Eksamen MAT-1110

Våren 2020

7. juni 2020

Oppgave 1:

a.)

Vi skal se på matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 3 & 0.6 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Finn egenverdiene til A, og tilhørende egenvektorer

Løsning:

For å finne egenverdiene til A bruker vi den karakteristiske likningen $\det(\lambda I_n - A)$. Det gir

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I_n - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 0.2 & -3 & -0.6 \\ 0 & \lambda - 0.5 & 0 \\ 0.8 & -1 & \lambda - 0.4 \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda - \frac{1}{2}) \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -(\frac{4}{5} & \lambda) - \frac{2}{5} \end{vmatrix} \\
&= -(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{5}(\lambda - \frac{2}{5}) + \frac{12}{25}) \\
&= -(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda^2 - \frac{3}{5}\lambda + \frac{14}{25}) \\
&= -(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - 1)(\lambda + \frac{2}{5}) = 0
\end{aligned}$$

hvor vi her har valgt å ekspandere andre rad i determinanten. Hvilket gir egenverdiene $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -\frac{2}{5}$.
Videre har vi at

$$\frac{1}{2}I_n - A = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -3 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -1 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & -3 & -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} & -1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -10 & -2 \\ 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -10 & -2 \\ 0 & \frac{45}{4} & \frac{15}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -10 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som gir at komponentene i en egenvektor for egenverdi $\lambda = \frac{1}{2}$ må oppfylle kravet $y = -\frac{1}{6}z$ og $x = \frac{1}{3}z$, slik at en egenvektor må være på formen $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}z \\ -\frac{1}{6}z \\ z \end{pmatrix}$.

Som for $z = 6$ gir egenvektoren $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Likeledes får vi for $\lambda_2 = 1$

$$I_n - A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -3 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{4}{5} & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -3 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{15}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hvilket gir $y = 0$ og $x = \frac{3}{4}z$, slik at en egenvektor må være på formen $\begin{pmatrix} \frac{3}{4}z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$.

Som spesielt for $z = 4$ gir $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Sluttvis har vi for $\lambda_3 = -\frac{2}{5}$

$$-\frac{2}{5}I_n - A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -3 & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{9}{10} & 0 \\ -\frac{4}{5} & -1 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hvor en egenvektor må oppfylle kravet $y = 0$ og $x = -z$, og kan skrives på formen $\begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ som for $z = 1$ gir $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b.)

La $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 30 \end{pmatrix}$. *Skriv* $\boldsymbol{x}_0$ *som en lineærkombinasjon av vektorene du fant i* ***a****,* *og regn ut grenseverdien* $\lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{x}_0$

Løsning:

Skal en skrive $\boldsymbol{x}_0$ som en lineærkombinasjon av vektorene $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ må man radredusere

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 6 & 4 & 1 & 30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 8 \\ 6 & 4 & 1 & 30 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 30 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

slik at $\boldsymbol{x}_0 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, hvilket gir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} A^n\boldsymbol{x}_0 &= A^n(3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3) \\
&= \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n (3\boldsymbol{v}_1) + 1^n(2\boldsymbol{v}_2) - \left(\frac{2}{5}\right)^n (4\boldsymbol{v}_3)\right) \\
&= 2\boldsymbol{v}_2 = 2\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\8\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c.)

Skriv et program (håndskrevet eller maskinskrevet, i python eller Matlab) som plotter de tre komponentene i $\boldsymbol{x}_n = A^n\boldsymbol{x}_0$ mot n. La n gå fra 0 til 100. n skal være langs x-aksen, og langs y-aksen skal du vise hver av de tre komponentene (så tre plott i ett).

Løsning:

Velger i denne oppgaven å lage ett python-script for å plotte komponentene. Det kan se slik ut

