N}} = \left( T_2 x_{n_{k_l}} \right)_{l \in \mathbb{N}} + \left( T_1 x_{n_{k_l}} \right)_{l \in \mathbb{N}}$$

in  $W$ . Somit ist  $T_1 + T_2 \in \mathcal{K}(V, W)$ .  $\alpha T_1 \in \mathcal{K}(V, W)$  ist trivial. Betrachte nun  $S_1 T_1$ . Nach Satz [...]

Label fehlt

genügt zu zeigen, dass  $S_1 T_1 \overline{K_1^V(0)}$  totalbeschränkt ist. Da  $T_1$  ein kompakter Operator ist, gilt (mit Definition der Folgenkompaktheit), dass  $\overline{T_1 K_1^V(0)}$  kompakt ist. Da stetige Abbildungen Kompaktheit erhalten, ist also auch  $S_1 T_1 \overline{K_1^V(0)}$  kompakt, d. h. insbesondere totalbeschränkt. Somit gilt (unter Ausnutzung von Bem. 6.1.3).

$$S_1 T_1 \overline{K_1^V(0)} \subseteq \overline{S_1 T_1 K_1^V(0)} \text{ ist totalbeschränkt.}$$

Betrachte nun  $T_1 S_2$ , auch hier genügt zu zeigen, dass  $T_1 S_2 \overline{K_1^U(0)}$  totalbeschränkt ist. Mit  $\|S_2 u\| \leq \|S_2\| \|u\|$  für alle  $u \in U$  gilt

$$S_2 \overline{K_1^U(0)} \subseteq \overline{K_{\|S_2\|}^V(0)} = \|S_2\| \overline{K_1^V(0)}.$$

Damit gilt nun

$$T_1 S_2 \overline{K_1^U(0)} \subseteq T_1 \|S_2\| \overline{K_1^V(0)} = \|S_2\| T_1 \overline{K_1^V(0)}.$$

Da  $T_1$  kompakt, ist also  $T_1 \overline{K_1^V(0)}$  totalbeschränkt und somit auch  $T_1 S_2 \overline{K_1^U(0)}$ .  $\square$

*Bemerkung 6.1.3.* Anders als bei kompakten Mengen, gilt für totalbeschränkte Mengen, dass jede Teilmenge einer totalbeschränkten Menge wieder totalbeschränkt ist.

**Satz 6.1.3.** Seien  $V, W$  Banchräume und  $\forall n \in \mathbb{N} : T_n \in \mathcal{K}(V, W)$  sowie  $T \in B(V, W)$ . Sei  $\|\cdot\|$  die Operatornorm und gelte  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$  bzgl.  $\|\cdot\|$ . Dann gilt auch  $T \in \mathcal{K}(V, W)$ .

*Beweis.* Es g. z. z., dass  $T \overline{K_1^V(0)}$  total beschränkt ist. Sei  $\varepsilon > 0$  fixiert und  $n \in \mathbb{N}$  so, dass  $\|T - T_n\| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Da nach Voraussetzung  $T_n$  kompakt, ist  $T_n \overline{K_1^V(0)}$  totalbeschränkt, d. h. nach Definition

$$\exists x_1, \dots, x_m \in \overline{K_1^V(0)} : T_n \overline{K_1^V(0)} \subseteq \bigcup_{i=1}^m K_{\frac{\varepsilon}{3}}(T_n x_i).$$

Sei nun  $x \in \overline{K_1^V(0)}$ , d. h.  $\|x\|_V \leq 1$ . Damit gilt

$$T_n x \in T_n \overline{K_1^V(0)} \implies \exists i \in \{1, \dots, m\} : \|T_n x - T_n x_i\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nun lässt sich die Dreiecksungleichung anwenden mit ( $\|x\|_V \leq 1$ ,  $\|x_i\|_V \leq 1$ ):

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx_i\| &\leq \|Tx - T_n x\| + \|T_n x - T_n x_i\| + \|T_n x_i - Tx_i\| \\ &= \|(T - T_n)x\| + \|T_n x - T_n x_i\| + \|(T_n - T)x_i\| \\ &< \|(T - T_n)x\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|(T_n - T)x_i\| \\ &\leq \|T - T_n\| \|x\|_V + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_n - T\| \|x_i\|_V \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Somit gilt also

$$T \overline{K_1^V(0)} \subseteq \bigcup_{i=1}^m K_{\varepsilon}(x_i) \iff T \overline{K_1^V(0)} \text{ totalbeschränkt}$$

d. h.  $T$  ist in der Tat kompakt.  $\square$