MAT 1120

Obligatoriskoppgave 2

Jonas Semprini Næss

7. mars 2022

Oppgave 1

Anta at $U = [\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n]$ *er en* $n \times n$ *matrise. Sjekk at* U *er semiortogonal hvis og bare hvis* $\boldsymbol{u}_j \neq \mathbf{0}$ *for* $j = 1, \ldots, n$ *og* $\boldsymbol{u}_j$*-ene er ortogonale på hverandre, d.v.s* $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = 0$ *når* $i \neq j$*. Anta deretter at* U *er semiortogonal og sett*

$$\boldsymbol{u}_j^{'} = \frac{1}{\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_j} \boldsymbol{u}_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

Begrunn at U *er invertibel og at*

$$U^{-1} = \left[\boldsymbol{u}_1^{'} \cdots \boldsymbol{u}_n^{'}\right]^T.$$

Løsning

For å vise at U er en semiortogonal matrise tar vi utgangspunkt i kravet om at $U^T U$ er en diagonalmatrise med kun positive koeffsienter langs hoveddiagonalen. Vi vet at

$$U = [\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n]$$

hvilket gir

$$U^T = [\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n]^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}.$$

Videre beregner vi matriseproduktet U^TU og sjekker om produktet oppfyller kravet.

$$U^TU = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} [\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u_1} & \cdots & \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u_1} & \cdots & \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{u}_n \cdot \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \cdot \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$$

Vi husker at $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = 0$ når $i \neq j$ hvilket betyr at alle prikkprodukt i nedre og øvre del av matriseproduktet gir 0. Videre har vi identiteten $v \cdot v = \|v\|^2$, der $\|v\|^2 > 0$ som betyr at sluttproduktet gir en diagonal matrise (kun null entrier alle steder utenom hoveddiagonalen) med positive koeffisienter langs hoveddiagonalen, som var det vi skulle vise.

Siden vektorene $\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_i$ for $i \neq j$ i U står ortogonalt på hverandre og er forskjellig fra nullvektoren, impliserer det at vektorene er lineært uavhengige. Da følger det fra *Invertibel Matrise Teoremet* at U er invertibel.

For å vise at $U^{-1} = \left[\boldsymbol{u}_1^{'} \cdots \boldsymbol{u}_n^{'}\right]^T$ skriver vi matrisen

$$U^{'} = \left[\boldsymbol{u}_1^{'} \cdots \boldsymbol{u}_n^{'}\right]^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^{'} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n^{'} \end{bmatrix}.$$

Bruker vi så begrunnelsen om at U er invertibel må følgende gjelde $U^{-1}U = I$ hvor I er identitesmatrisen. Dermed kan vi sjekke om matriseproduktet $U^{'}U$ gir samme konklusjon. Da har vi

$$U^{'}U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^{'} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n^{'} \end{bmatrix} [\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^{'}\boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_1^{'}\boldsymbol{u}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{u}_n^{'}\boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n^{'}\boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^{'} \cdot \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_1^{'} \cdot \boldsymbol{u}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{u}_n^{'} \cdot \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n^{'} \cdot \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$$

Sjekker vi for alle elementer utenfor hoveddiagonalen har vi

$$\frac{1}{\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_j}\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_i = 0$$

for $i \neq j$, og dermed er elementene langs hoveddiagonalen

$$\frac{1}{\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_j}\boldsymbol{u}_j \cdot \boldsymbol{u}_i = 1$$

for $i = j$ hvilket betyr at vi ender opp med matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

som er identitetsmatrisen, og vi har vist at $U^{-1} = \left[\boldsymbol{u}_1^{'} \cdots \boldsymbol{u}_n^{'}\right]^T$.

Oppgave 2

Del opp $[0, \pi]$ i 3 intervaller av lengde og la t_1, t_2, t_3 være midtpunktene til disse intervallene:

$$t_1 = \frac{\pi}{6},\ t_2 = \frac{\pi}{2},\ t_3 = \frac{5\pi}{6}$$

Sett $C_3 = \begin{bmatrix} 1 & \cos(t_1) & \cos(2t_1) \\ 1 & \cos(t_2) & \cos(2t_2) \\ 1 & \cos(t_3) & \cos(2t_3) \end{bmatrix},\quad S_3 = \begin{bmatrix} \sin(t_1) & \sin(2t_1) & \sin(3t_1) \\ \sin(t_2) & \sin(2t_2) & \sin(3t_2) \\ \sin(t_3) & \sin(2t_3) & \sin(3t_3) \end{bmatrix}.$

Regn ut C_3 og S_3 og sjekk at disse matrisene er semiortogonale. Bruk deretter Oppgave 1 til å angi matrisene $(C_3)^{-1}$ og $(S_3)^{-1}$.