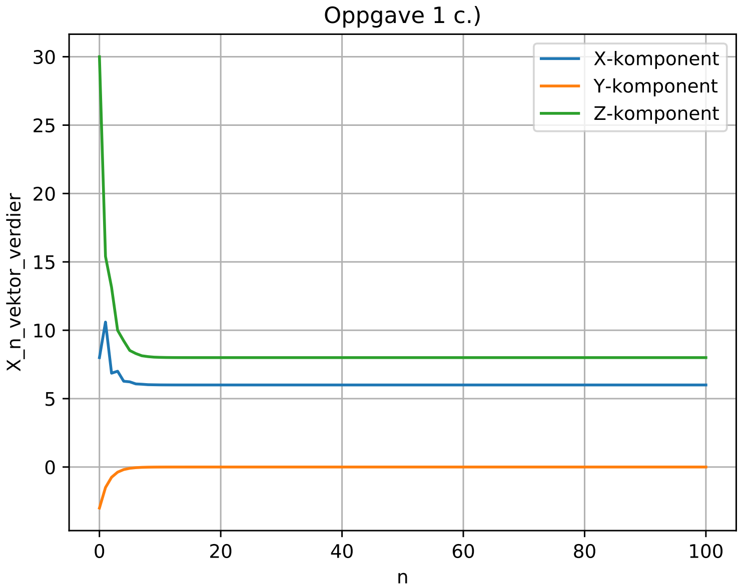
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = 100
X0 = np.matrix('8; -3; 30')
A = np.matrix('0.2 3 0.6; 0 0.5 0; 0.8 1 0.4')

x0 = np.zeros(n+1)
x1 = np.zeros(n+1)
x2 = np.zeros(n+1)
x3 = np.zeros(n+1)
for i in range(n+1):
    xn = np.linalg.matrix_power(A, i)*X0
    x0[i] = i
    x1[i] = xn[0,0]
    x2[i] = xn[1,0]
    x3[i] = xn[2,0]

