

Geometri - MAT 2500

Jan Arthur Christophersen og Kristian Ranestad

21. juni 2017

1 Innledning

Dette kompendiet i Euklidsk plan- og romgeometri er satt sammen til bruk i kurset MAT 2500, og gir en innføring i euklidsk og projektiv plangeometri. Vi legger vekt på å vise ulike tilnærminger til denne geometrien. Først gjennom isometrier og symmetrier, deretter blander vi en syntetisk og en analytisk tilnærming til både euklidsk og projektiv plangeometri. Kurset er spesielt å anbefale som bakgrunn for geometriundervisning i skolen.

Kompendiet er organisert i seks kapitler.

Etter denne innledningen følger to kapitler om symmetrier i planet og i rommet. Disse brukes til å klassifisere mønstre i planet og til å beskrive de Platonske legemene. Deretter følger et kapittel i koordinatfri (syntetisk) geometri. I denne delen legges grunnlaget for de geometriske resonnementene som brukes senere. Både setningen om periferivinkler og symmetriegenskapene til kjeglesnitt, er drøftet her, men også andre relevante setninger med utgangspunkt i Menelaos' og Cevas setninger er tatt med.

I femte kapittel innføres koordinater. Her behandles den analytiske teorien om geometriske steder generelt, med ligninger for kjeglesnitt spesielt. Flere geometriske steder assosiert til kjeglesnitt er tatt med, samt ulike praktiske anvendelser av denne teorien.

Projektiv plangeometri avslutter kompendiet i det sjette kapittelet. Kjeglesnitt i det projektive planet behandles først med ligninger og deretter som ulike snitt av en kjele. Avslutningsvis vises Pascals setning for kjeglesnitt.

2 Isometri og symmetri i planet

2.1 Euklidske rom og isometrigruppen

Vi vil presisere hvor vi foretar elementær Euklidsk geometri. Vi trenger et sted der begrepene *avstand* og *vinkel* har mening. Vi setter $E^n = \mathbb{R}^n$ som mengde, men utstyrt med en avstandsfunksjon induisert fra prikkproduktet. Nemlig, hvis $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ og $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ slik at $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum x_i y_i$, definerer vi *normen* til \mathbf{x} som

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

og avstanden fra \mathbf{x} til \mathbf{y} som

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Det euklidske rommet E^n er da \mathbb{R}^n med denne bestemte avstandsfunksjonen. Vi kaller E^2 det euklidske planet og E^3 det euklidske rommet.

Vi kan nå også definere vinkelen θ mellom \mathbf{x} og \mathbf{y} ved

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \right).$$

Som vanlig tenker vi på \mathbf{x} noen ganger som et punkt og andre ganger som en vektor. I dette tilfellet har vi egentlig definert vinkelen i det spesielle punktet origo, $O = (0, 0, \dots, 0)$, mellom vektorene \mathbf{x} og \mathbf{y} . Dette vil også være vinkelen i skjæringspunktet mellom to linjer med retningsvektor \mathbf{x} og \mathbf{y} .

Det er naturlig å se på figurer opptil kongruens, dvs at vi vil oppfatte geometriske figurer i euklidsk geometri som like hvis de har samme størrelse og form. For å gjøre dette presist definerer vi en *isometri* (også kallt stiv bevegelse) til å være en bijektiv funksjon

$$m : E^n \rightarrow E^n$$

som bevarer avstand. Det betyr at

$$d(m(\mathbf{x}), m(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

La Isom_n være mengden av alle isometrier på E^n .

Merk at hvis vi setter sammen to isometrier m og m' til $m \circ m'$, så er $m \circ m'$ også en isometri. Identitetsavbildningen $\text{id}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ er en isometri. Siden m er bijektiv har den en invers funksjon m^{-1} og

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(m \circ m^{-1}(\mathbf{x}), m \circ m^{-1}(\mathbf{y})) = d(m^{-1}(\mathbf{x}), m^{-1}(\mathbf{y}))$$

så m^{-1} er også en isometri. Alt dette betyr at Isom_n med sammensetning danner det som kalles en *gruppe*.

Grupper er viktige objekter i matematikken som man lærer om i et kurs i algebra. La det være nok her i første omgang å gi definisjonen. En *binær operasjon* på en mengde G er en funksjon $G \times G \rightarrow G$ som vi skriver $(g, h) \mapsto gh$. En mengde G med en binær operasjon er en gruppe hvis

- (i) Binær operasjonen er assosiativ, dvs $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$.
- (ii) Det fins et identitetsselement $e \in G$ med egenskapen $eg = ge = g$ for alle $g \in G$.
- (iii) Hvert element $g \in G$ har en invers $g^{-1} \in G$ med egenskapen $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

I Isom_n er id identitetsselementet. I tråd med gruppenotasjonen skriver vi nå sammensetningen som produktet mm' .

Vi skal se nærmere på hvordan en isometri ser ut. Husk fra linær algebra at en $n \times n$ matrise A er ortogonal hvis $AA^t = I$, der A^t er den transponerte matrisen og I er identitetsmatrisen. Vi sier at en linær operator T er ortogonal hvis standardmatrisen til T er ortogonal. I linær algebra viser man at en operator T er ortogonal $\Leftrightarrow T(\mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ for alle \mathbf{x} og $\mathbf{y} \Leftrightarrow$ søylene i standardmatrisen til T er en ortonormal basis. Husk at en basis $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ er ortonormal dersom

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1, i = 1, \dots, n \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0, 1 \leq i < j \leq n.$$

Det følger at en ortogonal operator er en isometri.

Et *fikspunkt* for en funksjon $f : E^n \rightarrow E^n$ er et punkt p med $f(p) = p$. Det er en type isometri som ikke har noen fikspunkt, nemlig translasjoner med en vektor. Hvis \mathbf{a} er vektoren så er translasjonen gitt ved $t_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$.

Setning 2.1. Hvis $m \in \text{Isom}_n$ så er $m = t_{\mathbf{a}}T$ for en vektor \mathbf{a} og en ortogonal operator T .

Bevis. Anta først at O er et fikspunkt for m . Vi skal vise at da må m være en ortogonal lineær operator.

Vi begynner med å vise at isometrien m bevarer prikkproduktet, altså at $m(\mathbf{x}) \cdot m(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ for alle par av vektorer \mathbf{x}, \mathbf{y} . Siden m bevarer avstand er

$$d(m(\mathbf{x}), m(O)) = d(\mathbf{x}, O).$$

Etter å ha kvadrert begge sider og bruker at $m(O) = O$, så får vi

$$d(m(\mathbf{x}), m(O))^2 = (m(\mathbf{x}) - O) \cdot (m(\mathbf{x}) - O) = m(\mathbf{x}) \cdot m(\mathbf{x})$$

og

$$d(\mathbf{x}, O)^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}.$$

Så

$$m(\mathbf{x}) \cdot m(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}.$$

Igjen, siden m bevarer avstand, det vil si

$$d(m(\mathbf{x}), m(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

så er

$$d(m(\mathbf{x}), m(\mathbf{y}))^2 = (m(\mathbf{x}) - m(\mathbf{y})) \cdot (m(\mathbf{x}) - m(\mathbf{y})) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2.$$

Regner vi ut de to prikkproduktene hver for seg og bruker at $m(\mathbf{x}) \cdot m(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ som vi viste over, får vi på den ene siden

$$\begin{aligned}(m(\mathbf{x}) - m(\mathbf{y})) \cdot (m(\mathbf{x}) - m(\mathbf{y})) &= m(\mathbf{x}) \cdot m(\mathbf{x}) - 2m(\mathbf{x}) \cdot m(\mathbf{y}) + m(\mathbf{y}) \cdot m(\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2m(\mathbf{x}) \cdot m(\mathbf{y}) + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}\end{aligned}$$

og på den andre siden er

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}.$$

Siden de to prikkproduktene er like, må $m(\mathbf{x}) \cdot m(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, så m bevarer prikkproduktet.

La nå $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ være standardbasen. Da må $m(\mathbf{e}_i) \cdot m(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$, så $m(\mathbf{e}_1), \dots, m(\mathbf{e}_n)$ er en ortonormal basis. La T være linær operatoren med standardmatrise som har søyler $m(\mathbf{e}_1), \dots, m(\mathbf{e}_n)$. Da må T være ortogonal. Den inverse operatoren T^{-1} er igjen ortogonal så den sammensatte funksjonen $T^{-1}m$ er en funksjon som bevarer prikkproduktet og har $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ som fikspunkter.

Vi påstår at den eneste slik funksjon er identiteten. Husk at $(x_1, \dots, x_n) \cdot \mathbf{e}_i = x_i$, derfor vil $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_i$ for alle i medføre at $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Hvis f bevarer prikkproduktet og har $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ som fikspunkter da er

$$f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i = f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$$

så $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Det følger at $T^{-1}m = id$ så $m = T$.

For en generell m la $\mathbf{a} = m(O)$. Da er $t_{-\mathbf{a}}m$ en isometri med O som fikspunkt og er derfor lik en ortogonal operator T . Vi får da $m = t_{\mathbf{a}}T$. \square

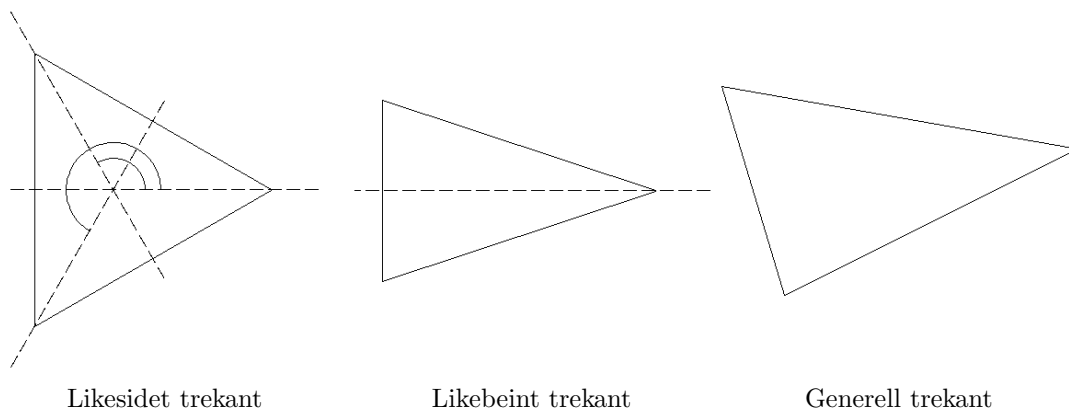
Vi kan definere *orientering* ved hjelp av denne måten å skrive en isometri. Determinanten til en ortogonal operator må være ± 1 . Vi sier at $m = t_{\mathbf{a}}T$ er *orienteringsbevarende* hvis $\det T = 1$ og *orienteringsreverserende* hvis $\det T = -1$. Siden produktet av to ortogonale matriser igjen er en ortogonal matrise, ser man at mengden av ortogonale operatorer danner en gruppe, som vi kaller $O(n)$. Undergruppen av orienteringsbevarende ortogonale operatorer kalles den spesielle ortogonale gruppen og betegnes $SO(n)$.

Sammensetning av isometrier i de to forskjellige klassene oppfører seg som multiplikasjon i $\{1, -1\}$. Sammensetningen av to orienteringsbevarende eller to orienteringsreverserende isometrier er orienteringsbevarende, mens sammensetningen av en orienteringsbevarende og en orienteringsreverserende (og visa versa) gir orienteringsreverserende. Dette følger av at $t_{\mathbf{a}}T t_{\mathbf{a}'}T' = t_{\mathbf{a}+T(\mathbf{a}')}TT'$.

Hvis G er en gruppe og $H \subseteq G$ er en undermengde som er lukket under binær operasjonen og å ta inverser, dvs $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 h_2 \in H$ og $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$, så er H også en gruppe med den samme operasjonen. Slike H kalles undergrupper av G .

Hvis en isometri m tar en delmengde $F \subseteq E^n$ på seg selv, dvs bildet av F , $m(F)$ er lik F , så sier vi at m er en *symmetri* av F . Mengden av symmetrier av F er en undergruppe av Isom_n (se oppgavene) og den kalles symmetrigruppen til F .

Som et eksempel på en symmetrigruppe kan vi ta for oss en likesidet trekant. Man får 6 symmetrier: identiteten, rotasjon om senteret med vinkler $2\pi/3$ og $4\pi/3$ og de tre



Figur 1: Trekanter med forskjellige symmetri grupper.

speilingene om linjene gjennom et hjørne og midtpunktet på motsatte kant. En likebeint trekant som ikke er likesidet har bare en ikke triviell symmetri, nemlig speilingen om linja gjennom midtpunktet på grunnlinjen og motsatt hjørne. Alle andre trekanter har triviell symmetri gruppe. Se Figur 1.

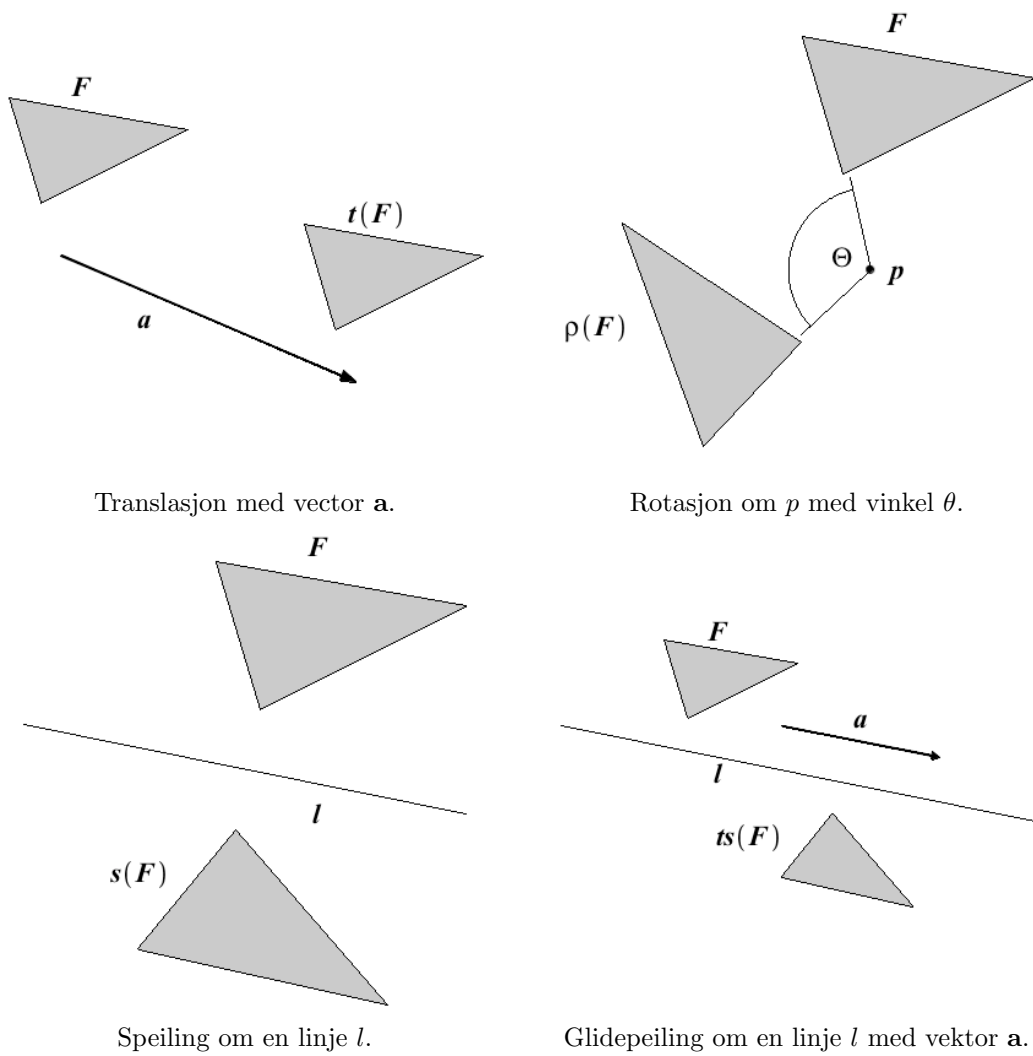
Generelt sier man at en mangekant er *regulær* hvis kantene er like lange og hjørnevinklene er alle like. Symmetri gruppen til en regulær n -kant kalles den dihedrale gruppen og benevnes D_n . Den består av $n-1$ ikke trivielle rotasjoner med vinklene $2k\pi/n$ for $k = 1, \dots, n-1$ og n speilinger. Hvis n er odde vil speilingslinjene være gjennom et hjørne og midtpunktet på motstående kant. Hvis n er like vil speilingslinjene være gjennom motstående hjørner og midtpunktene av motstående kanter. Derfor har D_n alltid $2n$ elementer.

2.2 Isometrier av planet

Vi begynner med å liste opp 4 viktige typer isometrier av E^2 (se også tegningene i Figur 2).

- (i) *Translasjon*, også kalt parallellforskyving, gitt ved $t_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$ for en vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$.
- (ii) *Rotasjon* med vinkel θ om et punkt p som vi kaller $\rho_{\theta,p}$. Punktet \mathbf{x} blir flyttet en vinkel θ i positiv omløpsretning langs sirkelen med sentrum i p .
- (iii) *Speiling* om en linje l som vi kaller s_l . Punktet \mathbf{x} blir flyttet langs en linje som er vinkelrett på l til punktet på den andre siden av l som har lik avstand til l som \mathbf{x} .
- (iv) *Glidespeiling* der man først speiler om en linje l og så translaterer med en vektor parallell til l . Hvis \mathbf{a} er en retningsvektor for l , vil dette være på formen $t_{\mathbf{a}}s_l$.

Merk at translasjoner og rotasjoner er orienteringsbevarende, mens speilinger og glidespeilinger er orienteringsreverserende.



Translasjon med vektor \mathbf{a} .

Rotasjon om p med vinkel θ .

Speiling om en linje l .

Glidepeiling om en linje l med vektor \mathbf{a} .

Figur 2: De fire isometriene av planet.

Vi skriver ρ_θ for $\rho_{\theta,O}$. Merk at standardmatrisen til ρ_θ er

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

som er ortogonal med determinant 1. Det betyr at rotasjoner er orienteringsbevarende.

Setning 2.2. *Hvis m er en isometri av planet som er orienteringsbevarende og har O som fikspunkt, så er m en rotasjon.*

Bevis. Vi vet fra Setning 2.1 at $m = T$ er en ortogonal operator med determinant 1. La θ være vinkelen mellom $(1,0)$ og $T(1,0)$. Siden $\|T(1,0)\| = 1$ vil $\rho_\theta(1,0) = T(1,0)$. Videre er $\rho_\theta^{-1}T$ en ortogonal operator med determinant 1 og $\rho_\theta^{-1}T(1,0) = (1,0)$. La A være standardmatrisen til $\rho_\theta^{-1}T$. Søylene i A må være en ortonormal basis og første søyle er $(1,0)^t$. Hvis $(a,b)^t$ er den andre søylen i A må $(1,0) \cdot (a,b) = 0$ og $a^2 + b^2 = 1$. Det betyr at $a = 0$ og $b = \pm 1$. Men $\det A = 1$ så $b = 1$ og $A = I$. Det følger at $\rho_\theta^{-1}T = id$ og $m = T = \rho_\theta$. \square

Vi sier at en mengde M av elementer i en gruppe G genererer G hvis alle elementer i G kan skrives som produkter av elementer i M . For eksempel er undergruppen av rotasjoner i gruppa D_n generert av ett element, nemlig rotasjon med $2\pi/n$.

Vi skal vise at følgende isometrier genererer gruppa Isom_2 :

- (i) Translasjonene $t_{\mathbf{a}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$.
- (ii) Rotasjonene om O , ρ_θ med matrise

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- (iii) Speilingen om x_1 -aksen, som vi kaller s gitt ved $s(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ med matrise

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

For å vise at disse spesielle isometriene genererer Isom_2 , viser vi at hver isometri kan skrives som et produkt av disse.

Setning 2.3. *Enhver orienteringsbevarende isometri av planet kan skrives på formen $m = t_{\mathbf{a}}\rho_\theta$ for en $0 \leq \theta < 2\pi$ og en $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. Enhver orienteringsreverserende isometri av planet kan skrives på formen $m = t_{\mathbf{a}}\rho_\theta s$ for en $0 \leq \theta < 2\pi$ og en $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$.*

Bevis. La $m \in \text{Isom}_2$ være en isometri. Da har vi allerede vist i Setning 2.1 at $m = t_{\mathbf{a}}T$ for passe $t_{\mathbf{a}}$ og T . Hvis $\det T = 1$, følger det fra Setning 2.2 at $T = \rho_\theta$ for en θ , så $m = t_{\mathbf{a}}\rho_\theta$.

Hvis $\det T = -1$, så er determinanten til Ts lik 1 og siden $Ts(O) = O$, så er $Ts = \rho_\theta$ for en θ . Men $s^{-1} = s$, så

$$T = Ts s^{-1} = \rho_\theta s^{-1} = \rho_\theta s.$$

Derfor er $m = t_{\mathbf{a}}T = t_{\mathbf{a}}\rho_\theta s$.

Tilsammen har vi greid å skrive alle m på den ønskede formen. \square

Følgende regneregler for isometrier er nyttige (se oppgave 2.4.6):

- $t_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} = t_{\mathbf{a}} + t_{\mathbf{b}}$ for vilkårlige punkter \mathbf{a}, \mathbf{b} .
- $t_{\rho_{\theta}(\mathbf{a})}\rho_{\theta} = \rho_{\theta}t_{\mathbf{a}}$ for et vilkårlig punkt \mathbf{a} og en vilkårlig vinkel θ .

Vi er nå i stand til å bevise hovedsetningen om isometrier i planet.

Setning 2.4. *En isometri av planet er enten en translasjon, en rotasjon, en speiling eller en glidespeiling.*

Bevis. Vi påstår først at hvis m er orienteringsbevarende og har et fikspunkt, så må m være en rotasjon. Vi vet fra Setning 2.3 at m er på formen $t_{\mathbf{a}}\rho_{\theta}$. Anta at \mathbf{x} er et fikspunkt, det vil si $m(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Da er

$$\mathbf{x} = m(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{a}}\rho_{\theta}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \rho_{\theta}(\mathbf{x}),$$

så $\mathbf{a} = \mathbf{x} - \rho_{\theta}(\mathbf{x})$.

Vi bruker nå regnereglene og får

$$t_{\mathbf{x}-\rho_{\theta}(\mathbf{x})}\rho_{\theta} = t_{\mathbf{x}}t_{-\rho_{\theta}(\mathbf{x})}\rho_{\theta} = t_{\mathbf{x}}t_{\rho_{\theta}(-\mathbf{x})}\rho_{\theta} = t_{\mathbf{x}}\rho_{\theta}t_{-\mathbf{x}},$$

som er en rotasjon om \mathbf{x} med rotasjonsvinkel θ .

Vi vil vise at en orienteringsbevarende isometri som ikke er en translasjon, må være en rotasjon. Fra det foregående er det nok å vise at den har et fikspunkt. Skriv igjen $m = t_{\mathbf{a}}\rho_{\theta}$. Siden m ikke er en translasjon må $\theta \neq 0$. Vi må løse likningssystemet

$$t_{\mathbf{a}}\rho_{\theta}(x_1, x_2) = (x_1, x_2),$$

som skrevet ut er $\rho_{\theta}(x_1, x_2) + (a_1, a_2) = (x_1, x_2)$ eller $(id - \rho_{\theta})(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$. Matrisen til ligningssystemet er

$$\begin{pmatrix} 1 - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix}$$

som har determinant $1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 2(1 - \cos \theta) \neq 0$ når $\theta \neq 0$. Det følger at systemet har entydig løsning og vi har funnet et fikspunkt.

Det gjenstår å vise at en orienteringsreverserende isometri enten er en speiling eller glidespeiling. Merk først at

$$\rho_{\theta}s(\cos \frac{1}{2}\theta, \sin \frac{1}{2}\theta) = (\cos \theta \cos \frac{1}{2}\theta + \sin \theta \sin \frac{1}{2}\theta, \sin \theta \cos \frac{1}{2}\theta - \cos \theta \sin \frac{1}{2}\theta) = (\cos \frac{1}{2}\theta, \sin \frac{1}{2}\theta)$$

så $(\cos \frac{1}{2}\theta, \sin \frac{1}{2}\theta)$ er et fikspunkt. Men $(0, 0)$ er også et fikspunkt, så siden $\rho_{\theta}s$ er lineær, må den fiksure hele linjen l gjennom $(0, 0)$ og $(\cos \frac{1}{2}\theta, \sin \frac{1}{2}\theta)$. Den er derfor en speiling s_l om linja l .

Setning 2.3 forteller oss at en orienteringsreverserende isometri er på formen $m = t_{\mathbf{a}}\rho_{\theta}s$. Så vi kan nå skrive den som $m = t_{\mathbf{a}}s_l$.

La $\alpha = \theta/2$ slik at $\mathbf{v} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ er en retningsvektor for l med $\|\mathbf{v}\|=1$, dvs at $l = \{\lambda \mathbf{v} | \lambda \in \mathbb{R}\}$. La $\mathbf{v}^\perp = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$. Fra linær algebra vet vi at vi kan dekomponere $\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}^\perp)\mathbf{v}^\perp$. La $\mathbf{w}_1 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$ være den parallelle delen og $\mathbf{w}_2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}^\perp)\mathbf{v}^\perp$ den ortogonale delen.

La l' være linja $\{\frac{1}{2}\mathbf{w}_2 + \lambda \mathbf{v} | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Da er det ikke så vanskelig å se at

$$s_{l'} = t_{\frac{1}{2}\mathbf{w}_2} s_l t_{-\frac{1}{2}\mathbf{w}_2} \quad \text{og} \quad s_l t_{-\frac{1}{2}\mathbf{w}_2} = t_{\frac{1}{2}\mathbf{w}_2} s_l.$$

Vi påstår at $t_{\mathbf{a}} s_l = t_{\mathbf{w}_1} s_{l'}$. Dette er en glidespeiling siden \mathbf{w}_1 er parallell til retningsvektoren \mathbf{v} for l' . Påstanden følger fra utregningen

$$t_{\mathbf{w}_1} s_{l'} = t_{\mathbf{w}_1} t_{\frac{1}{2}\mathbf{w}_2} s_l t_{-\frac{1}{2}\mathbf{w}_2} = t_{\mathbf{w}_1} t_{\frac{1}{2}\mathbf{w}_2} t_{\frac{1}{2}\mathbf{w}_2} s_l = t_{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2} s_l = t_{\mathbf{a}} s_l.$$

□

2.3 Diskrete undergrupper av Isom_2

I repeterende mønstre, som for eksempel i veggtapeter eller i flislegginger, er symmetriene gitt ved isometrier av planet. Studiet av slike mønstre leder derfor naturlig til en klassifisering av mulige symmetrigrupper. Vi skal nå vise denne klassifikasjonen.

Symmetriene til et repeterende mønster eller en figur er isometrier som bevarer mønsteret, henholdsvis figuren. Det er derfor naturlig å se på grupper av isometrier som virker diskret i motsetning til kontinuerlig. Vi kaller en undergruppe $G \subseteq \text{Isom}_2$ for *diskret*, hvis det eksisterer et reelt tall $\epsilon > 0$ slik at

- (i) $t_{\mathbf{a}} \in G, \mathbf{a} \neq \mathcal{O} \Rightarrow \|\mathbf{a}\| \geq \epsilon.$
- (ii) $\rho_{\theta,p} \in G, \theta \neq 0 \Rightarrow |\theta| \geq \epsilon.$

Vi deler analysen av slike G i to og ser først på translasjons-undergruppen,

$$L_G = \{t_{\mathbf{a}} \in G\}.$$

Generelt er et *gitter* av rang n en gruppe som er isomorf med den additive gruppen \mathbb{Z}^n . For oss konkret betyr det at L_G er et gitter det samme som at L_G er en av følgende typer:

- (i) $L_G = \{0\}.$
- (ii) Det fins $\mathbf{a} \neq \mathcal{O}$ slik at $L_G = \{t_{m\mathbf{a}} : m \in \mathbb{Z}\}.$
- (iii) Det fins linært uavhengige \mathbf{a}, \mathbf{b} slik at $L_G = \{t_{m\mathbf{a}+n\mathbf{b}} : m, n \in \mathbb{Z}\}.$

Disse gitterne har henholdsvis rang 0, 1 og 2. Det er ikke vanskelig å vise, men vil ta for mye plass her, at hvis G er diskret så må translasjonsgruppen L_G være et gitter.

Det er klart at en endelig G vil være diskret (med $L_G = \{0\}$) og disse kan man enkelt klassifisere.

Setning 2.5. Hvis G er en endelig undergruppe av Isom_2 da er G enten den sykliske rotasjonsgruppen C_n bestående av alle rotasjoner om ett punkt med vinkler $2\pi k/n$ eller den dihedrale gruppen D_n for passende n .

Bevis. Først skal vi se at G har et fikspunkt, dvs et felles fikspunkt for alle elementer i G . Vi skal finne fikspunktet som et *tyngdepunkt* for en endelig mengde.

La

$$\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$$

være en endelig mengde i planet. Da er

$$p = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \mathbf{x}_i$$

tyngdepunktet til denne mengden. Hvis $m = t_{\mathbf{a}}T$ er en isometri og p er tyngdepunktet til $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$, da er

$$m(p) = \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r T(\mathbf{x}_i) \right) + \mathbf{a} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r (T(\mathbf{x}_i) + \mathbf{a}) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r m(\mathbf{x}_i),$$

dvs at $m(p)$ er tyngdepunktet til $\{m(\mathbf{x}_1), \dots, m(\mathbf{x}_r)\}$.

For å vise at G har et fikspunkt velger vi først et vilkårlig punkt \mathbf{x} og ser på mengden $G\mathbf{x} = \{g(\mathbf{x}) : g \in G\}$ (også kalt *banen* til \mathbf{x}). Denne mengden er endelig. La p være tyngdepunktet for mengden. Hvis $h \in G$, så vil $\{h(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in G\mathbf{x}\} = G\mathbf{x}$. Derfor vil $h(p) = p$ for alle $h \in G$ og vi har funnet et fikspunkt for G .

Etter en translasjon, kan vi anta at G fikserer \mathcal{O} .

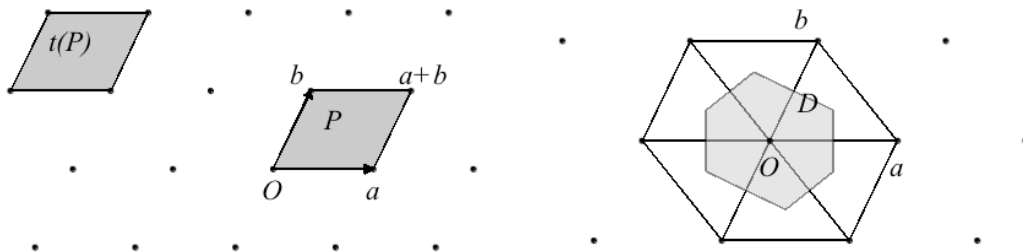
Anta først at G bare består av rotasjoner, og la θ være den minste positive rotasjonsvinkel for elementene i G . Hvis $\rho_\alpha \in G$, skriv $\alpha = k\theta + \beta$ for k positivt heltall og $0 \leq \beta < \theta$. Siden G er en gruppe, må $\rho_\theta^{-k} = \rho_{-k\theta} \in G$, men da er $\rho_\beta = \rho_\alpha \rho_{-k\theta} \in G$. Ved minimaliteten til θ må $\beta = 0$ så $\rho_\alpha = \rho_{k\theta}$. Det betyr at alle elementene i G er på formen ρ_θ^k og før eller siden må $\rho_\theta^n = id$ for en n . Derfor er $\theta = 2\pi/n$ og $G = C_n$.

Hvis G inneholder en speiling, kan vi rotere koordinater og derfor anta at G inneholder vår spesielle speiling s om x_1 aksen. Hvis $H \subseteq G$ er undergruppen av rotasjoner i G , vet vi nå at $H = C_n$ for en n . Men da er alle $\rho_{2\pi k/n}s$ også med i G , så $D_n \subseteq G$. Nå vet vi at et element $g \in G$ er enten en rotasjon eller speiling. Hvis g er en rotasjon, så er $g \in C_n \subset D_n$. Hvis g er en speiling, kan vi skrive den $g = \rho_\alpha s$. Men $gs \in G$ og $gs = \rho_\alpha s^2 = \rho_\alpha$, så $\rho_\alpha = \rho_{2\pi k/n}$ for passende k og $g = \rho_{2\pi k/n}s \in D_n$. Dermed har vi vist at $G = D_n$. \square

Vi skal nå konsentrere oss om tilfellet der rangen til L_G er 2. Et *fundamentalområde* for en gruppe av isometrier, $G \subseteq \text{Isom}_2$, er en lukket delmengde $D \subseteq E^2$ der randa er en stykkevis glatt kurve og slik at

(i) $E^2 = \bigcup_{g \in G} g(D)$.

(ii) Det indre av $g(D) \cap h(D)$ er tom når $g \neq h$.



Standard parallelogrammet P .

Dirichletområdet D .

Figur 3: To fundamentalområder for L_G .