Løsning

Setter vi inn verdiene t_1, t_2, t_3 i hver av matrisene får vi følgelig

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\quad S_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Radreduserer vi hver av matrisene til redusert trappeform får vi identitetsmatrisen hvilket betyr pivoter i hver rad og kolonne (lineært uavhengige vektorer). Ser videre at alle vektorene er ulik nullvektoren ergo er matrisene semiortogonale.

Ved å bruke definisjonen av den inverse matrisen til en semiortogonal kvadratisk matrise i oppgave 1.) har vi følgende ressonement.

$$C_3^{-1} = (C_3^{'})^T,\ S_3^{-1} = (S^{'})^T$$

hvor $C_3^{'}, S_3^{'}$ er de normaliserte matrisene av C_3, S_3. Da har vi at

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{1^2+1^2+1^2}(1,1,1)$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2} = \frac{1}{\frac{3}{4}+0+\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_3} = \frac{1}{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$$

hvor $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \in C_3^{'}$. Det gir dermed

$$(C_3^{'})^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = C_3^{-1}$$

Følger vi samme ressonement for S_3^{-1} gir det

$$(S_3^{'})^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = S_3^{-1}$$

Oppgave 3

Del opp $[0, \pi]$ i 8 intervaller av lengde $\frac{\pi}{8}$ og la $t_1, \cdots, t_8$, være midtpunktene til disse intervallene:

$$t_1 = \frac{\pi}{16}, t_2 = \frac{3\pi}{16}, \cdots, \frac{15\pi}{16}$$

m.a.o. $t_i = \frac{\pi}{16} + (i-1)\frac{\pi}{8},\ i = 1, 2, \ldots, 8$

La $C = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}$ *og* $S = \begin{bmatrix} s_{ij} \end{bmatrix}$ *være* 8×8 *matrisene gitt ved*

$$c_{ij} = \cos((j-1)t_i),\ s_{ij} = \sin(jt_i),\ i, j \in \{1, 2 \ldots 8\}$$

Sjekk med Matlab at matrisene C og S er semiortogonale. Bruk deretter Oppgave 1 (og Matlab) til å beregne C^{-1} og S^{-1}.

Løsning

Vi kan løse oppgaven ved følgende MATLAB-script

```
function [C_ort, S_ort] = matrix_gen(n)
    t = zeros(n,1);
    C = zeros(n,n);
    S = zeros(n,n);
    for i = 1:n
        t(i) = pi/16 + (i-1)*pi/8;
        for j = 1:n
            C(i,j) = cos((j-1)*t(i));
            S(i,j) = sin(j*t(i));
        end
    end
   C_trans = transpose(C);
   S_trans = transpose(S);

   C_ort = round(mtimes(C_trans, C));
   S_ort = round(mtimes(S_trans, S));
end
```

hvilket ved gjennomkjøring gir matrisene

```
C_ort =

     8     0     0     0     0     0     0     0
     0     4     0     0     0     0     0     0
     0     0     4     0     0     0     0     0
     0     0     0     4     0     0     0     0
     0     0     0     0     4     0     0     0
     0     0     0     0     0     4     0     0
     0     0     0     0     0     0     4     0
     0     0     0     0     0     0     0     4

S_ort =

     4     0     0     0     0     0     0     0
     0     4     0     0     0     0     0     0
     0     0     4     0     0     0     0     0
     0     0     0     4     0     0     0     0
     0     0     0     0     4     0     0     0
     0     0     0     0     0     4     0     0
     0     0     0     0     0     0     4     0
     0     0     0     0     0     0     0     8
```

