Obligatorisk oppgave 1

MAT-1110

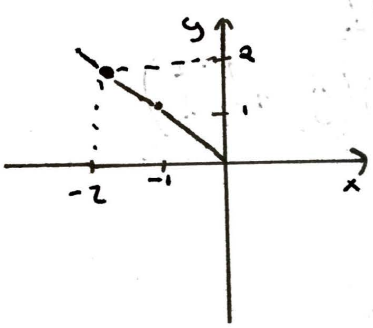
Jonas Semprini Næss

Oppgave 1:

$a = (-1,1)$ $\qquad T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\qquad T(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$

Når vi nå skal finne affinavbildningen er det viktig å huske på at vi speiler alle punkter om $(-1,1)$, på en rett linje.



Et mulig punkt blir dermed

$$\boxed{b = (-2,2)}$$

Ser vi på orientasjonen så vil dette punktet svare til origo om hvor vi speiler dette punktet og dermed når vi finner konstantleddet: $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Når vi nå skal finne A, må vi ha litt flere punkter å benytte oss av. Dermed finner vi nye enhetsvektorer ut fra C.

$$e_{1x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_{3x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$e_{2y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e_{4y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \end{pmatrix}$$

Vi setter inn de to koordinatene og får likningene

$$T(0,0) = c = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(1,0) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + c = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(0,1) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + c = \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \end{pmatrix}$$

Videre løser vi med hensyn på $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ og

$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$. Da får vi følgende.

$$T(1,0) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3+2 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$T(0,1) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2+2 \\ +1-2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

Da har vi totalt: $\underline{\underline{T(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}}}$

b) Finn lineariseringen T_aF til:

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy \\ y^2 + 2xy \end{pmatrix} \quad \text{i punktet } a = (-1,1)$$

Vi husker at lineariseringen til $F(x,y)$ er definert som $\underline{T_aF(x) = F(a) + F'(a)(x-a)}$

hvor $\boxed{F: A \to \mathbb{R}^m}$.

$$F(a) \text{ gir da}: F(-1,1) = \begin{pmatrix} (-1)^2 - 2(-1)(1) \\ 1^2 + 2(-1)(1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

Videre må vi finne $F'(a)$ og må partiell-derivere $\underline{F(x,y)}$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2x - 2y & -2x \\ 2y & 2y + 2x \end{pmatrix}}$$

Da blir $F'(a)$ lik:

$$F'(a) = \begin{pmatrix} 2(-1) - 2(1) & -2(-1) \\ 2(1) & 2(1) + 2(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2-2 & 2 \\ 2 & 2-2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}}$$

Setter vi begge utregningene inn i utrykket får vi

$$T_a F(x) = F(a) + F'(a)(x-a)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\cancel{= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \cdot x + 2 \cdot y - 4 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4(x+1) + 2(y-1) \\ 2(x+1) + 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4x - 4 + 2y - 2 \\ 2x + 2 + 0 \end{pmatrix}$$

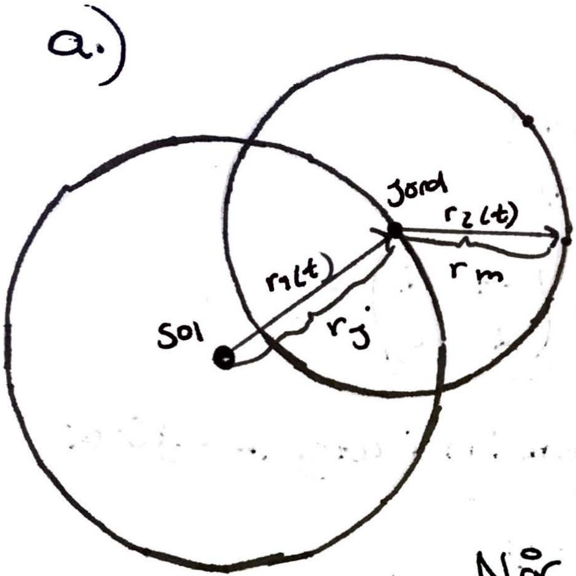
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4x + 2y - 6 \\ 2x + 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4x + 2y - 6 + 3 \\ 2x + 2 - 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -4x + 2y - 3 \\ 2x + 1 \end{pmatrix}}$$