En gruppe kan ha mange forskjellige fundamentalområder. Vi skal spesielt se på to. Hvis $L_G = \{t_{m\mathbf{a}+n\mathbf{b}} : m, n \in \mathbb{Z}\}$, se på mengden av gitterpunkter i planet, $M_G = \{m\mathbf{a} + n\mathbf{b} : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Vi kan anta, etter en evt translasjon av \mathbf{a} og \mathbf{b} , at

- (i) vinkelen mellom \mathbf{a} og \mathbf{b} er spiss (dvs mindre eller lik $\pi/2$),
- (ii) $\|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{c}\|$ for alle $\mathbf{c} \neq \mathcal{O}$ in M_G ,
- (iii) $\|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{c}\|$ for alle $\mathbf{c} \neq \mathcal{O}$ in M_G som har spissvinkel med \mathbf{a} .

Hvis \mathbf{a} og \mathbf{b} tilfredstiller disse kriteriene kaller vi parallelogrammet med hjørner $\mathcal{O}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}$ for et *standardparallelogram* for M_G . Dette vil være et fundamentalområde for L_G . Det andre fundamentalområdet som vi skal se på skildrer forskjellen mellom de forskjellige L_G bedre.

Dirichletområdet til G er

$$D_G = \{p \in E^2 : d(p, \mathcal{O}) \leq d(p, q) \text{ for alle } q \in M_G, q \neq \mathcal{O}\}.$$

Vi kan beskrive D_G ved hjelp at et standardparallelogram på følgende vis. Se på 6-kanten med hjørner

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{a} + \mathbf{b}, -\mathbf{a}, -\mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

og dann de 6 trekantene some alle har et hjørne i \mathcal{O} og en kant fra 6-kanten. Ta nå de 6 omsentrene til disse trekantene og forbind to av dem med en kant hvis deres trekanten er naboer. Mangekanten man får på denne måten er D_G . En tegning finner man i Figur 3. Man kan vise (se oppgavene) at D_G er et fundamentalområde for L_G .

Merk at ρ_π tar $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ til $-m\mathbf{a} - n\mathbf{b} \in M_G$, så ρ_π er en symmetri av M_G . Det følger at ρ_π er i symmetrigruppen til D_G . Generellt vil D_G være et heksagon, og siden

det er ρ_π symmetrisk må motsatte kanter være parallelle og like lange. I spesialtilfellet der vinkelen mellom \mathbf{a} og \mathbf{b} er $\pi/2$ vil trekantene være rettvinklede og omsenteret vil ligge på hypotenusen. Da vil D_G bli et rektangel.

Den andre ingrediensen i analysen av diskrete G er *punktgruppen*. Fra Setning 2.1 vet vi at en isometri kan skrives $t_{\mathbf{a}}T$ med T ortogonal. Vi får en funksjon $G \rightarrow \text{O}(2)$ ved $g = t_{\mathbf{a}}T \mapsto T$. Merk at $gg' = t_{\mathbf{a}}Tt_{\mathbf{a}'}T' = t_{\mathbf{a}}t_{T(\mathbf{a}')}TT' \mapsto TT'$, så funksjonen bevarer de to gruppestrukturene. Dermed er bildet av G , nemlig \bar{G} , en gruppe. Den kalles *punktgruppen* til G . Det er en diskret undergruppe av $\text{O}(2)$ og derfor endelig (se oppgavene). Vi skal nå se at det er få grupper punktgruppen kan være isomorf med.

Setning 2.6. *Hvis G er en diskret undergruppe av Isom_2 og rangen til L_G er 2, da vil punktgruppen \bar{G} ta Dirichletområdet D_G på seg selv.*

Bevis. Vi viser først at \bar{G} virker på M_G , dvs vi må vise at hvis $\bar{g} \in \bar{G}$ og $t_{\mathbf{a}} \in G$ så er $t_{\bar{g}(\mathbf{a})} \in G$. Nå er \bar{g} bildet av en $g \in G$ og vi påstår at $t_{\bar{g}(\mathbf{a})} = gt_{\mathbf{a}}g^{-1}$ som er i G . Vi vet at $g = t_{\mathbf{b}}\bar{g}$ for en $t_{\mathbf{b}}$ og vi regner ut

$$gt_{\mathbf{a}}g^{-1} = t_{\mathbf{b}}\bar{g}t_{\mathbf{a}}\bar{g}^{-1}t_{-\mathbf{b}} = t_{\mathbf{b}}t_{\bar{g}(\mathbf{a})}\bar{g}\bar{g}^{-1}t_{-\mathbf{b}} = t_{\mathbf{b}}t_{\bar{g}(\mathbf{a})}t_{-\mathbf{b}} = t_{\bar{g}(\mathbf{a})}.$$

Husk at $D_G = \{p \in E^2 : d(p, \mathcal{O}) \leq d(p, s) \text{ for alle } s \in M_G, s \neq \mathcal{O}\}$. Vi har $d(\bar{g}(p), \mathcal{O}) = d(\bar{g}(p), \bar{g}(\mathcal{O})) = d(p, \mathcal{O})$ og siden \bar{g} er en isometri med $\bar{g}(M_G) = M_G$, er

$$\begin{aligned} \{d(\bar{g}(p), s) : s \in M_G, s \neq \mathcal{O}\} &= \{d(\bar{g}(p), \bar{g}(s)) : s \in M_G, s \neq \mathcal{O}\} \\ &= \{d(p, s) : s \in M_G, s \neq \mathcal{O}\}. \end{aligned}$$

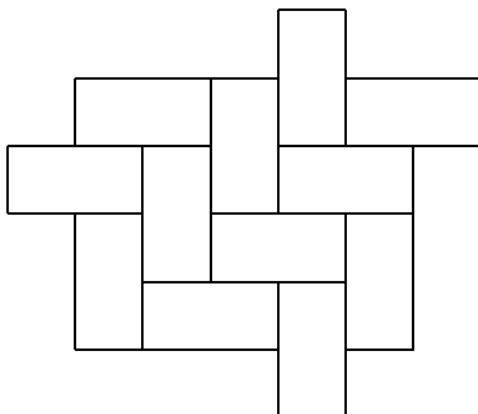
Og vi ser at $\bar{g}(p) \in D_G$ hvis $p \in D_G$. □

Setningen betyr at punktgruppen er en undergruppe av symmetrigruppen til D_G . Siden D_G er et rektangel eller et heksagon, får vi det såkalte krystallografiske restriksjonen

Setning 2.7. *Punktgruppen til en diskret undergruppe av Isom_2 med rangen til L_G lik 2 er en undergruppe av D_4 eller D_6 . Det betyr at punktgruppen er en av gruppene C_n, D_n med $n = 1, 2, 3, 4, 6$.*

Det er dette resultatet som gjør det mulig å vise at det bare fins 17 rang 2 diskrete undergrupper av Isom_2 . Det kalles ofte veggtafetgruppene eller bedre de to dimensjonale krystallografiske gruppene. Pga rammene rundt kurset går vi ikke inn i detaljene til denne klassifikasjon, men Setning 2.6 er et nyttig verktøy for å finne symmetrigruppen til et repeterende mønster slik vi har gjort på forelesningene.

Oppskriften er å først finne gitteret, så regne ut D_G og dens symmetrigruppe og til slutt avgjøre hvilke symmetrier som løftes til G . En rotasjon i \bar{G} løftes til en rotasjon med samme vinkel men man må være nøye med å finne de forskjellige fikspunktene. En speiling løftes til en speiling om en parallell linje *eller* en glidespeiling.



Figur 4: Mursteinsmønsteret i eksempel 2.8.

Eksempel 2.8. Vi skal beregne symmetrigruppen G til mursteinsmønsteret i Figur 4 (som er tenkt å fortsette i det uendelige). Først finner vi L_G . Vi kan velge \mathcal{O} slik at en horisontal murstein har hjørner

$$(0, 0), (2, 0), (2, 1), (0, 1)$$

og den vertikale mursteinen til venstre for den har hjørner

$$(0, 0), (0, 2), (-1, 2), (-1, 0).$$

Da blir L_G generert av translasjoner med $\mathbf{a} = (1, 1)$ og $\mathbf{b} = (-2, 2)$. Disse bestemmer et standardparallelogram, vinkelen mellom dem er $\pi/2$ og man regner ut at D_G er rektangelet med hjørner

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

Derfor vil punktgruppen være en undergruppe av D_2 som konkret i dette tilfellet består av identiteten, ρ_π og speilingene om linjene $\ell_1 = \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ og $\ell_2 = \{(t, -t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Det gjenstår å finne ut om disse løfter til symmetrier av figuren og beskrive disse. Fra beskrivelsen av punktgruppen følger det at de eneste orienteringsbevarende symmetriene som ikke er translasjoner må være rotasjoner med vinkel π . For en slik rotasjon er det lett å se at senteret ikke kan ligge på kantene til mursteinene, så det må eventuelt være i det indre av en murstein og må derfor ta denne mursteinen på seg selv. På den andre siden ser vi at hvis vi lar p være sentrum i en av mursteinene (der hvor midtnormalene til kantene skjærer) så vil $\rho_{\pi, p}$ være en symmetri av mønsteret. Vi får derfor at alle rotasjoner i G er på formen $\rho_{\pi, p}$ der p er sentrum i en av mursteinene.

De orienteringsreverserende symmetriene må være speilinger eller glidespeilinger om linjer parallell med ℓ_1 eller ℓ_2 . En hver speiling av en horisontal murstein om en linje parallell med ℓ_1 bringer den til en vertikal murstein. Vi må derfor legge speilingslinjen slik

at speilingen etterfulgt av en translasjon i retning $(1, 1)$ bringer en horisontal murstein til en vertikal som er i mønsteret. Hvis vi tar utgangspunkt i mursteinen med hjørner

$$(0, 0), (2, 0), (2, 1), (0, 1)$$

finner man at hvis linjen er

$$\ell = \left(\frac{3}{2}, 0\right) + t(1, 1) \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

så vil glidespeilingen $t_{\mathbf{v}}s_{\ell}$ være en slik symmetri. Alle de andre glidespeilingene parallell med ℓ_1 kommer fram ved å ta en rotasjon eller translasjon i G og sette sammen med denne.

Tilsvarende finner vi at alle glidespeilinger parallell med ℓ_2 er rotasjoner eller translasjoner av $t_{\mathbf{v}}s_{\ell}$ med

$$\ell = (1, 1) + t(-1, 1) \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = (1, -1).$$

Dermed har vi beskrevet alle symmetrier av mønsteret.

2.4 Oppgaver

1. Bruk cosinussetningen til å se at definisjonen av vinkel i planet blir riktig.
2. Vis at $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Vis at en funksjon $m : E^n \rightarrow E^n$ som bevarer avstand er nødvendigvis injektiv. M.a.o. vi kunne byttet ut bijektiv med surjektiv i definisjonen av isometri.
3. La $F \subseteq E^n$ være en delmengde. Vis at mengden av symmetrier av F er en undergruppe av Isom_n .

4. Trekanten med hjørner

$$(0, 1), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

er likesidet og har senter i $(0, 0)$. Skriv opp elementene i symmetrigruppen som ortogonale matriser. Gjør det samme for kvadratet med hjørner $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$.

5. Vis at D_n er generert av to elementer, rotasjon med $2\pi/n$ og en vilkårlig speiling.
6. I følge Teorem 2.3 kan alle isometrier av planet skrives på formen $t_{\mathbf{a}}\rho_{\theta}$ eller $t_{\mathbf{a}}\rho_{\theta}s$. Skriv følgende sammensatte isometrier på en av de to formene: $\rho_{\theta}t_{\mathbf{a}}, st_{\mathbf{a}}, s\rho_{\theta}$.

7. Bruk forrige oppgave til å vise at hvis m er orienteringsreverserende så er m^2 en translasjon.
8. Gi en begrunnelse for hver likhet i utregningen til slutt i beviset for Teorem 2.4.
9. Anta at en isometri av planet m tar en linje l på seg selv (dvs $m(l) = l$) og at m restriktet til l er en translasjon (dvs det fins en vector \mathbf{a} slik at hvis $\mathbf{x} \in l$ så er $m(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$). Gi et geometrisk argument for at m må være en speiling, glidespeiling eller translasjonen $t_{\mathbf{a}}$.
10. Bruk Teorem 2.4 til å vise at sammensetningen av to rotasjoner om to forskjellige punkter er enten en rotasjon om et tredje punkt eller en translasjon. Når er det en translasjon?
11. Hva slags isometri er sammensetningen av to speilinger om ikke parallelle linjer? Hva slags isometri er sammensetningen av to speilinger om parallelle linjer?
12. La ℓ være linjen gjennom origo med retningsvektor (a, b) , $b > 0$. Skriv standardmatrisen til speilingen s_{ℓ} .
13. Beskriv symmetrigruppene til
 - a) et likebeint trekant,
 - b) et likesidet trekant,
 - c) en parabel,
 - d) et parallelogram,
 - e) en rombe,
 - f) et rektangel,
 - g) en ellipse.
14. La $\{p_1, \dots, p_n\}$ være hjørnene i en reglær n -kant med senter i origo. Vis at definisjon av tyngdepunkt "stemmer", dvs at origo er tyngdepunktet til $\{p_1, \dots, p_n\}$.
15. La $M = \{m\mathbf{x} + n\mathbf{y} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ være gitterpunktene utspent av vektorene \mathbf{x} og \mathbf{y} i planet og la D være det tilsvarende Dirichlet område. Tegn D og beskriv dens symmetrigruppe når

- a) $\mathbf{x} = (1, 0)$ og $\mathbf{y} = (0, 1)$,
- b) $\mathbf{x} = (1, 0)$ og $\mathbf{y} = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})$,
- c) $\mathbf{x} = (1, 0)$ og $\mathbf{y} = \frac{1}{2}(1, 2)$.

- 16. Vis at en diskret undergruppe av $O(2)$ er endelig.
- 17. Hvis $G \subset \text{Isom}_2$ er en diskret undergruppe og rangen til L_G er 2, vis at D_G er et fundamentalområde for L_G .

3 Symmetri i rommet

3.1 Konvekse polyedre og Eulers formel

En delmengde $K \subseteq E^n$ er *konveks* hvis for alle to punkter $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$, så er linjestykket mellom dem også inneholdt i K . Husk at linjestykket kan beskrives som $\{\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} : 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Gitt en vilkårlig delmengde $M \subseteq E^n$ definerer man den *konvekse innhyllingen* til M som den minste konvekse mengden som inneholder M . Hvis M er en endelig mengde av punkter $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$ så vil den konvekse innhyllingen av M være

$$\{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_r \mathbf{x}_r : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1\}.$$

Et (konvekst) *polyeder* er den konvekse innhyllingen av et endelig antall punkter. Vi skal alltid mene et konvekst polyeder når vi skriver polyeder.

Det er lett å se i rommet at et polyeder P kunne også defineres som et begrenset snitt av halvrom. (Et plan deler rommet i to og et halvrom er en av de to delene.) Det betyr mere presist at det eksisterer vektorer $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in E^3$ og tall d_1, \dots, d_m slik at

$$P = \{\mathbf{x} \in E^3 : \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i \leq d_i \text{ for alle } i = 1, \dots, m\}$$

og slik at P er en begrenset delmengde. Dette er også sant i høyere dimensjoner men ikke enkelt å bevise. Fra nå av ser vi bare på polyedre i rommet.

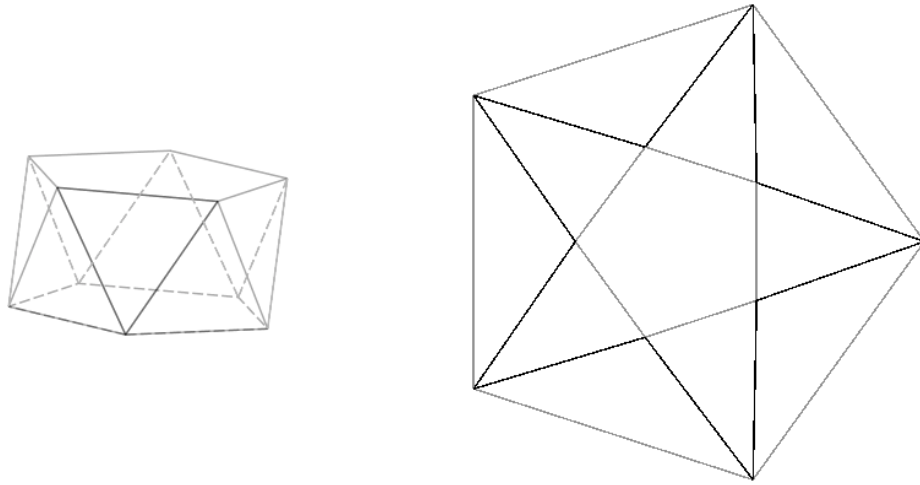
Hvis vi luker ut overflødige halvrom fra beskrivelsen får vi at planene $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i = d_i$ snitter P i sideflater som er polygoner. En sideflate snitter en annen enten i et linjestykke som vi kaller en *kant* av P , eller et punkt som heter et *hjørne*. Kantene snitter i hjørner. Det kunne tenkes at P lå i et plan i E^3 , og da vil P være en polygon, et linjestykke eller et punkt. Hvis ikke dette er tilfelle sier vi at dimensjonen til P er 3.

For å studere et polyeder er det ofte nyttig å se på polyederets Schlegeldiagram. Velg en sideflate σ i P og et plan H i rommet parallell med σ men på den “andre siden” av P , dvs at P ligger mellom planet utspent av σ og H . Velg så et punkt p som ligger utenfor P men like over σ . La P' være det som er igjen når vi fjerner det indre av P og det indre av σ fra P . Projiser nå P' på H fra p . Det betyr for alle punkter $\mathbf{x} \in P'$ ta linja som går gjennom p og \mathbf{x} og la snittpunktet mellom denne linja og H være $\text{proj}_p(\mathbf{x})$. Dette gir en funksjon $\text{proj}_p : P' \rightarrow H$.

Hvis man har valgt avstanden mellom p og σ liten nok, vil bildet av proj_p bestå av en stor mangelkant som var randa til σ med alle de andre sideflatene tegnet inn i den. Spesielt vil bildet av kantene danne en plan graf, dvs en graf tegnet i planet uten at kantene krysser hver andre. Dette bildet heter et Schlegel diagram. Et er tegnet i Figur 5.

La v være antall hjørner i P , e antall kanter og f antall sideflater. Følgende setning heter Eulers formel.

Setning 3.1. *Hvis P er et 3 dimensjonalt konvekst polyeder så er $v - e + f = 2$.*



Som den konvekse innhyllingen av
 $\{(\cos(\frac{k\pi}{5}), \sin(\frac{k\pi}{5}), (-1)^k h) : 0 \leq k \leq 9\}$
 med $h = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{5}) - \cos(\frac{2\pi}{5}))}$.

Schlegel diagrammet.

Figur 5: Rett antiprisme på en femkant.

Bevis. Se på kantgrafen til et Schlegel diagram av P i planet. Her kan vi tolke f som antall områder grafen deler planet i (inkludert det ubegrensede området “utenfor” grafen som svarer til sideflaten vi fjerner). Merk at denne grafen er *sammenhengende*, dvs vi kan gå fra et vilkårlig valgt hjørne til et annet langs kanter i grafen. Så vi kan like godt bevise resultatet for sammenhengende plane grafer med denne tolkningen av tallet f .

Vi viser formelen med induksjon på e . Hvis $e = 0$ så består grafen av bare ett hjørne og vi har $v = 1, e = 0, f = 1$ og formelen stemmer. Hvis $e = 1$ må $v = 2$ og $f = 1$ og formelen stemmer. Anta nå at formelen er sann for alle slike grafer med $e \leq n$ og la Γ være en sammenhengende plan graf med $n + 1$ kanter. Hvis vi fjerner en kant fra Γ (men ikke hjørnene på kanten) får vi en graf Γ' med n kanter, men to ting kan skje. Enten er den nye grafen Γ' sammenhengende eller ikke.

Hvis Γ' er sammenhengende så må kanten vi fjernet ha vært en del av grensen mellom to områder grafen delte planet i. Vi får derfor antall hjørner $v' = v$, antall kanter $e' = e - 1$ og antall områder planet er delt i $f' = f - 1$. Det viser at $v - e + f = v' - (e' + 1) + (f' + 1) = v' - e' + f' = 2$.

Hvis Γ' ikke er sammenhengende så må kanten vi fjernet ha hatt det ubegrensede området på begge sider. Den nye grafen vil bestå av to sammenhengende grafer Γ_1 og Γ_2 med tallene v_i, e_i, f_i . Vi har $v = v_1 + v_2$, $e = e_1 + e_2 + 1$ og $f = f_1 + f_2 - 1$ (siden vi teller det ubegrensede området to ganger i $f_1 + f_2$). Vi får igjen $e - v + f = (v_1 + v_2) - (e_1 + e_2 + 1) + (f_1 + f_2 - 1) = (v_1 - e_1 + f_1) + (v_2 - e_2 + f_2) - 2 = 2 + 2 - 2 = 2$. \square

Vi trenger enda et resultat om grafer i fortsettelsen. For et hjørne p i en graf la $\deg p$ være antall kanter som har p som hjørne.

Setning 3.2. For en graf er $2e = \sum \deg p$, der summen er tatt over alle hjørner i grafen.

Bevis. Vi teller opp antall elementer i mengden $\{(k, p) : k \text{ en kant, } p \text{ et hjørne i } k\}$ på to måter. Hver kant inneholder 2 hjørner så tallet er $2e$, men hvert hjørne p er inneholdt i deg p kanter, så tallet er også $\sum \deg p$. \square

3.2 De platonske legemene

Vi beskriver nå fem spesielt symmetriske polyedre som kalles de Platonske legemene. Navnet stammer fra Platons dialog *Timaios* der han bruker dem til å forklare dynamikken mellom de fire elementene vann, luft, jord og ild.

Det er tre standard “byggeklosser” for polyedre. For det første har vi *rette prizmer* som består av to regulære n -kanter forbundet med n kvadrater. For det andre har vi *rette antiprizmer* der vi igjen starter med to regulære n -kanter som ligger over hverandre, men nå vrir man den ene med vinkel π/n . Hvis vi nå trekker kanter mellom hjørnene til de to n -kantene har vi laget en polyeder med de to n -kantene som sider samt $2n$ likebente trekantene. Hvis vi nå retter på avstanden mellom n -kantene kan vi få trekantene til å bli likesidede og resultatet kalles en rett antiprisme. Et eksempel er tegnet i Figur 5.

For det tredje har vi *rette pyramider* som har en regulære n -kant som grunnflate og der høyden er slik at de n trekantene er alle likesidede. Setter vi sammen to rette pyramider med samme grunnflate får vi en *rett bipyramide*.

De Platonske legemene er tetraederet, kuben, oktaederet, ikosaederet og dodekaederet. *Tetraederet* er den rette pyramiden med trekant som grunnflate. *Kuben* er den rette prismet på en kvadrat. *Oktaederet* er den rette bipyramiden på en kvadrat. Det kan også beskrives som den rette antiprismet på en trekant. Man kan lage *ikosaederet* ved først å danne en rett antiprism på en pentagon. Så på hver av de to 5-kantene legger man en rett pyramide med pentagonet som grunnflate.

Dodekaderet krever en litt lengre beskrivelse. Start med 6 like regulære pentagoner. I planet plasser en i midten og de andre 5 slik at de har en felles kant med den i midten. I rommet brett de 5 ytre pentagonene opp langs felleskanten med den i midten til nabokanter møtes og man har en “bolle” med hakkete rand bestående av 10 kanter. Gjør dette en gang til slik at det er to “boller”. De vil kunne settes sammen langs randa til en dodekader.

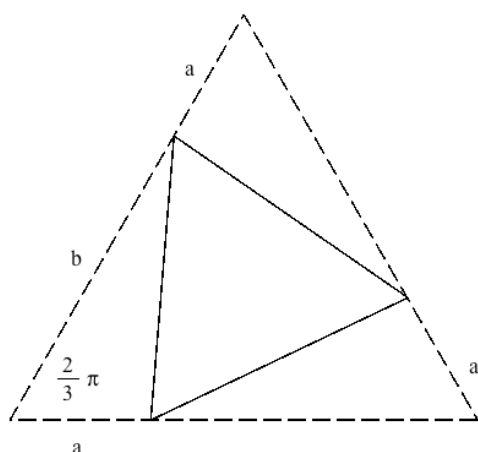
Tegninger av de platonske legemene er allestedsnærværende i geometrilitteraturen og på internettet. Det er en nyttig oppgave å tegne dem selv.

Vi sier at et 3 dimensjonalt polyeder er *regulært* hvis sideflatene er like regulære mangekanter som treffes like mange ganger i et hjørne. Til et regulært polyeder kan man tilordne Schläfli symbolet $\{p, q\}$ der sideflatene er regulære p -kanter og q av dem møtes i hvert hjørne. Det er klart at Schläfli symbolet bestemmer det regulære polyederet opptil skalering. Et regulært polyeder P har en dual regulær polyeder P^\vee , nemlig ta den konvekse innhyllingen av midpunktene i alle sideflatene til P . Det er klart at hvis Schläfli symbolet til P er $\{p, q\}$ så er Schläfli symbolet til P^\vee lik $\{q, p\}$. Merk at de Platonske legemene er regulære polyeder. Kombinatorikken deres er beskrevet i Tabell 1.

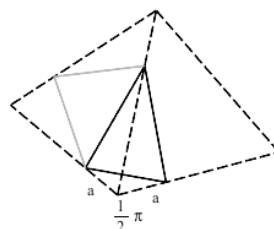
Setning 3.3. *De 5 platonske legemene er de eneste 3 dimensjonale regulære (konvekse) polyedre.*

Navn	flatetype	hjørner	kanter	flater	Schläfli symbol
Tetraeder	Trekant	4	6	4	$\{3, 3\}$
Kube	Kvadrat	8	12	6	$\{4, 3\}$
Oktaeder	Trekant	6	12	8	$\{3, 4\}$
Dodekaeder	Pentagon	20	30	12	$\{5, 3\}$
Ikosaeder	Trekant	12	30	20	$\{3, 5\}$

Tabell 1: Platonske legemer data.



Trekant som ligger i en oktaedertrekant.



Trekant med to hjørner på en ekvator.

Figur 6: Ikosaederet og det gyldne snitt.

Bevis. La P være et regulært polyeder med Schläfli symbol $\{p, q\}$. Siden q mangekanter møtes i et hjørne vil også hjørnet tilhøre q kanter. Fra Setning 3.2 får vi $2e = qv$. Videre er det p kanter i hver sideflate og når vi summerer det over alle sideflater har vi tellt hver kant to ganger, så $2e = pf$. Eulers formel gir da

$$2 = v - e + f = v(1 - \frac{q}{2} + \frac{q}{p}) \Rightarrow v = \frac{4p}{2p + 2q - pq} > 0.$$

Men det betyr at $2p + 2q - pq = 4 - (p - 2)(q - 2) > 0$. Siden $p, q \geq 3$ er det bare 5 muligheter:

$$\{p, q\} = \{3, 3\}, \{4, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 3\} \text{ eller } \{3, 5\}.$$

Dette er Schläfli symbolene til hhv tetraederet, kuben, oktaederet, dodekaederet og ikosaederet. \square

Man bør strengt talt realisere de platonske legemene som konvekse innhyllinger i rommet. Dette er gjort i oppgaver, men vi tar med en spesiell vakker konstruksjon av ikosaederet.

Anta at man har konstruert oktaederet (f.eks. som den konvekse innhyllingen av de 6 hjørnene $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$). Man kan lage et “sjakkbrett” på oktaederet, dvs fargelegge hver sideflate hvit eller svart slik at ingen med samme farge har en felles kant. Dette gir en veldefinert retning til hver kant, man beveger seg slik at hvit alltid er til høyre og svart til venstre. Derfor vil et forhold $a : b$, der $a + b$ er den felles kantlengden, bestemme entydig 12 punkter, 1 på hver kant. Nemlig fra starthjørnet på kanten gå lengden a i retningen langs kanten og plasser punktet der.

Ta nå den konvekse innhyllingen av disse 12 punkter. Man får noe som kombinatorisk er et ikosaeder, men sideflate trekantene er ikke alle likesidet. Det er to typer trekantene (se Figur 6), den første typen ligger i en trekant som var sideflaten til oktaederet. Den er likesidet, og f.eks. fra cosinussetningen regner man ut at kantlengden er $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$. De andre 12 trekantene har to kanter i sideflatene til oktaederet, og er derfor likebent med den felles kantlengde $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$. Den tredje kanten ligger i et kvadrat der randa er en ekvator for oktaederet. Det følger at denne kantlengden er $\sqrt{2}a$.

Dette betyr at vi får et ikosaeder hvis vi velger forholdet $a : b$ slik at $\sqrt{a^2 + b^2 - ab} = \sqrt{2}a$. En enkel utregning gir at dette er det samme som at

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}$$

som er presist definisjonen av *det gyldne snitt*.

3.3 Rotasjonsundergruppen av Isom_3

Vi avgrenser oss til å studere rotasjonsisometrier, fremfor å beskrive alle isometrier i rommet. Vi skal kun se på en viktig type nemlig rotasjoner. En *rotasjon* av E^3 består av en linje (rotasjonsaksen) ℓ og en vinkel θ . Virkningen av rotasjonen er følgende. Et punkt \mathbf{x} ligger i et entydig plan ortogonal til ℓ . Betrakt snittet av ℓ med planet som origo og roter \mathbf{x} med vinkel θ om origo.

Å skrive en rotasjon i matrisform er rimelig komplisert, men etter et basisskifte kan vi anta ℓ er x_1 -aksen. Da blir matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Sammenhengen mellom rotasjoner og orienteringsbevarende isometrier med fikspunkt er det samme som for planet.

Setning 3.4. *En operator T er i $\text{SO}(3)$ hvis og bare hvis T er en rotasjon.*

Bevis. I en bestemt basis er matrisen til en rotasjon gitt ved (3.1) som er ortogonal med determinant 1. Dvs at alle rotasjoner er i $\text{SO}(3)$.

For å vise den andre implikasjonen la A være standardmatrisen til T . Da er $A^t A = I$ og $\det A = \det A^t = 1$. Vi vil først vise at A har 1 som egenverdi, som er det samme som

å vise at $\det(A - I) = 0$. Merk at $A^t(A - I) = (I - A^t) = (I - A)^t$. Vi har

$$\det(A - I) = \det A^t \cdot \det(A - I) = \det A^t(A - I) = \det(I - A) = \det(-(A - I)).$$

Men hvis B er en 3×3 matrise så er $\det(-B) = -\det B$. Derfor må $\det(A - I) = 0$.

Velg en egenvektor v_1 for egenverdien 1 med $\|v_1\| = 1$. Velg en ortonormal basis $\{v_2, v_3\}$ for planet gjennom origo som er ortogonal til v_1 . Da blir $\{v_1, v_2, v_3\}$ en ortonormal basis for \mathbb{R}^3 og hvis P er matrisen med søyler v_1, v_2, v_3 så er P ortogonal. Da må $A' = P^{-1}AP$ også være ortogonal med $\det A' = \det A = 1$.

Nå er

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

der $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ må være en ortogonal 2×2 matrise med determinant 1. Men da sier Setning 2.2 at

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

for en θ og vi har vist at T er en rotasjon. □

Rotasjonsgruppene til de Platonske legemene gir oss eksempler på endelige undergrupper av $SO(3)$. Det er en oppgave å vise at P og dens duale har den samme rotasjonsgruppen, så vi får 3 grupper på denne måten. De er beskrevet i Tabell 2.

3.4 Ekvivalensrelasjoner, partisjoner og en telleformel

Vi skal bestemme alle endelige rotasjonsgrupper men først en nødvendig digresjon. En *ekvivalensrelasjon* på en mengde X er et forhold mellom elementer i X som vi skriver $x \sim y$ som er

- (i) Refleksiv, dvs at $x \sim x$.
- (ii) Symmetrisk, dvs at $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.
- (iii) Transitiv, dvs at $x \sim y$ og $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Med en ekvivalensrelasjon lager man *ekvivalensklasser* som er delmengder av X . Ekvivalensklassen til $x \in X$, som vi skriver $[x]$, er definert som $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$.

Lemma 3.5. *Det er en likhet av mengder $[x] = [y]$ hvis og bare hvis $x \sim y$.*

Bevis. Hvis $x \sim y$ skal vi først vise at $[x] \subseteq [y]$. Vi har $z \in [x] \Leftrightarrow x \sim z$ og ved transitivitet må da $z \sim y$ så $z \in [y]$. Helt symmetrisk viser man $[y] \subseteq [x]$ så de er like. Det er klart at $y \in [y]$ siden $y \sim y$, så hvis $[x] = [y]$ må $y \in [x]$ og derfor $x \sim y$. □

	akse gjennom	vinkler	# akser	# rotasjoner
Tetraedergruppen	et hjørne og midtpunktet på motstående flate	$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$	4	8
	midtpunktene på en kant og motstående kant	π	3	3
Orden				12
Oktaedergruppen	et hjørne og motstående hjørne	$\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$	3	9
	midtpunktene på en kant og motstående kant	π	6	6
	midtpunktene på en flate og motstående flate	$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$	4	8
Orden				24
Ikosaedergruppen	et hjørne og motstående hjørne	$\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$	6	24
	midtpunktene på en kant og motstående kant	π	15	15
	midtpunktene på en flate og motstående flate	$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$	10	20
Orden				60

Tabell 2: Rotasjonsgruppene til de Platonske legemene.