plt.plot(x0, x1, label='X-komponent')
plt.plot(x0, x2, label='Y-komponent')
plt.plot(x0, x3, label='Z-komponent')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('X_n_vektor_verdier')
plt.title('Oppgave 1 c.)')
plt.grid()
plt.legend()
plt.savefig('egenvektor.pdf')
plt.show()
```

og gir følgende plot.



Plot av de tre komponentene (henholdsvis x, y, z) i $\boldsymbol{x}_n = A^n \boldsymbol{x}_0$

Hvor vi ser at komponentene etter $n = 100$ iterasjoner går mot $x = 6, y = 0, z = 8$

Oppgave 2:

a.)

Vi skal se på funksjonen $\boldsymbol{F}(x, y) = (x^2 + y^3 + xy, x^3 - y^2)$

Finn lineariseringen til $\boldsymbol{F}$ *i punktet* $(-1, -1)$

Løsning:

Vi husker at linearisering til en funksjon $\boldsymbol{F}$ i et vilkårlig punkt $\boldsymbol{c}$ er gitt ved

$$T_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c})$$

hvilket gir

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{F}(-1, -1) \\
&= ((-1)^2 + (-1)^3 + (-1)(-1), (-1)^3 - (-1)^2) \\
&= (1, -2)
\end{aligned}$$

og

$$\boldsymbol{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y & 3y^2+x \\ 3x^2 & -2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{c}) &= \begin{pmatrix} 2(-1)+(-1) & 3(-1)^2-1 \\ 3(-1)^2 & -2(-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da har vi at lineariseringen til $\boldsymbol{F}$ er

$$\begin{aligned} T_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3(x+1)+2(y+1) \\ 3(x+1)+2(y+1) \end{pmatrix} \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3x+2y \\ 3x+2y+3 \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

b.)

Forkar at $\boldsymbol{F}$ har en omvendt funksjon $\boldsymbol{G}$ i omegn om $(1,-2)$ slik at $\boldsymbol{G}(1,-2) = (-1,-1)$, og skriv ned lineariseringen til $\boldsymbol{G}$ i $(1,-2)$

Løsning:

Gitt at $\boldsymbol{F}(x,y)$ har kontinuerlige partiell deriverte, og at Jacobi-determinanten er forskjellig fra null i punktet $\boldsymbol{c} = (-1,-1)$ vil $\boldsymbol{F}$ ha en inversfunksjon $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}^{-1}(x,y)$ i omegn om $(1,-2)$ slik at $\boldsymbol{G}(1,-2) = (-1,-1)$. Da har vi

$$(\boldsymbol{F}^{-1}(-1,-1))' = \boldsymbol{G}'(1,-2)$$

som betyr at vi må sjekke om $\boldsymbol{F}'(-1,-1) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ er inverterbar.

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Dermed er $\boldsymbol{F}'(-1,-1)$ inverterbar og $\boldsymbol{G}'(1-2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Da er lineariseringen til $\boldsymbol{G}(1,-2)$

$$\begin{aligned} T_{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{G} &= \boldsymbol{G}(\boldsymbol{d}) + \boldsymbol{G}'(\boldsymbol{d})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}) \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}(x-1) + \frac{1}{6}(y+2) \\ \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(y+2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{3}{4} \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

Oppgave 3:

Vis at vektorfeltet

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (y+2z, x+3z, 2x+3y)$$

er konservativt, og skriv ned tilhørende potensialfunksjon $\phi(x,y,z)$

Løsning:

For at vektorfeltet skal være konservativt må en potensialfunksjon $\phi(x,y,z)$

oppfylle

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= y + 2z \\
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= x + 3z \\
\frac{\partial \phi}{\partial z} &= 2x + 3y.
\end{aligned}
$$

som ved integrasjon gir

$$
\begin{aligned}
\phi(x, y, z) &= xy + 2xz + F(y, z) \\
\phi(x, y, z) &= xy + 3yz + G(x, z) \\
\phi(x, y, z) &= 2xz + 3yz + H(x, y)
\end{aligned}
$$

hvor F, G, H er funksjoner. Vi ser at vi oppnår likhet hvis $F(y, z) = 3yz$, $G(x, z) = 2xz$ og $H(x, y) = xy$. Det gir $\phi(x, y, z) = xy + 2xz + 3yz$, og derav er feltet konservativt.

Oppgave 4:

I kulekoordinater beskriver likningen

$$\rho = \phi$$

en 'eplelignende' flate. Regn ut volumet av den avgrenser.

Løsning:

Den eplelignende flaten vi skal regne volumet til er gitt i kulekoordinater med

$\phi \in [0, \pi]$ og $\theta \in [0, 2\pi]$. Vi får dermed

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \left[\int_0^{\phi} \rho^2 \sin(\phi)\ d\rho \right] d\phi \right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \frac{\phi^3}{3} \sin(\phi)\ d\phi \right] d\theta \\
