MAT1110

Obligatorisk oppgave 2

Jonas Semprini Næss

16. april 2020

Oppgave 1.

Regn ut flateintegralet:

$$\iint_T x\ dS$$

der T er delen av sfæren $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ som ligger i første oktant $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Løsning:
Når vi skal angripe denne oppgaven er det viktig at vi finner en passende parametrisering for kulen vi skal analysere. Det blir dermed naturlig å parametrisere kulen ved hjelp av kulekoordinater, og ut i fra standarlikningen ser vi at det er en kule med sentrum i origo $(0, 0)$ og radius a.
Da vil parametriseringen se noe slikt ut:

$$\boldsymbol{r}(\theta, \phi) = a\cos(\theta)\sin(\phi)\boldsymbol{i} + a\sin(\theta)\sin(\phi)\boldsymbol{j} + a\cos(\phi)\boldsymbol{k}$$

hvor $\phi \in [0, \pi]$ og $\theta \in [0, 2\pi]$.

Videre må vi finne normalkomponenten til tangentvektoren av kuleoverflaten. Den finner vi ved å ta kryssproduktet mellom den partielle deriverte av $\boldsymbol{r}(\theta, \phi)$ med hensyn på hver vinklene, og ta størrelsen av produktet.

$$\left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right\|$$

De partiell deriverte blir følgelig:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = -a\sin(\theta)\sin(\phi)\boldsymbol{i} + a\cos(\theta)\sin(\phi)\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = a\cos(\theta)\cos(\phi)\boldsymbol{i} + a\sin(\theta)\cos(\phi)\boldsymbol{j} - a\sin(\phi)\boldsymbol{k}$$

Da blir normen til kryssproduktet:

$$\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right\| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a\sin(\theta)\sin(\phi) & a\cos(\theta)\sin(\phi) & 0 \\ a\cos(\theta)\cos(\phi) & a\sin(\theta)\cos(\phi) & -a\sin(\phi) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a\cos(\theta)\sin(\phi) & 0 \\ a\sin(\theta)\cos(\phi) & -a\sin(\phi) \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} -a\sin(\theta)\sin(\phi) & 0 \\ a\sin(\theta)\cos(\phi) & -a\sin(\phi) \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} -a\sin(\theta)\sin(\phi) & a\cos(\theta)\sin(\phi) \\ a\cos(\theta)\cos(\phi) & a\sin(\theta)\cos(\phi) \end{vmatrix}\boldsymbol{k} =$$

$$\left\|(-a^2\cos(\theta)\sin^2(\phi))\boldsymbol{i} - (a^2\sin(\theta)\sin^2(\phi))\boldsymbol{j} + (-a^2\sin(\phi)\cos(\phi))\boldsymbol{k}\right\| =$$

$$a^2\sqrt{\cos^2(\theta)\sin^4(\phi) + sin^2(\theta)\sin^4(\phi) + cos^2(\phi)sin^2(\phi)} =$$

$$a^2\sqrt{\sin^4(\phi)(cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + cos^2(\phi)sin^2(\phi)} = a^2\sqrt{\sin^2(\phi)(sin^2(\phi) + cos^2(\phi))} = \underline{a^2\sin(\phi)}$$

Da har vi at $dS = a^2\sin(\phi)$ ettersom at tangentialnormalen utgjør infitesimalendringen av flatelementet til sfæren.

Når vi skal beregne integralet kjenner vi igjen flateintegral for skalarfelt

$$\iint_T f\ dS = \iint_A f(\boldsymbol{r}(u,v))\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right\|\ dudv$$

Da får vi videre:

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} f(\boldsymbol{r}(\theta,\phi)a^2\sin(\phi)\ d\theta d\phi$$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} a\cos(\theta)\sin(\phi)a^2\sin(\phi)\ d\theta d\phi = a^3\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\ d\theta\int_0^{\pi/2}\sin^2(\phi)\ d\phi$$

$$a^3\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\ d\theta\int_0^{\pi/2} 1-\cos^2(\phi)\ d\phi = a^3\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\ d\theta\int_0^{\pi/2} 1-(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2\phi)}{2})\ d\phi$$

$$a^3\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\ d\theta\int_0^{\pi/2} 1-(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2\phi)}{2})\ d\phi = a^3\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\ d\theta\left[\frac{\phi}{2}-\frac{\sin(2\phi}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$\frac{a^3\pi}{4}\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\ d\theta = \frac{a^3\pi}{4}\left[\sin(\theta)\right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{a^3\pi}{4}}}$$

Altså vil arealet til til sfæren i første oktant med radius a være lik $\frac{a^3\pi}{4}$ enheter.

Oppgave 2.

a.)
Vis at funksjonene $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ *og* $e^x\sin(y)$ *er harmoniske*:

Det at en funksjon er harmonisk kan påvises på flere måter. Det mest generelle er at en vilkårlig funksjon $f(x_1, x_2 ... x_n)$ definert på en åpen delmengde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ er slik at $f : A \to \mathbb{R}$ tilfredstiller Laplace-likningen gitt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$$

Et mer geometrisk argument er:

For ethvert tilfeldig punkt $P = (x_0, x_1 ... x_n)$, på funksjonen f, vil naboene til dette punktet på en sirkel, i omegn P projisert ned i planet ha "gjennomsnittling" samme verdi og omfang som P.

Nå som det teoretiske er klart kan vi angripe oppgaven.

Løsning:
Definerer først $f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ og $g(x,y) = e^x \sin(y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 12x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 12y^2 = 12(x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 12x^2 = 12(y^2 - x^2)$$

Dermed har vi:

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 12(x^2 - y^2) + 12(y^2 - x^2) = 0$$

Videre følger vi samme prosess for $g(x,y)$:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = e^x \sin(y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = e^x \cos(y)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = e^x \sin(y)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -e^x \sin(y)$$

Det gir:

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} = e^x \sin(y) - e^x \sin(y) = 0$$

b.)
Vis at dersom f er harmonisk, så er:

$$\int_C \left(\frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy \right) = 0$$

for alle enkle, lukkede, glatte kurce C i planet.

Vi skal bevise denne oppgaven på måter.

Bevis 1:

Gitt at vi har en harmonisk funksjon $F(x, y)$, for $x, y \in \mathbb{R}$ er følgende oppfylt.

$$\nabla^2 F(x, y) = 0 \iff \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

Anta så at $\boldsymbol{F}$ er en vektorfunksjon, da vil linjeintegralet være gitt følgende:

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_C \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y} dx - \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} dy \right)$$

Dette betyr at vi kan skrive $\boldsymbol{F(x, y)}$ på formen

$$\boldsymbol{F}(x, y) = M_x \boldsymbol{i} + N_y \boldsymbol{j}$$

Hvor Mx, N_y er komponentfunksjonene til $\boldsymbol{F}$ i henholdsvis x, y-retning gitt ved

$$M_x = -\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} \boldsymbol{i}$$

$$N_y = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y} \boldsymbol{j}$$

Partiellderiverer vi M_x og N_y med hensyn på sine komponentvariable får vi.

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} \boldsymbol{i} = -\frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial x^2} \boldsymbol{i}$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} \boldsymbol{j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial y^2} \boldsymbol{j}$$

Husker at

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial x^2} \boldsymbol{i} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial y^2} \boldsymbol{j} = 0$$

Da blir

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial y^2}\boldsymbol{j} = -\frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial x^2}\boldsymbol{i}$$

$$\boxed{\frac{\partial N_y}{\partial y}\boldsymbol{j} = \frac{\partial M_x}{\partial x}\boldsymbol{i}}$$

Dette er et velkjent argument for at et vektorfelt er konservativt, og linjeintegralet over en lukket, glatt og enkel kurve til et konservativt vektorfelt sumerer alltid til 0.

Dessverre er det en stor svakhet i beviset, og det er at det verken står eksplisitt om vi kan betrakte F som en vektorfunksjon, eller om feltet fullt og helt er konservativt. Dermed er bevis nummer to mye mer generelt, og gjelder absolutt.