En viktig konsekvens av dette er at hvis $[x] \neq [y]$ må $[x] \cap [y] = \emptyset$. Dette fordi $z \in [x] \cap [y]$ betyr at $x \sim z$ og $y \sim z$, så ved symmetri og transitivitet må $x \sim y$. Men da sier Lemma 3.5 at $[x] = [y]$.

Det er en nøye sammenheng mellom ekvivalensrelasjoner og partisjoner. En *partisjon* av X er en mengde av ikke-tomme delmengder $X_i \subseteq X$ med $X = \cup X_i$ og $X_i \cap X_j = \emptyset$ hvis $i \neq j$. Å lage partisjoner av endelige mengder er ofte nyttig hvis man vil telle. Hvis $|X|$ er symbolet for antall elementer i X og $\{X_i\}$ er en partisjon må $|X| = \sum_i |X_i|$.

Det følger fra Lemma 3.5 at for en ekvivalensrelasjon vil $\{[x] : x \in X\}$ være en partisjon av X . Dette er det vi trenger, men det er et sterkere resultat som vi ikke tar tid til å bevise her.

Setning 3.6. *Funksjonen $\sim \mapsto \{[x] : x \in X\}$ gir en 1-1 korrespondanse mellom ekvivalensrelasjoner på X og partisjoner av X .*

En gruppevirkning på en mengde X er en generalisering av det vi har kalt for symmetrier, man sier f.eks. at symmetrigruppen til en figur F i E^n virker på F . En *gruppevirkning* er en funksjon $G \times X \rightarrow X$ som vi skriver $(g, x) \mapsto gx$ der vi krever for identitetsselementet $e \in G$ at $ex = x$ og at $g(hx) = (gh)x$ (produktet på høyre siden er produktet i G). Spesielt vil funksjonene $\phi_g : X \rightarrow X$ gitt ved $\phi_g(x) = gx$ være bijeksjoner.

Hvis G virker på X kan vi lage en ekvivalensrelasjon på X ved å si at

$$x \sim y \quad \text{hvis det fins en } g \in G \text{ med } y = gx. \quad (3.2)$$

Den er refleksiv siden $x = ex$, symmetrisk siden $y = gx \Rightarrow x = g^{-1}y$ og transitiv siden $y = gx$ og $z = hy \Rightarrow z = h(gx) = (hg)x$.

Hvis G virker på X kaller vi mengden $Gx = \{gx : g \in G\}$ for *banen til x* . Med ekvivalensrelasjonen (3.2) er ekvivalensklassene det samme som banene til G . Vi skal nå lage ekvivalensrelasjoner på G for hvert element i X . Hvis G virket på X og $x \in X$ definer

$$g \sim_x h \quad \text{hvis } gx = hx.$$

Det er lett å se at dette er en ekvivalensrelasjon.

Merk at ekvivalensklassen til e mht \sim_x er *stabilisatorgruppen* til x , $G_x = \{g \in G : gx = x\}$. Dette er en undergruppe av G men de andre klassene er ikke det. Men det er dog en sterk forbindelse

Lemma 3.7. *Hvis $[g]_x$ er klassen til g mhp \sim_x så er funksjonen $G_x \rightarrow [g]_x$ gitt ved $h \mapsto gh$ bijektiv. Spesielt hvis G er endelig vil alle ekvivalensklasser ha like mange elementer, nemlig $|G_x|$.*

Bevis. Vi må først sjekke om funksjonen er veldefinert, dvs om $gh \in [g]_x$ når $h \in G_x$. Men $(gh)x = g(hx) = gx$ så $gh \in [g]_x$. Den er injektiv siden $gh = gh' \Rightarrow h = h'$. Hvis $g' \in [g]_x$ da vil $(g^{-1}g')x = g^{-1}(g'x) = g^{-1}(gx) = x$ så $g^{-1}g' \in G_x$. Men $g(g^{-1}g') = g'$ og dette viser at funksjonen er også surjektiv. \square

Setning 3.8. Hvis en endelig gruppe G virker på en mengde X så vil

$$|G| = |G_x| \cdot |Gx|$$

for alle $x \in X$.

Bevis. Vi vet nå fra Setning 3.6 at mengden av ekvivalensklasser for \sim_x danner en partisjon av G . Fra Lemma 3.7 vet vi at alle disse klassene har $|G_x|$ elementer. Så

$$|G| = |G_x| \cdot (\text{antall distinkte ekvivalensklasser for } \sim_x).$$

Vi setter opp en 1-1 korrespondanse mellom {ekvivalensklasser for \sim_x } og banen Gx . Se på funksjonen $[g]_x \mapsto gx$. Først skal vi se at denne funksjonen er veldefinert. Men det følger av Lemma 3.5 som sier at $[g]_x = [h]_x \Rightarrow g \sim_x h \Rightarrow gx = hx$. Funksjonen er, per definisjon av de forskjellige mengdene, injektiv og surjektiv. Dermed er

$$\text{antall distinkte ekvivalensklasser for } \sim_x = |Gx|$$

og vi er ferdig. □

3.5 Endelige undergrupper av $\text{SO}(3)$

En rotasjon om en akse gjennom origo fikser nøyaktig to punkter på enhetsfæren i \mathbb{R}^3 , nemlig snittet mellom rotasjonsaksen og sfæren. Vi kaller disse to punktene *polene* til rotasjonen. Hvis $G \subset \text{SO}(3)$ er en endelig undergruppe sett $P = \{p : p \text{ en pol for en } g \in G, g \neq id\}$. Dvs mengden av alle poler for elementene i G .

Lemma 3.9. Gruppen G virker på P .

Bevis. Hvis p er en pol for $g \in G$ og h et vilkårlig annet element i G , må vi vise at hp er en pol for et tredje element i G . Nå vil hp også ligge på sfæren så det er nok å vise at hp er et fikspunkt for et element i G . Se på $hgh^{-1} \in G$ og regn ut $(hgh^{-1})(hp) = (hg)p = hp$. Dvs at hp er fikspunkt for hgh^{-1} . □

Vi er nå i stand til å klassifisere de endelige rotasjonsgruppene i rommet.

Setning 3.10. De eneste endelige undergrupper av $\text{SO}(3)$ er de sykliske rotasjonsgruppene C_n , de dihedrale gruppene D_n og de tre rotasjonsgruppene til de platonske legemene.

Bevis. For hver pol p la $r_p = |G_p|$ være antall elementer i stabilisatorgruppen til p . Alle rotasjoner i G_p må ha samme rotasjonsakse siden de har p og \mathcal{O} som fikspunkter. Dvs at G_p er en endelig rotasjonsgruppe i planet ortogonalt på denneaksen. Men vi vet fra Setning 2.5 at da må G_p være en syklisk rotasjonsgruppen C_{r_p} bestående av alle rotasjoner med vinkler $2\pi k/r_p$. Merk at $r_p > 1$ for ellers ville ikke p være en pol.

La $N = |G|$ og $n_p = |Gp|$ være antall elementer i banen til p . Setning 3.8 sier at $N = r_p \cdot n_p$ for alle poler p . Hvis p og p' er i samme bane må $Gp = Gp'$ siden banene utgjør en partisjon. Da må $n_p = n_{p'}$, men siden $N = r_p \cdot n_p$ må også $r_p = r_{p'}$!

Nå teller vi opp elementer i $\{(g, p) : g \in G, p \text{ en pol for } g\}$ på to måter. Antall elementer i G med p som pol er $r_p - 1$ så tallet er $\sum_{p \in P} (r_p - 1)$. På den andre siden har hver $g \in G$ som ikke er identiteten to poler, så tallet er også $2(N - 1)$. La O_1, \dots, O_m være de *distinkte* banene i P , $n_i = |O_i|$ og r_i den felles r_p for $p \in O_i$.

Tellingen vår ovenfor gir $\sum_i n_i(r_i - 1) = 2(N - 1)$. Del med $N = r_i n_i$ på begge sider og vi får

$$2 - \frac{2}{N} = \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{r_i}\right).$$

Venstresiden er mindre enn 2, mens hvert ledd på høyre siden er større eller lik $1/2$. Da må $m \leq 3$, dvs det kan ikke være mer enn 3 distinkte baner av poler. Det er fort gjort å se at $m = 1$ er umulig.

Hvis $m = 2$ regner man ut at

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

Vi har $r_i \leq N$ og hvis si $r_1 < N$ vil høyre siden være ekte større enn $2/N$, så vi må ha $r_1 = r_2 = N$. Men da må $n_1 = n_2 = 1$ og vi har bare 2 poler for hele gruppen og de må ligge på samme akse. Dvs at hele gruppen fikser denneaksen og vi kan argumentere som før for at G er den sykliske rotasjons gruppen C_N .

Hvis $m = 3$ regner man ut at

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - 1.$$

Ordne indeksene slik at $r_1 \leq r_2 \leq r_3$. Hvis $r_1 \geq 3$ er høyresiden ≤ 0 så $r_1 = 2$. Vi deler i to tilfeller.

Først anta også $r_2 = 2$. Da må $N = 2r_3$ så $n_3 = 2$. Det betyr det fins en bane med bare to poler, igjen må de ligge på samme akse. Elementene i G må enten holde disse begge fiks eller bytte på dem. Hvis g har dem som fikspunkter er g en rotasjon i planet ortogonalt på aksene. Hvis g bytter dem, må g være en rotasjon med vinkel π om en linje som ligger i dette planet. Men dette er det samme som å være en speiling i planet. Vi kan konkludere med at G er den dihedrale gruppen D_{r_3} .

Anta nå at $r_2 \geq 3$. Vi har

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{2}.$$

Hvis $r_2 \geq 4$ er høyresiden ≤ 0 , så $r_3 = 3$. Vi har da

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{r_3} - \frac{1}{6}$$

så $3 \leq r_3 \leq 5$. Dvs at det er bare tre mulig tripler:

$$(2, 3, 3), N = 12 \quad (2, 3, 4), N = 24 \quad (2, 3, 5), N = 60.$$

Hvis man sammenligner med analysen av rotasjonsgruppene til de platonske legemene i avsnitt 3.3 ser man at dette er (r_1, r_2, r_3) for hhv tetraedergruppen, oktaedergruppen og ikosaedergruppen.

Det gjenstår å vise at disse invariantene tvinger gruppene til å bli disse. Det er ikke så vanskelig, og overlates til den ivrige leseren som en oppgave. \square

3.6 Oppgaver

1. Beskriv et polyeder med 5 hjørner og 6 sider der alle sidene er trekanter. Beskriv to polyedere med 6 hjørner og 8 sider der alle sidene er trekanter.

2. Tegn Schlegel diagrammer for alle de 5 Platonske legemene.

3. La $\{p, q\}$ være Schläfli symbolet til et regulært polyeder P . Vis at hvis e er lik antall kanter, så er

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}.$$

4. La P være et 3-dimensjonalt polyeder og la Γ være kantgrafene til P . La v_k være antall hjørner w i Γ med $\deg w = k$. Anta P har bare trekanter som sideflater og vis at

$$\sum_k \left(1 - \frac{k}{6}\right) v_k = 2.$$

Generaliser formelen til polyedere med sideflater som er n -kanter med samme n for alle sideflatene og bruk formelen til å vise at et slikt polyeder kan bare ha 3,4 eller 5-kanter som sideflater.

5. Finn 8 punkter i E^3 slik at den konvekse innhyllingen er en regulær kube. Bruk disse til å finne koordinatene til hjørnene i en regulær tetrahedron og oktahedron.

6. Hvis K er et 3-dimensjonalt konvekst polyeder, la V_K være mengden av hjørner, E_K mengden av kanter og F_K mengden av sideflater. To 3-dimensjonale konvekse polyedre, K og K' , kalles *kombinatorisk like* eller av *samme kombinatoriske type* hvis det fins bijeksjoner $\phi_V : V_K \rightarrow V_{K'}$, $\phi_E : E_K \rightarrow E_{K'}$ og $\phi_F : F_K \rightarrow F_{K'}$ som bevarer inklusjon. Dvs at et hjørne h er i en kant k hvis og bare hvis $\phi_V(h) \in \phi_E(k)$ og at en kant k er i en sideflate s hvis og bare hvis $\phi_E(k) \subset \phi_F(s)$.

Et polyeder kalles *simplisialt* hvis alle sideflater er trekanter. Merk at den kombinatoriske typen til et simplisialt polyeder er bestemt ved å skrive opp for hver sideflate mengden av de tre hjørner i sideflaten. Da vil kantene svare til alle undermengder

av slike sideflatemengder med 2 elementer og hjørnene vil være unionen av alle sideflatemengder. For eksempel tetraederet beskrives kombinatorisk ved å skrive opp

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}.$$

De 6 kantene vil da være $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ og hjørnemengden er $\{1, 2, 3, 4\}$.

- a) Vis at det å være kombinatorisk like er en ekvivalensrelasjon på mengden av polyedre.
- b) Hvis K er et simplisialt polyeder, uttrykk antall sideflater, f , som en funksjon av antall hjørner v . Gjør det samme for antall kanter e .
- c) Beskriv, gjerne med en tegning, alle kombinatoriske typer av simplisiale polyedre med antall hjørner $v \leq 6$. (Hint: Det er bare 4, 1 med 4 hjørner, 1 med 5 hjørner og 2 med 6 hjørner.)
- d) Realiser de typene du fant i c) i E^3 . Dvs for hver type, gi v hjørner i koordinater i E^3 slik at den konvekse innhyllingen av disse hjørnene er av denne kombinatoriske typen.

7. La G være en endelig gruppe som virker på en endelig mengde X . For en $g \in G$, la $X_g = \{x \in X : gx = x\}$ være fikspunktmengden.

- a) Bruk en insidenskorrespondanse til å vise at

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |X_g|.$$

- b) La m være antall distinkte baner for virkningen på X . Bruk Teorem 3.8 til å vise at $\sum_{x \in X} |G_x| = m \cdot |G|$ og konkluder med at

$$m = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|.$$

- c) Tenk deg et byggsett med 4 pinner av samme form og farge og mange nok kuler i 3 forskjellige farger. Pinnene kan festes til kulene slik at de danner en kvadratrisk figur. Hvor mange forskjellige kvadrater kan man lage?

Hint: På en stasjonær kvadrat er det 3^4 forskjellige fargekombinasjoner, men når vi tar dem opp og ser på dem i rommet vil mange av disse oppleves som like. Mere presist vil to være like i rommet hvis en stiv bevegelse tar den ene kombinasjon til den andre. Det betyr at hvis X er mengden av de 3^4 fargekombinasjonene er svaret lik antall baner for virkningen av D_4 på X .

8. Beskriv banene for virkningen av G på mengden av poler når G er rotasjonsgruppen til tetraederet, oktaederet og ikosaederet.

4 Trekanter og sirkler

4.1 Trekanter; Menelaos' og Cevas setninger

Vi begynner vår studie av trekanter med to setninger som på en slående måte kombinerer geometriske egenskaper med algebraiske relasjoner. Denne kombinasjonen er selve styrken i analytisk geometri. Disse setningene kan nærmest sees på som forløpere til analytisk geometri, selv om bare den ene er det i tid. De bruker ikke koordinater, men allikevel lengder av linjestykker, til og med med fortegn.

I første omgang bruker vi altså ikke koordinater, men som ordet geometri antyder måler vi lengder på linjestykker og størrelser på vinkler. Dette gir mening, selv om ikke målestokken er oppgitt, så lenge vi bare bruker de relative størrelsene.

Linjestykket mellom punktene A og B i planet kaller vi AB , og med linja gjennom AB mener vi linja gjennom punktene A og B . Lengden til linjestykket mellom A og B betegner vi også med AB .

Fortegnsmål for linjestykker: Noen ganger velger vi en orientering langs ei linje. Et linjestykke AB er da positivt eller negativt ettersom retningen fra A til B følger orienteringen eller ikke. **Lengden** til linjestykket AB **med fortegn**, bestemt av retningen fra A til B , betegner vi med \overline{AB} . Tallverdien $|\overline{AB}|$ betegner vi på samme måte som linjestykket selv med AB .

For tre **kollineære** punkter A, B, C , det vil si tre punkter som ligger på samme linje, er den grunnleggende egenskapen til fortegnsmålet at

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

uavhengig av orientering, rekkefølge og om noen av punktene er like. Spesielt er

$$\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = 0.$$

Den grunnleggende egenskapen kan også skrives slik:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AC} + \overline{CA} = 0.$$

For hvert punkt O på linja gjennom AB kan vi derfor skrive

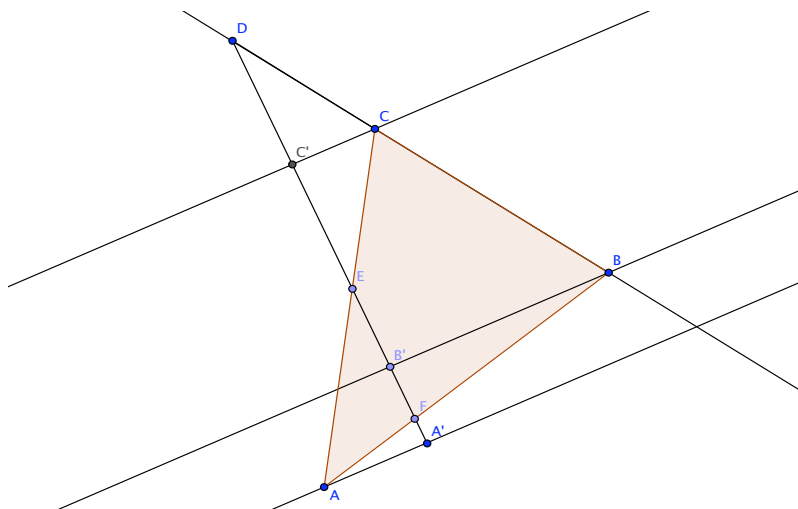
$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

Fortegnsmål for linjestykker gir en nyttig definisjon av delingsforholdet som et punkt på ei linje deler et linjestykke på linja i:

Hvis A, B, P er tre forskjellige kollineære punkter, sier vi at P **deler AB i forholdet**

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}.$$

Med denne definisjonen ser en lett at forholdet er negativt dersom P ligger utenfor linjestykket AB (deler AB utvendig) og positivt dersom P ligger mellom A og B (deler AB innvendig). Denne definisjonen har en naturlig utvidelse til hele linja dersom en tillater ∞ som verdi. Det skal vi la ligge her. Viktigere er



Figur 7: Menelaos' setning

Lemma 4.1. *Et punkt P på linja gjennom AB er entydig bestemt av delingsforholdet $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$.*

Bevis. La P og Q være to punkter på linja gjennom AB med

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}.$$

Legg til 1 på begge sider:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} + \frac{\overline{PB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} + \frac{\overline{QB}}{\overline{QB}},$$

da får vi

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{QB}}.$$

Dermed er $\overline{PB} = \overline{QB}$, og setningen følger. \square

Dersom tre punkter A, B, C ikke er kollineære, betegner vi trekanten med hjørner i disse punktene med $\triangle ABC$. Et punkt på linja gjennom AB som ikke faller sammen med noen av hjørnene, kalles et **Menelaos-punkt** til trekanten for siden AB .

Setning 4.2. (Menelaos). *Tre Menelaos-punkter D, E, F for sidene BC, CA, AB til trekanten $\triangle ABC$ er kollineære hvis og bare hvis*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1.$$

Bevis. Anta at Menelaos-punktene D, E, F ligger på linje. Vi skal regne ut produktet av delingsforholdene. Først finner vi fortegnet til produktet. Siden punktene ligger på linje, vil ett eller alle tre punktene ligge utenfor trekanten. Derfor vil enten ett eller tre av punktene dele sin side negativt, så produktet av delingsforholdene er også negativt. Vi kan derfor konsentrere oss om absoluttverdiene til delingsforholdene i resten av denne delen av beviset.

Trekk høydene fra hjørnene i trekanten ned til linja gjennom D, E, F og kall skjæringspunktene for A', B' og C' . Da er $\triangle BB'D$ og $\triangle CC'D$ formlike siden de er rettvinklede og i tillegg har en vinkel felles. Tilsvarende er også $\triangle AA'E$ og $\triangle CC'E$, og $\triangle AA'F$ og $\triangle BB'F$ formlike. Dermed er

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BB'}{CC'}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{CC'}{AA'}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{AA'}{BB'}.$$

Da blir

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{CC'}{AA'} \cdot \frac{AA'}{BB'} = 1$$

og bare hvis-delen av setningen følger.

Anta på den andre siden at D, E og F er Menelaos-punkter for sidene BC, CA, AB og at

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1.$$

(Nå bruker vi fortegnsmål igjen, og ikke absoluttverdien til delingsforholdene). La F' være skjæringspunktet mellom linja gjennom DE og linja gjennom AB .

(Hvis disse linjene er parallelle er det lett å vise at

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1.$$

Dette delingsforholdet forekommer ikke uten at vi utvider linja med et uendelig fjernt punkt. Dette kommer vi tilbake til i kapittel 6.)

Med punktet F' vet vi av første delen at

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = -1.$$

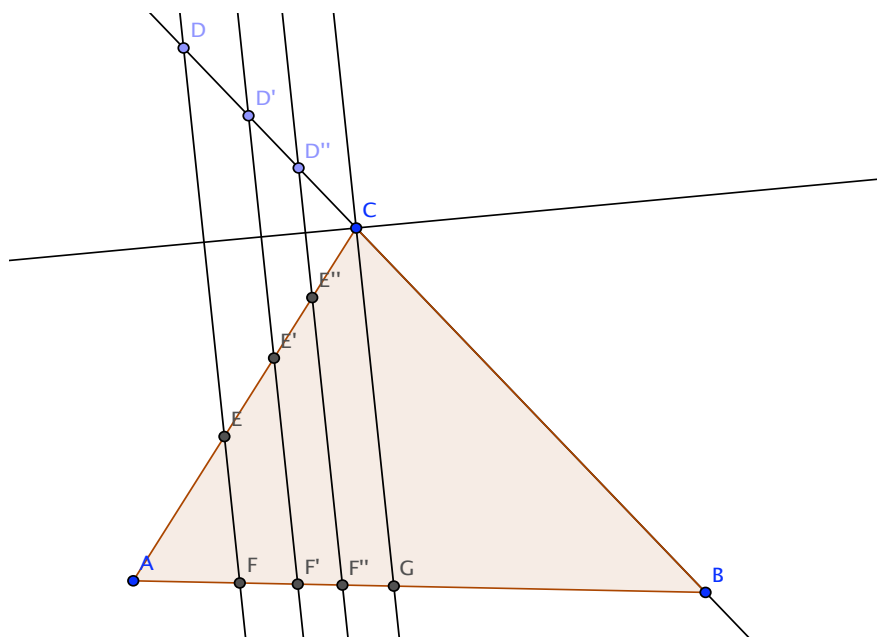
Ved å forkorte får vi derfor at

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}}.$$

Men av setningen over er punktene F og F' på linja gjennom AB derfor like, og Menelaos' setning følger. \square

Dersom linja gjennom D og E er parallell med halveringslinja til vinkelen C er $DC = EC$. Når denne linja nærmer seg C vil derfor produktet

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{BD}{EA}$$



nærme seg

$$\frac{BC}{CA}.$$

Så når linja gjennom CF halverer vinkelen C så får vi som et grensetilfelle av Menelaos' setning

$$\frac{BC}{CA} = \frac{FB}{AF}.$$

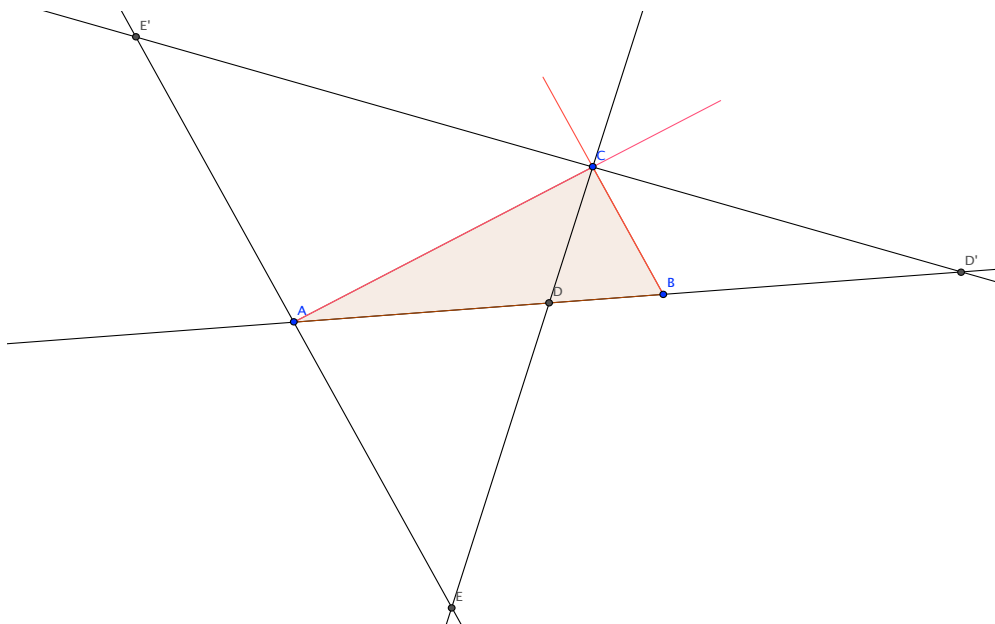
Dette er en del av en

Setning 4.3. (Setning om halveringslinjer). I en trekant $\triangle ABC$ vil ei linje gjennom hjørnet C dele linjestykket AB innvendig i forholdet $\frac{AC}{CB}$ hvis og bare hvis linja halverer vinkelen i C . Tilsvarende vil ei linje gjennom hjørnet C dele linjestykket AB utvendig i forholdet $-\frac{AC}{CB}$ hvis og bare hvis linja halverer den utvendige vinkelen i hjørnet C .

Bevis. La D være skjæringspunktet mellom linja gjennom C og linja gjennom AB . Siden vi vet at delingsforholdet $\frac{AD}{BD}$ er positivt dersom D ligger mellom A og B og negativt dersom D ligger utenfor AB er fortegnene i setningen riktige. I resten av beviset er det derfor tilstrekkelig å regne med absoluttverdier.

Trekk nå linja gjennom A parallelt med BC . Denne skjærer linja gjennom CD i E . Da er trekantene $\triangle ADE$ og $\triangle BDC$ formlike, så

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{BC}$$



Figur 8: Setning om indre og ytre halveringslinje

og $\angle DCB = \angle AED$. Derfor er $AE = AC$, det vil si $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$, hvis og bare hvis linja gjennom CD halverer vinkelen i C , så setningen følger. For den utvendige halveringslinja er beviset helt tilsvarende. La D' være skjæringspunktet mellom linja gjennom C og linja gjennom AB som ligger utenfor trekanten. La punktet E' være skjæringspunktet mellom linja gjennom A parallelt med BC og linja gjennom CD' . Erstatt nå E med E' og D med D' i beviset over. \square

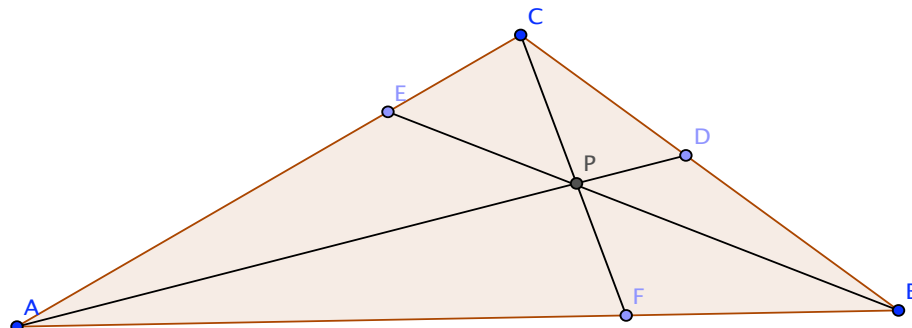
Ei linje gjennom et hjørne i en trekant $\triangle ABC$, som ikke faller sammen med linja til noen av sidene i trekanten, kalles ei **Ceva-linje** til trekanten gjennom dette hjørnet. Ei Ceva-linje gjennom A skjærer linja gjennom BC i Menelaos-punktet D (hvis den ikke er parallell med BC). Ceva-linja identifiseres derfor ofte med linja gjennom AD . En fin anvendelse av Menelaos' setning er

Setning 4.4. (Ceva) Dersom tre Ceva-linjer AD, BE, CF til trekanten $\triangle ABC$ er konkurrente, d.v.s. møtes i et felles punkt, så er

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$

Omvendt, dersom denne relasjonen holder, er Ceva-linjene parallelle eller konkurrente.

Bevis. Vi antar først at Ceva-linjene er konkurrente.



Figur 9: Cevas setning

La P være skjæringspunktet mellom Ceva-linjene AD , BE og CF . Ved å anvende Menelaos' setning på $\triangle ABD$ og $\triangle ADC$ får vi

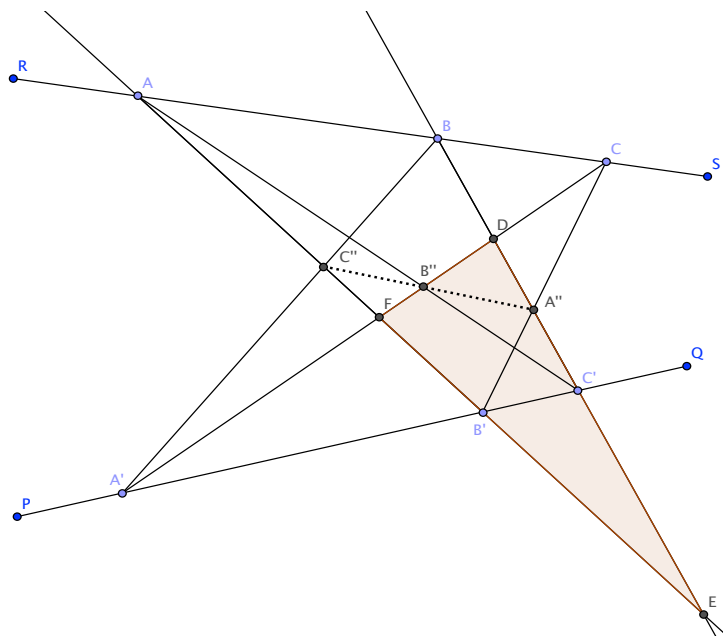
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = -1$$

Produktet av de to sidene blir 1 og flere faktorer kan forkortes:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} \\ = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1 \end{aligned}$$

så første del av setningen følger.

Anta omvendt at produktet av delingsforholdene er 1 og at Ceva-linjene ikke er parallelle (hvis de er parallelle, vis at produktrelasjonen holder (oppgave 8)). Trekk linja gjennom C og skjæringspunktet mellom Ceva-linjene AD og BE til skjæring F' med siden AB . Da er AF' en ny Ceva-linje gjennom A . Helt tilsvarende beviset for andre del av Menelaos' setning bruker vi produktrelasjonen innsatt F og F' til å vise at F og F' deler AB i samme forhold. Av setningen om entydighet av slike delingsforhold konkluderer vi at F og F' må være samme punkt. Dermed følger også andre delen av setningen. \square



Figur 10: Pappos' setning

En annen fin anvendelse av Menelaos' setning er

Setning 4.5. (Pappos) Dersom A, B, C og A', B', C' er to tripler av kollineære punkter på to forskjellige linjer, så er skjæringspunktene C'', A'', B'' mellom linjene gjennom AB' og $A'B$, BC' og $B'C$, CA' og $C'A$ kollineære.