Dermed er $T_a F = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -4x + 2y - 3 \\ 2x + 1 \end{pmatrix}}}$

Oppgave 2:

a.)



r_j: 150 millioner km

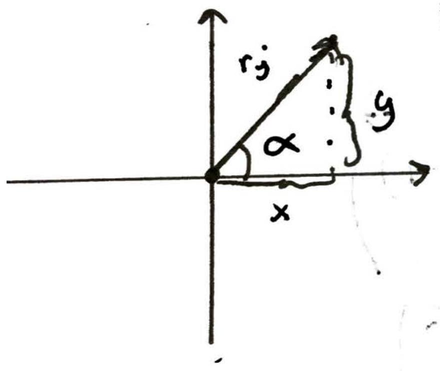
T_j: 365 dager T_m: 27,3 dager

r_m: 0,384 millioner km

$(r_1(t))$: Jordas bane rundt solen

$(r_2(t))$: Månens bane rundt jorden

Når vi nå skal finne parametriseringen for $r_1(t)$ og $r_2(t)$ må vi tenke polarkoordinater. Det kan visualiseres slik:



$$\cos(\alpha) = \frac{x}{r_j} \qquad \text{II} \quad \sin(\alpha) = \frac{y}{r_j}$$

$$\text{I} \quad \boxed{x = \cos(\alpha) \cdot r_j} \qquad \boxed{y = \sin(\alpha) \cdot r_j}$$

Hvor α er definert som:

$$\boxed{\frac{2\pi t}{T_j}}.$$

Da blir $r_1(t) =$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_j \cos(\alpha) \\ r_j \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Bruker vi samme prinsipp på $r_2(t)$ blir utrykket

$$r_2(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_m \cos(\theta) \\ r_m \sin(\theta) \end{pmatrix},$$

hvor θ er

$$\boxed{\frac{2\pi t}{T_m}}$$

Skal vi nå utrykke månens bane i forhold til solen så bruker vi en enkel matrise-addisjon for banen er simpelthen de to parametriseringene lagt sammen b.)

Utklippet under viser en mulig løsning på å plotte r(t) og r1(t). Når man kjører plottet er det vanskelig å adskille de to kurvene, men zoomer man inn på et gitt intervall i plottet blir det mer markant at det er en forskjell.

Sykloidebevegelsen til månen rundt sola er ikke mulig å se i dette eksempelet, men øker man størrelsen på avstanden mellom jorda og månen blir dette mer tydelig.

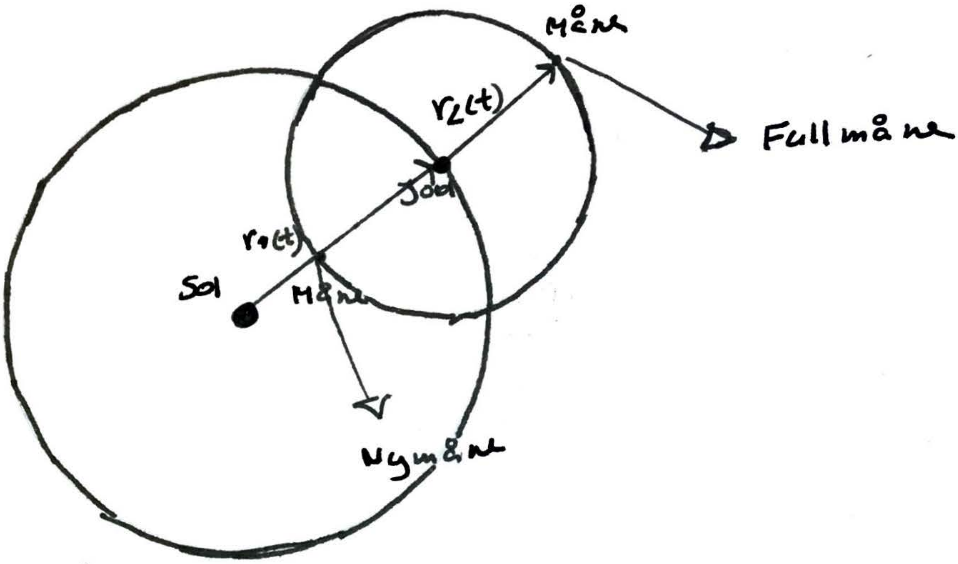
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
rj = 150
Tj = 365
rm = 0.384
Tm = 27.3
t = np.linspace(0, 365, 1000)