Bevis 2:
La C være en positivt orientert glatt, enkel og lukket kurve i et plan. Da vil linjeintegralet over C for funksjonen $F(x,y)$ kunne skrives på formen:

$$\oint_C F(x,y)\ dr = \oint_C P\ dx + Q\ dy$$

Hvor P, Q er henholdsvis komponentfunksjonene til F i x, y-retning. La oss for ordenhets skyld sette $P = -\frac{\partial F}{\partial x}$ og $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$. Da kan vi skrive integralet:

$$\oint_C F(x,y)\ dr = \oint_C \frac{\partial F}{\partial y}dx - \frac{\partial F}{\partial x}dy$$

Vi husker så at Greens teorem sier:

$$\oint_C P\ dx + Q\ dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy}\right) dxdy$$

Hvor D er en plan region begrenset av C. Partiellderiverer vi så $P(x,y)$ og $Q(x,y)$ og setter inn resultatet i det vi nå viste, får vi.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy}\right) dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\right) dxdy$$

Så husker vi at $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$, og dermed blir integralet.

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \right) dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) dxdy = \iint_D 0 \ dxdy = 0$$

Som var det vi skulle vise.

Oppgave 3.

a.)

Vis at $\boldsymbol{F}$ definerer en funksjon $\boldsymbol{F} : A \to A$ (altså at verdiene til $\boldsymbol{F}$ ligger i A.)
Hvor $\boldsymbol{F}$ er gitt ved:

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \frac{1}{5}\left(xy + y^2 - 1, x^3 - y^2 + 3\right)$$

og A er det kartesiske produktet spent over $A : [-1,1] \times [-1,1]$ i x, y retning.

Løsning:
Det at en funksjon avbilder seg selv betyr at domenen eller mengden funksjonen er definert over svarer til en verdi eller et punkt innenfor, eller i den samme mengden.
Når vi skal teste påstanden må vi derfor sette inn maks og minimumsverdier fra definisjonsmengden inn i funksjonen for å observere hvilke løsningsverdier/-punkter vi får.
Tester vi dermed for $x = 1$ og $y = 1$ får vi:

$$\boldsymbol{F}(1,1) = \frac{1}{5}\left(1(1) + (1)^2 - 1, (1)^3 - (1)^2 + 3\right)$$
$$\boldsymbol{F}(1,1) = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Som ligger i A. Følger vi ressonementet for $x = -1$ og $y = -1$ gir det:

$$\boldsymbol{F}(-1,-1) = \frac{1}{5}\left(-1(-1) + (-1)^2 - 1, (-1)^3 - (-1)^2 + 3\right)$$
$$\boldsymbol{F}(-1,-1) = \frac{1}{5}(1,1)$$
$$\boldsymbol{F}(-1,-1) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

Som også ligger i A. Dermed har vi vist at $\boldsymbol{F}$ avbilder seg selv.

b.)

Vis at $\boldsymbol{F} : A \to A$ definerer en kontraksjon
Løsning:

La $\boldsymbol{F} : A \to A$ være en avbildning fra en mengde A på seg selv. Da vil funksjonen definere en kontraksjon hvis avstanden mellom funksjonsverdien i et vilkårlig punkt b og et punkt a hvor $b, a \in A$ er mindre enn den opprinnelige avstanden mellom b og a multiplisert med en "kontraksjonsfaktor":

$$\boxed{0 \le C < 1}$$

Da ser den matematiske formuleringen slik ut:

$$d(\boldsymbol{F}(b), \boldsymbol{F}(a)) \le Cd(b, a)$$
$$\left|\boldsymbol{F}(b) - \boldsymbol{F}(a)\right| \le C\,|b - a|$$

Deler vi så på avstanden mellom b og a gjennkjenner vi middelverdisetningen.

$$\frac{\left|\boldsymbol{F}(b) - \boldsymbol{F}(a)\right|}{|b - a|} \le C$$
$$\left|\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{k})\right| \le C$$