du &= \sin(\phi) \quad u = -\cos(\phi) \quad v = \phi^3 \quad dv = 3\phi^2 \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left[-\phi^3 \cos(\phi) + \int_0^{\pi} 3\phi^2 \cos(\phi)\ d\phi \right] d\theta \\
du &= \cos(\phi) \quad u = \sin(\phi) \quad v = 3\phi^2 \quad dv = 6\phi \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left[-\phi^3 \cos(\phi) + 3\phi^2 \sin(\phi) \int_0^{\phi} 6 \sin(\phi)\phi\ d\phi \right] d\theta \\
du &= \sin(\phi) \quad u = -\cos(\phi) \quad v = 6\phi \quad dv = 6 \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left[-\phi^3 \cos(\phi) + 3x^2 \sin(\phi) - 6\phi\cos(\phi) + \int_0^{\pi} 6\cos(\phi)\ d\phi \right] d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left[-\phi^3 \cos(\phi) + 3x^2 \sin(\phi) - 6\phi\cos(\phi) - 6\sin(\phi) \right]_0^{\pi}\ d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \pi^3 - 6\pi\ d\theta \\
&= \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}(\pi^3 - 6\pi)}}
\end{aligned}
$$

hvilket gir at volumet er $\frac{2\pi}{3}(\pi^3 - 6\pi)$ enheter.

Oppgave 5:

Finn volumet til området avgrenset av flaten $z = 4 - x^2$ på oversiden, sylinderen $x^2 + y^2 = 4$ og xy-planet på undersiden.

Løsning:

Vi ser at vi i denne oppgaven blir nødt til å bruke sylinder-koordinater for å beregne integralet, hvor z-aksen er begrenset av origo og flaten $4 - x^2$. Videre har vi beskrevet en sylinder i xyz-retning som i xy-planet svarer til en sirkel med sentrum i origo og radius 2. Dermed vil $0 \leq r \leq 2$, samt vil $\theta \in [0, 2\pi]$

siden vi analyserer en hel sirkel. Det gir

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \left[\int_0^{4-x^2} r \ dz \right] dr \right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 r(4-x^2) \ dr \right] d\theta
\end{aligned}
$$

så husker vi at $\boxed{x = r\cos(\theta)}$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 4r - r^3\cos^2(\theta) \ dr \right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{1}{4} r^4 \cos^2(\theta) \right]_0^2 \ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 8 - 4\cos^2(\theta) \ d\theta \\
&= \left[8\theta - 4\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta}{2} \right) \right]_0^{2\pi} \\
&= \underline{\underline{16\pi - 4\pi = 12\pi}}
\end{aligned}
$$

dermed er det totale arealet av området 12π enheter.

Oppgave 6:

Finn det punktet på flaten $z = x+2y$ som har minst avstand til punktet $(1,1,1)$.

Løsning:

Denne oppgaven baserer seg på et optimeringsproblem, hvilket gir oss muligheten til å bruke Lagranges multiplikatormetode ettersom at vi har en restriksjon/betingelse.

Vi husker at avstanden fra et plan til et vilkårlig punkt kan skrives slik

$$
\begin{aligned}
D(x,y,z) &= \left|(x-x_0)+(y-y_0)+(z-z_0)\right| \\
&= \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}
\end{aligned}
$$

hvor (x_0, y_0, z_0) er et vilkårlig punkt i rommet. Setter vi inn punktet $(1,1,1)$ har vi at

$$
D(x,y,z) = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}
$$

dermed er restriksjonen satt. Videre kan vi omskrive flaten $z = x + 2y$ til en funksjon $g(x, y, z) = x + 2y - z$ som nå gir oss muligheten til å se på likningen.

$$\boxed{\nabla D(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)}$$

Ekspanderer vi utrykket har vi at

$$\begin{aligned} 2(x-1) &= \lambda \\ 2(y-1) &= 2\lambda \\ 2(z-1) &= -\lambda \end{aligned}$$

hvor vi har brukt et lite triks på venstre side av likningen slik at rottegnet sløyfes (dette er mulig ettersom at et minimumspunkt i avstandsfunksjonen er det samme uavhengig om roten er med eller ei).

Sammenligner vi de to første likningene har vi at

$$\begin{aligned} 2(x-1) &= y - 1 \\ y &= 2x - 1 \end{aligned}$$

hvilket gir ved å se på likning to og tre

$$\begin{aligned} y - 1 &= -2(z-1) \\ y &= -2z + 3 \\ 2x - 1 &= -2z + 3 \\ z &= -\frac{2x-4}{2} \\ z &= -x + 2. \end{aligned}$$

Setter vi så resulatet inn i $z = x + 2y$ får vi at $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{4}{3}$, hvilket betyr at punktet $\underline{\underline{P(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4})}}$ ligger nærmest $(1, 1, 1)$.

Oppgave 7:

Finn konvergensområdet for rekken $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!n3^{n-2}}$*, og finn et utrykk for summen der den konvergerer.*

