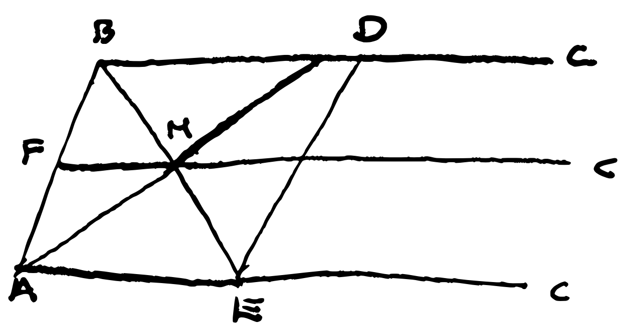
KANDIDATNUMMER:

15862

Eksamen MAT2500 vår 2021

Oppgave 1:

Hjelpeskisse



Gitt ΔABM og følgende linjer

AD, BE, DC, FC kan vi via

Cevas-setning for en vilkårli-g ΔABC si at:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$ Som i

vårt tilfelle kan oversettes til

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$ Vi kan

Observere at fortegn stemmer overens siden C ligger i det uendelig fjerne. Dermed har vi at

$$\overline{BD} \cdot \overline{AE} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \overset{(i)}{=} 1,$$ der

$\overline{EC} = \overline{DC}$ (grunnet lengden til C), og

vi kan konkludere fra (i)

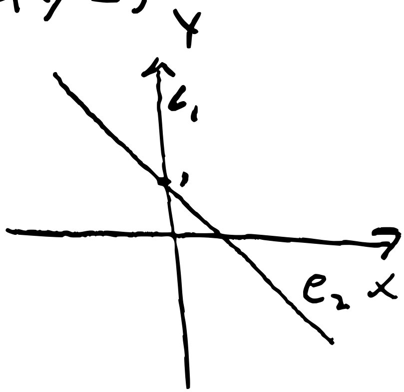
at $$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BD}} \quad \blacksquare$$

OPPGAVE 2:

a.) Gitt to linjer:

l_1: Linje langs y-aksen

l_2: $x+y=1$



Ser vi at de har et skjærin-gspunkt i $\underline{\underline{(0,1)}}$ som vil være et fikspunkt for isometrien, men også et rotasjonssenter. ■

Vinkelen til sammensetningene vil være to ganger vinkelen mellom de to refleksjonsaksene.

Da har vi for

$$2\Theta_{s_1 \circ s_2} = 2 \cdot \cos^{-1}\left(\frac{(1,-1)\cdot(0,1)}{\|(1,-1)\|\cdot\|(0,1)\|}\right)$$

$$= 2 \cdot \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}\cdot 1}\right)$$

$= -\frac{\pi}{2}$. Altså er rotasjonsvinkelen $-\frac{\pi}{2}$ for $s_1 \circ s_2$ og $\frac{\pi}{2}$ for $s_2 \circ s_1$ ■

b) La $S = \frac{1}{2}(s_1 \circ s_2 - s_2 \circ s_1)$

$$= \frac{1}{2} s_1 \circ s_2 - \frac{1}{2} s_2 \circ s_1$$

vi vet fra at begge gir en

rotasjon med vinkel h.h.v

$\frac{-\pi}{2}$ og $\frac{\pi}{2}$. Det gir

$$S = \frac{1}{2} t_{S_{1,2}(a)} P_{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} t_{S_{2,1}(a)} P_{\frac{\pi}{2}}$$

Som er en isometri.

a referer til $a \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (a_1, a_2)$.

kan sjekke for $a = (0,0)$, det gir

$S = \frac{1}{2}(S_1(1,1) - S_2(0,0)) = \frac{1}{2}((-1,1) - (1,1))$

$= \frac{1}{2}((-2,0))$. (En translasjon) ■

OPPGAVE 3:

$\ell: 2x_0 + x_1 + 2x_2 = 0$, $m: x_0 - x_2 = 0$

a.) Skjæringspunkt for ℓ og m

i $\mathbb{P}^2$ er gitt ved

$[1\cdot(-1)-(0) : 2(-1)-(1\cdot 2) : 0-1]$

$= [-1 : -4 : -1] = [1 : 4 : 1].$

Altså er $P = [1 : 4 : 1].$

b.) $n : 3x_0 + x_1 + x_2 = 0$

vi observerer at $n = l + m$

$\rightarrow n^{\vee} = [2 : 1 : 2] + [1 : 0 : -1].$

videre kan vi skrive

K på formen

$k^{\vee} = pl + qm$. Dermed

har vi at kryssforholdet

$(m^\vee, n^\vee; k^\vee, l^\vee)$ kan kreves til

å være:

$(m^\vee, n^\vee; k^\vee, l^\vee) = \frac{qr}{ps}$, der q og

p er nevnt og $n = rl + sm$.