Hvor $\boldsymbol{k_1, ..., k} \in A$. Dermed ser vi at for alle punkter k i A må tangenten til funksjonen være uniformt mindre enn 1. Tar vi utgangspunkt i argumentet blir den deriverte til funksjonen $\boldsymbol{F}(x, y)$ lik.

$$\boldsymbol{F}'(x, y) = \frac{1}{5}\nabla \boldsymbol{F}(x, y)$$
$$\nabla \boldsymbol{F}(x, y) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} y & x + 2y \\ 3x^2 & -2y \end{pmatrix}$$
$$\left|\nabla \boldsymbol{F}(x, y)\right| = \frac{1}{5}\sqrt{y^2 + (x + 2y)^2 + (3x^2)^2 + (-2y)^2}$$
$$\left|\nabla \boldsymbol{F}(x, y)\right| = \frac{1}{5}\sqrt{y^2 + 4y^2 + 9x^4 + x^2 + 4xy + 4y^2}$$
$$\left|\nabla \boldsymbol{F}(x, y)\right| = \sqrt{\frac{9y^2 + 9x^4 + x^2 + 4xy}{25}}$$

Dette utrykket er alltid positivt for alle $x, y \in A$ og setter vi inn maksverdiene fra A ($x = y = 1$) får vi:

$$\left|\nabla \boldsymbol{F}(1, 1)\right| = \sqrt{\frac{9(1)^2 + 9(1)^4 + (1)^2 + 4(1)(1)}{25}}$$
$$\left|\nabla \boldsymbol{F}(1, 1)\right| = \sqrt{\frac{23}{25}} < 1$$

Dermed har vi bevist at F definerer en kontraksjon for sine maks og minimumsverdier i A og kan dermed konkludere med at dette gjelder for alle $\boldsymbol{k} \in A$.

c.)

Vis at følgende likningssystem har en unik løsning for $-1 \leq x, y \leq 1$

$$
\begin{aligned}
5x &= xy + y^2 - 1 \\
5y &= x^3 - y^2 + 3
\end{aligned}
$$

Løsning:

Jamfør oppgave b.) beviste vi at $\boldsymbol{F}$ definerer en kontraksjon. Vi tok utgangspunkt i Banachs fikspunktteorem, som forkortet sier at dersom en funksjon avbilder seg selv over en konveks, ikke-tom og lukket mengde og tangenten til $\boldsymbol{F}$ er uniformt mindre enn 1, vil funksjonen være en kontraksjon med et entydig fikspunkt x^*.
Dette betyr videre at vi kan iterere oss frem til fikspunktet slik at en følge x_n gir $x_n = \boldsymbol{F}(x_{n-1})$ for $n \geq 1$ som konvergerer mot x^*.
Dermed vil fikspunktet kunne skrives på formen $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{x}$ hvor $\boldsymbol{x} \in A$.
Bruker vi resonnementet ser vi at likningssettet gjennspeiler akkurat hva som ble definert over, og dermed er det innlysende at likningssystemet må en unik løsning for både x, y når kontraksjonsfunksjonen $\boldsymbol{F}(x, y)$ har et entydig fikspunkt, og likledes konvergerer mot dette.

d.)

Løsning:

Vi beviste i b.) at $\boldsymbol{F}$ definerer en kontraksjon, og dermed har et entydig fikspunkt. Dette fikspunktet kan approksimeres ved å starte i et vilkårlig punkt $x_0 \in A$ og itereres x_{n+1} ganger til man når $x_{n+1} = \boldsymbol{F}(x_n)$. Lager vi et python-program av metoden får vi følgende script:

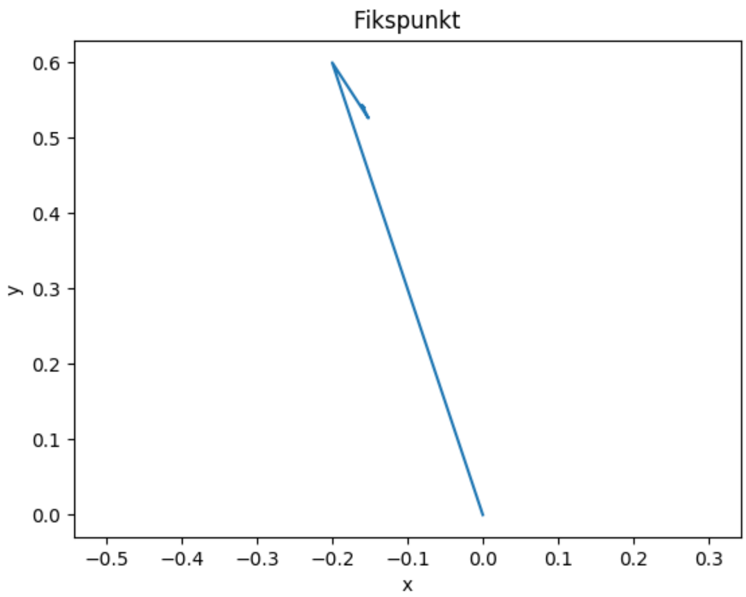
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


def iterasjon(n, x0, y0):
    X = np.zeros(n)
    Y = np.zeros(n)
    X[0] = x0
    Y[0] = y0
    for i in range(n-1):
        X[i+1] = ((X[i]*Y[i] + (Y[i])**(2) - 1))/5
        Y[i+1] = (X[i]**3 - Y[i]**2 + 3)/5
    return X, Y

Xn = iterasjon(100,0, 0)[0]
```

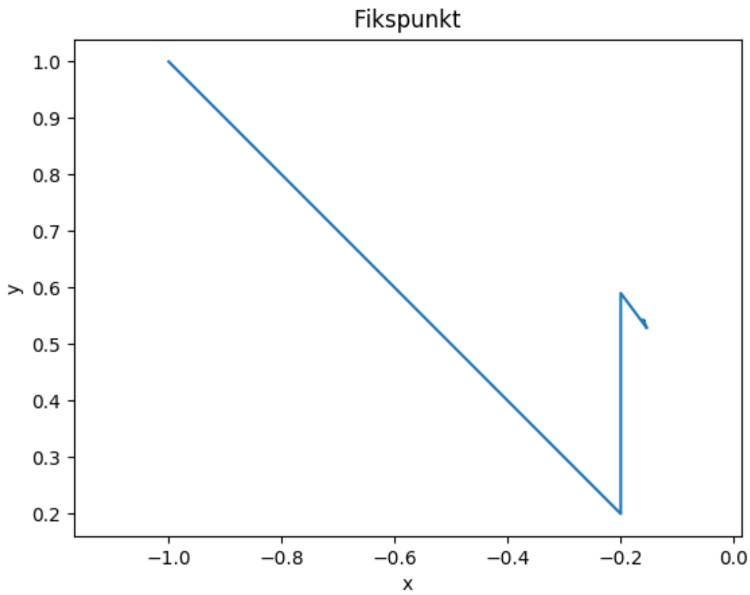
```python
Yn = iterasjon(100, 0, 0)[1]
plt.axis('equal')
plt.title('Fikspunkt')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.plot(Xn, Yn)
plt.show()
print(f"{Xn[-1]:.2f} {Yn[-1]:.2f}")
```

Det gir følgende plot for $x_0 = y_0 = 0$:



Plot av fikspunktsiterasjon fra $\boldsymbol{x}_0 = (0, 0)$

Endrer vi $\boldsymbol{x}_0 = (0, 0)$ til $\boldsymbol{x}_0 = (-1, 1)$ vil plotet se slik ut:



Plot av fikspunktsiterasjon fra $\boldsymbol{x}_0 = (-1, 1)$

Vi observerer at iterasjonskurvene har forskjellig form avhengig av startpunkt $\boldsymbol{x}_0$, men at fikspunktet er entydig uavhengig sistnevnte. Dermed får vi fikspunkt $x^* = \underline{\underline{(-0.16, 0.54)}}$.