MEK-1100

Obligatorisk oppgave 1

Jonas Semprini Næss
27. februar 2020

Oppgave 1

$$x(t) = v_0 t \cos(\theta)$$
$$y(t) = v_0 t \sin(\theta) - \frac{1}{2} g t^2$$

a.)
Finn tiden t_m når ballen faller ned på bakken (y = 0) og posisjonen $x(t_m) = x_m$ hvor dette skjer.

Vi starter med å sette $y(t) = 0$ og løser likningen med hensyn på t. Dette gir oss:

$$\begin{aligned} y(t) &= 0 \\ v_0 t \sin(\theta) - \frac{1}{2} g t^2 &= 0 \\ v_0 t \sin(\theta) &= \frac{1}{2} g t^2 \\ t &= \frac{2 v_0 \sin(\theta)}{g} \end{aligned}$$

Dermed har vi funnet et generelt utrykk for tiden (t_m) i det ballen treffer bakken igjen etter utskytning.
Videre ønsker vi å beregne posisjonen på horisontalen (x_m) som ballen lander ved. Dette gjør vi ved å sette t_m inn i $x(t)$.
Da får vi følgende:

$$\begin{aligned} x(t_m) &= v_0 t_m \cos(\theta) \\ x(t_m) &= v_0 \cos(\theta)(\frac{2 v_0 \sin(\theta)}{g}) \\ x(t_m) &= v_0^2(\frac{2 \sin(\theta)\cos(\theta)}{g}) \\ x(t_m) &= v_0^2(\frac{\sin(2\theta)}{g}) \qquad \boxed{2\sin(\theta)\cos(\theta) = \sin(2\theta)} \end{aligned}$$

Det gir at:

$$x(t_m) = x_m = v_0^2(\frac{\sin(2\theta)}{g})$$

b.)

Innfør dimensjonsløse variable (x^*, y^*, t^*) for x, y, t når du skalerer med x_m for lengde og t_m for tid. Forklar hvorfor det ikke er behov for å skalere vinkelen θ.

Når vi skalerer variable er det viktig å tenke på hvilken benevning hver og en av de har. Ved å gjøre dem dimensjonsløse er dermed ideen enkel "bli kvitt enheten variabelen er tilknyttet." Følger vi resonementet får vi:

$$x^* = \frac{x}{x_m}$$
$$y^* = \frac{y}{x_m}$$
$$t^* = \frac{t}{t_m}$$

Som gir:

$$x = x^*(x_m)$$
$$y = y^*(x_m)$$
$$t = t^*(t_m)$$

For å bevise at vi ikke trenger å skalere vinkelen θ bruker vi samme metode som i a.). Grunnen er for å sjekke om vinkelen ikke er tilknyttet noen som helst enhet hvilket ville gitt den en dimensjonal størrelse.
Vi starter med å sette inn de skalerte variablene i $y(t)$.

$$y(t) = v_0 t \sin(\theta) - \frac{1}{2}gt^2 \iff v_0 t^*(t_m)\sin(\theta) - \frac{1}{2}g(t^*(t_m))^2$$

Deretter setter vi $y(t) = 0$ og løser med hensyn på t^*:

$$v_0 t^*(t_m)\sin(\theta) = \frac{1}{2}g(t^*(t_m))^2$$
$$2v_0\sin(\theta) = g(t^*(t_m))$$
$$t^* = \frac{2v_0 sin(\theta)}{gt_m}$$

Videre setter vi inn t^* i $x(t)$ og løser med hensyn på θ:

$$x(t) = v_0 t\cos(\theta) \iff v_0 t^*(t_m)\cos(\theta) = x^*(x_m)$$

Setter inn t*:

$$
\begin{aligned}
v_0 t_m(\frac{2v_0 sin(\theta)\cos(\theta)}{g t_m}) &= x^*(x_m) \\
v_0^2(\frac{\sin(2\theta)}{g}) &= x^*(x_m) \\
\sin(2\theta) &= \frac{x^*(x_m)g}{v_0^2}
\end{aligned}
$$