Bevis. Tegn figur med skjæringspunkt D mellom linjene gjennom BC' og CA' , skjæringspunkt E mellom linjene gjennom AB' og BC' og skjæringspunkt F mellom linjene gjennom CA' og AB' . Menelaos' setning brukt på triplene av Menelaos-punkter

$$\{A, B, C\} \quad \{A', B', C'\} \quad \{A, B'', C''\}, \quad \{A', B, C''\} \quad \text{og} \quad \{A'', B', C\}$$

til trekanten $\triangle DEF$ gir

$$\begin{aligned} \frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{AE}} &= -1, \\ \frac{\overline{EC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DA'}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{FB'}}{\overline{B'E}} &= -1, \\ \frac{\overline{EC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DB''}}{\overline{B''F}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{AE}} &= -1, \end{aligned}$$

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'F}} \cdot \frac{\overline{FC''}}{\overline{C''E}} = -1$$

og

$$\frac{\overline{EA''}}{\overline{A''D}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FB'}}{\overline{B'E}} = -1.$$

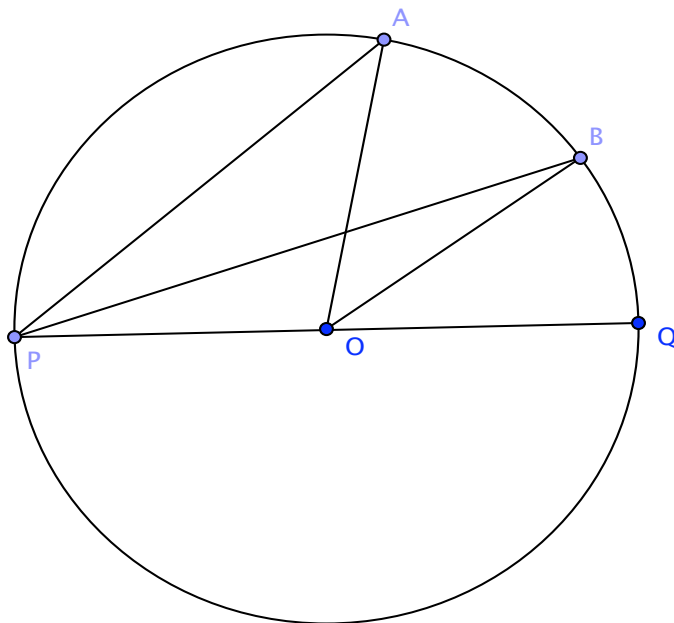
Sammenligner vi produktet av de tre siste venstresidene med produktet av de to første får vi:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{EC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DB''}}{\overline{B''F}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'F}} \cdot \frac{\overline{FC''}}{\overline{C''E}} \cdot \frac{\overline{EA''}}{\overline{A''D}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FB'}}{\overline{B'E}} \\ = -\frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{EC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'F}} \cdot \frac{\overline{FB'}}{\overline{B'E}} \end{aligned}$$

Denne ligningen kan vi redusere til:

$$\frac{\overline{DB''}}{\overline{B''F}} \cdot \frac{\overline{FC''}}{\overline{C''E}} \cdot \frac{\overline{EA''}}{\overline{A''D}} = -1.$$

Menelaos-punktene A'', B'', C'' til trekanten $\triangle DEF$ er derfor kollineære. \square



Figur 11: Setning om periferivinkler

4.2 Sirkler; punkts potens og Pascal

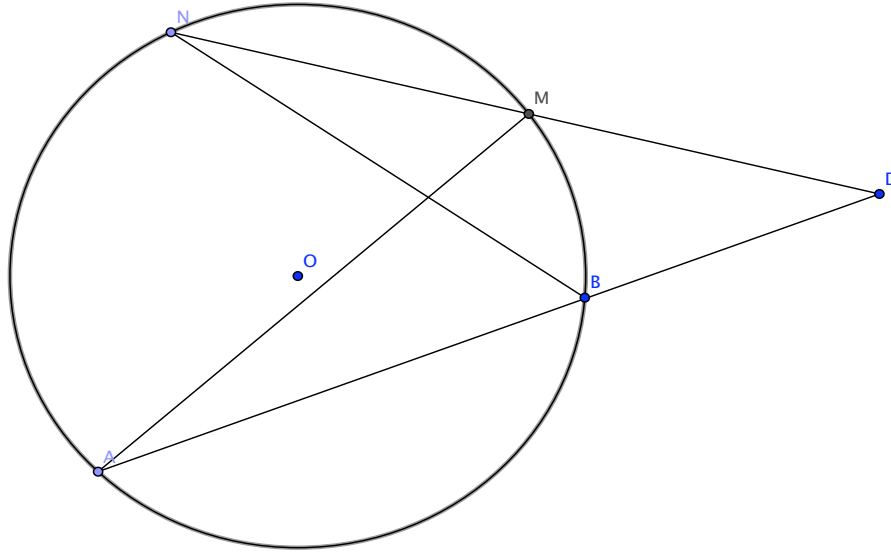
I dette avsnittet skal vi vise de sentrale setningene i sirkelgeometrien om periferivinkler og punkts potens. Disse anvender vi sammen med Menelaos' setning i beviset for Pascals setning for sirkelen. Denne setningen representerer sammen med Pappos' setning i forrige avsnitt to spesialtilfeller av Pascals setning for kjeglesnitt. Beviset for denne setningen i siste kapittel bygger i vesentlig grad på disse spesialtilfellene.

Dersom punktene A, B, C ikke er kollineære, betegner vi med $\angle BAC$ vinkelen med toppunkt i A og vinkelbein langs AB og AC .

I en sirkel kalles en vinkel med toppunkt i sentrum av sirkelen for en **sentralvinkel**. Dersom sentrum er O og vinkelbeina spanner over buen mellom A og B på sirkelperiferien, identifiserer vi sentralvinkelen med $\angle AOB$. En vinkel med toppunkt i periferien og med vinkelbein som skjærer periferien i to andre punkter kalles en **periferivinkel** til sirkelen. Som grensetilfelle inkluderer vi tilfellet der det ene vinkelbeinet tangerer sirkelen i toppunktet. Dersom toppunktet er P og vinkelbeina spanner over buen fra A til B på sirkelperiferien, identifiserer vi vinkelen med $\angle APB$.

Setning 4.6. (*Periferivinkler*) *I en sirkel er en sentralvinkel dobbelt så stor som en periferivinkel som spanner over samme bue. Spesielt er periferivinkler som spanner over samme bue like store.*

Bevis. Lag figur med en sentralvinkel $\angle AOB$ og en periferivinkel $\angle APB$, forleng linja



Figur 12: Punkts potens

gjennom PO til skjæringspunktet Q med periferien.

Vinkelen $\angle AOQ$ er nabovinkel til $\angle AOP$ i $\triangle AOP$, og vinkelen $\angle BOQ$ er nabovinkel til $\angle BOP$ i $\triangle BOP$.

Men trekantene $\triangle AOP$ og $\triangle BOP$ er begge likebeinte trekante, så $\angle AOQ = 2\angle APO$ og $\angle BOQ = 2\angle BPO$. Derfor er

$$\angle AOB = \angle AOQ - \angle BOQ = 2\angle APO - 2\angle BPO = 2\angle APB$$

og setningen følger. □

Setning 4.7. (*Punkts potens*) La P være et punkt og la Σ være en sirkel i planet. La l være ei linje gjennom P med skjæringspunkter A og B med Σ . Da er produktet $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ uavhengig av posisjonen til linja l .

Bevis. Tegn figur og trekk ei linje gjennom P (D i figur over) forskjellig fra l som har skjæringspunkter M og N med sirkelen. Trekk linjene MA og NB . I trekantene $\triangle MPA$ og $\triangle BPN$ er vinkelen i P felles. Videre spenner periferivinklene $\angle MNB$ og $\angle MAB$ over samme bue, så av setningen om periferivinkler er de like. Derfor er $\triangle MPA$ og $\triangle BPN$ formlike. Men da er

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PN}},$$

med fortegn til og med (alle linjemålene har samme fortegn dersom P ligger utenfor sirkelen, mens to og to har samme fortegn dersom P ligger inne i sirkelen). Så

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PM} \cdot \overline{PN}$$

er uavhengig av linja l . □

Produktet $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ i setningen kalles **punktet P 's potens m.h.p. sirkelen Σ** . Legg merke til at punktets potens m.h.p. Σ er positiv dersom P ligger utenfor sirkelen, 0 dersom P ligger på sirkelen og negativ dersom P ligger inne i sirkelen.

Setning 4.8. (*Pascals setning for en sirkel*) La A, B, C, D, E, F være 6 forskjellige punkter på en sirkel. Da er skjæringspunktene mellom linjene gjennom AB og DE , BC og EF , FA og CD (dersom ingen av disse parene er parallelle) kollineære.

Bevis. Tegn figur med skjæringspunkter henholdsvis L, M og N . Forleng linjene gjennom AB og CD til skjæringspunktet R , linjene gjennom CD og EF til skjæringspunktet S , og linjene gjennom AB og EF til skjæringspunktet T .

Menelaos' setning for triplene av Menelaos-punkter $\{E, L, D\}$, $\{F, A, N\}$ og $\{M, B, C\}$ til trekanten $\triangle RST$ sier nå at

$$\frac{\overline{SE}}{\overline{ET}} \cdot \frac{\overline{TL}}{\overline{LR}} \cdot \frac{\overline{RD}}{\overline{DS}} = -1,$$

$$\frac{\overline{SF}}{\overline{FT}} \cdot \frac{\overline{TA}}{\overline{AR}} \cdot \frac{\overline{RN}}{\overline{NS}} = -1$$

og

$$\frac{\overline{SM}}{\overline{MT}} \cdot \frac{\overline{TB}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{CS}} = -1.$$

Produktet av disse blir

$$\frac{\overline{SE}}{\overline{ET}} \cdot \frac{\overline{TL}}{\overline{LR}} \cdot \frac{\overline{RD}}{\overline{DS}} \cdot \frac{\overline{SF}}{\overline{FT}} \cdot \frac{\overline{TA}}{\overline{AR}} \cdot \frac{\overline{RN}}{\overline{NS}} \cdot \frac{\overline{SM}}{\overline{MT}} \cdot \frac{\overline{TB}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{CS}} = -1,$$

som vi kan skrive

$$\frac{\overline{SM}}{\overline{MT}} \cdot \frac{\overline{TL}}{\overline{LR}} \cdot \frac{\overline{RN}}{\overline{NS}} = -\frac{\overline{DS}}{\overline{RD}} \cdot \frac{\overline{ET}}{\overline{SE}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{TA}} \cdot \frac{\overline{FT}}{\overline{SF}} \cdot \frac{\overline{BR}}{\overline{TB}} \cdot \frac{\overline{CS}}{\overline{RC}}.$$

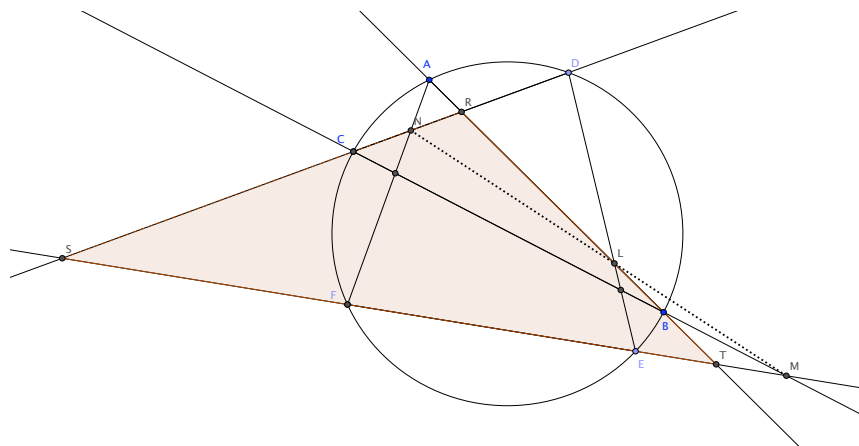
På den andre siden sier setningen om et punkts potens m.h.p. sirkelen brukt på punktene R, S, T at

$$\overline{RA} \cdot \overline{RB} = \overline{RC} \cdot \overline{RD},$$

$$\overline{SC} \cdot \overline{SD} = \overline{SE} \cdot \overline{SF}$$

og

$$\overline{TA} \cdot \overline{TB} = \overline{TE} \cdot \overline{TF}.$$



Figur 13: Pascals setning

Setter vi inn for disse ligningene i høyre siden ovenfor får vi

$$\frac{\overline{SM}}{\overline{MT}} \cdot \frac{\overline{TL}}{\overline{LR}} \cdot \frac{\overline{RN}}{\overline{NS}} = -\frac{\overline{ES}}{\overline{RD}} \cdot \frac{\overline{AT}}{\overline{SE}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{TA}} \cdot \frac{\overline{BT}}{\overline{SF}} \cdot \frac{\overline{DR}}{\overline{TB}} \cdot \frac{\overline{FS}}{\overline{RC}} = -1.$$

Av Menelaos' setning anvendt på Menelaos-punktene M, L, N til trekanten $\triangle RST$ følger det at M, L, N er kollineære. \square

4.3 Oppgaver

1. Vis at om A, B, C, D er kollineære, så er

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{BD} \cdot \overline{CA} + \overline{CD} \cdot \overline{AB} = 0.$$

2. Vis følgende generalisering av Menelaos' setning: For en firkant $ABCD$ vil punktene A', B', C', D' på linjene gjennom AB, BC, CD og DA være kollineære bare hvis

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DD'}}{\overline{D'A}} = 1.$$

3. Vis at halveringslinjene til to vinkler i en trekant og halveringslinja til den utvendige vinkelen i det tredje hjørnet skjærer sine respektive motsatte linjer i trekanten i kollineære punkter.

4. Vis at halveringslinjene til de utvendige vinklene i en trekant skjærer sine respektive motsatte linjer i trekanten i kollineære punkter.
5. Vis at tangentlinjene til den omskrevne sirkelen til en trekant i hjørnene skjærer sine respektive motsatte linjer i trekanten i kollineære punkter.
6. For to parallellogrammer $ABCD$ og $A'BC'D'$ med felles vinkel i B , vis at linjene gjennom DD' , $A'C$ og AC' er konkurrente.
7. La AD , BE og CF være tre Ceva-linjer til en trekant $\triangle ABC$ som er konkurrente. Anta at linjene gjennom EF , FD , og DE skjærer linjene gjennom BC , CA og AB respektivt i punktene D' , E' og F' . Vis at D' , E' og F' er kollineære.
8. Vis at hvis tre Ceva-linjer til en trekant er parallelle så er produktrelasjonen mellom delingsforholdene i Cevas setning oppfylt.
9. Bruk Cevas setning til å vise at
 - a) Høydene i en trekant er konkurrente.
 - b) Medianene i en trekant er konkurrente.
 - c) Vinklenes halveringslinjer i en trekant er konkurrente.

(Husk

Setning 4.9. (*Sinus*) I en trekant $\triangle ABC$ er

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

10. *La S være sentrum for den omskrevne sirkelen til en trekant $\triangle ABC$, la T være tyngdepunktet og la O være ortosenteret (skjæringspunktet mellom høydene). Vis at O , S og T ligger på linje. Denne linja kalles **Eulers linje**.
11. * Vis at midtpunktet mellom O og S er sentrum i en sirkel som passerer gjennom: Fotpunktene til høydene i trekanten $\triangle ABC$, midtpunktene mellom O og hjørnene i trekanten, og midtpunktene på sidene i trekanten. Denne sirkelen kalles **nipunkt-sirkelen** til trekanten.
12. * (**Skaus vinkelpar-setning**) La A, A', B, B', C, C' være punkter i planet slik at ingen utvalg av tre er kollineære. Anta at $\angle B'AC = \angle BAC'$ og at $\angle C'BA = \angle CBA'$. Da er linjene gjennom AA' , BB' og CC' konkurrente hvis og bare hvis $\angle A'CB = \angle ACB'$.

Et bevis for Skaus vinkelpar-setning er gitt av Killinbergtrø, (Normat 43, s 162-167), her finner en også følgende generalisering:

Nikantsetningen: I et gitt kjeglesnitt er innskrevet en nikant med hjørner, A, A', A'' , B, B', B'' og C, C', C'' . La AB og $A'B'$ skjære hverandre C_0 , AB'' og AB i C_1 o.s.v.. Da vil AA_1 , BB_1 og CC_1 være konkurrente hvis og bare hvis A_0, B_0, C_0 er kollinære.

5 Kjeglesnitt i det Euklidske planet

5.1 Geometriske steder: Linjer og kjeglesnitt

I dette siste kapitlet med koordinatfri geometri studerer vi noen enkle geometriske steder. I definisjonene av disse inngår ofte avstanden mellom punkter, disse gis da ved sine absolutte mål og ikke fortegnsmål som vi ofte brukte i forrige kapittel.

Mengden av punkter som oppfyller en bestemt geometrisk betingelse kalles *det geometriske stedet for punkter som oppfyller denne betingelsen*.

5.1.1 Eksempler:

1. Det geometriske stedet for punkter som har en gitt fast avstand fra et gitt fast punkt O , er en sirkel med sentrum i O og radius den gitte avstanden.
2. Det geometriske stedet for punkter som har samme avstand fra to gitte punkter A og B , er midtnormalen på linjestykket AB .
3. Gitt en vinkel v og to faste punkter A og B . Det geometriske stedet for toppunktet til en vinkel lik v med vinkelbein gjennom A og B er to sirkelbuer med endepunkt i A og B . (Husk Periferivinkelsetningen 4.6)
4. (Thales) Det geometriske stedet for toppunktet til en rett vinkel med vinkelbein gjennom to punkter A og B er sirkelen med diameter AB .
5. Det geometriske stedet for punkter P hvis avstander PA og PB til to faste punkter A og B har et konstant forhold

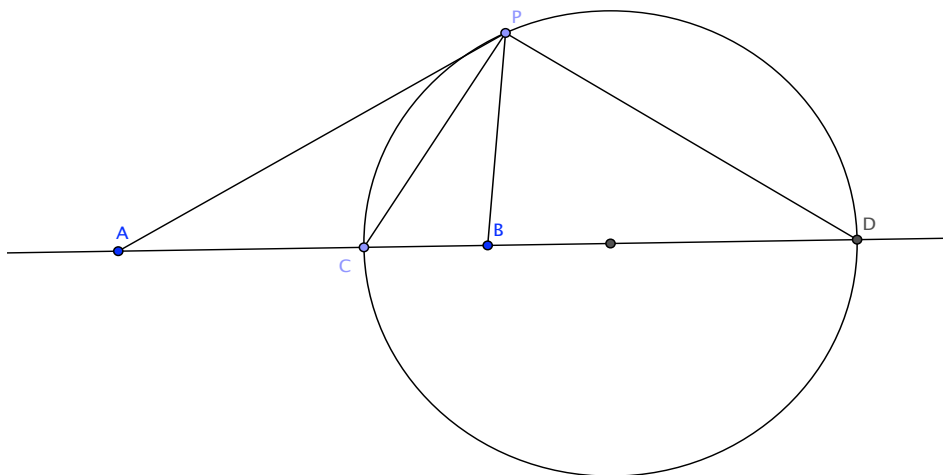
$$k = \frac{PA}{PB} \geq 0$$

er en sirkel med sentrum på linja gjennom AB . Denne sirkelen kalles **Apollonios sirkel**.

Det geometriske stedet ligger symmetrisk om linja gjennom AB og har to punkt M og N på denne linja siden vi regner med absolutte mål. Et punkt, M , deler linjestykket AB utvendig mens det andre punktet, N , deler AB innvendig. Fra et punkt P på dette geometriske stedet utenfor linja, trekker vi linjene PB, PM, PA, PN . I trekanten $\triangle ABP$ er nå

$$\frac{PA}{PB} = \frac{NA}{NB}$$

så av setningen om halveringslinja til en vinkel i en trekant følger det at PN halverer vinkelen i P . Helt tilsvarende følger det at PM halverer den utvendige vinkelen i P . Siden den innvendige og den utvendige vinkelen i P er supplementvinkler, må de



Figur 14: Apollonios-sirkel

halve vinklene $\angle APM$ og $\angle APN$ være komplementvinkler. Dermed er $\angle MPN$ en rett vinkel og P ligger på periferien til sirkelen som har MN som diameter. Denne sirkelen danner derfor det søkte geometriske stedet.

6. Det geometriske stedet for punkter hvis forhold mellom avstandene til to gitte faste linjer er konstant, er ei linje gjennom skjæringspunktet til de to gitte linjene.

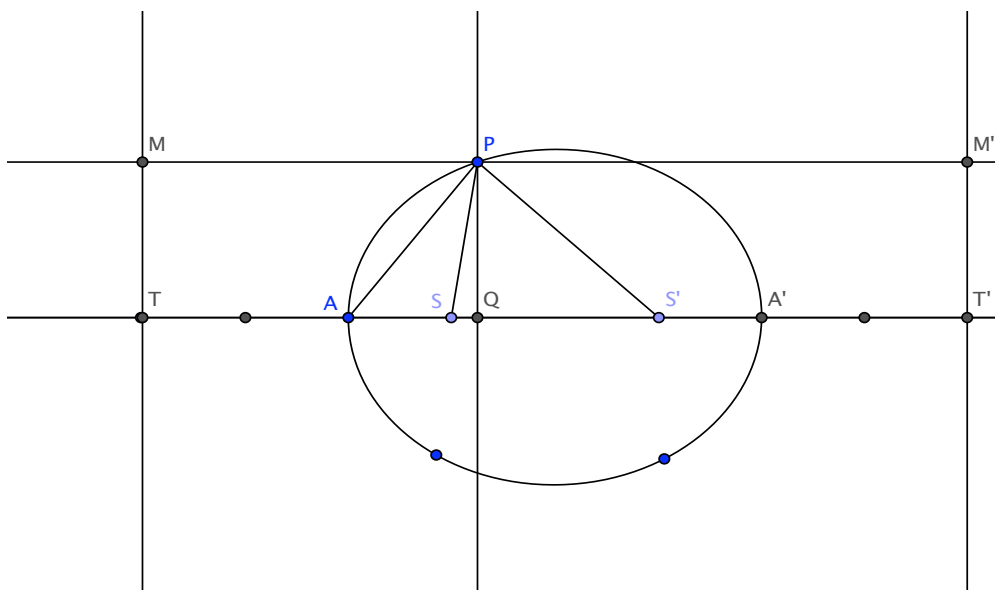
Nå er vi ved vår første definisjon av kjeglesnittene ellipse, parabel og hyperbel. Den stammer fra Pappos:

Definisjon 5.1. (Kjeglesnitt - brennpunkt og styrelinje-definisjon) Gitt ei linje l , et punkt S utenfor linja og et reelt tall $e > 0$. Det geometriske stedet for punkter P hvis forhold mellom avstandene til punktet S og til linja l er lik e , er

- en **ellipse** dersom $0 < e < 1$,
- en **parabel** dersom $e = 1$
- og en **hyperbel** dersom $e > 1$.

Hvis M er skjæringspunktet mellom normalen til l gjennom punktet P og linja l , så er altså

$$PS = ePM.$$



Figur 15: Brennpunkter og styrelinjer til en ellipse

En fellesbetegnelse for disse kurvene er **kjeglesnitt**, et navn vi skal forklare senere. S kalles et **brennpunkt** og l kalles ei **styrelinje** til kjeglesnittet. Størrelsen e kalles **eksentrisiteten** til kjeglesnittet.

Vi undersøker symmetriegenskaper til kjeglesnitt. For det første er normalen til styrelinja gjennom brennpunktet opplagt ei symmetrilinje. En ellipse (hhv en hyperbel) har to punkter felles med denne linja, disse kalles **toppunktene** til ellipsen (hhv hyperbelen).

Symmetrisk om midtpunktet mellom disse toppunktene ligger det et nytt brennpunkt og ei ny styrelinje. Ved hjelp av en figur og litt regning skal vi finne det nye brennpunktet og den nye styrelinja og vise at midtnormalen på linja mellom toppunktene også er en symmetriakse.

Figuren viser et eksempel med $e < 1$ (en ellipse), der T er fotpunktet til normalen på styrelinja l gjennom brennpunktet S . La ST ha lengde m . Siden $AS/AT = e$ og $ST = AS + AT$, får vi

$$AS = \frac{em}{e+1} \quad \text{og} \quad AT = \frac{m}{e+1}.$$

Linja gjennom ST skjærer ellipsen i A og i A' slik at A' deler ST utvendig i forholdet

$\frac{A'S}{A'T} = e$. Derfor er

$$A'S = \frac{em}{1-e} \quad \text{og} \quad A'T = \frac{m}{1-e}$$

og spesielt

$$AA' = AS + SA' = \frac{2me}{1-e^2}.$$

Vi setter av S' på denne linja symmetrisk til S om midtpunktet på AA' . Da er

$$SS' = SA' - AS = \frac{2me^2}{1-e^2}.$$

Tilsvarende vil linja l' symmetrisk til l skjære linja gjennom ST i punktet T' med

$$TT' = AT + A'T = \frac{2m}{1-e^2}.$$

Fra et punkt P på ellipsen trekker vi linjene PS , PS' og normalen gjennom P på linja gjennom ST til skjæringspunktet Q med denne linja. Videre trekker vi normalen gjennom P på styrelinja l til skjæringspunktene M med l og M' med l' . Trekantene $\triangle SPQ$ og $\triangle S'PQ$ er rettvinklede så vi kan uttrykke PQ ved Pytagoras' setning på to måter og få

$$(PS)^2 - (SQ)^2 = (PS')^2 - (S'Q)^2.$$

Setter vi $PM = x$, får vi $SQ = x - m$ og, ved definisjonen av ellipsen, $PS = ePM = ex$. Da er

$$S'Q = \frac{2me^2}{1-e^2} - x + m.$$

Så

$$\begin{aligned} (PS')^2 &= \left(\frac{2me^2}{1-e^2} - x + m \right)^2 + e^2x^2 - (x-m)^2 \\ &= \frac{4m^2e^4}{(1-e^2)^2} - \frac{4me^2(x-m)}{1-e^2} + e^2x^2 \\ &= e^2 \left(\frac{4m^2}{(1-e^2)^2} - \frac{4mx}{1-e^2} + x^2 \right) \\ &= e^2 \left(\frac{2m}{1-e^2} - x \right)^2 = (ePM')^2. \end{aligned}$$

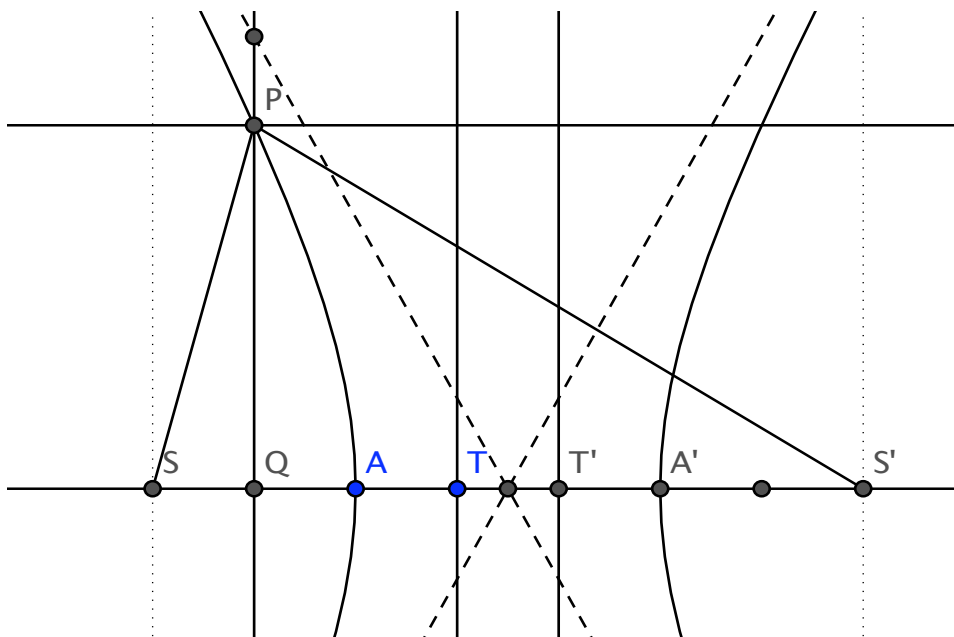
Derfor er også S' og l' et brennpunkt og ei styrelinje for ellipsen. Dette viser symmetrien om midtnormalen på linja mellom topppunktene. Dessuten får vi en ny karakteristikk av ellipsen. Vi får nemlig at summen

$$PS + PS' = ePM + ePM' = eMM' = eTT'$$

er uavhengig av punktet P på ellipsen.

For en hyperbel ($e > 1$) blir regningen helt tilsvarende, men med et fortegnsskifte slik at

$$|PS - PS'| = eTT'.$$



Figur 16: Brennpunkter og styrelinjer til en hyperbel

Definisjon 5.2. (Kjeglesnitt - sum- og differensdefinisjon) En ellipse er det geometriske stedet for punkter hvis avstander til to gitte faste punkter har en gitt fast sum. En hyperbel er det geometriske stedet for punkter hvis avstander til to gitte faste punkter har en gitt fast differens.

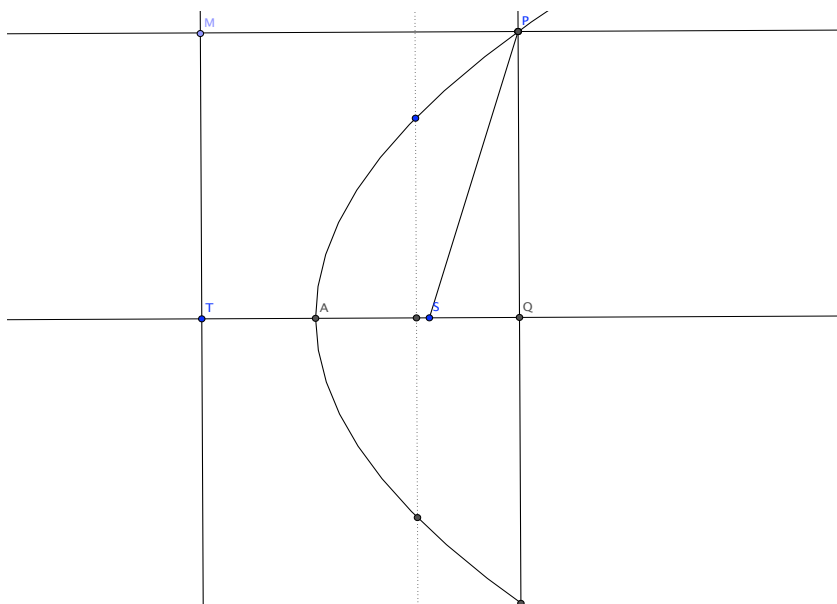
En parabel har bare ett brennpunkt. Normalen gjennom brennpunktet på styrelinja er den eneste symmetrilinja til parabellen.

En **sekant** til et kjeglesnitt er ei linje som skjærer kjeglesnittet i to punkter. Linjestykket mellom skjæringspunktene kalles en **korde**.

En ellipse har som vi har sett to brennpunkter. Midtpunktet mellom dem kalles **sentrum** i ellipsen. En korde til ellipsen gjennom sentrum kalles en **diameter**.

Brennpunktene ligger på en diameter, som kalles den **store aks**en. Endepunktene til den store aks

Den store aks



Figur 17: Brennpunkt og styrelinje til en parabel

er, som vi har sett, begge symmetriakser for hyperbelen. Derfor er hyperbelen symmetrisk også om sentrum.

Forholdet mellom avstanden mellom brennpunktene og avstanden mellom toppunktene til en ellipse (hhv. hyperbel) er eksentrisiteten e som vi brukte i den første definisjonen av kjeglesnitt. Dersom vi holder de to toppunktene fast og lar eksentrisiteten e avta mot null, det vil si at brennpunktene nærmer seg hverandre, ser vi at kjeglesnittet er en ellipse som blir til en sirkel. Dette passer godt med den første karakteriseringen av sirkelen som et geometrisk sted og sumdefinisjonen av ellipsen.

5.2 Koordinater: Linjer og kjeglesnitt

Hittil har vi undersøkt linjer, trekanter og geometriske steder uten å bruke koordinater og ligninger. Undersøkelsene har avklart symmetriegenskaper til kjeglesnitt som vi vil utnytte når vi velger koordinatsystem og finner ligningen til et kjeglesnitt.

Et koordinatsystem i planet bestemmer koordinater (x, y) for hvert punkt i planet. Disse er bestemt av to orienterte linjer, x -aksen og y -aksen, som står normalt på hverandre. Skjæringspunktet kalles **origo**, som har koordinater $(0, 0)$.

Ei linje i planet kan i et koordinatsystem bestemmes med en ligning: Punktene på linja har koordinater som oppfyller en **lineær** ligning

$$Ax + By = C$$

for passe konstanter A, B, C (merk at A og B ikke begge kan være lik 0). Om denne ligningen blir multiplisert med en konstant $k \neq 0$, så bestemmer den fortsatt samme linje, dette er imidlertid eneste mulige forskjell mellom ligninger som bestemmer samme linje. Dersom linja er parallell med y -aksen er $B = 0$ og $A \neq 0$, så vi kan velge $A = 1$ og få ligningen $x = C$. Dersom linja ikke er parallell med y -aksen er den grafen til en lineær funksjon. Da er $B \neq 0$ og vi kan skrive ligningen

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}.$$

Koeffisienten $-\frac{A}{B}$ kalles da stigningstallet til linja. Ei linje med stigningstall k som går gjennom punktet (a, b) har ligning

$$y - b = k(x - a) \quad \text{eller} \quad y = kx - ka + b.$$

Stigningstallet til ei linje er tangens til vinkelen mellom den positive x -aksen og linja. Dersom linja står normalt på x -aksen, så er tangens til denne vinkelen ikke definert, derfor heller ikke stigningstallet. Linja med ligning $Ax + By = C$ står normalt på x -aksen, når $B = 0$. Når $B \neq 0$ er stigningstallet lik $-\frac{A}{B}$. Tangens til vinkelen mellom to linjer med ligninger $Ax + By = C$ og $A'x + B'y = C'$ er bestemt av stigningstallene etter formelen for tangens til en differens av vinkler, så den er

$$\frac{-\frac{A}{B} - (-\frac{A'}{B'})}{1 + (-\frac{A}{B}) \cdot (-\frac{A'}{B'})} = \frac{-AB' + A'B}{AA' + BB'}.$$

Linjene står normalt på hverandre hvis og bare hvis tangens til vinkelen mellom linjene ikke er definert, så vi ser av denne formelen at

Lemma 5.3. *Linjene med ligninger $Ax + By = C$ og $A'x + B'y = C'$ står normalt på hverandre hvis og bare hvis*

$$AA' + BB' = 0.$$

Spesielt får vi at hvis stigningstallene for to linjer er k og k' så står linjene normalt på hverandre hvis

$$k = -\frac{1}{k'}.$$

Avstanden mellom to punkter $P = (a, b)$ og $Q = (c, d)$ er selvsagt gitt ved Pytagoras' setning:

$$PQ = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

Når vi nå kjenner symmetriegenskaper til kjeglesnitt velger vi et koordinatsystem som utnytter disse. Vi starter med ellipsen med eksentrisitet e og store akse lik $2a$:

Legg origo i sentrum for ellipsen, og la x -aksen og y -aksen være linjene gjennom hhv. store og lille akse. Da har brennpunktene koordinater $(\pm c, 0)$ der $c = ea$. Dersom (x, y) er et punkt på ellipsen så oppfyller koordinatene x og y , på grunn av sumdefinisjonen av ellipsen, ligningen

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a.$$

Denne reduseres ved isolering av et rottegn og kvadrering i steg til

$$(\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - 2a)^2 = (x - c)^2 + y^2,$$

$$4cx + 4a^2 = 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

og

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2((x + c)^2 + y^2)$$

som igjen reduseres til

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Legg merke til at dersom den lille aksen er $2b$, så er $b^2 = a^2 - c^2$ siden avstanden mellom et brennpunkt og et endepunkt til den lille halvaksen er a . Ligningen for ellipsen blir derfor

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der a og b er store og lille halvakse.