Da har vi

$$\rightarrow \frac{qr}{ps} = -1 \rightarrow \frac{q(1)}{p(1)} = -1$$

$\Rightarrow q = -p$. Da vil følgelig

k være gitt ved

$$k = e - m = [2:1:2] - [1:0:-1]$$

$$= \underline{\underline{[1:1:1]}} \blacksquare$$

c.)

$C: 2x_0^2 + x_0x_1 - x_1x_2 - 3x_2^2 = 0$

Snittet til $C \cap \ell$ og $C \cap m$

er det samme som skjærings-
spunktene til (C, ℓ) og (C, m).

<u>$C \cap \ell$:</u>

→ Skriver om ℓ til

$x_1 \overset{(ii)}{=} -2(x_0 + x_2)$ hvilket vi setter
inn i C som gir

$\rightarrow 2x_0^2 + x_0(-2(x_0 + x_2)) - (-2(x_0 + x_2))x_2 - 3x_2^2 = 0$

$\rightarrow 2x_0^2 - 2x_0^2 - 2x_0x_2 + 2x_0x_2 + 2x_2^2 - 3x_2^2 = 0$

$-x_2^2 = 0$

Den likningen har kun e'n løsning med multiplum 2 som betyr at skjæringspunktet for $C = \ell$ er:

(fra (ii))

$[1 : -2 : 0]$ siden $x_1 = -2 \times 0 + 0$.

Med samme metode kan vi omskrive m til:

$m: x_0 = x_2$ og sette inn i C.

$\rightarrow 2x_2^2 + x_2 x_1 - x_1 x_2 - 3x_2^2 = 0$

$\rightarrow -x_2^2 = 0$ med samme løsning.

Dermed er snittet gitt ved

$[0:1:0]$ for C og m.

Siden $[0:0:0] \notin \mathbb{P}^2$.

Siden kjeglesnittet C er en ellipse

og ℓ og m kun snitter C i ett

respektivt punkt må de så

være tangenter.

I det affine planet har

C likning

$\rightarrow \quad 2x_0^2 + x_0x_1 - x_1 - 3 = 0$

ved å sjekke diskriminanten

gir det

D: $b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)$

$$= 1 - 8 = \underline{\underline{-7}},$$

Dermed en ellipse.

OPPGAVE 4:

$P \subseteq E^3$, med $V = 24$ og $E = 60$.

a.) ved Eulers formel kan vi beregne sideflatene til å være

$$2 = V - E + F$$

$\Rightarrow 2 = 24 - 60 + F$

$\Rightarrow F = 38$ ■

La T være antall trekanter og F antall firkanter. Da har vi at $T + F = 38$. (i)

Teller vi så antall kanter får vi $3T + 4F$, men siden hver kant er kant i to flater gir det

$$60 = \frac{1}{2}(3T + 4F). \quad (ii)$$

Løser vi de to likningene står vi med at

$$F = 6 \text{ og } T = 32$$

Altså 32 trekanter og

6 firkanter. ∎

b.) Siden vi har 32 trekanter og 6 firkanter jobber vi med en sløv kube. Ser vi på konfigurasjonen kan vi se på hvor mange trekanter og firkanter som møtes i hvert hjørne.