der vi observerer at begge matrisene oppfyller kravet for å være semi-ortogonal. Utvider vi scriptet til å finne de inverse matrisene til C og S har vi

```
function [C_ort1, S_ort2, C_inv, S_inv] = matrix_gen(n)
    t = zeros(n,1);
    C = zeros(n,n);
    S = zeros(n,n);
    for i = 1:n
        t(i) = pi/16 + (i-1)*pi/8;
        for j = 1:n
            C(i,j) = cos((j-1)*t(i));
            S(i,j) = sin(j*t(i));
        end
    end
   C_trans = transpose(C);
   S_trans = transpose(S);

   C_ort1 = round(mtimes(C_trans, C));
   S_ort2 = round(mtimes(S_trans, S));

   C_u = zeros(n);
   S_u = zeros(n);
   for k = 1:n
       cj = C(:,k);
       sj = S(:,k);
       C_u(:, k) = cj./(sum(cj.^2));
       S_u(:, k) = sj./(sum(sj.^2));
   end
   C_inv = transpose(C_u);
   S_inv = transpose(S_u);
end
```

som gir at de inverse matrisene er

```
C_inv =

 0.125       0.125       0.125       0.125       0.125       0.125
 0.245       0.208       0.139       0.049      -0.049      -0.139
 0.231       0.096      -0.096      -0.231      -0.231      -0.096
 0.208      -0.049      -0.245      -0.139       0.139       0.245
 0.177      -0.177      -0.177       0.177       0.177      -0.177
 0.139      -0.245       0.049       0.208      -0.208      -0.049
 0.096      -0.231       0.231      -0.096      -0.096       0.231
 0.049      -0.139       0.208      -0.245       0.245      -0.208


S_inv =

  0.049       0.139       0.208       0.245       0.245       0.208
```

```
0.096        0.231        0.231        0.096       -0.096       -0.231
0.139        0.245        0.049       -0.208       -0.208        0.049
0.177        0.177       -0.177       -0.177        0.177        0.177
0.208        0.049       -0.245        0.139        0.139       -0.245
0.231       -0.096       -0.096        0.231       -0.231        0.096
0.245       -0.208        0.139       -0.049       -0.049        0.139
0.125       -0.125        0.125       -0.125        0.125       -0.125
```

Oppgave 4

Bruk Oppgave 3 til å begrunne at $\mathcal{C}$ er en basis for W_c.

Hint: Betrakt likningen

$$\lambda_1 + \lambda_2 \cos(t) + \lambda_3 \cos(2t) + \cdots + \lambda_8 \cos(7t) = 0$$

for alle $t \in [0, \pi]$, og sett inn $t = t_1, t_2, \ldots, t_8$.

Løsning

Vi skriver først elementene i mengden $\mathcal{C}$ som en lineærkombinasjon av åtte vektorer.

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(t_1) \\ \vdots \\ \cos(7t_1) \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(t_2) \\ \vdots \\ \cos(7t_2) \end{bmatrix} + \cdots + \lambda_7 \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(t_7) \\ \vdots \\ \cos(7t_7) \end{bmatrix} + \lambda_8 \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(t_8) \\ \vdots \\ \cos(7t_8) \end{bmatrix} \tag{1}$$

hvor $\lambda_1, \ldots, \lambda_8 \in \mathbb{R}$ og $\{t_1, \ldots, t_8\} \in \left\{\frac{\pi}{16}, \ldots, \frac{15\pi}{16}\right\}$. For at en mengde vektorer skal utgjøre en basis må hver av vektorene i mengden være lineært uavhengige. Er de det er de ergo en basis for rommet de spenner ut. Dermed kan vi sette sammen vektorene i lineærkombinasjonen og radredusere den resulterende matrisen til vi (forhåptentligvis) når identitetsmatrisen. Da har vi at

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \cos(t_1) & \cdots & \cos(t_8) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(7t_1) & \cdots & \cos(7t_8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \cos(\frac{\pi}{16}) & \cdots & \cos(\frac{15\pi}{16}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(7\frac{\pi}{16}) & \cdots & \cos(7\frac{15\pi}{16}) \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

hvilket betyr at mengden $\mathcal{C}$ utgjør en basis for W_C siden den eneste løsningen av likningsystemet (1) er $\lambda_1, \ldots, \lambda_8 = 0$.

Oppgave 5

Sjekk at matrisen til T_C med hensyn på basisene $\mathcal{C}$ og $\mathcal{E}$ er matrisen C, og begrunn at T_C er en isomorfi.