def bane(t):
    theta1 = (2*np.pi*t/(Tj))
    theta2 = (2*np.pi*t/(Tm))
    parameterJ = [rj * np.cos(theta1), rj * np.sin(theta1)]
    parameterT = [rj * np.cos(theta1) + rm * np.cos(theta2), rj * np.sin(theta1) + rm * np.sin(theta2)]
    return parameterJ, parameterT

x1, y1 = bane(t)[0]
x2, y2 = bane(t)[1]

plt.plot(x1, y1, label ='Jord')
plt.plot(x2,y2, label ='Måne')

plt.legend()
plt.show()
```

$$r(t) = r_1(t) + r_2(t)$$

$$= \begin{pmatrix} r_j \cos(\alpha) \\ r_j \sin(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_m \cos(\theta) \\ r_m \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} r_j \cos(\alpha) + r_m \cos(\theta) \\ r_j \sin(\alpha) + r_m \sin(\theta) \end{pmatrix}}}$$

c.) Når det fullmåne og nymåne vil den geometriske tolkningen se slik ut

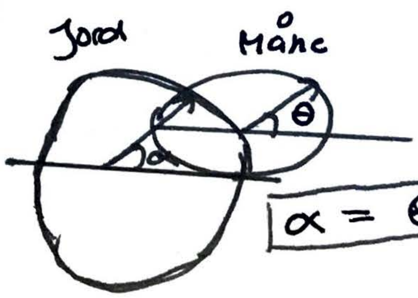


Vi ser fra dette at ved begge tidspunktene er $r_1(t)$ og $r_2(t)$ på samme linje.
Dette betyr vinkelen mellom posisjonsvektorene og horisontalen deres må være like.

ermed må vi sette $\alpha = \theta$ for $r_1(t)$ og $r_2(t)$ og løse likningen med hensyn på t.

$$\cos(\alpha) = \cos(\theta)$$

$$\boxed{\frac{2\pi t}{T_j} + 2k\pi = \frac{2\pi t}{T_m}}$$



$$\boxed{\alpha = \theta}$$

Løser vi likningen får vi følgende:

$$\frac{2\pi t}{T_j} + 2k\pi = \frac{2\pi t}{T_m} \quad \Big| :2\pi$$

$\boxed{k = 0,1,2 \ldots}$

$$\frac{t}{T_j} + k = \frac{t}{T_m} \quad \Big| \cdot T_j T_m$$

$$t \cdot T_m + k(T_j T_m) = t \cdot T_j$$

$$k(T_j T_m) = t \cdot T_j - t \cdot T_m$$

$$k(T_j T_m) = t(T_j - T_m)$$

$$\underline{\underline{t = \frac{k(T_j T_m)}{(T_j - T_m)}}}$$

Setter vi inn verdiene i utrykket, og $k=1$ får vi at $\underline{\underline{t = 29{,}5}}$. Det tar altså 29,5 dager mellom hver fullmåne. Grunnen til at vi setter $k=1$ er fordi: løser likningen med hensyn på at $\cos(\alpha, \theta) = 1$. Det vil altså være fullmåne når $\cos(\alpha, \theta) = 1$ og nymåne når $\cos(\alpha, \theta) = -1$

Velger vi å løse likningen for $\cos(\alpha, \theta) = -1$ blir den følgelig:

$$\frac{2\pi t}{T_j} + (2k+1)\pi = \frac{2\pi t}{T_m} \quad \Big| :2\pi$$

$$\frac{t}{T_j} + \frac{2k+1}{2} = \frac{t}{T_m} \quad \Big| \cdot T_j T_m$$

$$t \cdot T_m + \frac{(2k+1)(T_j T_m)}{2} = t \cdot T_j$$

$$t \cdot T_j - t \cdot T_m = \frac{(2k+1)(T_j T_m)}{2}$$

$$\underline{\underline{t = \frac{(2k+1)(T_j T_m)}{2(T_j - T_m)}}}$$

Det viser seg at hvis man setter inn verdier som tidligere vil Δt gi 29,5 dager som betyr at det tar like lang mellom nymånene og fullmånene.

Dette betyr og at synodisk omløpstid er lengst

$$\underline{\underline{29{,}5 > 27{,}3}}$$

d.) For å finne hastighetsvektoren $\mathbb{V}(t)$ må vi huske på relasjonen $r'(t) = \mathbb{V}(t)$, som betyr at vi må derivere posisjonsparametriseringen

$$r(t) = \begin{pmatrix} r_j \cos\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right) + r_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T_m}\right) \\ r_j \sin\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right) + r_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T_m}\right) \end{pmatrix}$$