La $t+f$ være antall trekanter og firkanter som møtes i hvert hjørne

Hver kant teller som sagt for to. Så vi har

$$E = 60 = 24 \cdot \frac{t+f}{2} = 12t + 12f \quad (i)$$

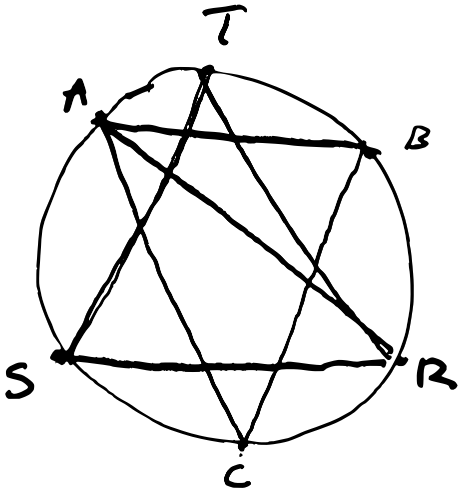
Likeledes har vi også at

$$F = 38 = \frac{24t}{3} + \frac{24f}{4} = 8t + 6f \quad (ii)$$

Løser vi likningssettet har vi at

$t = 4$ og $f = 1$. Så fire trekanter og 1 firkant møtes i hvert hjørne. ■

OPPGAVE 5:



Gitt ΔABC og ΔRST, sett

$\angle BAC = \alpha$,

$\angle ABC = \beta$

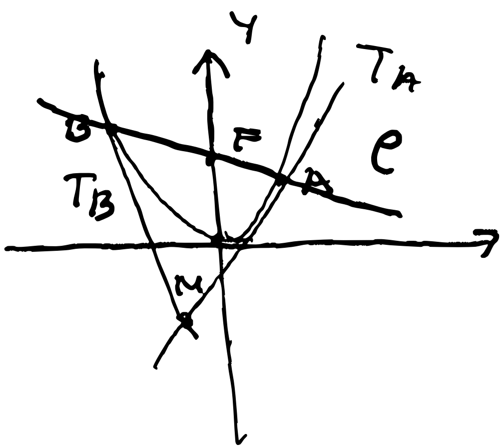
$\angle ACB = \gamma$.

Vi observerer at punktene T, S, R forekommer ved halveringslinjene til de respektive punktene A, B, C.

OPPGAVE 6:

Gitt $y = \frac{1}{4}x^2$, $F = (0, 1)$,

$A = (a, \frac{1}{4}a^2)$ og $B = (b, \frac{1}{4}b^2)$



Likningen til ℓ er gitt ved

$\rightarrow (y - y_0) = k(x - x_0)$

$\rightarrow (y - 1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - 0)$

$\rightarrow y = \frac{\frac{1}{4}a^2 - 1}{a} x + 1$, utgangspunkt A og F

Der med er $\ell: \frac{a^2-4}{4a}x+1$.

Tangent linzen T_A og T_B vil

være på formen.

$\rightarrow Y_A - Y_0 = K(x - x_0)$

For TA:

$\rightarrow Y_A - \frac{1}{4}a^2 = K(X - a)$. Der

$K = \frac{dY}{dx}(A) = \frac{1}{2}(a) = \frac{1}{2}a$. Det sir

$Y_A = \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2$

$Y_A = \frac{1}{2}ax - \frac{1}{4}a^2$. TB er der med

$Y_B = \frac{1}{2}bx - \frac{1}{4}b^2$.

Snittet mellom $T_A \cap T_B$ gir

så:

$$\frac{1}{2}ax - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}bx - \frac{1}{4}b^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}bx = \frac{a^2 - b^2}{4}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}x(a-b) = \frac{a^2 - b^2}{4}$$

$$\rightarrow x = \frac{(a+b)\cancel{(a-b)}}{2\cancel{(a-b)}}$$

$$= \frac{(a+b)}{2}.$$ Setter vi dette

inn i T_A eller T_B gir det

$$y = \frac{1}{2}(a)\frac{(a+b)}{2} - \frac{1}{4}a^2$$

$$= \frac{a^2 + ab - a^2}{4}$$

$$= \underline{\underline{\frac{ab}{4}}}$$ Dermed er snittet deres gitt ved

$P = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{ab}{4}\right)$. For å nå finne geometrisk sted må vi utrykke ved y og x.

Det gir

$x = \frac{a+b}{2} \rightarrow$ $a = 2x - b$

$\downarrow$ inn for y

$y = \frac{ab}{4}$ $y = \frac{(2x-b)(b)}{4}$

$\rightarrow$

Som betyr at de geometriske stedet for $T_A \cap T_B$ er en rett linje:

$$y = \frac{(2x-b)b}{4}$$