Løsning

Vi har at matrisen $[T_C]_{\mathcal{C}} = [T(\mathcal{C}_1) \cdots T(\mathcal{C}_8]$ med hensyn på basis $\mathcal{C}$. Videre kan vi skrive matriserepresentasjonen M til matrisen T_C m.h.p basisene $\mathcal{C}$ og $\mathcal{E}$ som $M = \Big[[T(\mathcal{C}_1)]_{\mathcal{E}} \cdots [T(\mathcal{C}_8]_{\mathcal{E}}\Big]$. Skriver vi M helt ut gir det

$$
\begin{aligned}
M &= \Big[[T(\mathcal{C}_1)]_{\mathcal{E}} \cdots [T(\mathcal{C}_8]_{\mathcal{E}}\Big] \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1(t_1) \\ \vdots \\ \mathcal{C}_1(t_8) \end{bmatrix}_{\mathcal{E}} & \cdots & \begin{bmatrix} \mathcal{C}_8(t_1) \\ \vdots \\ \mathcal{C}_8(t_8) \end{bmatrix}_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cos(7t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cos(7t_8) \end{bmatrix} = C
\end{aligned}
$$

hvilket vi skulle vise. Bruker vi så resultatet fra oppgave 3. husker vi at C er invertibel og kan likeledes radreduseres til identitetsmatrisen. Det er ekvivalent med at det eksisterer en pivot i hver rad og kollonne hvilket betyr at C er en-til-en. Da kan vi bruke Notat 2 som sier at

- T er en isomorfi $\iff$ M er invertibel.
- T er en isomorfi $\iff$ T er $1-1$.

som stemmer i følge resultatet, og vi kan konkludere med at T_C og C er en isomorfi.

Oppgave 6

Begrunn at g^C er en 8-midtpunktinterpolasjon av g på $[0, \pi]$, som tilfredsstiller at

$$[g^c]_{\mathcal{C}} = C^{-1}\boldsymbol{y}$$

Løsning

For at en vilkårlig funksjon $k : [a,b] \to \mathbb{R}$ skal være en n-midtpunktinterpolasjon av en funksjon f må den oppfylle kravet

$$k(t_1) = f(t_1), \ldots, h(t_n) = f(t_n)$$

Her er $k = \boldsymbol{y} = (g(t_1), \ldots, g(t_8)) \in \mathbb{R}^8$ og $g^c = T_c^{-1}\boldsymbol{y}$. Bruker vi opplysningen gir det

$$g^c(t_1) = g(t_1), \ldots, g^c(t_8) = g(t_8) \iff T_{\mathcal{C}}(g^c) = (g(t_1), \ldots, g(t_8))$$

Hvilket vi må sjekke at stemmer

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{C}}(g^c) &= T_{\mathcal{C}}\left(T_{\mathcal{C}}^{-1}(\boldsymbol{y})\right) \\ T_{\mathcal{C}}\left(T_c^{-1}\boldsymbol{y}\right) &= T_{\mathcal{C}}\left(T_{\mathcal{C}}^{-1}\left(g(t_1), \ldots, g(t_8)\right)\right) \\ T_{\mathcal{C}}(g^c) &= (g(t_1), \ldots, g(t_8)) \end{aligned}$$

dermed kan vi sjekke om g^c tilfredsstiller $[g^c]_{\mathcal{C}} = C^{-1}\boldsymbol{y}$

$$\begin{aligned} [g^c]_{\mathcal{C}} &= \left[T_{\mathcal{C}}^{-1}(\boldsymbol{y})\right]_{\mathcal{C}} \\ \left[T_c^{-1}\boldsymbol{y}\right]_{\mathcal{C}} &= \left[T_{\mathcal{C}}^{-1}\right]_{\mathcal{C}}[\boldsymbol{y}]_{\mathcal{E}} = \left[T_{\mathcal{C}}^{-1}\right]_{\mathcal{C}}\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

Bruker så fra Notat 2 at $\left[T_{\mathcal{C}}^{-1}\right]_{\mathcal{C}} = [T_{\mathcal{C}}]_{\mathcal{C}}^{-1}$ og fra Oppgave 5 at $[T_{\mathcal{C}}]_{\mathcal{C}}^{-1} = C^{-1}$, slik at vi sluttvis får

$$[g^c]_{\mathcal{C}} = C^{-1}\boldsymbol{y}$$

hvilket vi skulle vise.