Tilsvarende får vi for hyperbelen med eksentrisitet $e > 1$, reell akse lik $2a$, sentrum i origo og brennpunkter i $(\pm c, 0)$, der $c = ea$, ligningen

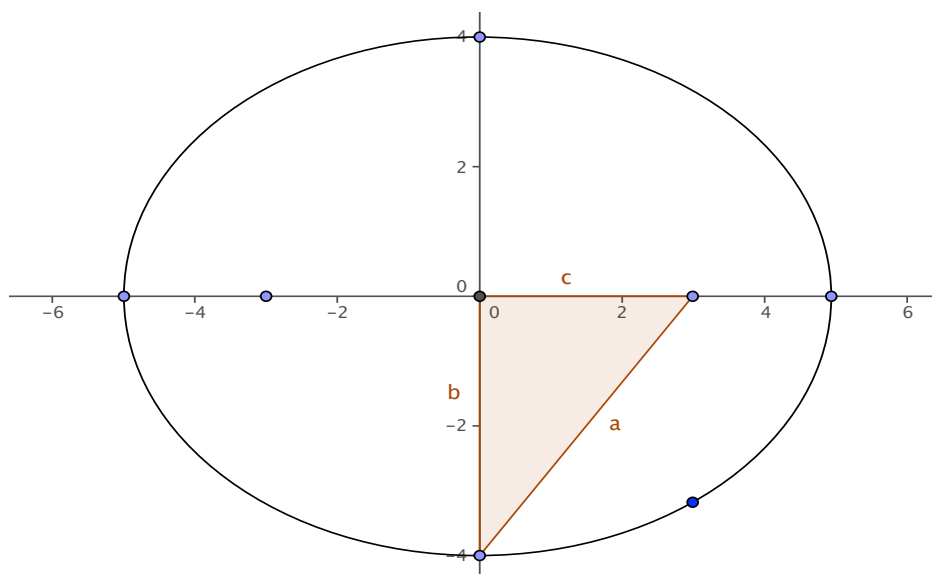
$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a.$$

Denne reduseres ved isolering av et rottegn og kvadrering til

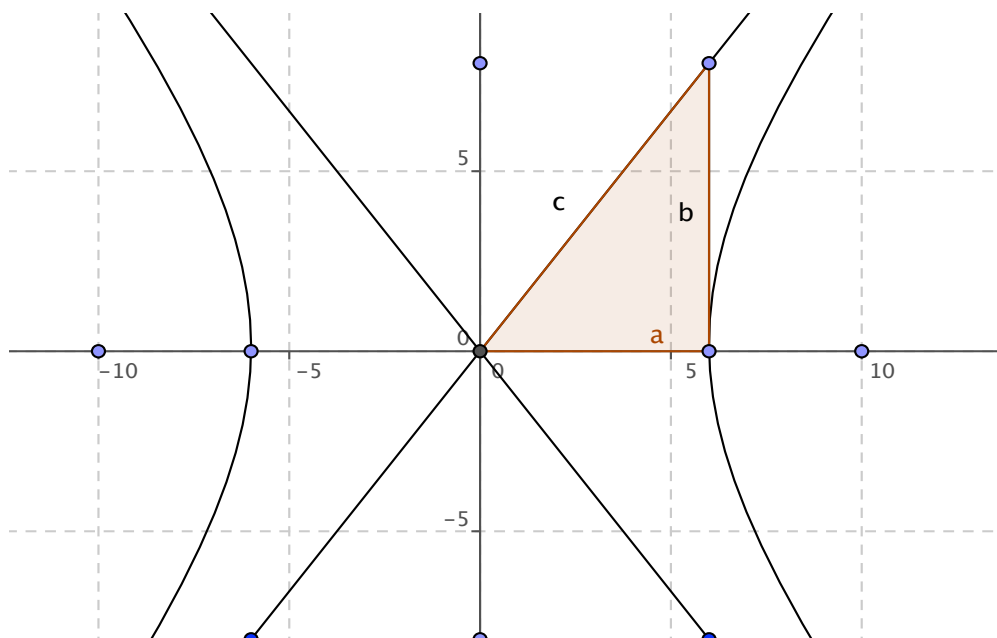
$$-cx - a^2 = a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

som igjen reduseres til

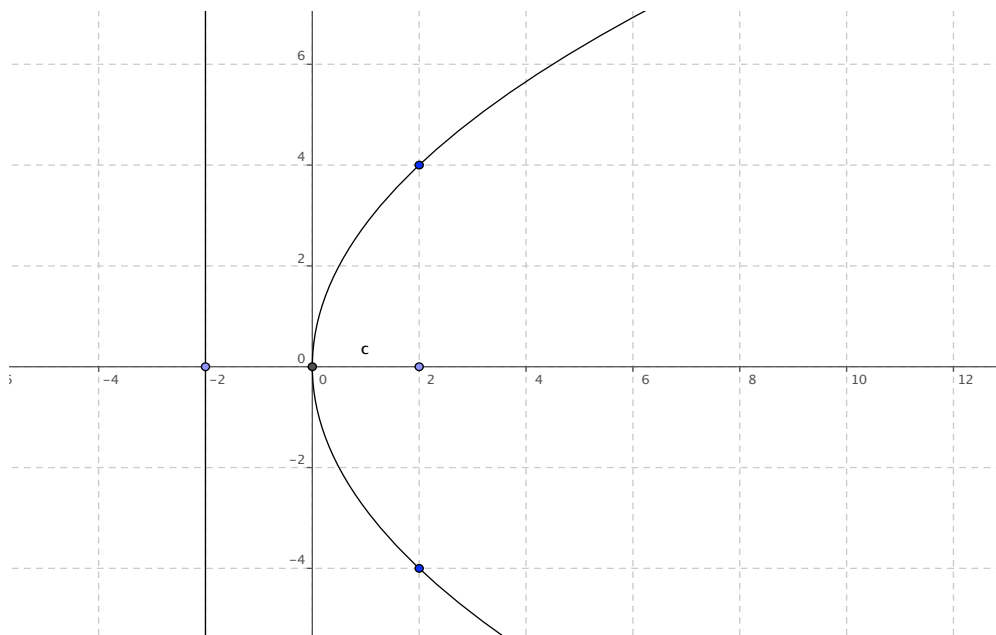
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$



Figur 18: Ellipse med ligning $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Figur 19: Hyperbel med ligning $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Figur 20: Parabel med ligning $y^2 = 4cx$

som med $b^2 = c^2 - a^2$ får formen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Til slutt får vi for en parabel med brennpunkt i $(c, 0)$ og styrelinje $x = -c$ ligningen:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = x + c$$

som etter kvadrering kan reduseres til

$$y^2 = 4cx.$$

I 5.6 har vi oppsummert ligninger og parametre for kjeglesnitt med akser langs koordinat-aksene.

Felles for de ligningene som vi har utledet for ellipser og hyperbler med sentrum i origo og for parabler er at de kan skrives på formen

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma x + \delta y = \epsilon$$

for passende koeffisienter. For ellipser og hyperbler med sentrum i origo er koeffisientene $\gamma = \delta = 0$. Når disse koeffisientene er ulik null kan vi alltid danne fullstendige kvadrater slik at ligningen får formen

$$\alpha(x - p)^2 + \beta(y - q)^2 = \mu$$

eller

$$(y - q)^2 = 4\rho(x - p)$$

eventuelt med x og y byttet rolle. I det første tilfellet definerer ligningen en ellipse eller hyperbel med sentrum i (p, q) med akser parallelle med koordinataksene, mens ligningen i det andre tilfellet definerer en parabel med toppunkt i (p, q) og akse parallell med x -aksen. Mer generelt vil også en ligning av andre grad i x, y med produktledd xy definere et kjeglesnitt, hyperbelen $xy = 1$ er et kjent eksempel, disse har akser som ikke er parallelle med koordinataksene. Utledningen kommer vi tilbake til i kapittel 6. Det generelle kjeglesnittet i planet har ligningen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

der minst en av koeffisientene A, B, C er ulike 0. For spesielle verdier av koeffisientene vil denne ligningen definere to linjer, en linje, et punkt eller ingen punkter. Disse kalles gjerne **degenererte kjeglesnitt**.

Dersom en har gitt 5 punkter i planet $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), P_3 = (x_3, y_3), P_4 = (x_4, y_4), P_5 = (x_5, y_5)$ får en ved innsetting i ligningen for det generelle kjeglesnittet 5 lineære ligninger i koeffisientene. Dersom ikke 4 av punktene ligger på linje, er det bare et sett av koeffisienter (opp til multiplikasjon med en konstant), som løser disse ligningene. Det betyr at det er nøyaktig ett kjeglesnitt gjennom de 5 punktene i planet. Vi kommer tilbake til dette i kapittel 6

Remark. I dynamisk geometriprogramvare kan en som regel bruke ulike definisjoner av kjeglesnitt. Det er en fin øvelse å bruke de ulike definisjonene til å se hvordan kjeglesnittet varierer med ligningen.

5.3 Trigonometrisk og hyperbolsk parametrisering

Med trigonometriske og hyperbolske funksjoner kan vi parametrisere ellipser og hyperbler.

Vi velger et koordinatsystem som over. Et punkt (x, y) på ellipsen oppfyller da ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

der $0 < b < a$ er lille og store halvakse. Ved å utnytte den trigonometriske identiteten

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

kan vi sette

$$x = a \cos t \quad y = b \sin t \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

som er en trigonometrisk parametrisering av ellipsen.

Tilsvarende vil et punkt (x, y) på hyperbelen oppfylle ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der $b^2 = c^2 - a^2$. Ved å utnytte den trigonometriske identiteten

$$\frac{1}{\cos^2 t} - \tan^2 t = 1$$

kan vi sette

$$x = \frac{a}{\cos t}, \quad y = b \tan t, \quad -\pi \leq t \leq \pi, \quad t \neq \pm \frac{\pi}{2}$$

som er en trigonometrisk parametrisering av hyperbelen.

Hyperbelen kan også naturlig parametriseres av de hyperbolske funksjonene $\sinh u$ og $\cosh u$. Ved å utnytte identiteten

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$$

kan vi sette

$$x = a \cosh u, \quad y = b \sinh u \quad u \in \mathbb{R}$$

som er en parametrisering av hyperbelen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ med hyperbolske funksjoner.

For hyperbelen ser en at punktet (x, y) går mot uendelig når t nærmer seg $\pm \frac{\pi}{2}$ i den trigonometriske parametriseringen. Men forholdet

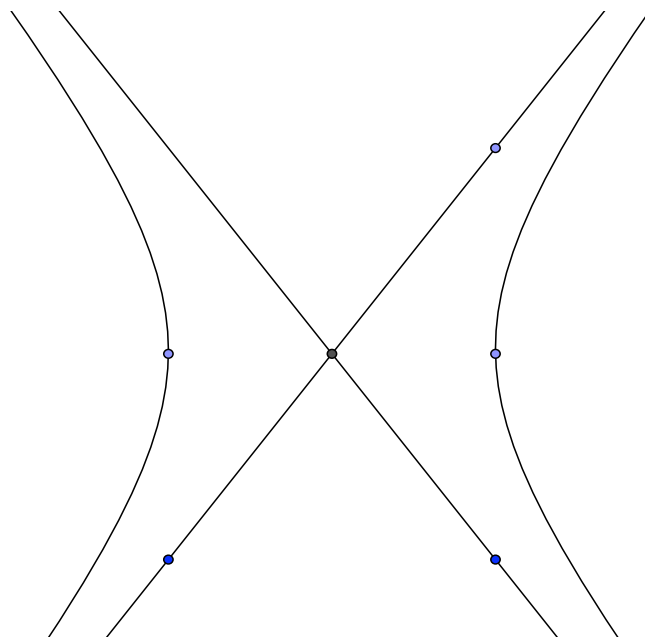
$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b \sin t} \rightarrow \pm \frac{a}{b} \quad \text{hvis} \quad t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2},$$

så hyperbelen nærmer seg linjene $bx = \pm ay$ mens punktene på den går mot uendelig. Disse linjene kalles **asymptoter** til hyperbelen.

Ligningene til asymptotene er altså $\frac{x}{y} = \pm \frac{a}{b}$, disse kan slås sammen til ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

som er den formen som vi får bruk for senere. Stigningstallene til asymptotene er $\pm \frac{b}{a}$ som kan uttrykkes trigonometrisk ved hjelp av vinkelen v som en asymptote danner med den reelle aksen med at $\cos v = \frac{1}{e}$. Asymptotene er svært nyttige når en skal tegne en hyperbel. Litt senere skal vi og se at flere geometriske egenskaper er knyttet til asymptotene.



Figur 21: Hyperbel med asymptoter

5.4 Implisitt derivasjon og tangentlinjer

Husk at ei linje som skjærer en kurve i to punkter kalles en sekant til kurven. Når en holder det ene punktet fast mens det andre punktet nærmer seg det første, vil sekanten gjennom punktene nærme seg en grenseposisjon som vi kaller en *tangent* til kurven.

Klassisk ble en tangent definert som ei linje som passerer gjennom et punkt på kurven uten å skjære den.

For en kurve definert av en polynomligning $f(x, y) = 0$ kan vi og definere en tangent til kurven som ei linje slik at restriksjonen av $f(x, y) = 0$ til linja, det vil si substitusjon av en av variablene ved hjelp av ligningen for linja, har ei dobbel rot.

Hver av disse definisjonene passer med tolkningen av den deriverte i et punkt som stigningstallet til tangenten i punktet: For en kurve som er grafen til en funksjon $y = f(x)$ finner vi tangenten ved å derivere, siden stigningstallet til tangenten i et punkt $(p, f(p))$ nettopp er den deriverte $f'(p)$.

Vi skal bruke den siste definisjonen og derivasjon til å finne ligninger for tangenter til kjeglesnitt.

Vi har sett at et kjeglesnitt alltid kan defineres av en polynomligning av andre grad.

Et kjeglesnitt med sentrum i origo og store/reelle akse langs x -aksen er bestemt av ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ved å avgrense x - og y -verdiene til et lite område, kan vi alltid realisere den delen av kjeglesnittet som ligger innenfor dette området som grafen til en funksjon $y = g(x)$ (eller $x = h(y)$). Ved å tenke på y som en funksjon av x blir alle variablene i ligningen funksjoner av variabelen x . Disse er polynomer, så de er alle deriverbare. Ved å derivere begge sider av polynomligningen (dette kalles implisitt derivasjon) får vi derfor:

$$2\frac{x}{a^2} \pm 2\frac{yy'}{b^2} = 0.$$

Stigningstallet til tangenten i et punkt (p, q) på kjeglesnittet er derfor $\mp \frac{pb^2}{qa^2}$, mens ligningen til tangenten blir

$$(y - q) = \mp \frac{pb^2}{qa^2}(x - p)$$

som forenkles etter multiplikasjon med $\pm \frac{q}{b^2}$ til

$$\frac{px}{a^2} \pm \frac{qy}{b^2} = \frac{p^2}{a^2} \pm \frac{q^2}{b^2}.$$

Men (p, q) oppfyller ligningen

$$\frac{p^2}{a^2} \pm \frac{q^2}{b^2} = 1,$$

så tangentlinja får ligningen

$$\frac{px}{a^2} \pm \frac{qy}{b^2} = 1.$$

For parabler på formen

$$y^2 = 4cx$$

får tangentligningen i punktet (p, q) på parabelen etter tilsvarende regning følgende form:

$$qy = 2c(x + p).$$

5.5 Pol og polare

For et vilkårlig punkt (x_0, y_0) i planet har linja

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

også interessante egenskaper. Denne linja kalles *polaren* til punktet (x_0, y_0) med hensyn til ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

mens omvendt punktet kalles **polen** til linja. Tilsvarende defineres polaren til et punkt (x_0, y_0) m.h.t hyperbelen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

som linja

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1,$$

mens polaren m.h.t. parabelen

$$y^2 = 4cx$$

er linja med ligning

$$y_0y = 2c(x + x_0).$$

Av definisjonene følger nesten umiddelbart:

Setning 5.4. *Et punkt P ligger på sin polare $l(P)$ med hensyn til et kjeglesnitt hvis og bare hvis P ligger på kjeglesnittet og $l(P)$ er tangentlinja til kjeglesnittet i P .*

Bevis. Vi viser dette for en ellipse med ligning

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

De andre tilfellene er helt analoge.

Punktet $P = (x_0, y_0)$ ligger på polaren

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

hvis og bare hvis

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

som betyr at P ligger på kjeglesnittet og polaren er tangentlinja i P . □

Den viktigste egenskapen til pol og polare er

Setning 5.5. *La linja $l = l(P)$ være polaren til punktet P med hensyn til et kjeglesnitt. Da vil polaren $l(Q)$ til et punkt Q på l inneholde punktet P , og omvendt vil polen til ei linje gjennom P ligge på l . Kortere sagt:*

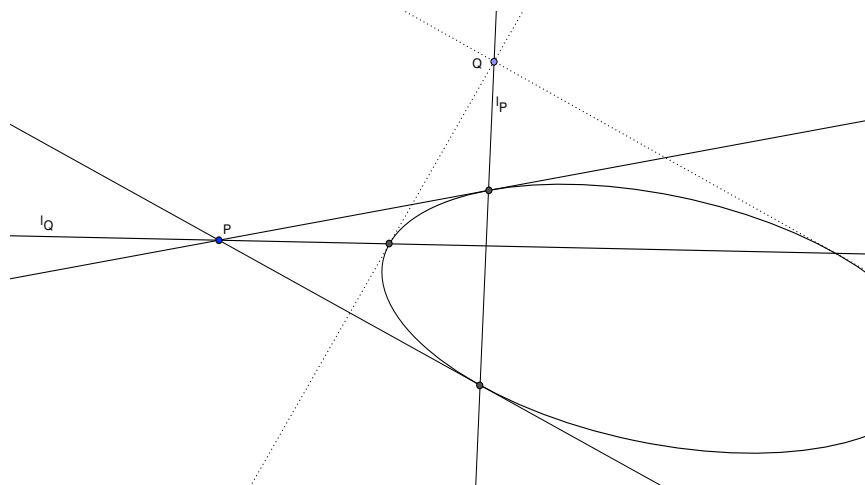
$$Q \in l(P) \quad \text{hvis og bare hvis} \quad P \in l(Q).$$

Bevis. Vi antar først at kjeglesnittet er en ellipse og velger koordinater slik at det har sentrum i origo og store akse langs x -aksen. Da har det ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

mens ligningen til polaren l til et punkt P med koordinater (x_0, y_0) er

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$



Figur 22: Pol og polare

Et punkt $Q = (x_1, y_1)$ ligger på polaren l til P dersom

$$\frac{x_0x_1}{a^2} + \frac{y_0y_1}{b^2} = 1.$$

Denne ligningen er symmetrisk i P og Q . Den sier at P ligger på polaren med ligning

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

til Q hvis og bare hvis Q ligger på polaren til P , som var det vi skulle vise.

Dersom kjeglesnittet er en hyperbel er argumentet helt likt, i ligningene er et fortegn endret. Dersom kjeglesnittet er en parabel, kan vi velge koordinater slik at toppunktet er i origo og x -aksen er symmetriakse. Da har parabellen ligningen $y^2 = 4cx$. Polaren til et punkt $P = (x_0, y_0)$ m.h.t. parabellen har ligningen $y_0y = 2c(x + x_0)$. For et punkt $Q = (x_1, y_1)$ på denne linja er $y_0y_1 = 2c(x_1 + x_0)$ som igjen er symmetrisk i P og Q . Derfor gjelder setningen også for parabler. \square

Dersom punktet P ligger på kjeglesnittet, er polaren tangentlinja i punktet. Vi skal se at selv om punktet P ikke ligger på kjeglesnittet så bestemmer polaren $l(P)$ tangentene til kjeglesnittet som passerer gjennom P . Siden P ikke ligger på kjeglesnittet vet vi av Setning 5.4 at polaren $l(P)$ selv ikke tangere kjeglesnittet. Det betyr at polaren har enten to eller ingen skjæringspunkter med kjeglesnittet. Dersom et punkt Q er et skjæringspunkt mellom

	ellipse	hyperbel	parabel
likning	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 4cx$
brennpunkt	$(\pm c, 0)$	$(\pm c, 0)$	$(c, 0)$
Pythagoreisk relasjon	$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 + b^2 = c^2$	
eksentrisitet	$e = \frac{c}{a} \quad (< 1)$	$e = \frac{c}{a} \quad (> 1)$	
styrelinje(r)	$x = \pm \frac{a}{e}$	$x = \pm \frac{a}{e}$	$x = -c$
pol	(x_0, y_0)	(x_0, y_0)	(x_0, y_0)
polare	$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$	$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$	$yy_0 = 2c(x + x_0)$
asymptoter		$\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$	
trigonometrisk parametrisering	$(a \cos t, b \sin t)$	$(\frac{a}{\cos t}, b \tan t)$	
hyperbolsk parametrisering		$(a \cosh t, b \sinh t)$	

Tabell 3: Kjeglesnitt med akser langs koordinataksene

polaren til P og kjeglesnittet, da er tangenten til kjeglesnittet i punktet Q polaren til Q og inneholder derfor P . Omvendt vil hver tangent til kjeglesnittet som passerer gjennom punktet P ha sitt tangeringspunkt på polaren til P . Derfor er det enten to eller ingen tangenter gjennom punktet P og de eventuelle tangeringspunktene er skjæringspunktene mellom polaren til P og kjeglesnittet. Dette er illustrert i Figur 22.

5.6 Kjeglesnitt med akser langs koordinataksene

I Tabell 3 ovenfor har vi sammenfattet ligninger, brennpunkt, styrelinjer, pol og polare akser for ellipser og hyperbler med sentrum i origo og store/reell akse langs x -aksen, og for parabler med toppunkt i origo og akse langs x -aksen.

5.7 Speilingsegenskaper til kjeglesnitt

I dette avsnittet skal vi både vise speilingsegenskapene til kjeglesnitt og noen praktiske anvendelser av disse.

Setning 5.6. (*Speilingsegenskapen til en ellipse*) Linjene fra et punkt på en ellipse til brennpunktene danner samme vinkel med tangenten til ellipsen i punktet. Det vil si at i et speil med form som en ellipse, vil lys fra det ene brennpunktet bli reflektert mot det andre, og lys utenfra mot det ene brennpunktet vil bli reflektert i retning fra det andre.

Bevis. Vi velger koordinatsystem som tidligere med origo i sentrum, x -akse langs den store akse og brennpunkt i $B = (c, 0)$ og $B' = (-c, 0)$. Det vil si at ligningen til ellipsen er

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

med eksentrisitet $e = \frac{c}{a}$ og $b^2 = a^2 - c^2$. Husk at avstanden fra origo til styrelinjene er $\frac{1}{e^2} \cdot c$ så styrelinjene har ligninger

$$x = \pm \frac{c}{e^2} = \pm \frac{a}{e}.$$

La $P = (p, q)$ være et punkt på ellipsen. Da er avstanden mellom P og styrelinjene henholdsvis $p + \frac{a}{e}$ og $p - \frac{a}{e}$. Forholdet mellom avstandene fra P til brennpunktene B og B' og til de tilhørende styrelinjene er lik eksentrisiteten, så vi får

$$PB' = e(p + \frac{a}{e}) = a + ep$$

og

$$PB = a - ep.$$

Tangenten til ellipsen i punktet P har ligning

$$\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1.$$

Stigningstallet til denne tangenten er

$$-\frac{pb^2}{qa^2},$$

så normalen til denne tangenten gjennom P har stigningstall

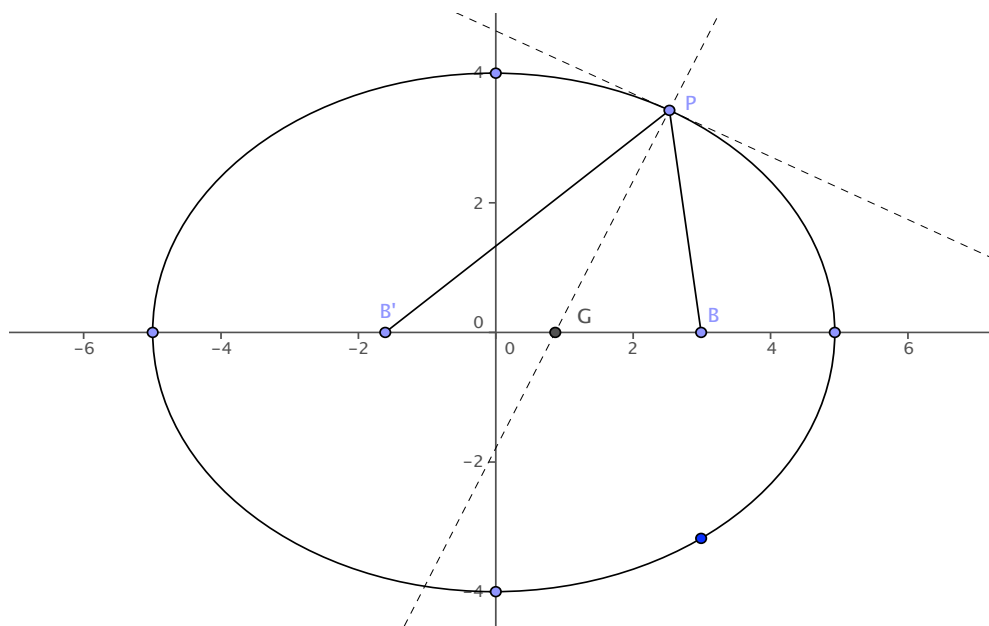
$$\frac{qa^2}{pb^2}$$

og ligning

$$\frac{q}{b^2}(x - p) - \frac{p}{a^2}(y - q) = 0.$$

Denne skjærer x -aksen i punktet

$$G = (p(1 - \frac{b^2}{a^2}), 0) = (e^2 p, 0).$$



Figur 23: Speilingsegenskapen til en ellipse

Dermed får vi

$$B'G = c + e^2p = ea + e^2p = e(a + ep) = eB'P$$

og tilsvarende

$$BG = c - e^2p = ea - e^2p = e(a - ep) = eBP.$$

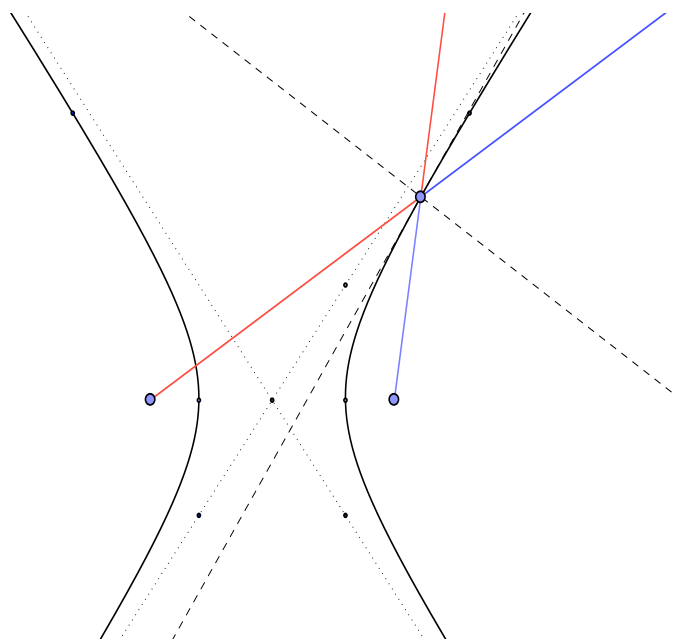
Av setning 4.3 om halveringsvinkler må PG halvere vinkelen mellom PB' og PB så speilingsegenskapen er vist. \square

Setning 5.7. (*Speilingsegenskapen til en hyperbel*) Linjene fra et punkt på en hyperbel til brennpunktene danner samme vinkel med tangenten til hyperbelen i punktet. Det vil si at i et speil formet som en hyperbel, vil lys utenfra mot det ene brennpunktet bli reflektert i retning fra det andre, mens lys fra det ene brennpunktet blir reflektert i retning fra det andre.

Beviset er helt analogt med beviset for ellipsen.

Setning 5.8. (*Speilingsegenskapen til en parabel*) Linjene fra et punkt på parabellen til brennpunktet og parallelt med symmetriaksen danner samme vinkel med tangenten til parabellen i punktet.

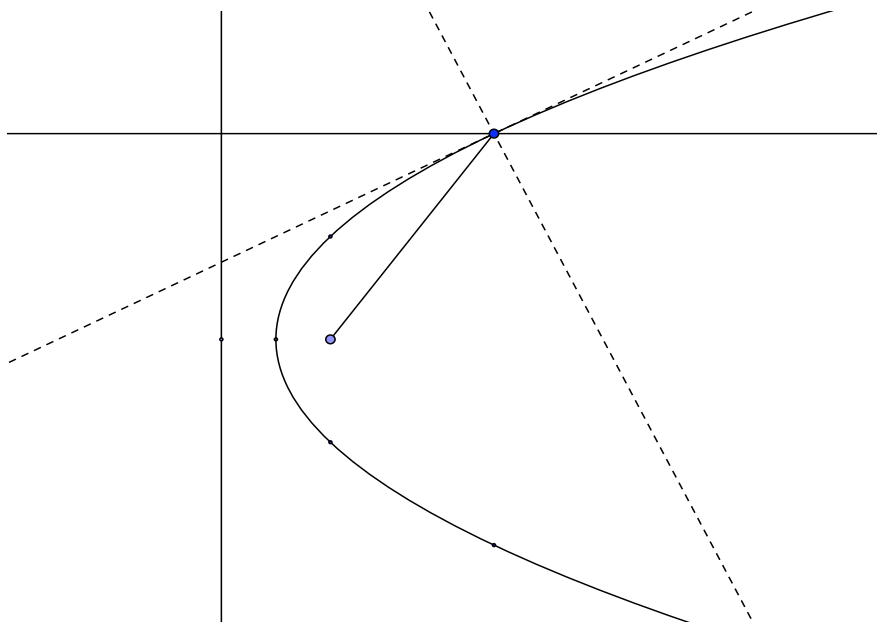
Bevis. Dette er grensetilfellet for ellipsen når det ene brennpunktet går mot uendelig. \square



Figur 24: Speilingsegenskapen til en hyperbel

Disse speilingsegenskapene brukes i:

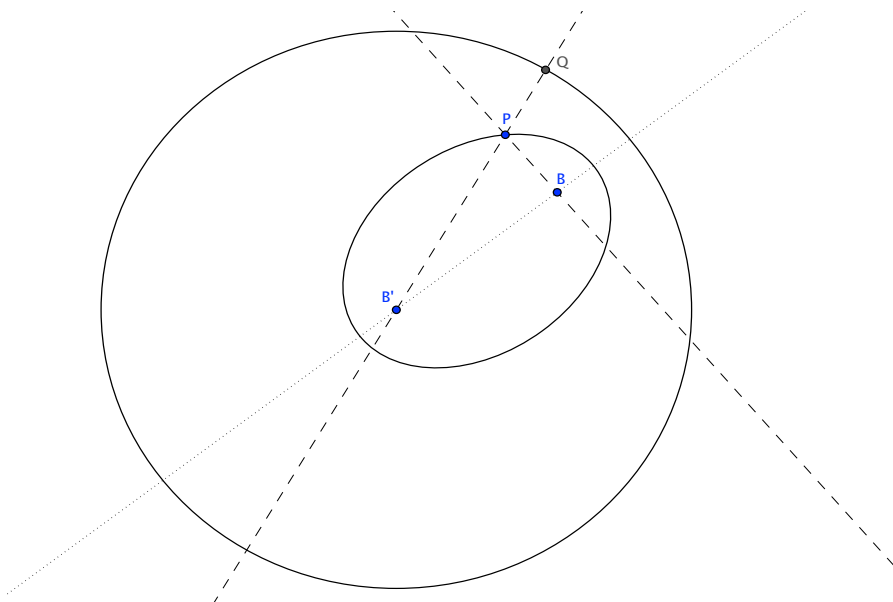
- Parabolantennen for refleksjon av parallelle stråler inn mot en mottaker i brennpunktet.
- Lyskastere med lyskilde i brennpunktet reflekterer lyset i et parabolisk speil til stråler parallelle med aksen.
- Elliptisk refleksjon brukes i medisiner til å knuse nyrestein, ved å sende ut ødeleggende stråler fra ett brennpunkt for å knuse nyrestein i det andre.
- I teleskoper brukes både paraboliske og hyperboliske speil til å konsentrere lyset fra stjernehimmelen inn på en liten skjerm. Det paraboliske speilet har et hull i toppunktet, det reflekterer lyset først mot et hyperboliske speil med samme brennpunkt, deretter reflekteres lyset mot hyperbelens andre brennpunkt like bakenfor toppunktet til det paraboliske speilet. Dette systemet kalles et Cassegrain system.
- Hyperbelen blir brukt i navigasjonssystemet DECCA og det nyere systemet GPS. I begge tilfeller mottar man signaler på bestemte frekvenser fra ulike faste sendestasjoner. Disse er kjente stasjoner på jordoverflaten eller satellitter. Ved måling av faseforskjeller finner en presis differansen mellom avstandene fra egen posisjon til sendestasjonene. Denne differansen angir hvilken hyperbel (eller hyperboloide) med



Figur 25: Speilingsegenskapen til en parabel

sendestasjonene som brennpunkt en ligger på. Gjentar en målingen fra ulike sendestasjoner får en bestemt egen posisjon med stor nøyaktighet.