$$r'(t) = \begin{pmatrix} r_j\left(-\sin\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right)\right)\cdot\frac{2\pi}{T_j} - r_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T_m}\right)\cdot\frac{2\pi}{T_m} \\ r_j \cos\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right)\cdot\frac{2\pi}{T_j} + r_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T_m}\right)\cdot\frac{2\pi}{T_m} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{V}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{2\pi r_j}{T_j}\sin\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right) - \frac{2\pi r_m}{T_m}\sin\left(\frac{2\pi t}{T_m}\right) \\ \frac{2\pi r_j}{T_j}\cos\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right) + \frac{r_m 2\pi}{T_m}\cos\left(\frac{2\pi t}{T_m}\right) \end{pmatrix}$$

Når vi nå skal finne farten må se på størrelsen til hastighetsvektoren $(|\mathbb{V}(t)|)$.

Vi starter med å løse opp kvadratene i x og y-retningen.

$$(V(t)_x)^2 = \left(-\left(\frac{2\pi r_j}{T_j}\sin\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right) + \frac{2\pi r_m}{T_m}\sin\left(\frac{2\pi t}{T_m}\right)\right)\right)^2$$

$$= \frac{4\pi^2 r_j^2}{T_j^2}\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right) + \frac{4\pi^2 r_j r_m}{T_j T_m}\cdot 2\sin\left(\frac{2\pi t}{T_m}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right)$$

$$+ \frac{4\pi^2 r_m^2}{T_m^2}\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T_m}\right)$$

$$\left(\mathbb{V}(t)_y\right)^2 = \left(\frac{2\pi rj}{Tj}\cos\left(\frac{2\pi t}{Tj}\right) + \frac{2\pi rm}{Tm}\cos\left(\frac{2\pi t}{Tm}\right)\right)^2$$

$$= \left(\frac{4\pi^2 rj^2}{Tj^2}\cos^2\left(\frac{2\pi t}{Tj}\right) + \frac{4\pi^2 rj\,rm}{Tm\cdot Tj}\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{2\pi t}{Tm}\right)\cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{Tj}\right) + \frac{4\pi^2 rm^2}{Tm^2}\cos^2\left(\frac{2\pi t}{Tm}\right)\right)$$

Dermed blir størrelsen til vektoren:

$$|\mathbb{V}(t)| = \sqrt{\frac{4\pi^2 rj^2}{Tj^2}\cos^2\left(\frac{2\pi t}{Tj}\right) + \frac{4\pi^2 rj^2}{Tj^2}\sin^2\left(\frac{2\pi t}{Tj}\right) + \frac{4\pi^2 rm^2}{Tm^2}\cos^2\left(\frac{2\pi t}{Tm}\right) + \frac{4\pi^2 Tm^2}{Tm^2}\sin^2\left(\frac{2\pi t}{Tm}\right) + \frac{8\pi^2 rm\,rj}{TmTj}\left(\sin\left(\frac{2\pi t}{Tm}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi t}{Tj}\right) + \cos\left(\frac{2\pi t}{Tm}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi t}{Tm}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi^2 rj^2}{Tj^2} + \frac{4\pi^2 rm^2}{Tm^2} + \frac{8\pi^2 rm\,rj}{TmTj}\cdot\cos\left(\frac{2\pi t}{Tj} - \frac{2\pi t}{Tm}\right)}$$

NB!
Vi kjenner igjen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ og
$\cos(x_1 \mp x_2) = \cos(x_1)\cdot\cos(x_2) \mp \sin(x_1)\cdot\sin(x_2)$

Vi ser at i fra utrykket at månen vil ha høgest fart når $\cos(\alpha - \theta) = 1$, og minst når $\cos(\alpha - \theta) = -1$.

Dermed har den høgest hastighet når den nærmer seg fullmåne kontra nymåne