Oppgave 7

Begrunn at V_ℓ og V_o er underrom av V. Sjekk deretter at hvis $f \in V$, så er $f_\ell \in V_\ell$, $f_o \in V_o$, og

$$f = f_\ell + f_o$$

Løsning

For at V_ℓ og V_o skal være underrom av V må de oppfylle aksiomene

1. Nullvektoren i V ligger i V_ℓ og V_o.

2. V_ℓ og V_o er lukket under addisjon.

3. V_ℓ og V_o er lukket under skalarmultiplikasjon

Krav 1 er allerede tilfredsstilt ut i fra oppgaveteksten, som betyr at vi kan nøye oss med å vise at krav 2 og 3 også holder. For å vise 2, 3 kan vi gjøre følgende.

$$\begin{aligned}(2)\ f, g &\in V_\ell \\ h &= f + g \\ h(-t) &= f(-t) + g(-t) \\ h(-t) &= f(t) + g(t) \\ h(t) &= h(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3)\ f &\in V_\ell \\ c &\in \mathbb{R} \\ h &= cf \\ h(t) &= cf(t) = cf(-t) = h(-t) \\ h(t) &= h(t)\end{aligned}$$

Tilsvarende bevis er analogt for $f(-t) = -f(t)$ (altså V_o), og dermed er V_ℓ og V_o underrom av V.

Hvis $f \in V$ så er

$$f_\ell = \frac{1}{2}\left(f + T(f)\right)$$

$$f_o = \frac{1}{2}\left(f - T(f)\right).$$

Skal $f_\ell \in V_\ell$ og $f_o \in V_o$ må kravene $f(-t) = f(t),\ f(-t) = -f(t)$ være oppfyllt for alle t.

$$f_\ell(-t) = \frac{1}{2}\left(f + T(f)\right) = \frac{1}{2}\left(f(t) + f(-t)\right) = f_\ell(t)$$

tilsvarende kan vises for f_o. Legger vi så sammen f_ℓ og f_o gir det

$$
\begin{aligned}
f_\ell(t) + f_o(t) &= \frac{1}{2}\left(f(t) + f(-t)\right) + \frac{1}{2}\left(f(t) - f(-t)\right) \\
&= \frac{f(t) + f(-t) + f(t) - f(-t)}{2} \\
&= \frac{2f(t)}{2} = f(t)
\end{aligned}
$$

som var det vi ønsket å vise.

Oppgave 8

Betrakt funksjonen

$$
f(t) = (\pi^2 - t^2)e^{\frac{t}{\pi}}, \; t \in [-\pi, \pi]
$$

Lag og kjør en MatLab kode som gjør følgende

- Beregner vektorene $\boldsymbol{y}_\ell$ og $\boldsymbol{y}_o$
- Beregner deretter vektorene $\boldsymbol{y}^C$ og $\boldsymbol{y}^S$
- Plot grafene til f og f_{16} på intervallet $[-\pi, \pi]$ i samme figur.