Kjeglesnitt opptrer også naturlig som bevegelsesbaner bestemt av tyngdekraften: Ellipser er banene til planeter og kometer med sola i det ene brennpunktet. Parabelen er banen til et prosjektil som påvirkes av en konstant kraft (f.eks tyngdekraften).



Figur 26: P har samme avstand til B som til Q

5.8 Flere geometriske egenskaper til kjeglesnitt

I dette avsnittet skal vi finne ulike geometriske steder knyttet til kjeglesnitt med og uten bruk av koordinater. De utvalgte egenskapene er bare noen få blant mange, og de fleste går tilbake til Appolonios. Bevisene som brukes her er valgt med vekt på å få en så stor spredning i metoder som mulig, for å vise nytten av de ulike måtene som kjeglesnittene er presentert på.

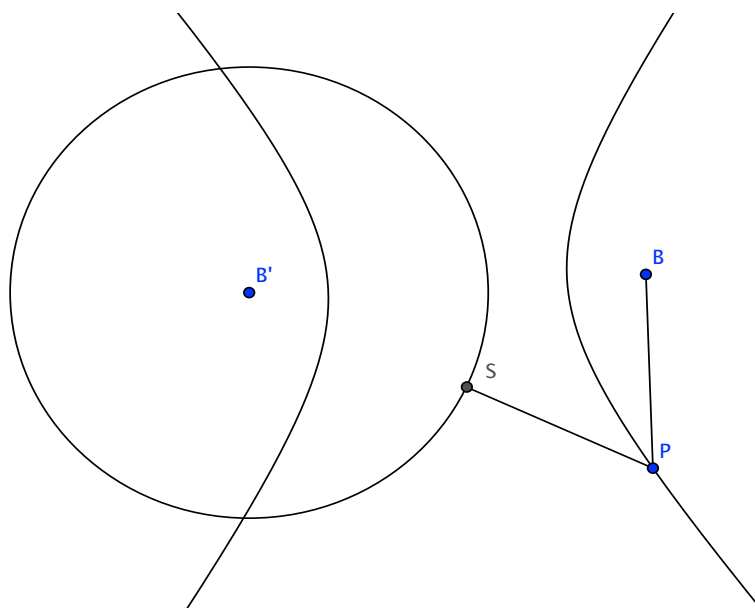
Først skal vi gi en ny karakteristikk av ellipser og hyperbler:

Setning 5.9. *En ellipse er det geometriske stedet for de punktene som har samme avstand til en sirkel som til et gitt punkt inne i sirkelen.*

Bevis. For en ellipse med brennpunkt i B' og B og store akse lik $2a$, la S være sirkelen med sentrum i B' og radius lik $2a$. Da vil ethvert punkt P på ellipsen ha samme avstand til B som til sirkelen S . \square

Setning 5.10. *Den ene greina til en hyperbel er det geometriske stedet for de punktene som har samme avstand til en sirkel som til et gitt punkt utenfor sirkelen.*

Bevis. For en hyperbel med brennpunkter i B' og B og reelle akse lik $2a$, la S være sirkelen med sentrum i B' og radius lik $2a$. Da vil ethvert punkt P på hyperbelgreina nærmest B ha samme avstand til B som til sirkelen S . \square



Figur 27: P har samme avstand til B som til S

5.8.1 Pedalkurver

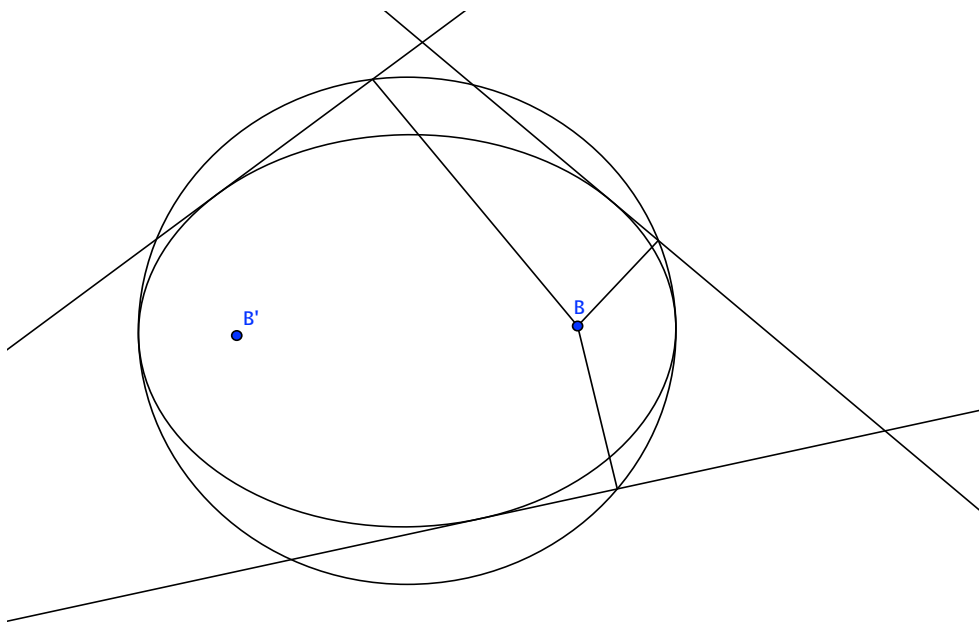
For en kurve i planet som har en tangent i hvert punkt definerer vi **pedalkurven** med hensyn til et punkt S utenfor kurven som *det geometriske stedet for fotpunktet til en normal fra S på en tangent til kurven*. Vi skal vise at pedalkurven til en ellipse med hensyn til et brennpunkt er en sirkel.

Vi kaller brennpunktene til ellipsen, B og B' , lar P være et punkt på ellipsen, og lar Q være skjæringspunktet mellom tangenten i P og normalen gjennom B til tangentlinja.

La videre R være skjæringspunktet mellom linja gjennom PB' og linja gjennom BQ . Se på trekantene $\triangle PQB$ og $\triangle PQR$. Disse har siden PQ felles, som av speilingsegenskapen til ellipsen halverer vinkelen $\angle BPR$. Videre er begge trekantene rettvinklede, så de er kongruente. Dermed er $PR = PB$ og $B'R = 2a$. Sentrum O ligger midt mellom brennpunktene, og Q ligger midt mellom B og R så avstanden mellom sentrum O og Q må være a . Derfor er det søkte geometriske stedet sirkelen med sentrum i sentrum av ellipsen og radius lik den store halvakse. Denne pedalkurven til ellipsen kalles også **storsirkelen** til ellipsen.

5.8.2 Styresirkelen

Dernest vil vi finne *det geometriske stedet for punkter P som er slik at tangentene fra P til en gitt ellipse står normalt på hverandre*.



Figur 28: Pedalkurven mht til B er storsirkelen til ellipsen

Husk fra 5.3 at to linjer med ligninger

$$Ax + By - C = 0 \quad \text{og} \quad A'x + B'y - C' = 0$$

står normalt på hverandre hvis og bare hvis

$$AA' + BB' = 0.$$

Vi velger nå koordinatsystem som tidligere slik at ligningen til ellipsen blir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dersom de to linjene tangerer ellipsen i henholdsvis (p, q) og (p', q') , så er linjene definert av ligningene

$$\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{og} \quad \frac{p'x}{a^2} + \frac{q'y}{b^2} - 1 = 0.$$

Derfor vil tangentene i (p, q) og (p', q') står normalt på hverandre hvis og bare hvis

$$\frac{pp'}{a^4} + \frac{qq'}{b^4} = 0.$$

La nå (x_1, y_1) være et punkt på det søkte geometriske stedet. Da vil polaren til punktet ha ligningen

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

og skjære ellipsen i to punkter (p, q) og (p', q') slik at

$$\frac{pp'}{a^4} + \frac{qq'}{b^4} = 0.$$

Ved å substituere ligningen for polaren inn i ligningen for ellipsen finner vi uttrykk for pp' og qq' : Først multipliserer vi ligningen for ellipsen med y_1^2/b^2 og får

$$\frac{y_1^2 x^2}{a^2 b^2} + \frac{y_1^2 y^2}{b^4} = \frac{y_1^2}{b^2},$$

deretter setter vi inn

$$\frac{y_1 y}{b^2} = 1 - \frac{x_1 x}{a^2}$$

og får

$$\frac{y_1^2 x^2}{a^2 b^2} + \left(1 - \frac{x_1 x}{a^2}\right)^2 = \frac{y_1^2}{b^2}.$$

Dette er en andregradsligning i x hvis to røtter er p og p' . Derfor er produktet pp' lik konstantleddet i ligningen når denne er normalisert med 1 som koeffisient foran x^2 . Litt regning gir

$$\left(\frac{y_1^2}{a^2 b^2} + \frac{x_1^2}{a^4}\right) x^2 - \frac{2x_1}{a^2} x + 1 - \frac{y_1^2}{b^2} = 0$$

så

$$pp' = \frac{1 - \frac{y_1^2}{b^2}}{\frac{y_1^2}{a^2 b^2} + \frac{x_1^2}{a^4}} = \frac{a^2 - \frac{a^2 y_1^2}{b^2}}{\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2}}.$$

Tilsvarende får vi

$$qq' = \frac{b^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2}}{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}}.$$

Derfor vil tangentene gjennom (x_1, y_1) stå normalt på hverandre hvis og bare hvis

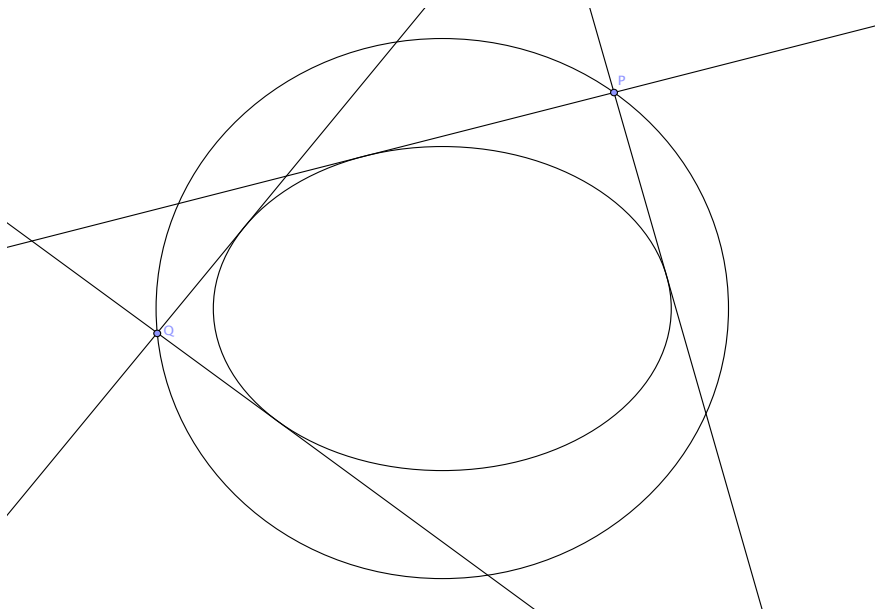
$$\frac{pp'}{a^4} + \frac{qq'}{b^4} = \frac{1}{a^4} \frac{a^2 - \frac{a^2 y_1^2}{b^2}}{\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2}} + \frac{1}{b^4} \frac{b^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2}}{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}} = 0.$$

Denne ligningen kan vi redusere til

$$\frac{1}{a^4} \left(a^2 - \frac{a^2 y_1^2}{b^2}\right) + \frac{1}{b^4} \left(b^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2}\right) = 0$$

som ved multiplikasjon med $a^2 b^2$ blir til

$$(b^2 - y_1^2) + (a^2 - x_1^2) = 0,$$



Figur 29: Styresirkelen til ellipsen

det vil si

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2.$$

Det søkte geometriske sted er altså en sirkel med sentrum i sentrum til ellipsen. Denne sirkelen kalles **styresirkelen**.

5.8.3 Diametre og parallelle korder

Vi skal bruke den trigonometriske parametriseringen til å vise

Setning 5.11. *Det geometriske stedet for midtpunktet til parallelle korder i en ellipse er en diameter.*

Bevis. Med trigonometrisk parametrisering vil midtpunktet på korden mellom punkter med parameter t og u ha koordinater

$$x = \frac{1}{2}(a \cos t + a \cos u) = a \cos \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$$

og

$$y = \frac{1}{2}(b \sin t + b \sin u) = b \sin \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}.$$

(De trigonometriske formlene som er brukt her kan enklest utledes av formlene for sinus og cosinus til en sum og en differens av vinkler).

Stigningstallet til korden er

$$m = \frac{b \sin t - b \sin u}{a \cos t - a \cos u} = \frac{2b \cos \frac{t+u}{2} \sin \frac{t-u}{2}}{-2a \sin \frac{t+u}{2} \sin \frac{t-u}{2}}$$

$$= \frac{-b \cos \frac{t+u}{2}}{a \sin \frac{t+u}{2}}$$

mens altså

$$\frac{x}{y} = \frac{a \cos \frac{t+u}{2}}{b \sin \frac{t+u}{2}}.$$

Derfor er

$$\frac{bx}{ay} = \frac{-am}{b}$$

eller

$$b^2x + a^2my = 0.$$

Når kordene er parallelle, så er stigningstallet m konstant. Denne ligningen definerer derfor ei linje, og den er det geometriske stedet vi søker. Denne linja går gjennom sentrum i ellipsen, så den er en diameter.

Et alternativt bevis bruker forholdet mellom koeffisientene i en andregradsligning og røttene i ligningen: Dersom x_1 og x_2 er røttene i ligningen

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0$$

så er

$$x_1 + x_2 = -\alpha.$$

Vi gjennomfører beviset for ellipser. Kordene til ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

som er parallelle med y -aksen har midtpunkt på x -aksen. Denne definerer en diameter i ellipsen. Parallelle korder som ikke er parallelle med y -aksen ligger på linjer med ligning $y = kx + m$ med samme k , men varierende m for ulike korder. Endepunktene til kordene er skjæringspunktene til disse linjene med ellipsen, og x -koordinatene til disse skjæringspunktene er røttene i ligningen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + m)^2}{b^2} - 1 = 0$$

som med koeffisient 1 foran x^2 har formen

$$x^2 + \frac{2kma^2}{k^2a^2 + b^2}x + \frac{a^2(m^2 - b^2)}{k^2a^2 + b^2} - 1 = 0.$$

Summen av røttene er derfor

$$\frac{2kma^2}{k^2a^2 + b^2},$$

så midtpunktet (x_0, y_0) på korden har x -koordinat

$$x_0 = \frac{kma^2}{k^2a^2 + b^2}.$$

y -koordinaten er

$$y_0 = kx_0 + m = \frac{k^2ma^2}{k^2a^2 + b^2} + m = \frac{2k^2ma^2 + mb^2}{k^2a^2 + b^2}$$

så

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{(2k^2ma^2 + mb^2)(k^2a^2 + b^2)}{(k^2a^2 + b^2)(k^2ma^2)} = \frac{2k^2a^2 + b^2}{k^2a^2}.$$

Siden forholdet $\frac{y_0}{x_0}$ er uavhengig av konstantleddet m vil midtpunktet (x_0, y_0) av koordene med stigningstall k ligge på linja med ligning

$$y = \frac{2k^2a^2 + b^2}{k^2a^2}x.$$

Denne linja går gjennom origo, sentrum av ellipsen, så midtpunktet av de parallelle kordene ligger på en diameter.

□

Setning 5.12. *Det geometriske stedet for midtpunktet til parallelle korder til ei grein av en hyperbel ligger på en sekant til hyperbelen som går gjennom sentrum.*

Setning 5.13. *Det geometriske stedet for midtpunktet til parallelle korder i en parabel ligger på ei linje som er parallell med symmetriaksen.*

Beviset for disse setningene er helt analogt med beviset for ellipsen. For en hyperbel skal vi bruke dette resultatet til å vise følgende egenskap:

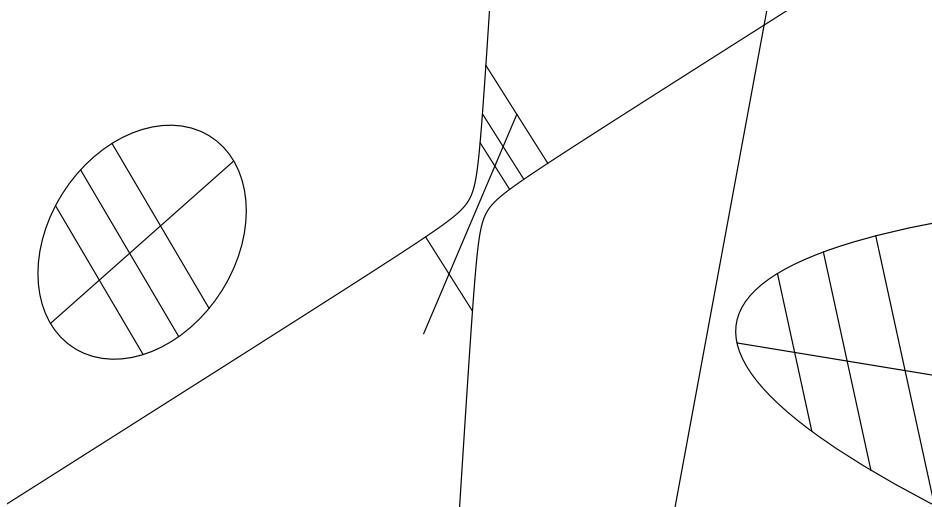
Setning 5.14. *Dersom ei linje skjærer ei grein av en hyperbel i to punkter, så vil de linjestykkene på linja som ligger mellom hyperbelen og dens asymptoter være like store.*

Bevis. Vi viser dette ved å se på asymptotene som en degenerert hyperbel. Husk at asymptotene til hyperbelen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

er bestemt av ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$



Figur 30: Midtpunktet til parallelle korder ligger på en diameter

Generelt vil ligningen

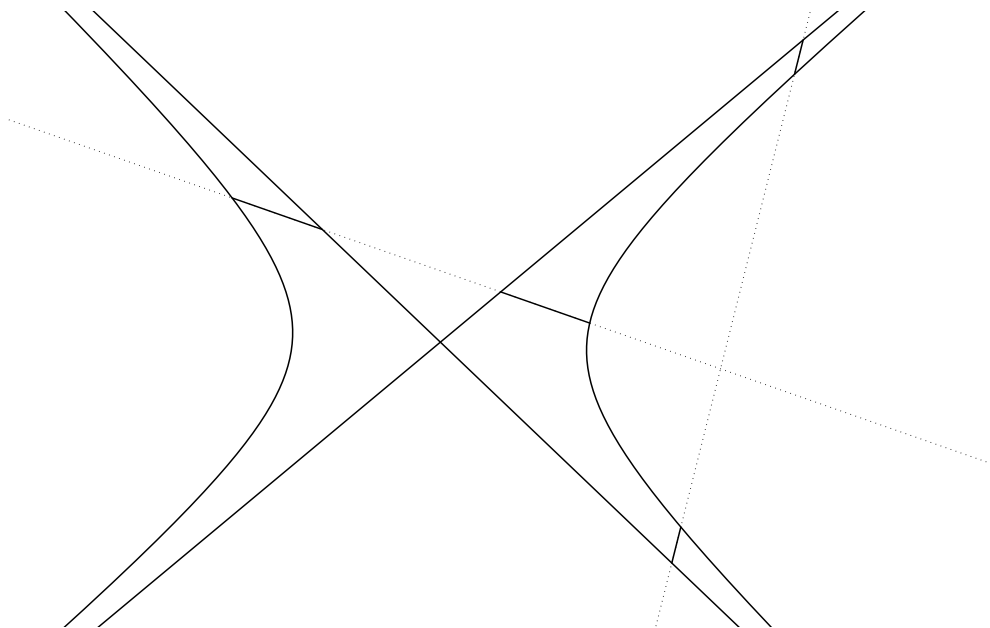
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda$$

definere en hyperbel for hver $\lambda \neq 0$ med de samme asymptotene. Når λ går mot 0 vil aksene til hyperbelen nærme seg 0 også. Dermed er asymptotene en naturlig grensekurve for disse hyperblene. Spesielt vil setningen over om det geometriske stedet for midtpunktet til parallelle korder til ei grein av en hyperbel gjelde for alle hyperblene i denne familien samtidig. Midtpunktet for parallelle korder vil ligge på ei og samme linje gjennom sentrum for alle disse hyperblene. Og sentrum er skjæringspunktet origo mellom asymptotene.

For ei generell linje l som skjærer ei hyperbelgrein i to punkter trekker vi først linja k gjennom sentrum til hyperbelen og midtpunktet til denne korden. Da vil linja k også halvere den delen av linja l som ligger mellom asymptotene. Derfor må også linjestykkene mellom hyperbelen og asymptotene være like store. \square

5.8.4 Kjeglesnitt med felles brennpunkter

For kjeglesnitt med felles brennpunkter er det klart fra sum- og differensdefinisjonene at to ellipser eller to hyperbler ikke vil ha felles punkter. Derimot vil en ellipse og en hyperbel alltid ha 4 skjæringspunkter. Vi vil vise at tangentene til de to kjeglesnittene i skjæringspunktet står normalt på hverandre.



Figur 31: Linjestykkene begrenset av hyperbelen og dens asymptoter er like store

Vi starter med to kvadrater $0 < b^2 < a^2$ og $c^2 = a^2 - b^2$. Da vet vi at

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

er ligningen til en ellipse med brennpunkter i $(\pm c, 0)$ og med a og b som store og lille halvakse. En hyperbel med brennpunkter i $(\pm c, 0)$ vet vi har ligningen

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1$$

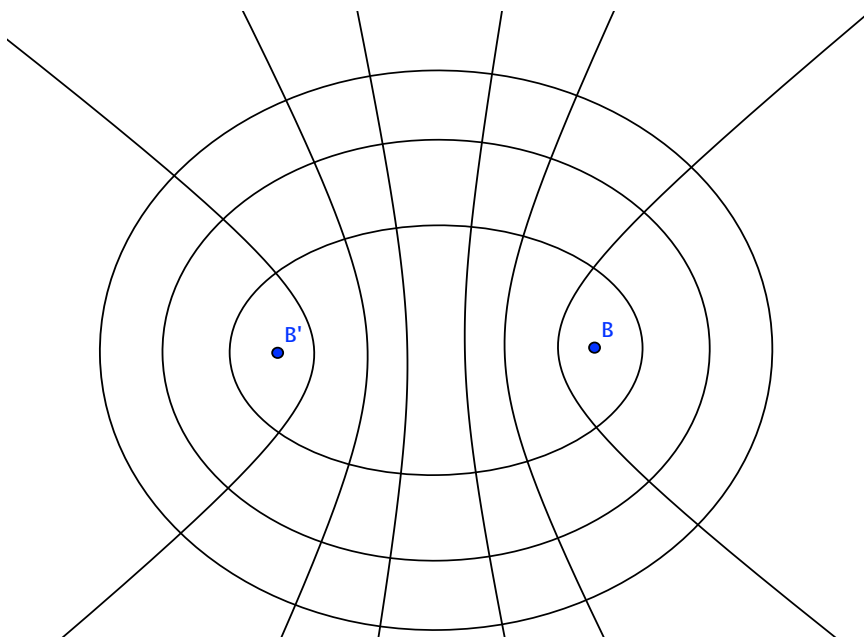
med $c^2 = a_1^2 + b_1^2$.

Legg nå merke til at vi kan skrive $a_1^2 = a^2 - \lambda$ og $b_1^2 = \lambda - b^2$, med $b^2 < \lambda < a^2$. Faktisk får vi med ligningen

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1$$

alle kjeglesnitt med brennpunkt i $(\pm c, 0)$, når $\lambda < a^2$. Vi får ellipser når $\lambda < b^2$ og hyperbler når $b^2 < \lambda < a^2$. Anta nå at λ_1 og λ_2 er to verdier slik at de tilsvarende kjeglesnittene har et skjæringspunkt (p, q) . Da vet vi at tangentlinjene gjennom (p, q) har ligningene

$$\frac{px}{a^2 - \lambda_1} + \frac{qy}{b^2 - \lambda_1} = 1$$



Figur 32: Kjeglesnitt med felles brennpunkt står normalt på hverandre

og

$$\frac{px}{a^2 - \lambda_2} + \frac{qy}{b^2 - \lambda_2} = 1.$$

Husk fra 5.3 at disse linjene står normalt på hverandre hvis og bare hvis

$$\frac{p^2}{(a^2 - \lambda_1)(a^2 - \lambda_2)} + \frac{q^2}{(b^2 - \lambda_1)(b^2 - \lambda_2)} = 0.$$

Men setter vi (p, q) inn i ligningene for de to kjeglesnittene får vi

$$\frac{p^2}{a^2 - \lambda_1} + \frac{q^2}{b^2 - \lambda_1} = 1 \quad \text{og} \quad \frac{p^2}{a^2 - \lambda_2} + \frac{q^2}{b^2 - \lambda_2} = 1.$$

Ved subtraksjon mellom de to venstresidene får vi

$$\frac{p^2(a^2 - \lambda_2 - (a^2 - \lambda_1))}{(a^2 - \lambda_1)(a^2 - \lambda_2)} + \frac{q^2(b^2 - \lambda_2 - (b^2 - \lambda_1))}{(b^2 - \lambda_1)(b^2 - \lambda_2)} = 0$$

som vi kan redusere til

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \left(\frac{p^2}{(a^2 - \lambda_1)(a^2 - \lambda_2)} + \frac{q^2}{(b^2 - \lambda_1)(b^2 - \lambda_2)} \right) = 0.$$

Men dette gir presis den relasjonen vi vil ha når λ_1 og λ_2 er forskjellige.

5.9 Flere geometriske steder

Geometriske steder i planet kan en noen ganger finne ved smarte syntetiske argumenter, slik vi har sett i de forrige underkapitlene. Med koordinater har en imidlertid en generell metode som ofte fører fram. Vi skal vise dette i noen eksempler, og så overlate flere eksempler til oppgavene. Eksempelene er alle modifiserte utgaver av realartiumsoppgaver fra perioden 1900-1975.

Eksempel 5.15. For hver $t \in \mathbb{R}$ er

$$(1+t)x^2 + (1-t)y^2 = 36$$

ligningen til en kurve C_t som er symmetrisk om x - og y -aksen. Først skal vi undersøke hva slags kurve C_t er når t varierer. Ligningen har formen til ligningen til en ellipse eller hyperbel med akser langs koordinataksene og sentrum i origo. Hvis koeffisientene $1+t$ og $1-t$ begge er positive, det vil si $-1 < t < 1$, så er C_t en ellipse. Dersom koeffisientene har forskjellig fortegn, det vil si $t < -1$ eller $t > 1$, så er C_t en hyperbel. Når $t = \pm 1$ er C_t to parallelle linjer.

Videre skal vi for hver kurve C_t finne en tangent med stigningstall 1 og finne det geometriske stedet til tangeringspunktet til denne tangenten når t varierer.

Ligningen til tangenten i et punkt (a, b) på C_t er

$$(1+t)ax + (1-t)by = 36$$

Stigningstallet til denne tangenten er 1, dersom $(1+t)a = -(1-t)b$. Tangeringspunktet oppfyller derfor ligningene

$$(1+t)a + (1-t)b = 0 \quad \text{og} \quad (1+t)a^2 + (1-t)b^2 = 36.$$

Fra den første ligningen får vi

$$t = \frac{-(a+b)}{(a-b)}$$

som innsatt i den andre ligningen gir

$$a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \frac{-(a+b)}{(a-b)} = 36,$$

det vil si

$$a^2 + b^2 - (a+b)^2 = 2ab = 36.$$

Så det geometriske stedet for tangeringspunktet har ligning

$$xy = 18$$

og er en hyperbel.

Eksempel 5.16. Punktet $A = (a, 0)$ og punkt $B = (0, b)$ er gitt. La C_A være sirkelen gjennom origo som har sentrum i A , og la C_B være sirkelen gjennom origo som har sentrum i B . La l være en linje gjennom origo, og la A' og B' være de andre skjæringspunktene mellom linja l og sirklene C_A og C_B . La P være midtpunktet på linjestykket $A'B'$. Vi skal finne det geometriske stedet for P når l varierer og vise at A, B og origo ligger på dette geometriske stedet.

Ligningene til C_A og C_B er

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2 \quad \text{og} \quad x^2 + (y - b)^2 = b^2$$

mens ligningen til l er $kx - y = 0$ eller $x = 0$. Punktet A' har koordinater bestemt av ligningene $y_A = kx_A$ og $x_A^2 - 2ax_A + y_A^2 = 0$, så $(1 + k^2)x_A^2 - 2ax_A = 0$ og derfor

$$x_A = \frac{2a}{1 + k^2}, y_A = \frac{2ak}{1 + k^2}.$$

Tilsvarende får vi punkt B' sine koordinater

$$x_B = \frac{2bk}{1 + k^2}, y_B = \frac{2bk^2}{1 + k^2}.$$

Midtpunktet P på $A'B'$ har derfor koordinater

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{a + bk}{1 + k^2}, y_P = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{ak + bk^2}{1 + k^2} = kx_P$$

Så (x_P, y_P) oppfyller ligningen

$$x_P = \frac{a + b \frac{y_P}{x_P}}{1 + \left(\frac{y_P}{x_P}\right)^2},$$

som etter multiplikasjon med $x_P(1 + (\frac{y_P}{x_P})^2)$ kan ordnes til

$$(x_P - \frac{a}{2})^2 + (y_P - \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}.$$

Det betyr at det geometriske stedet er en sirkel gjennom origo, som også går gjennom A og B .

5.10 Oppgaver

1. Finn sentrum og halvaksler til kjeglesnittet med ligningen $25x^2 + 9y^2 - 18x + 2y = 0$.
2. Finn asymptoter og eksentrisitet til hyperbelen med ligning $9x^2 - 4y^2 - 18x + 4y - 6 = 0$.
3. Finn ligningen og symmetriaksene til det geometriske stedet for punkter som har dobbelt så stor avstand til punktet $(1, 2)$ som til linja $y = 5$.

4. Finn brennpunkt og styrelinje til parabelen $y = x^2$. Finn det geometriske stedet for midtpunktet til kordene til parabelen som går gjennom brennpunktet.
5. La A være et punkt på parabelen $x = y^2$, og la B være det andre punktet på parabelen som har samme x -koordinat som A . La P være skjæringspunktet mellom tangentlinja til parabelen i A og linja gjennom origo og B . Finn ligningen til det geometriske stedet for P når A gjennomløper parabelen.
6. Gitt to rette linjer definert av ligningene

$$x + 3y + 4 = 0 \quad \text{og} \quad x + 3y - 4 = 0.$$

La l være ei linje gjennom origo som skjærer den første linja i A og den andre i B . Trekk ei linje gjennom A parallell med y -aksen og gjennom B parallell med x -aksen. Finn det geometriske stedet for skjæringspunktet mellom disse parallellene når l dreier seg om origo.

7. En sirkel med sentrum i origo skjærer x -aksen i $A = (-r, 0)$ og $B = (r, 0)$. La M være midtpunktet på normalen fra et punkt P på sirkelen på x -aksen. Finn det geometriske stedet for skjæringspunktet mellom AP og BM når P beveger seg på sirkelen.
8. Gitt ellipsen definert av ligningen

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

der $a > b$ og punktet $M = (m, 0)$. Gjennom M trekker vi ei linje L som skjærer ellipsen i punktene P og Q . Finn ligningen til det geometriske stedet for midtpunktet av korden PQ når l dreier seg om M .