Løsning:

Vi starter med å sjekke forholdstesten

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n-1)!(n+1)3^{n-1}}}{\frac{x^n}{(n-2)!n3^{n-2}}}\right|$$

$$= \frac{1}{3}\left|\frac{xn}{(n+1)(n-1)}\right| \to 0$$

som betyr at rekken konvergerer absolutt for alle $x \in \mathbb{R}$. Videre skal vi regne ut summen, og kan dermed starte med å derivere leddvis.

$$S'(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n-2)!n3^{n-2}}$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-2)!3^{n-2}}$$

dessuten kan vi også substituere $u = n-2$ slik at vi har

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{3^n n!}$$

herfra kjenner vi igjen Taylor-rekken til e^x gitt ved $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Da har vi at

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x\frac{(\frac{x}{3})^n}{n!}$$

$$= xe^{\frac{x}{3}} - \frac{x^0}{0!}$$

hvor vi har trukket ifra første ledd av Taylor-rekken ettersom at vi starter på ledd $n = 1$. Integrerer vi så det vi har funnet gir det

$$\int_0^x S(t)\ dt = \int_0^x te^{\frac{t}{3}} - 1\ dt = \int_0^x te^{\frac{t}{3}} - [x]$$

$$du = e^{\frac{t}{3}}, \quad u = 3e^{\frac{t}{3}}, \quad v = t, \quad dv = 1$$

$$= \left[3te^{\frac{t}{3}} - \int_0^x e^{\frac{t}{3}} - x\right]$$

$$= \left[3te^{\frac{t}{3}}t - 3e^{\frac{t}{3}}\right]_0^x - x$$

$$= 3e^{\frac{x}{3}}(x-3) - x$$

altså er $\underline{\underline{S(x) = 3e^{\frac{x}{3}}(x-3) - x}}$ i sitt konvergensområde.

Oppgave 8:

Vi skal se på kurven $\mathcal{C}$ parametrisert ved

$$\boldsymbol{r}(t) = (16\sin^3(t), 13\cos(t) - 5\cos(2t) - 2\cos(3t) - \cos(4t))$$

for $0 \leq t \leq 2\pi$.

a.)

Regn ut hastighetsvektoren til $\boldsymbol{r}(t)$ i $t = \frac{\pi}{2}$

Løsning:

Vi har at

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'(t) &= \boldsymbol{v}(t)\\ &= (16 \cdot 3\sin^2(t)\cos(t), -13\sin(t) + 5 \cdot 2\sin(2t) + 2 \cdot 3\sin(3t) + 4\sin(4t))\\ &= (48\sin^2(t)\cos(t), -13\sin(t) + 10\sin(2t) + 6\sin(3t) + 4\sin(4t))\end{aligned}$$

det gir for $t = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(\frac{\pi}{2}) &= (48\sin^2(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}), -13\sin(\frac{\pi}{2}) + 10\sin(2\frac{\pi}{2}) + 6\sin(3\frac{\pi}{2}) + 4\sin(4\frac{\pi}{2}))\\ &= \underline{\underline{(0, -19)}}\end{aligned}$$

b.)

Regn ut arealet til området avgrenset av $\mathcal{C}$.

Løsning:
Ettersom at vi har en enkel, stykkevis glatt og lukket kurve kan vi i dette spesialtilfellet bruke Greens teorem. Da har vi følgelig

$$\oint_{\mathcal{C}} P\ dx + Q\ dy = \oint_{\mathcal{C}} x\ dy$$

hvor vi har satt $P = 0$ og $Q = x$. Setter vi inn for Q og dy har vi at

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} x\ dy &= \oint_0^{2\pi} (16\sin^3 t)(-13\sin(t) + 10\sin(2t) + 6\sin(3t) + 4\sin(4t))\ dt\\ &= \int_0^{2\pi} -16 \cdot 13\sin^4\ dt + \int_0^{2\pi} 16 \cdot 10\sin^3 t\sin(2t)\ dt + \int_0^{2\pi} 16 \cdot 6\sin^3 t\sin(3t)\ dt +\\ &\quad \int_0^{2\pi} 16 \cdot 4\sin^3 t\sin(4t)\ dt\end{aligned}$$

der $\sin^3 t$ kan utrykkes som $\boxed{\sin^3 t = \frac{3\sin t - \sin(3t)}{4}}$. Hvilket ekspanderer integralene til

$$\oint_{\mathcal{C}} x\ dy = -208\int_0^{2\pi} \frac{3\sin^2 t - \sin(3t)\sin(t)}{4}\ dt + 160\int_0^{2\pi} \frac{3\sin(t)\sin(2t) - \sin(3t)\sin(2t)}{4}\ dt +$$

$$96\int_0^{2\pi} \frac{3\sin(t)\sin(3t) - \sin(3t)\sin(3t)}{4}\ dt + 64\int_0^{2\pi} \frac{3\sin(t)\sin(4t) - \sin(4t)\sin(3t)}{4}\ dt.$$

Herfra tar vi i bruk identitetene

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\ dx = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\ dx = \begin{cases} \pi & \text{for } m = n \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

som forenkler utrykket vårt til

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} x\ dy &= -208\int_0^{2\pi} \frac{3\sin^2 t}{4}\ dt - 96\int_0^{2\pi} \frac{\sin(3t)\sin(3t)}{4}\ dt \\ &= -208\int_0^{2\pi} \frac{3\sin^2 t}{4}\ dt - 24\pi \\ &= -156\pi - 24\pi = -180\pi. \end{aligned}$$

Dermed er det totale arealet av området lik $\underline{\underline{180\pi \text{ enheter}}}$. (Det er verdt å merke seg at vi får negativt fortegn på svaret ettersom at vi har regnet i motsatt retning av positiv omløpsretning, men tallverdiene er selvfølgelig uavhengig av dette).