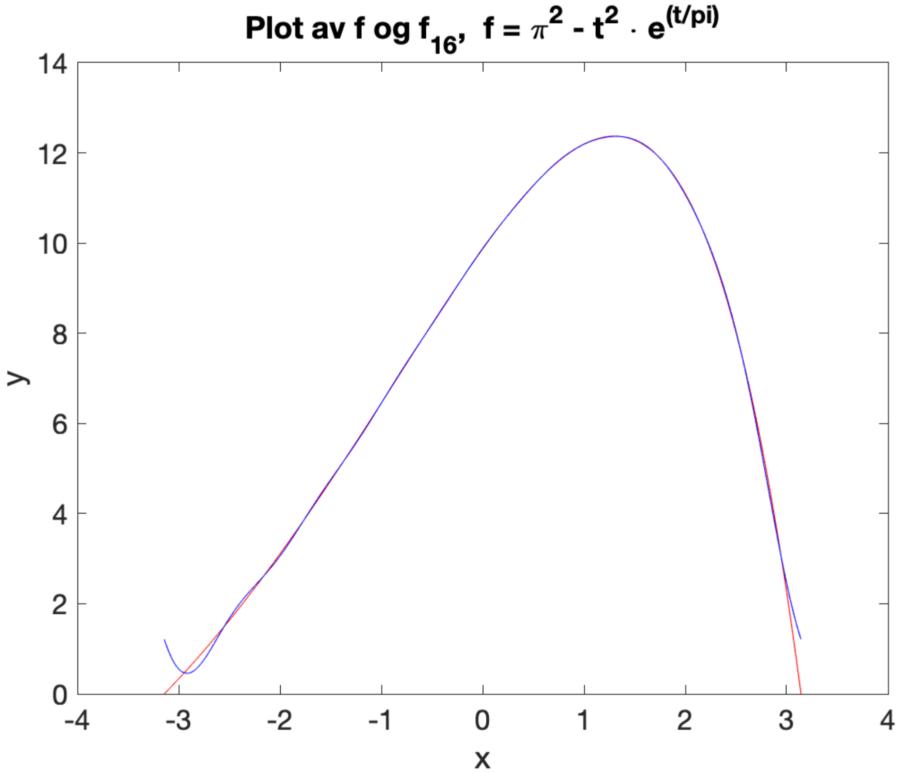
Løsning

Løser oppgaven ved følgende MatLab script

```
 n = 8;
 t = zeros(n);
 C = zeros(n,n);
 S = zeros(n,n);
 for i = 1:n
     t(i) = pi/16 + (i-1)*pi/8;
     for j = 1:n
         C(i,j) = cos((j-1)*t(i));
         S(i,j) = sin(j*t(i));
     end
 end
C_trans = transpose(C);
S_trans = transpose(S);

C_ort1 = round(mtimes(C_trans, C));
S_ort2 = round(mtimes(S_trans, S));

```

```
C_u = zeros(n);
S_u = zeros(n);
for k = 1:n
    cj = C(:,k);
    sj = S(:,k);
    C_u(:, k) = cj./(sum(cj.^2));
    S_u(:, k) = sj./(sum(sj.^2));
end
C_inv = transpose(C_u);
S_inv = transpose(S_u);

t_16 = linspace(pi/16, 15*pi/16, 8);
t = linspace(-pi, pi, 10000);

f_t16 = (pi.^2. - (t_16.^2)).*exp(t_16./pi);
f_t16_n = ((pi.^2.- ((-t_16).^2)).*exp((-t_16)./pi));

f_l = 0.5*(f_t16 + f_t16_n);
f_o = 0.5*(f_t16 - f_t16_n);

y_c = mtimes(C_inv, transpose(f_l));
y_s = mtimes(S_inv, transpose(f_o));

f_16 = y_c(1) + y_c(2)*cos(t) + y_c(3)*cos(2*t) + y_c(4)*cos(3*t) ...
  + y_c(5)*cos(4*t) + y_c(6)*cos(5*t) + y_c(7)*cos(6*t)...
  + y_c(8)*cos(7*t)+ y_s(1)*sin(t) + y_s(2)*sin(2*t)...
  + y_s(3)*sin(3*t) + y_s(4)*sin(4*t)+ y_s(5)*sin(5*t)...
  + y_s(6)*sin(6*t)  + y_s(7)*sin(7*t) + y_s(8)*sin(8*t);


f = (pi.^2 - t.^2).*exp(t./pi);
g = figure;
plot(t, f, ' r ' , t , f_16 , 'b')
ax = gca;
ax.FontSize = 15;
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Plot av f og f_{16},  f = \pi^2 - t^2 \cdot e^{(t/pi)}');
saveas(g,'oppgave_8', 'png')
```

som gir følgende plot.