9. I parabelen $y^2 = 2px$ er det dratt en korde gjennom brennpunktet med stigningstall k . Korden er diameter i en sirkel. Finn ligningen til denne sirkelen og vis at den tangerer parabelens styrelinje. Finn så ligningen til det geometriske stedet for midtpunktet til korden når k varierer.
10. Gjennom et punkt $(2, 4)$ utenfor koordinataksene trekkes ei linje som skjærer koordinataksene i punktene A og B . La C være midtpunktet på linjestykket AB . Finn det geometriske stedet for punktet C når linja dreier seg om punktet $(2, 4)$.
11. Gitt to linjer som står normalt på hverandre. Ei tredje bevegelig linje flytter seg slik at den sammen med de to faste linjene avgrenser en trekant med konstant areal. Finn det geometriske stedet for midtpunktet av hypotenusen til denne trekanten.
12. Gitt parabelen $y^2 = 2x$ og punktet $A = (a, 0)$. La F være parabelens brennpunkt og la S være et punkt på parabelen. Finn ligningen til linja l_A gjennom A som er parallell med FS . Finn ligningen til tangenten til parabelen i S og til normalen l_S til denne tangenten i S . La P være skjæringspunktet mellom l_A og l_S . Finn det geometriske stedet for P når S gjennomløper parabelen. Hvordan varierer dette geometriske stedet når A gjennomløper x -aksen?

13. Det geometriske stedet for midtpunktet til parallelle korder til ei grein av en hyperbel ligger på en sekant til hyperbelen som går gjennom sentrum. Vis dette.
14. Det geometriske stedet for midtpunktet til parallelle korder i en parabel er ei linje som er parallell med symmetriaksen. Vis dette.
15. Stigningstallet til en rekke parallelle korder til parabellen $y^2 = 2px$ er k . Finn ligningen til diameteren gjennom midtpunktet av disse kordene.
16. Gitt parabellen $y^2 = 4x$ med brennpunkt F og et punkt $Q = (-2, 4)$ utenfor parabellen. La l_Q være ei linje gjennom Q som skjærer parabellen i to punkter, A og B , og la l_d være diameteren til parabellen gjennom midtpunktet til korden AB . Diameteren l_d og styrelinja til parabellen skjærer hverandre i punktet C . La P være skjæringspunktet mellom linjene gjennom CF og QA . Finn det geometriske stedet for P når l_Q varierer, og vis at både F og Q ligger på dette geometriske stedet.
17. Finn ligningen til en generell sirkel i planet. Hvor mange punkter trengs for å bestemme en sirkel?
18. Finn ligningen til en hyperbel med gitte asymptoter symmetrisk om aksene. Hvor mange punkter trengs for å bestemme en hyperbel med disse asymptotene?
19. Dersom alle sidene i en trekant tangerer en parabel, så går den omskrevne sirkelen til trekanten gjennom brennpunktet til parabellen. Vis dette.
20. Vis at polaren til et brennpunkt er den tilhørende styrelinja til et kjeglesnitt.
21. Vis at dersom et punkt ligger på samme side av et kjeglesnittet som et brennpunkt til kjeglesnittet, så fins det ingen tangenter til kjeglesnittet som passerer gjennom punktet.
22. Begrunn hvorfor en ellipse kan tegnes ved å holde en snor bundet i løkke stram rundt to faste stifter og en bevegelig blyant. Ved å bevege blyanten tegner den en ellipse med brennpunkt i de to faste stiftene. Bruk denne tegnemåten til å vise speilingsegenskapen til ellipsen ved å tenke deg at figuren holdes loddrett med blyanten erstattet med et lodd slik at ellipsen tangerer en vannrett bordplate.
23. I et rektangel, kall midtpunktene på de lengste sidene for X og Y . Del halve kortsidene i et like antall like store deler, og del hver halvdel av midtnormalen til XY i like mange like store deler. Vis at linjene gjennom X og delingspunktene på midtnormalen og linjene gjennom Y gjennom tilsvarende delingspunkter på kortsidene skjærer hverandre på en ellipse hvis akser er midtnormalene i rektangelet.
24. * Start med en sirkulært papir med et gitt fast punkt inne i sirkelen. Fold papiret slik at den brettede periferien passerer gjennom det faste punktet. Gjenta brettingen fra flere kanter. Vis at de brettede kantene vil være tangenter til en ellipse.

25. Klipp ut en trekant $\triangle ABC$. Tegn to linjer som skjærer hverandre. Beveg nå trekanten mens et hjørne ligger på den ene linja og et annet ligger på den andre linja. Vis at det tredje hjørnet vil tegne en ellipse. (Denne metoden ble oppdaget av Leonardo da Vinci).
26. Fest to stifter og en blyant på en linjal. La linjalen bevege seg mens stiftene følger hver sin rette linje som står normalt på hverandre. Vis at blyanten vil tegne en ellipse.
27. Hold den ene enden av en linjal fast, og fest en snor i den andre enden av linjalen og i et annet fast punkt i planet. Hold snoren stram rundt en blyant som kan bevege seg langs linjalen. Vis at ved å rotere linjalen vil blyanten tegne en del av en hyperbel med et brennpunkt i det faste punktet utenfor linjalen.
28. * Tegn en sirkel og et punkt F utenfor sirkelen. Trekk linjer gjennom F som skjærer sirkelen. Tegn normalene til disse linjene gjennom skjæringspunktene med sirkelen. Vis at disse vil tangere en hyperbel med brennpunkt i F .
29. * Tegn to linjer som skjærer hverandre. Merk av like mange punkter på hver linje fra skjæringspunktet og utover, slik intervallene mellom punktene alle er like store. Nummerer punktene i omvendt rekkefølge på de to linjene og trekk linjene mellom punkter med samme nummer. Vis at disse linjene vil tangere en parabel.
30. * Klipp ut en rettvinklet likebent trekant. Merk av et fast punkt og ei fast linje i planet. La hypotenusen til trekanten passere gjennom det faste punktet og la det motsatte hjørnet ligge på den faste linja. Vis at katetene vil være tangenter til en parabel med brennpunkt i det faste punktet og styrelinje langs den faste linja.
31. *I en trekant kalles skjæringspunktet mellom høydene for ortosenteret. Vis at en rettvinklet hyperbel som passerer gjennom hjørnene til trekanten og ortosenteret har sentrum på nippunktsirkelen til trekanten.

6 Projektiv plangeometri

I det siste kapittelet skal vi gjøre et begrepsmessig sprang til projektiv geometri. Først, skal vi gi en modell for det projektive planet, og vise noen grunnleggende setninger i denne modellen. I det neste avsnittet vil definere koordinater for det projektive plan. Disse vil så gi et rikere tilfang av metoder i denne geometrien.

De linjene og planene som vi har brukt så langt kalles ofte **affine** linjer og plan. Ei affin linje, et affint plan og affint rom er karakterisert ved at hvert punkt er bestemt av henholdsvis en, to og tre koordinater. I vår modell for det projektive planet er dette en utvidelse av det affine planet ved å legge til punkter i det uendelig fjerne. I projektiv geometri blir ofte setninger og resonnementer enklere selv om begrepene i første omgang kan være litt vanskelige å få tak på. Spesielt skal vi bruke projektiv geometri til å vise Pascals setning for kjeglesnitt.

Før vi definerer det projektive planet, definerer vi den projektive linja. Da starter vi med et punkt O i et affint plan og definerer punktene på **den projektive linja** som linjene gjennom O i det affine planet. Dersom l er ei affin linje i planet som ikke går gjennom O , kan vi identifisere alle linjer gjennom O som skjærer l med sitt skjæringspunkt på l . På den måten er det en *én til én* korrespondanse mellom punktene på linja l og alle linjene gjennom O unntatt den linja gjennom O som er parallell med l . Siden en kan tenke seg at to parallelle linjer i planet skjærer hverandre i det uendelig fjerne, sier vi at en får den projektive linja fra ei affin linje ved å legge til et punkt i det uendelige.

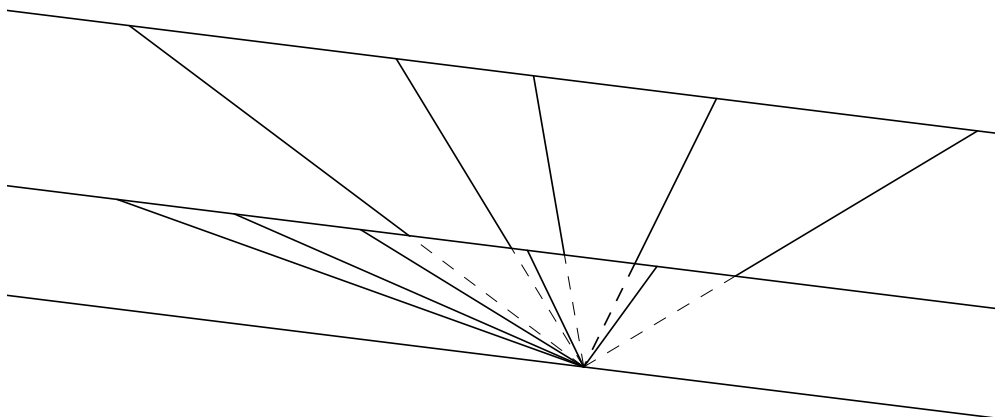
For å definere det projektive planet starter vi med et punkt O i det affine rommet. Punktene i **det projektive planet** definerer vi som linjene i rommet gjennom punktet O . Et plan gjennom O definerer ei linje i det projektive rommet; punktene på denne linja er alle linjene i planet som går gjennom O , dermed er ei linje i det projektive planet ei projektiv linje.

Dersom Π er et affint plan i rommet som ikke går gjennom O , kan vi identifisere alle linjer gjennom O som skjærer dette planet med sitt skjæringspunkt med planet. Dermed er det en *én til én* korrespondanse mellom punkter i det affine planet Π og linjer gjennom O som ikke er parallelle med planet.

De linjene som er parallelle med planet Π ligger alle i planet gjennom O som er parallelt med Π , så disse danner ei projektiv linje. Derfor kan vi si at vi får det projektive planet ved å legge ei projektiv linje i det uendelig fjerne til et affint plan.

Siden to plan gjennom et punkt i rommet alltid har ei felles linje (gjennom punktet), ser vi at to projektive linjer i det projektive planet alltid har et felles projektivt punkt, d.v.s. et skjæringspunkt. For to parallelle affine linjer i det affine planet Π finner en skjæringspunktet i den projektive utvidelsen av Π på den uendelig fjerne linja: Gjennom de to parallelle linjene er det nemlig to plan gjennom O . Den projektive utvidelsen av de parallelle linjene er de projektive linjene definert av linjene gjennom O i disse to planene. Disse planene skjærer hverandre langs ei linje som er parallell med Π . Denne linja representerer skjæringspunktet mellom de to projektive linjene i det uendelig fjerne.

I det projektive planet vil en rekke av grensetilfellene for f. eks. Menelaos' og Cevas setninger kunne formuleres på en enkel måte. Vi trenger bare å bestemme verdien til



Figur 33: Skjæringspunktet mellom to parallelle linjer

forholdet som det uendelig fjerne punkt deler to andre punkt på ei projektiv linje i. La A , B og P være tre forskjellige punkt på den linja, og la P gå mot uendelig. Da vil forholdet

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$

for det første være negativt siden P ligger utenfor linjestykket AB . Videre vil differansen $AP - PB = AB$ bli liten i forhold til lengdene AP og PB , derfor setter vi forholdet

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = -1$$

når P er det uendelig fjerne punkt. Med denne definisjonen kan vi formulere de plangeometriske setningene fra kapittel 4 også for det projektive planet.

Setning 6.1. *Et punkt P på den projektive linja gjennom AB er entydig bestemt av delingsforholdet $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$.*

Bevis. I forhold til beviset for den analoge setningen i kapittel 4 gjenstår det å konstatere at

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = -1$$

hvis og bare hvis P er det uendelig fjerne punkt på linja. □

For en trekant $\triangle ABC$ i det projektive planet definerer vi Menelaos-punkter som punkter på de projektive linjene gjennom sidekantene som ikke faller sammen med noen av hjørnene.

Setning 6.2. (*Menelaos*) Tre Menelaos-punkter D, E, F for sidene

$$BC, CA, AB$$

til trekanten $\triangle ABC$ i det projektive planet er kollineære, det vil si ligger på samme projektive linje, hvis og bare hvis

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1.$$

Beviset er helt analogt med beviset i kapittel 4.

Legg merke til at dersom linja gjennom DE er parallell med linja gjennom AB så følger det av setningen at F er det uendelig fjerne punktet på linja gjennom AB . Dermed omfatter denne setningen for det projektive planet grensetilfeller for den opprinnelige setningen.

Ei Ceva-linje til en trekant i det projektive planet definerer vi som ei projektiv linje gjennom nøyaktig ett hjørne i trekanten. Vi identifiserer ei Ceva-linje med hjørnet og skjæringspunktet mellom linja og linja gjennom den motsatte siden i trekanten. Vi får da

Setning 6.3. (*Ceva*) Tre Ceva-linjer AD, BE, CF til trekanten $\triangle ABC$ i det projektive planet er konkurrente, d.v.s. møtes i et felles punkt hvis og bare hvis

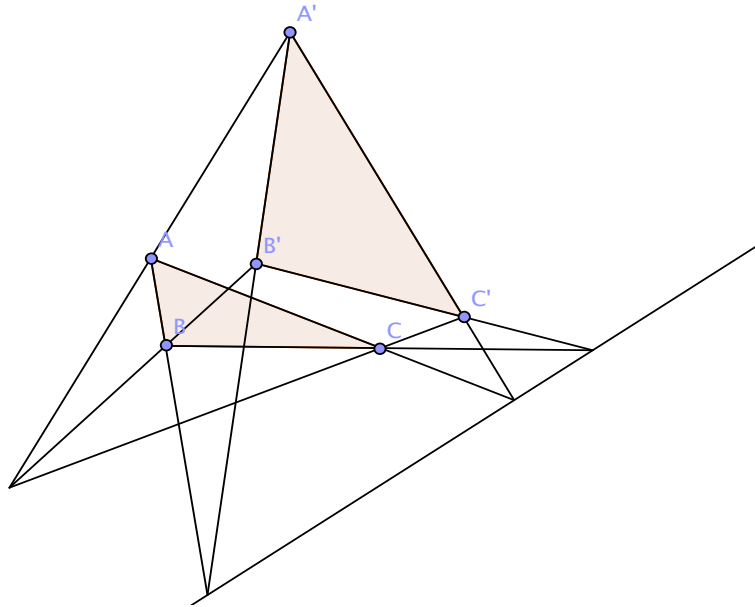
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$

Her er beviset nøyaktig som i kapittel 4. Legg merke til at spesialtilfellet med parallelle linjer nå er inkludert i denne formuleringen, fordi dette tilfellet jo er det tilfellet at linjene skjærer hverandre i det uendelig fjerne.

Med disse setningene kunne vi ha vist den neste setningen:

Setning 6.4. (*Desargues*) Dersom linjene gjennom AA', BB' og CC' i de to trekantene $\triangle ABC$ og $\triangle A'B'C'$ er konkurrente, så er skjæringspunktene mellom linjene gjennom AB og $A'B'$, AC og $A'C'$, BC og $B'C'$ kollineære.

Bevis. I stedet for å bruke Menelaos' og Cevas setninger vil vi føre et mer geometrisk resonnement. I beskrivelsen av det projektive planet, som linjene gjennom et punkt O i rommet, brukte vi et plan Π som ikke går gjennom O til vise hvordan en kan identifisere alle punktene i det projektive planet utenom ei projektiv linje med alle punktene i et affint plan. Ved passende valg av det affine planet Π gjør vi setningen enklere. Først ser vi på figuren nedenfor hvordan trekantene ser ut i et generelt affint plan: P er skjæringspunktet mellom linjene AA', BB' og CC' , mens l er linja gjennom skjæringspunktene mellom linjene gjennom AB og $A'B'$, AC og $A'C'$, og BC og $B'C'$.



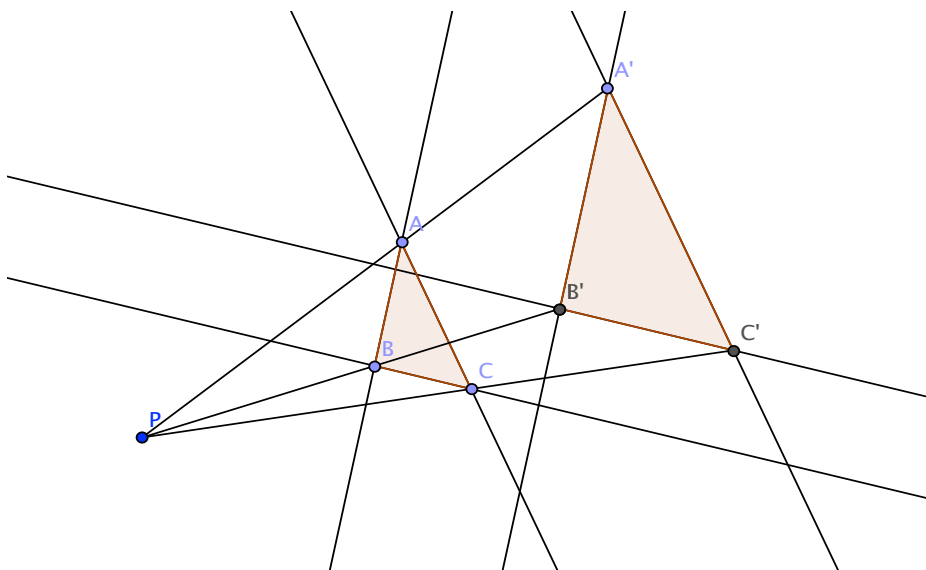
Figur 34: Desargues' setning

Velg Π slik at skjæringspunktene mellom linjene gjennom AB og $A'B'$, AC og $A'C'$ blir liggende på den uendelig fjerne linja. Dette oppnår vi når vi velger Π parallelt med linjene gjennom O som representerer disse projektive skjæringspunktene.

På denne figuren ser en at både trekantene $\triangle PAB$ og $\triangle PA'B'$ og trekantene $\triangle PAC$ og $\triangle PA'C'$ er formlike. Derfor er

$$\frac{PB}{PB'} = \frac{PA}{PA'} = \frac{PC}{PC'}$$

Trekantene $\triangle PBC$ og $\triangle PB'C'$, som har en vinkel felles, er dermed også formlike, så linjene gjennom BC og $B'C'$ er parallelle. Det vil si at skjæringspunktet mellom disse linjene også ligger på den uendelig fjerne linja. \square



Figur 35: Desargues' setning ved passe valg av Π

6.1 Koordinater for det projektive planet

[Vi kan definere projektive plan aksiomatisk og over vilkårlige kroppar. Vi begynner med et forenklet aksiomsystem for dette planet. Et projektivt plan består av et par av mengder $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ - punkter og linjer - der et element $\ell \in \mathcal{L}$ er en undermengde av \mathcal{P} . Vi krever at $|\mathcal{L}| \geq 2$ og for alle $\ell \in \mathcal{L}$ at $|\ell| \geq 3$. De to aksiomene er

- (i) Hvis P og Q er forskjellige punkter, så fins en entydig linje ℓ med $P \in \ell$ og $Q \in \ell$.
- (ii) Hvis ℓ og ℓ' er i \mathcal{L} , da er $\ell \cap \ell' \neq \emptyset$.

Med dette aksiomsystemet fins det modeller for projektive plan med over vilkårlige kroppar. Vi skal her holde oss til kroppen av reelle tall.]

I forrige avsnitt har vi sett en modell av det reelle projektive planet $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Vi skal nå definere koordinater i dette planet. Til det bruker vi lineær algebra. Punktene i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ definerte vi som linjene gjennom \mathcal{O} i \mathbb{R}^3 , mens linjene i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ er definert som plan gjennom \mathcal{O} i \mathbb{R}^3 . Fra lineær algebra er det kjent at to forskjellige linjer gjennom origo har to lineært uavhengige retningsvektorer og at de derfor spenner et entydig bestemt plan. Videre vil to plan gjennom origo snitte i en linje.

For å sette opp en mere håndterlig beskrivelse vil vi identifisere alle punktene på en linje gjennom origo til ett projektivt punkt. Hvis vi fjerner origo fra \mathbb{R}^3 er det rett fram å sjekke at relasjonen $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ hvis \mathbf{x} og \mathbf{y} ligger på den samme linjen gjennom origo, er en

ekvivalensrelasjon på $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}$. I koordinater er relasjonen gitt ved $(x_0, x_1, x_2) \sim (y_0, y_1, y_2)$ hvis det fins ikke-null $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at $x_i = \lambda y_i$.

Det betyr at $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ er ekvivalensklassene til denne relasjonen, dvs $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}) / \sim$. Vi skriver ekvivalensklassen til $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}$ som $(x_0 : x_1 : x_2)$. Dette gir *projektive koordinater* som vi skriver med kolon for å minne oss om at de er homogene, dvs at $(x_0 : x_1 : x_2) = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \lambda x_2)$. (Indekseringen fra 0 til 2 gjør vi for å huske at det handler om noe 2-dimensjonalt.) Hvis en vektor er i ekvivalensklassen som er $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ vil vi ofte si at vektoren *representerer* P .

En linje i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ vil i disse koordinater være $\{(x_0 : x_1 : x_2) : ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0\}$ for passende $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ikke alle a, b, c kan være 0. Vektoren (a, b, c) er normalvektoren til det tilsvarende plan i \mathbb{R}^3 og det er klart at $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ bestemmer den samme linja for ikke-null $\lambda \in \mathbb{R}$. Dette setter opp en *dualitet* mellom $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ og mengden av linjer i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, som vi kaller $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)^\vee$. Linja definert ved $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ er dual til punktet $(a : b : c)$.

Denne dualiteten kan formuleres mer geometrisk. To punkter P og Q i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ bestemmer en linje \overline{PQ} . Det duale punktet til \overline{PQ} er snittpunktet til den duale linja til P og den duale linja til Q . For å se dette merk at hvis $P = (a_0 : a_1 : a_2)$ og $Q = (b_0 : b_1 : b_2)$, så er linja gjennom dem gitt ved

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)x_0 + (a_2 b_0 - a_0 b_2)x_1 + (a_0 b_1 - a_1 b_0)x_2 = 0.$$

Vi gjenkjenner koeffisientene som kryssproduktet $(a_0, a_1, a_2) \times (b_0, b_1, b_2)$ i \mathbb{R}^3 . Dvs at det duale punktet til \overline{PQ} er bildet av kryssproduktet i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Dette stemmer med det vi vet fra lineær algebra siden normalvektoren til planet spent av to vektorer i \mathbb{R}^3 er nettopp kryssproduktet av vektorene. På den andre siden er de respektive duallinjene til P og Q gitt ved henholdsvis $a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$ og $b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0$, så snittpunktet er løsningen av det homogene ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Denne løsningsmengden er nettopp utspent av kryssproduktet av radene. Så snittpunktet er dualpunktet til \overline{PQ} .

Det er selvfølgelig umulig å tegne $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, men man får et slags bilde av det, i hvert fall topologisk, ved å merke at en linje gjennom origo er entydig bestemt av et punkt på enhetsfæren $S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$. Nå er samme linje bestemt av to punkter, \mathbf{x} og dens antipodale $-\mathbf{x}$. Vi får derfor $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = S^2 / \sim$, der relasjonen nå er $\mathbf{x} \sim -\mathbf{x}$. For å få et bilde der bare et punkt representerer et punkt i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ kan vi se på 3 delmengder av S^2 . Først ta den åpne øvre halvsfæren der $x_2 > 0$, så den åpne halvsirkelen der $x_2 = 0, x_1 > 0$ og tilslutt punktet $(1, 0, 0)$. Unionen av disse tre mengdene er som mengde bijektiv til punktene i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.

Med dette bildet mister vi dog en masse informasjon om det projektive planet, så det er derfor nokså uegnet. For eksempel må vi huske at hvis vi går fra den øvre halvsfæren

ned på ekvator er det ikke slutt på veien, vi kommer ut igjen på andre siden av ekvator og kan bevege oss videre på halvsfæren.

En bedre måte å “se” det projektive planet er å se det fra det affine planet. Merk at siden $(0 : 0 : 0)$ ikke er med i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, så er $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ “dekket” av de tre mengdene

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : x_2) : x_i \neq 0\}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Med dekket mener jeg at $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$.

La oss se nøyere på en av dem, f.eks. U_2 . Siden $x_2 \neq 0$ har vi en veldefinert funksjon $U_2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ definert ved

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}\right).$$

Merk at også

$$(\lambda x_0 : \lambda x_1 : \lambda x_2) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}\right)$$

så funksjonen er veldefinert. Vi ser at

$$\left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}\right) = \left(\frac{y_0}{y_2}, \frac{y_1}{y_2}\right) \Rightarrow (y_0 : y_1 : y_2) = \frac{y_2}{x_2}(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 : x_1 : x_2)$$

så funksjonen er injektiv. Videre vil $(x : y : 1) \mapsto (x, y)$ så funksjonen er surjektiv også og vi har en bijeksjon av punkter $U_2 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.

Hvis ℓ er en linje i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ gitt ved $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$, så vil $\ell \cap U_2$ være punkter med $ax + by + c = 0$ når vi bruker koordinatene $x = x_0/x_2, y = x_1/x_2$ som ovenfor. Dvs at en linje i $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ kommer fra en linje i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ med denne identifikasjonen av U_2 med $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$. Vi tenker oss $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ dermed som en delmengde av $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. (Vi kunne ha lagt den inn på mange forskjellige måter, men vi velger denne som standardmåten.) Derfor vil setninger angående $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ gi oss (ofte flere) setninger i $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.

Sett fra $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ får vi $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ved å legge til en linje $\ell_{\infty} = \{x_2 = 0\}$. Siden to parallelle linjer i $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ ikke treffes må de treffes på ℓ_{∞} . La $ax + by + c_1 = 0$ og $ax + by + c_2 = 0$ bestemme to parallelle linjer. De kommer fra linjene $ax_0 + bx_1 + c_1x_2 = 0$, hhv $ax_0 + bx_1 + c_2x_2 = 0$, i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ og begge snitter ℓ_{∞} i det samme punktet, nemlig $(-b : a : 0)$. Merk at $-a/b$ er stigningstallet til linjen. Dette gir opphav til sammenhengen mellom projektiv geometri og perspektivtegning. En nærmere forklaring må vi la ligge i denne omgang.

Akkurat som med endelige affine plan kan man lage endelige projektive plan. Hvis vi lager $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$, får vi 7 punkter $\mathcal{P} = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1), (1 : 1 : 0), (1 : 0 : 1), (0 : 1 : 1), (1 : 1 : 1)\}$ og 7 duale linjer. Hver linje vil inneholde 3 punkter. Dette planet kalles Fano planet.

6.2 Projektive transformasjoner

Vi definerer nå gruppen av projektive transformasjoner av $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ som vi kaller PGL_2 . Geometrisk ønsker vi bijeksjoner $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ som tar linjer på linjer. De viser seg å være på følgende form. La T være en invertibel lineær operator på \mathbb{R}^3 . Vi får en bijeksjon på $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ved å

definere $T(x_0 : x_1 : x_2)$ til å være ekvivalensklassen til $T(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$. Alle projektive transformasjoner er på denne formen. Merk at hvis matrisen til T er en diagonal matrise

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

vil $T = id$ på $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Merk også at de projektive transformasjoner som tar U_2 til U_2 vil presist svare til affine transformasjoner.

En *firkant* i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ er 4 punkter der ingen 3 av dem ligger på en linje.

Setning 6.5. Hvis P, Q, R, S og P', Q', R', S' er to firkanter i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, da fins en entydig projektiv transformasjon T med $T(P) = P', T(Q) = Q', T(R) = R', T(S) = S'$.

Bevis. Først vil vi vise at det fins en basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ for \mathbb{R}^3 slik at i denne basis er P, Q, R, S gitt som $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1), (1 : 1 : 1)$. For å gjøre det velg først representanter $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ for P, Q, R . De må være lineært uavhengige. La v_4 være en representant for S . Vi må ha $v_4 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$ og ingen av $a_i = 0$ for ellers ville S ligge på linja gjennom 2 av de P, Q, R . La nå $e_i = a_i v_i$ for $i = 1, 2, 3$. Da vil $P = (a_1 : 0 : 0) = (1 : 0 : 0)$ og tilsvarende for Q og R , mens $S = (1 : 1 : 1)$.

La $P' = (x_0 : x_1 : x_2), Q' = (y_0 : y_1 : y_2), R' = (z_0 : z_1 : z_2)$ og $S' = \lambda P' + \mu Q' + \nu R'$ i denne basisen og se på transformasjonen T med matrise

$$\begin{pmatrix} \lambda x_0 & \mu y_0 & \nu z_0 \\ \lambda x_1 & \mu y_1 & \nu z_1 \\ \lambda x_2 & \mu y_2 & \nu z_2 \end{pmatrix}$$

i denne basisen. Vi får $T(P) = T(1 : 0 : 0) = \lambda(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 : x_1 : x_2) = P'$ og tilsvarende for $T(Q)$ og $T(R)$ mens $T(S) = T(1 : 1 : 1) = \lambda P' + \mu Q' + \nu R' = S'$.

For å vise entydighet se først på hvilken T som tar P, Q, R, S på seg selv. Da må $T(1 : 0 : 0) = (1 : 0 : 0)$ osv så matrisen til T er på formen

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Men da er $T(1 : 1 : 1) = (\lambda : \mu : \nu)$ som er lik $(1 : 1 : 1)$ bare hvis $\lambda = \mu = \nu$, dvs at $T = id$ på $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.

Nå er hver projektiv transformasjon T invertibel, så hvis T_1 og T_2 er projektive transformasjoner så vil $T_1 \circ T_2^{-1}$ være en projektiv transformasjon som som tar P, Q, R, S på seg selv. Men da er $T_1 \circ T_2^{-1} = id$ som viser at $T_1 = T_2$. \square

6.2.1 Setningene til Pappus og Desargue

Ved å velge passende projektive transformasjon kan vi nå med koordinater i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ “regne ut” to setninger i geometri. Merk at vi formulerer dem i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ men pga inklusjonene $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ har de også mening i $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.

Setning 6.6 (Pappus). La ℓ_1 og ℓ_2 være to forskjellige linjer i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. La A_i, B_i, C_i være tre distinkte punkter på ℓ_i der ingen av punktene er snittet av linjene. Sett $A_3 = \overline{C_1 B_2} \cap \overline{C_2 B_1}$, $B_3 = \overline{A_1 C_2} \cap \overline{A_2 C_1}$ og $C_3 = \overline{A_1 B_2} \cap \overline{A_2 B_1}$. Da vil A_3, B_3, C_3 ligge på en linje.

Bevis. Etter en projektiv transformasjon kan vi anta ℓ_1 er der $x_1 = 0$ og ℓ_2 er der $x_2 = 0$. Siden ingen av punktene ligger på begge linjene kan vi anta at x_1 koordinaten er 1 for A_2, B_2, C_2 og tilsvarende x_2 koordinaten lik 1 for A_1, B_1, C_1 . Vi får da

$$\begin{array}{lll} A_1 = (a_1 : 0 : 1) & B_1 = (b_1 : 0 : 1) & C_1 = (c_1 : 0 : 1) \\ A_2 = (a_2 : 1 : 0) & B_2 = (b_2 : 1 : 0) & C_2 = (c_2 : 1 : 0) \end{array}$$

for passende $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$. En rett fram utregning viser at

$$\begin{aligned} A_3 &= (b_1 b_2 - c_1 c_2 : b_1 - c_1 : b_2 - c_2) & B_3 &= (c_1 c_2 - a_1 a_2 : c_1 - a_1 : c_2 - a_2) \\ C_3 &= (a_1 a_2 - b_2 b_1 : a_1 - b_1 : a_2 - b_2). \end{aligned}$$

Merk at, oppfattet som vektorer i \mathbb{R}^3 , er $A_3 + B_3 + C_3 = 0$, dvs at de er linært avhengige og ligger derfor i et plan. Det følger at de tilsvarende punktene i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ligger på en linje. \square

Vi sier at to trekanter (ordnete punkter ikke på en linje) PQR og $P'Q'R'$ er i perspektiv hvis linjene $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$ og $\overline{RR'}$ går gjennom et felles punkt O .

Setning 6.7 (Desargue). La trekantene PQR og $P'Q'R'$ være i perspektiv fra O og sett $N = \overline{PQ} \cap \overline{P'Q'}$, $M = \overline{RQ} \cap \overline{R'Q'}$ og $L = \overline{PR} \cap \overline{P'R'}$. Da vil M, N, L ligge på en linje.

Bevis. Ingen 3 av de 4 punktene O, P, Q, R ligger på en linje, så vi kan som i beviset for Setning 6.5 anta at $P = (1 : 0 : 0), Q = (0 : 1 : 0), R = (0 : 0 : 1), O = (1 : 1 : 1)$. Vi får \overline{OP} gitt som $x_1 - x_2 = 0$. Siden P' ligger på \overline{OP} og er forskjellig fra P , må $P' = (p : 1 : 1)$ for en $p \in \mathbb{R}$. På samme måte får vi $Q' = (1 : q : 1)$ og $R' = (1 : 1 : r)$ for passende q, r .

Man regner ut at \overline{PQ} er $x_2 = 0$ og $\overline{P'Q'}$ er $(1 - q)x_0 + (1 - p)x_1 + (pq - 1)x_2 = 0$. Derfor er $N = (p - 1 : 1 - q : 0)$. Tilsvarende blir $L = (1 - p : 0 : r - 1)$ og $M = (0 : q - 1 : 1 - r)$. Merk at, oppfattet som vektorer i \mathbb{R}^3 , er $L + M + N = 0$, dvs at de er lineært avhengige og ligger derfor i et plan. Det følger at de tilsvarende punktene i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ligger på en linje. \square

6.3 Kryssforhold og harmonisk konjugerte punkter

Dersom punktene A, B, C, D og A', B', C', D' ligger på ei linje, så gjelder ikke konklusjonen i Setning 6.5. Da fins det en projektiv transformasjon T slik at $T(A) = A', T(B) = B', T(C) = C', T(D) = D'$ bare hvis det såkalte *kryssforholdet* til punktparene (A, B) , (C, D) og (A', B') , (C', D') er det samme.