Oppgave 9

Gjenta punktene i Oppgave 8 med funksjonen $f(t) = 1/(1+4t^2)$*, og deretter funksjonen* $f(t) = \tan(t/4)$ *(der* $t \in [-\pi, pi]$ *i begge tilfellene).*

Løsning

Modifiserer vi scriptet i Oppgave 8. med opplysningene i oppgaven får vi følgende to kildekoder

```
  n = 8;
  t = zeros(n);
  C = zeros(n,n);
  S = zeros(n,n);
  for i = 1:n
      t(i) = pi/16 + (i-1)*pi/8;
      for j = 1:n
          C(i,j) = cos((j-1)*t(i));
          S(i,j) = sin(j*t(i));
      end
  end
C_trans = transpose(C);
```

```
S_trans = transpose(S);

C_ort1 = round(mtimes(C_trans, C));
S_ort2 = round(mtimes(S_trans, S));

C_u = zeros(n);
S_u = zeros(n);
for k = 1:n
    cj = C(:,k);
    sj = S(:,k);
    C_u(:, k) = cj./(sum(cj.^2));
    S_u(:, k) = sj./(sum(sj.^2));
end
C_inv = transpose(C_u);
S_inv = transpose(S_u);

t_16 = linspace(pi/16, 15*pi/16, 8);
t = linspace(-pi, pi, 10000);

f_t16 = 1./(1 + 4.*t_16.^2);
f_t16_n = 1./(1 + 4.*(-t_16).^2);

f_l = 0.5*(f_t16 + f_t16_n);
f_o = 0.5*(f_t16 - f_t16_n);

y_c = mtimes(C_inv, transpose(f_l));
y_s = mtimes(S_inv, transpose(f_o));

f_16 = y_c(1) + y_c(2)*cos(t) + y_c(3)*cos(2*t) + y_c(4)*cos(3*t) ...
 + y_c(5)*cos(4*t) + y_c(6)*cos(5*t) + y_c(7)*cos(6*t)...
 + y_c(8)*cos(7*t) + y_s(1)*sin(t) + y_s(2)*sin(2*t) ...
 + y_s(3)*sin(3*t)  + y_s(4)*sin(4*t)  + y_s(5)*sin(5*t)...
 + y_s(6)*sin(6*t)  + y_s(7)*sin(7*t) + y_s(8)*sin(8*t);

f = 1./(1 + 4.*t.^2);
g = figure;
plot(t, f, ' r ' , t , f_16 , 'b')
ax = gca;
ax.FontSize = 15;
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Plot av f og f_{16},  f = 1/(1 + 4t^2)');
saveas(g,'oppgave_9', 'png'
```

```
 n = 8;
 t = zeros(n);
 C = zeros(n,n);
 S = zeros(n,n);
```

```
 for i = 1:n
     t(i) = pi/16 + (i-1)*pi/8;
     for j = 1:n
         C(i,j) = cos((j-1)*t(i));
         S(i,j) = sin(j*t(i));
     end
 end
C_trans = transpose(C);
S_trans = transpose(S);

C_ort1 = round(mtimes(C_trans, C));
S_ort2 = round(mtimes(S_trans, S));

C_u = zeros(n);
S_u = zeros(n);
for k = 1:n
    cj = C(:,k);
    sj = S(:,k);
    C_u(:, k) = cj./(sum(cj.^2));
    S_u(:, k) = sj./(sum(sj.^2));
end
C_inv = transpose(C_u);
S_inv = transpose(S_u);

t_16 = linspace(pi/16, 15*pi/16, 8);
t = linspace(-pi, pi, 10000);

f_t16 = tan(t_16./4);
f_t16_n = tan(-t_16./4);

f_l = 0.5*(f_t16 + f_t16_n);
f_o = 0.5*(f_t16 - f_t16_n);

y_c = mtimes(C_inv, transpose(f_l));
y_s = mtimes(S_inv, transpose(f_o));

f_16 = y_c(1) + y_c(2)*cos(t) + y_c(3)*cos(2*t) + y_c(4)*cos(3*t) ...
+ y_c(5)*cos(4*t) + y_c(6)*cos(5*t) + y_c(7)*cos(6*t)...
+ y_c(8)*cos(7*t) + y_s(1)*sin(t) + y_s(2)*sin(2*t)...
+ y_s(3)*sin(3*t)  + y_s(4)*sin(4*t)  + y_s(5)*sin(5*t)...
+ y_s(6)*sin(6*t)  + y_s(7)*sin(7*t) + y_s(8)*sin(8*t);

f = tan(t./4);
g = figure;
plot(t, f, ' r ' , t , f_16 , 'b')
ax = gca;
ax.FontSize = 15;
xlabel('x');
```

```
ylabel('y');
title('Plot av f og f_{16},  f = tan(t/4)');
saveas(g,'oppgave_9_b', 'png')
```

som sluttvis gir plottene