Dette kryssforholdet skal vi først definere affint: Gitt 4 punkter A, B, C, D på ei linje. Da kalles

$$(AB, CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

kryssforholdet mellom (A, B) og (C, D) . I det spesielle tilfellet at kryssforholdet er -1 sier vi at (A, B) og (C, D) er *harmonisk konjugerte*.

Det fins en enkel geometrisk karakterisering av harmonisk konjugerte punkter.

Setning 6.8. *To punktpar (A, B) og (C, D) på ei linje er harmonisk konjugerte hvis og bare hvis det fins fire punkter P, Q, R, S i et plan som inneholder linja, slik at*

$$A = PQ \cap RS, B = PR \cap QS, C = PS \cap AB, D = QR \cap AB.$$

Bevis. Bruk Menelaos på $\triangle PAB$ og linja QR og Ceva på P, A, B, S . □

Av Lemma 4.1 får vi

Setning 6.9. *Gitt tre punkter A, B og C på ei linje. Da fins det nøyaktig et punkt D på linja slik at (A, B) og (C, D) er harmonisk konjugerte. Videre deler C og D linjestykket AB i samme absolutte forhold, men med motsatt fortegn.*

For to par av punkter på ei projektiv linje gir ikke vår definisjonen av kryssforhold umiddelbart mening. Vi gir derfor først en ny definisjon av kryssforhold på den projektive linja som vi deretter viser stemmer overens med definisjonen på den affine linja. I stedet for fortegnsmål, velger vi koordinater for det ene paret av punkter og uttrykker det andre paret som lineærkombinasjoner av det første. Mer presist, la A, B, C, D være fire punkter på en linje i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, slik at minst to av punktene er forskjellige fra de to andre. like. Anta først at $A \neq B$. Siden punktene er representert med fire vektorer i et plan i \mathbb{R}^3 , kan vi skrive $C = pA + qB, D = rA + sB$. Definer *kryssforholdet* som

$$(AB, CD) = \frac{qr}{ps}.$$

Vi tillater ∞ som verdi og det vil inntreffe når $C = B$ eller $D = A$.

Det er enkelt å se at kryssforholdet er uavhengig av hvilke vektorer vi velger til å representere punktene. Hvis også $C \neq D$ vil $\delta A = sC - qD, \delta B = -rC + pD$, der $\delta = ps - qr$. Det følger at $(CD, AB) = (AB, CD)$. Hvis $A = B$ må $C \neq D$, så vi kan definere $(AA, CD) = (CD, AA) = 1$.

Denne definisjonen av kryssforholdet stemmer overens med definisjonen på den affine linja: Vi kan anta at $\overline{AB} = 1$. Da er $\overline{AC} = \frac{q}{p+q}, \overline{AD} = \frac{s}{r+s}, \overline{BD} = \frac{-r}{r+s}, \overline{BC} = \frac{-p}{p+q}$, så

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{q}{p+q}}{\frac{s}{r+s}} \cdot \frac{\frac{-r}{r+s}}{\frac{-p}{p+q}} = \frac{qr}{ps}.$$

Det er klart fra definisjonene at hvis T er en projektiv transformasjon så vil $(AB, CD) = (T(A)T(B), T(C)T(D))$. På den andre siden, gitt 3 punkter på en linje og et bestemt kryssforhold, vil det bestemme hvor det fjerde punktet må ligge.

Setning 6.10. *Hvis A, B, C, X, Y ligger på en linje og $(AB, CX) = (AB, CY)$ da er $X = Y$.*

Bevis. Skriv $C = pA + qB, X = r_1A + s_1B, Y = r_2A + s_2B$. Antakelsen sier at

$$\frac{qr_1}{ps_1} = \frac{qr_2}{ps_2}$$

så $r_1s_2 = r_2s_1$. Da blir $Y = r_2A + s_2B = s_1(r_2A + s_2B) = s_2r_1A + s_1s_2B = s_2X = X$. □

Kryssforholdet dukker opp i perspektiv tegning pga følgende setning. En perspektivitet med senter $O \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ er en avbildning $\alpha : \ell \rightarrow \ell'$ mellom to linjer i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ som sender $P \in \ell$ til $\overline{PO} \cap \ell'$. (Se Oppgave 10.)

Setning 6.11. La $\alpha : \ell \rightarrow \ell'$ være en perspektivitet med senter O . Hvis $A, B, C, D \in \ell$, så er $(AB, CD) = (\alpha(A)\alpha(B), \alpha(C)\alpha(D))$.

Bevis. La linjene $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$ ha dual punkter P, Q, R, S . Siden alle linjene går gjennom O , vil P, Q, R, S ligge på en linje (den duale linjen til O). Jeg påstår at $(PQ, RS) = (AB, CD)$. Kan jeg vise det er setningen dermed bevist siden $\overline{OA} = \overline{O\alpha(A)}$ osv.

La L være dualpunktet til ℓ . Vi har $A = \ell \cap \overline{OA}$ så vektoren $L \times P$ representerer A . Tilsvarende er de andre punktene representert med $L \times Q, L \times R$ og $L \times S$. Men hvis $R = pP + qQ, S = rP + sQ$, så er $L \times R = p(L \times P) + q(L \times Q), L \times S = r(L \times P) + s(L \times Q)$. Påstanden følger nå fra definisjonen av kryssforholdet. \square

Kryssforholdet kan også brukes til å definere polaren til et punkt med hensyn til et kjeglesnitt.

Setning 6.12. Gitt et punkt P og et kjeglesnitt. La l være ei linje gjennom P som skjærer kjeglesnittet i to punkter A og B . Da er P og skjæringspunktet Q mellom l og polaren $l(P)$ harmonisk konjugert til A, B .

Bevis. Vi antar først at kjeglesnittet er en ellipse, og velger koordinater slik at sentrum er i origo og koordinataksene er symmetriaksene til kjeglesnittet. Da har kjeglesnittet ligning $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ for passe positive reelle tall a, b . Videre antar vi at punktene P og Q har koordinater (x_P, y_P) og (x_Q, y_Q) . Koordinatene til et punkt på linja gjennom P og Q kan uttrykkes ved hjelp av koordinatene til P og Q . Vi velger å skrive dem på følgende måte som lineær kombinasjoner

$$\left(\frac{sx_P + tx_Q}{s+t}, \frac{sy_P + ty_Q}{s+t} \right)$$

av koordinatene til P og Q (vi ser foreløpig bort fra punktet der $s+t=0$). Ved å sette disse koordinatene inn i ligningen for sirkelen finner vi

$$\frac{s^2}{(s+t)^2} \left(\frac{x_P^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2} \right) + 2 \frac{st}{(s+t)^2} \left(\frac{x_P x_Q}{a^2} + \frac{y_P y_Q}{b^2} \right) + \frac{t^2}{(s+t)^2} \left(\frac{x_Q^2}{a^2} + \frac{y_Q^2}{b^2} \right) - 1 = 0.$$

Men $1 = \frac{(s+t)^2}{(s+t)^2} = \frac{s^2+2st+t^2}{(s+t)^2}$, så etter multiplikasjon med $(s+t)^2$ kan ligningen også skrives

$$s^2 \left(\frac{x_P^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2} - 1 \right) + 2st \left(\frac{x_P x_Q}{a^2} + \frac{y_P y_Q}{b^2} - 1 \right) + t^2 \left(\frac{x_Q^2}{a^2} + \frac{y_Q^2}{b^2} - 1 \right) = 0.$$

(legg merke til at denne ligningen gir mening også når $s+t=0$). Løsningene i s og t til ligningen definerer skjæringspunktene A og B mellom kjeglesnittet og linja gjennom P og

Q . Dersom P ikke ligger på kjeglesnittet, så er $t = 0$ ikke en løsning og en kan anta at $t = 1$. Dersom i tillegg Q ligger på polaren til P med hensyn til kjeglesnittet, så er

$$\frac{x_P x_Q}{a^2} + \frac{y_P y_Q}{b^2} = 1.$$

ligningen i s blir da

$$s^2 \left(\frac{x_P^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2} - 1 \right) + \left(\frac{x_Q^2}{a^2} + \frac{y_Q^2}{b^2} - 1 \right) = 0,$$

så $(A, B) = (sP + Q, -sP + Q)$ der

$$s^2 = - \frac{\frac{x_Q^2}{a^2} + \frac{y_Q^2}{b^2} - 1}{\frac{x_P^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2} - 1}.$$

Kryssforholdet mellom (P, Q) og (A, B) er da

$$(PQ, AB) = \frac{-s}{s} = -1,$$

så (P, Q) og (A, B) er harmonisk konjugerte.

Beviset for det tilfellet at kjeglesnittet er en hyperbel eller en parabel er helt analogt med dette beviset og overlates til leseren.

□

6.4 Kjeglesnitt

Husk at det er tre typer ikke-degenererte kjeglesnitt: ellipser, hyperbler og parabler. I det euklidske planet E^2 har de standard ligninger hhv

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1, \quad \frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{l^2} = 1, \quad y = kx^2$$

for positive tall k, l . Denne standardformen får man ved å foreta et koordinatskifte på en generell kvadratisk kurve $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.

Den rene kvadratiske delen gir en symmetrisk 2×2 matrise som har en *ortonormal* basis av egenvektorer. Disse bruker man til å foreta et ortogonalt basisskifte (en rotasjon) for å bli kvitt kryssleddet xy og en eventuell speiling for å bytte x og y . Så kan man bruke en translasjon til å fjerne den lineære delen. Med språket fra avsnitt 2.2 har man da at alle kjeglesnitt er isometriske til en av de tre standardformer.

I $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ har vi flere lovlige transformasjoner og vi kan skalere variablene slik at standardformene i $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ er simpelthen

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 1, \quad y = x^2.$$

I $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ skal vi derimot se at det er bare et ikke-degenert kjeglesnitt.

En *kvadratisk form* (i tre variabler) er et homogent polynom av grad 2, $Q(x_0, x_1, x_2) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0x_2 + ex_1x_2 + fx_2^2$ der $a, \dots, f \in \mathbb{R}$. En *kvadratisk kurve* i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ er mengden av $(x_0 : x_1 : x_2)$ der $Q(x_0, x_1, x_2) = 0$ for en kvadratisk form Q . Merk at dette har mening siden $Q(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^2 Q(x_0, x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow Q(x_0, x_1, x_2) = 0$. Vi sier at kurven er degenerert hvis $Q = L_1 \cdot L_2$ for to lineære polynomer L_1, L_2 eller $\{(x_0 : x_1 : x_2) : Q(x_0, x_1, x_2) = 0\} = \emptyset$, ett punkt eller en linje.

Hvis vi snitter en kvadratisk kurve med $U_2 \simeq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ med koordinater $x = x_0/x_2, y = x_1/x_2$ får vi punktene (x, y) med $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, mao et kjeglesnitt. Derfor kaller man også kvadratiske kurver for kjeglesnitt. Sett fra $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ er det på en måte klart at et kjeglesnitt vil lukke seg til en "ellipse" i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. En ellipse i $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ vil ikke snitte ℓ_{∞} . En hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ vil ha to asymptoter $y = x$ og $y = -x$. Siden parallelle linjer snitter hverandre på ℓ_{∞} vil punktene $(x, \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$ og $(x, -\sqrt{x^2 - 1}), x \leq -1$ på hyperbelen gå mot samme punkt $(1 : 1 : 0)$ og de to grenene av kurven vil forbindes der. På samme måte vil den andre asymptoten gi et forbindingspunkt i $(1 : -1 : 0)$. På parabelen $y = x^2$ vil tangentlinjene på begge sider ha retningsvektorer som nærmer seg $(0, 1)$ når $x \rightarrow \infty$. Det betyr at parabelen skulle lukkes med et punkt $(0 : 1 : 0)$ på ℓ_{∞} . Vi skal gjøre disse uformelle argumenter stringent med algebra.

Hvis $Q = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0x_2 + ex_1x_2 + fx_2^2$ definer *diskriminanten* til Q til å være $D = b^2 - 4ac$.

Setning 6.13. *En ikke-degenerert kvadratisk kurve $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ vil snitte linja ℓ_{∞} gitt ved $x_2 = 0$ i*

- (i) 0 punkter hvis $D < 0$. Da er $C \cap U_2$ en ellipse.
- (ii) 1 punkt hvis $D = 0$. Da er $C \cap U_2$ en parabel.
- (iii) 2 punkter hvis $D > 0$. Da er $C \cap U_2$ en hyperbel.

Bevis. Hvis $Q = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0x_2 + ex_1x_2 + fx_2^2$ vil $C \cap \ell_{\infty}$ være punktene $(x_0 : x_1 : 0)$ med $ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 = 0$. Hvis $x_1 = 0$ må dermed $x_0 = 0$ som er umulig, så vi kan anta at punktene er på formen $(x : 1 : 0)$ med $ax^2 + bx + c = 0$. Men da er D den vanlige diskriminanten til denne annengradsligningen og resultatet om antall snittpunkter følger.

Når det gjelder type kjeglesnitt er det kjent at det er bestemt av fortegnene til egenverdier av den symmetriske matrisen

$$\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}$$

som er matrisen til den kvadratiske delen av $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$. Det karakteristiske polynomet er

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - a & -\frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{2}b & \lambda - c \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - \frac{1}{4}b^2) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

der λ_1, λ_2 er egenverdiene. Så $\lambda_1 \lambda_2 = -\frac{1}{4}D$.

Hvis $D < 0$ har egenverdiene samme fortegn og vi har en ellipse. Hvis $D = 0$ er en av egenverdiene 0 og vi har en parabel. Hvis $D > 0$ har egenverdiene motsatt fortegn og vi har en hypberbel. \square

Setning 6.14. *Det fins en projektiv transformasjon som tar en vilkårlig ikke-degenerert kvadratisk kurve $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ til den gitt ved $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$. Dvs det fins opptil isomorfi bare et ikke-degenerert kjeglesnitt i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.*

Bevis. Gitt $Q = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0x_2 + ex_1x_2 + fx_2^2$ la

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}d \\ \frac{1}{2}b & c & \frac{1}{2}e \\ \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}e & f \end{pmatrix}$$

være den tilsvarende symmetriske matrisen. Vi kan finne en ortonormal basis av egenvektorer for A i \mathbb{R}^3 og etter den tilsvarende koordinatskifte kan vi anta at $Q = \lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$.

Hvis 2 av egenverdiene er 0, si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, er kurven en linje $x_0 = 0$ og er degenerert. Hvis bare $\lambda_2 = 0$ og λ_0 og λ_1 har samme fortegn, har man etter evt skalering at kurven er gitt ved $x_0^2 + x_1^2 = 0$ og dette er punktet $(0 : 0 : 1)$ så C er igjen degenerert. Hvis de to fortegnene er forskjellige kan vi få $Q = x_0^2 - x_1^2 = (x_0 - x_1)(x_0 + x_1)$ som er degenerert.

Hvis ingen av egenverdiene er 0 kan vi etter evt skalering, multiplikasjon med -1 og permutasjon av variablene anta at $Q = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ eller $Q = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$. Den første gir en tom kurve og den andre er formen vi ønsket. \square

På samme måte som med kvadratiske former kan man få kurver i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ fra former av høyere grad. Generelt sier man at en n -te grads form er et polynom på formen

$$F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \geq 0}} a_{ijk} x_0^i x_1^j x_2^k$$

der $a_{ijk} \in \mathbb{R}$. En n -te grads kurve blir da $\{(x_0 : x_1 : x_2) : F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$. Studiet av slike tilhører området algebraisk geometri. Allerede ved å gå opp til grad 3 er man i et rikt fagfelt, studiet av elliptiske kurver.

Vi avslutter med to setninger som omhandler typiske problemstillinger i algebraisk geometri.

Setning 6.15. *En linje i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ snitter en ikke-degenerert kvadratisk kurve i 0, 1 eller 2 punkter.*

Bevis. Etter en projektiv transformasjon kan vi anta at linjen er $x_2 = 0$. Men da er setningen det samme som Setning 6.13. \square

Hvis en linje snitter i ett punkt er det en *tangentlinje* til C . Hvis den snitter i to punkter kalles linjen en *sekant*.

Vi sier at en mengde av *forskjellige* punkter $\{P_1, \dots, P_n\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ med $n \geq 4$ er i *generell posisjon* hvis ingen 3 av dem ligger på en linje.

Setning 6.16. *Fem punkter i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ i generell posisjon ligger på nøyaktig en kvadratisk kurve.*

Bevis. Som i beviset for Setning 6.5 kan vi anta at $P_1 = (1 : 0 : 0)$, $P_2 = (0 : 1 : 0)$, $P_3 = (0 : 0 : 1)$ og $P_4 = (1 : 1 : 1)$. La P_5 være $(y_0 : y_1 : y_2)$. Vi må finne en kvadratisk form $Q = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0x_2 + ex_1x_2 + fx_2^2$ som er 0 på disse punktene.

Fra uttrykket for P_1, P_2, P_3, P_4 ser man at vi må ha $a = c = f = 0$ og $b + d + e = 0$. plugger vi inn P_5 får vi betingelsen $by_0y_1 + dy_0y_2 + ey_1y_2 = 0$. Vi får derfor en entydig kvadratisk kurve hvis ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_0y_1 & y_0y_2 & y_1y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

har en entydig projektiv løsning. Dette er hvis og bare hvis løsningsmengden har dimensjon 1 som er igjen hvis og bare hvis rangen til matrisen er 2 som igjen er hvis og bare hvis minst en av 2×2 minorene er forskjellig fra 0.

Anta alle minorene er 0. Da må $y_0y_1 = y_0y_2 = y_1y_2$. Spesielt må $y_0(y_1 - y_2) = 0$. Hvis $y_0 = 0$ må $y_1y_2 = 0$, men da er $P_5 = P_2$ eller P_3 som er umulig. Så $y_0 \neq 0$ og $y_1 = y_2$. Hvis nå $y_1 = 0$ må $y_2 = 0$ og $P_5 = P_1$, så alle $y_i \neq 0$. Men da må $y_0 = y_1 = y_2$ og $P_5 = P_4$ som er umulig. Det følger at en av minorene er $\neq 0$ og setningen er bevist. \square

Nå som vi vet at 5 punkter bestemmer et kjeglesnitt kan vi finne et eksplisitt uttrykk for den. La de 5 punktene være $(\alpha_i : \beta_i : \gamma_i)$ og la

$$Q = \det \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_1^2 & x_0x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \\ \alpha_0^2 & \alpha_0\beta_0 & \beta_0^2 & \alpha_0\gamma_0 & \beta_0\gamma_0 & \gamma_0^2 \\ \alpha_1^2 & \alpha_1\beta_1 & \beta_1^2 & \alpha_1\gamma_1 & \beta_1\gamma_1 & \gamma_1^2 \\ \alpha_2^2 & \alpha_2\beta_2 & \beta_2^2 & \alpha_2\gamma_2 & \beta_2\gamma_2 & \gamma_2^2 \\ \alpha_3^2 & \alpha_3\beta_3 & \beta_3^2 & \alpha_3\gamma_3 & \beta_3\gamma_3 & \gamma_3^2 \\ \alpha_4^2 & \alpha_4\beta_4 & \beta_4^2 & \alpha_4\gamma_4 & \beta_4\gamma_4 & \gamma_4^2 \\ \alpha_5^2 & \alpha_5\beta_5 & \beta_5^2 & \alpha_5\gamma_5 & \beta_5\gamma_5 & \gamma_5^2 \end{pmatrix}.$$

Det er klart at Q er en kvadratisk form som forsvinner på de 5 punktene.

6.5 Snitt av kjegler og Pascals setning for kjeglesnitt

I dette siste avsnittet bruker vi sammenhengen mellom projektive plan og affine plan implisitt for å vise hvordan kjeglesnittene som vi har definert i det Euklidske planet framkommer som snitt mellom affine plan og en kjegle, og for å gi et enkelt bevis av Pascals setning. Vi bruker ikke begrepene projektive linjer og plan eksplisitt. I dette kapitlet er alle linjer og plan affine.

Punktene (x, y, z) i rommet som oppfyller ligningen $x^2 + y^2 = z^2$ danner en kjegle med toppunkt i $O = (0, 0, 0)$. Den har akse langs z -aksen og generatriser som danner en vinkel på $\frac{\pi}{4}$ med xy -planet. Ved å skjære denne kjeglen med ulike plan som ikke går gjennom O , får en i disse planene kjeglesnitt slik vi har definert dem i tidligere forelesninger. Et plan som danner mindre enn $\frac{\pi}{4}$ med xy -planet vil skjære kjeglen i en ellipse, hvis vinkelen er større enn $\frac{\pi}{4}$ blir skjæringskurven en hyperbel, og hvis vinkelen er lik $\frac{\pi}{4}$ så blir skjæringskurven en parabel. For å vise dette ser vi på plan gjennom linja

$$z = y - 1 = 0.$$

La vinkelen som dette planet danner med xy -planet være α , da kan vi bruke koordinater (u, v) i dette planet slik at

$$x = u, \quad y = v \cos \alpha + 1 \quad \text{og} \quad z = v \sin \alpha.$$

Ved innsetting i ligningen for kjeglen, får vi

$$u^2 + (v \cos \alpha + 1)^2 = v^2 \sin^2 \alpha$$

som vi kan skrive på formen

$$u^2 + v^2 \cos 2\alpha + 2v \cos \alpha + 1 = 0.$$

Dersom $\cos 2\alpha = 0$, det vil si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, så blir snittet med kjeglen en parabel, gitt ved ligningen

$$u^2 = -v\sqrt{2} - 1.$$

Når $\cos 2\alpha \neq 0$ kan vi skrive ligningen på formen

$$\frac{u^2}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha}} + \frac{(v + \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha})^2}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 2\alpha}} = 1,$$

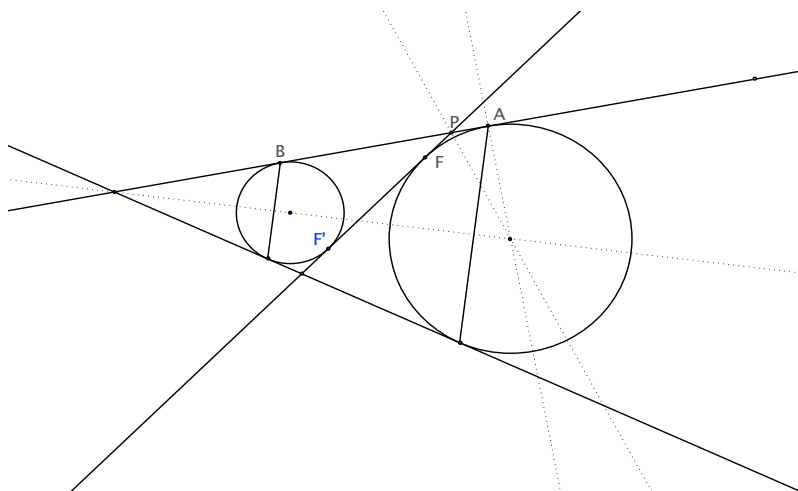
Siden

$$\cos 2\alpha > 0 \quad \text{hvis} \quad \alpha < \frac{\pi}{4}$$

så definerer ligningen i dette tilfellet en ellipse. Og siden

$$\cos 2\alpha < 0 \quad \text{hvis} \quad \alpha > \frac{\pi}{4},$$

så definerer ligningen i dette tilfellet en hyperbel.



Figur 36: Plant snitt av et kjeglesnitt med dandelinske kuler

Dette kan også vises geometrisk med såkalte dandelinske kuler. Vi glemmer da koordinatene og konsentrerer oss om kjeglen og planet som snitter kjeglen langs en kurve.

Ei **dandelinsk kule** er ei kule som ligger inne i kjeglen og som berører denne langs en sirkel (tenk på ei iskremkule i kjeks med form som en kjegle). Anta først at planet bare skjærer den ene halvdel av kjeglen. Da fins det to dandelinske kuler som berører planet. En ligger mellom planet og toppunktet til kjeglen, og en ligger på den andre siden av kjeglen. For et punkt P på kjeglesnittet er nå avstanden PF til berøringspunktet til en dandelinsk kule med planet lik avstanden PA langs kjeglen til berøringspunktet mellom denne dandelinske kule og kjeglen. Tilsvarende gjelder for avstandene PF' og PB til berøringspunkter på den andre dandelinske kule. Summen $PF + PF'$ er presis lengden AB målt langs linja på kjeglen som går gjennom punktet på kjeglesnittet mellom berøringspunktene til de to dandelinske kulene. Men denne avstanden er uavhengig av hvilket punkt vi tar på kjeglesnittet, så dette er en ellipse.

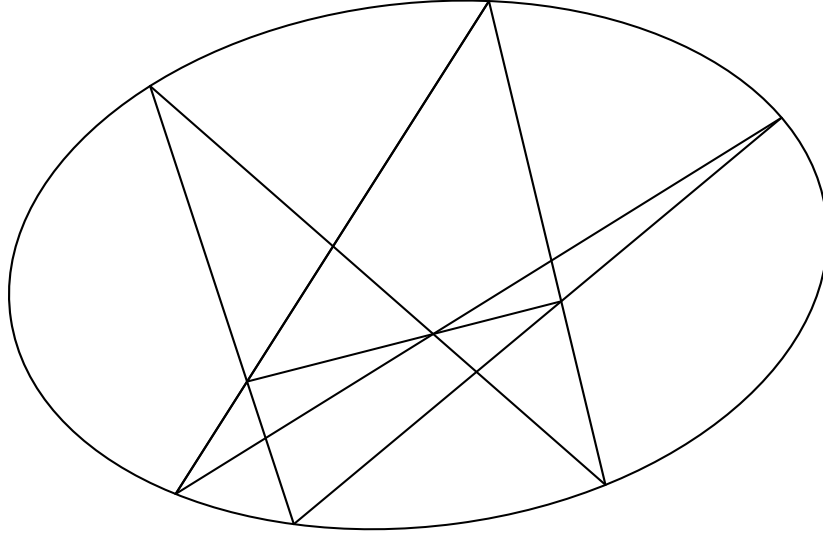
Tilfellene for parabel og hyperbel er helt analoge.

I alle tilfellene er altså brennpunktene til kjeglesnittet berøringspunktene til dandelinske kuler.

Tolkningen av kjeglesnitt som snitt av kjegler kombinert med perspektivitet gir oss mulighet til å vise generelle setninger for kjeglesnitt ved hjelp av spesialtilfeller. Vi skal avslutte med et slikt eksempel.

Setning 6.17. (Pascal) Hvis punktene A, B, C, D, E, F ligger på et kjeglesnitt så er skjæringspunktene mellom linjene gjennom AB og DE , BC og EF , FA og CD kollineære.

Bevis. På kjeglen over kjeglesnittet bestemmer de seks punktene 6 linjer gjennom toppunktet. Disse vil igjen snitte en sirkel som danner skjæringen mellom et plan normalt på aksen



Figur 37: Pascals setning for ellipse

i kjeglen og kjeglen. For de 6 punktene på sirkelen gjelder Pascals setning slik vi så det i kapittel 4. De tre kollineære skjæringspunktene definerer nå et plan gjennom toppunktet i kjeglen. Dette planet skjærer det opprinnelige planet i ei linje gjennom de tre skjæringspunktene, og setningen er bevist. \square

6.6 Oppgaver

1. La $P = (1 : 0 : 0)$, $Q = (1 : 1 : 0)$, $R = (1 : 0 : 1)$, $S = (1 : 1 : 1)$ være punkter i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Regn ut snittet av linjen gjennom P og Q og linjen gjennom R og S .
2. Lag et projektivt plan med 13 punkter og 13 linjer.
3. Det projektive plan med 13 punkter og 13 linjer er $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_3}^2$, der $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ med addisjon og multiplikasjon modulo 3, med homogene koordinater $(x_0 : x_1 : x_2)$ der $x_i \in \mathbb{F}_3$. Vis at man kan indeksere punktene P_0, \dots, P_{12} og linjene ℓ_0, \dots, ℓ_{12} slik at $P_i \in \ell_j$ hvis og bare hvis $i + j \equiv 0, 1, 3$ eller $9 \pmod{13}$. Lag en 13×13 matrise A med $A_{i,j} = 1$ hvis $P_i \in \ell_j$ og 0 ellers.

4. Med notasjonen fra forrige oppgave, vis at trekantene $P_1P_2P_7$ og $P_3P_8P_4$ er perspektive fra P_0 , dvs at linjene $\overline{P_1P_3}$, $\overline{P_2P_8}$ og $\overline{P_7P_4}$ alle går gjennom P_0 . Verifiser Desargues teorem i dette tilfelle, dvs finn $\overline{P_1P_2} \cap \overline{P_3P_8}$ og de to andre tilsvarende punkter og vis at de ligger på en linje.
5. En perspektivitet med senter $C \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ er en avbildning $\alpha : \ell \rightarrow \ell'$ mellom to linjer i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ som sender $P \in \ell$ til $\overline{PC} \cap \ell'$. Vis at α er bijektiv, at det har nøyaktig ett fikspunkt og at α^{-1} er en perspektivitet.
6. Gitt en perspektivitet $\alpha : \ell \rightarrow \ell'$ med senter P , vis at det fins en en projektiv transformasjon $T : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, med P som fikspunkt slik at $T|_{\ell} = \alpha$, dvs at hvis $P \in \ell$, så er $T(P) = \alpha(P)$.

7. La $T : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ha matrise

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Finn fikspunktene til T . Finn alle linjer ℓ med $T(\ell) = \ell$.

8. Vis at en projektiv transformasjon $T : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ alltid har minst et fikspunkt.
9. Avgjør hvilken type kjeglesnitt følgende kvadratiske former gir i $U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 : x_2 \neq 0\}$.
- (i) $2x_0^2 + 2x_1^2 + 4x_0x_1 - 10x_0x_2$
- (ii) $2x_0^2 - 3x_0x_1 + x_1^2 - 5x_0x_2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2$
- (iii) $3x_0x_1 - 15x_2^2$.

10. En symmetrisk 3×3 matrise B med ikke-null determinant bestemmer en polaritet på $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ved $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t B \mathbf{y}$. For $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, linja $\{Q : b(Q, P) = 0\}$ kalles *polaren* til P og P er *polen* til denne linja. La

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

og $P_1 = (1 : 0 : 0)$. Finn P_2 og P_3 på *polaren* til P_1 slik at P_1 , P_2 og P_3 ikke ligger på en linje og $\overline{P_1P_2}$ er *polaren* til P_3 og $\overline{P_1P_3}$ er *polaren* til P_2 .

11. La ℓ være en linje i $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ og C en n -te grads kurve slik at $\ell \not\subset C$. Vis at $|\ell \cap C| \leq n$.
12. Gjennomfør beviset for Menelaos' og Cevas setninger i det projektive planet.
13. Gjennomfør beviset for Desargues' setning ved hjelp av Menelaos' og Cevas setning.
14. Gjennomfør beviset med dandelinske kuler for at snittet mellom et plan som er parallelt med en generatrise og kjeglen er en parabel.
15. Gjennomfør beviset med dandelinske kuler for at snittet mellom et plan som skjærer begge delene til kjeglen og kjeglen er en hyperbel.
16. Vis at planene til berøringssirklene til de dandelinske kulene som definerer brennpunktene til snittet mellom kjeglen og et plan, skjærer dette planet langs styrelinjene til kjeglesnittet.

Litteratur

- Alfsen og Alfsen: Analytisk plangeometri. Aschehoug, 1955.
- Euklid: Elementer I-IV. Forlaget Trip, Vejle, 1985.
- Eves, Howard: Fundamentals of Modern Elementary Geometry. Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1997.
- Greenberg, Marvin Jay: Euclidean and Non-Euclidean Geometries. 3rd edition. W. H. Freeman and Co, New York, 1993.
- Iden, Oddvar: Geometrien blir til mens du glør: Kompendium til emnet M131-Elementær geometri, Matematisk Institutt, Univ. i Bergen, 1997.
- Jennings George A.: Modern Geometry with Applications. Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1994.
- Lang, Serge: Geometry: A High School Course. Springer Verlag.
- Maxwell, E. A.: Elementary Coordinate Geometry. 2. edition. Clarendon Press, Oxford, 1958.
- Pottage, John: Geometrical Investigations. Addison-Wesley Publishing Co, Reading, 1983.
- Salmon, George: A Treatise on Conic Sections. London, 1869.

- Sogn, Harald: Oppgavene i matematikk til realartium. Søkbar fra www.sundaune.no/nb
- Sjøgaard A. og Tambs Lyche R.: Matematikk for den høgre skolen III, Gyldendal, Oslo 1942
- Thompson, Jan: Matematiken i historien. Studentlitteratur, Lund, 1996.
- Wells, David: The Penguin dictionary of curious and interesting geometry. Penguin Books, London, 1991.

Adresse:

Matematisk Institutt, P.b. 1053 Blindern, 0316 Oslo 3,
e-post: ranestad@math.uio.no, christop@math.uio.no