Tilslutt må vi sjekke benevningen til θ (viktig å merke seg at x^* er dimensjonsløs og derfor ikke har noen enhet):

$$
\begin{aligned}
x_m &= [m] \\
v_0 &= [m/s] \\
g &= [m/s^2] \\
x^* &= [\quad] \\
\sin(2\theta) &= \frac{[m][m/s^2]}{([m/s])^2} \\
\sin(2\theta) &= \frac{[m^2/s^2]}{([m/s])^2} \\
\sin(2\theta) &= \frac{[m^2/s^2]}{[m^2/s^2]} \\
\sin(2\theta) &= [\quad]
\end{aligned}
$$

c.)
I denne oppgaven skal vi plotte de dimensjonsløse variablene x^*, y^* og ut i fra b.) blir vi nødt til å regne på et generelt utrykk for begge. Vi starter med å finne x^*:

$$x^* = \frac{x}{x_m} \Rightarrow x = x^*(x_m)$$

Vi husker at $x(t) = v_0 t\cos(\theta)$, $t_m = 2v_0 \frac{\sin(\theta)}{g}$ og at $x_m = v_0^2(\frac{\sin(2\theta)}{g})$.

$$
\begin{aligned}
x(t) = v_0 t\cos(\theta) &= x^*(x_m) \\
x^* &= \frac{v_0 t\cos(\theta)}{x_m} \\
x^* &= \frac{v_0 t^* t_m \cos(\theta)}{x_m} \\
x^* &= t^* \frac{2v_0 \frac{\sin(\theta)}{g}}{v_0^2 \frac{\sin(2\theta)}{g}} \cos(\theta) \\
x^* &= t^* \frac{1}{\cos(\theta)} \cos(\theta) \\
x^* &= t^*
\end{aligned}
$$

Deretter bruker vi samme prinsipp og regner ut y^*:

$$
y^* = \frac{y}{x_m} \Rightarrow y = y^*(x_m)
$$

Husker igjen at $y(t) = v_0 t\sin(\theta) - \frac{1}{2}gt^2$, $x_m = v_0^2(\frac{\sin(2\theta)}{g})$ og $t_m = 2v_0 \frac{\sin(\theta)}{g}$:

$$
\begin{aligned}
y(t) = v_0 t\sin(\theta) - \frac{1}{2}gt^2 &= y^*(x_m) \\
y^* &= \frac{v_0 t^* t_m \sin(\theta) - \frac{1}{2}g(t^* t_m)^2}{x_m} \\
y^* &= \frac{v_0 \sin(\theta) t^* \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g}}{x_m} - \frac{\frac{1}{2}g(t^* \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g})^2}{x_m} \\
y^* &= \frac{\frac{2v_0^2 t^* \sin^2(\theta)}{g}}{x_m} - \frac{1}{2}(\frac{t^{*2} \frac{4v_0^2 \sin^2(\theta)}{g}}{x_m})
\end{aligned}
$$

Dette utrykket ser stygt og uhåndterbar ut, men setter vi inn x_m ser vi raskt at $2v_0^2$, g og $\sin(\theta)$ forsvinner. Husker også at $\boxed{\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)}$

$$
\begin{aligned}
y^* &= \frac{\frac{2v_0^2 t^* \sin^2(\theta)}{g}}{(v_0^2(\frac{\sin(2\theta)}{g}))} - \frac{1}{2}(\frac{t^{*2} \frac{4v_0^2 \sin^2(\theta)}{g}}{(v_0^2(\frac{\sin(2\theta))}{g}))}) \\
y^* &= t^* \tan(\theta) - t^{*2} \tan(\theta) \\
y^* &= \tan(\theta)(t^* - t^{*2})
\end{aligned}
$$

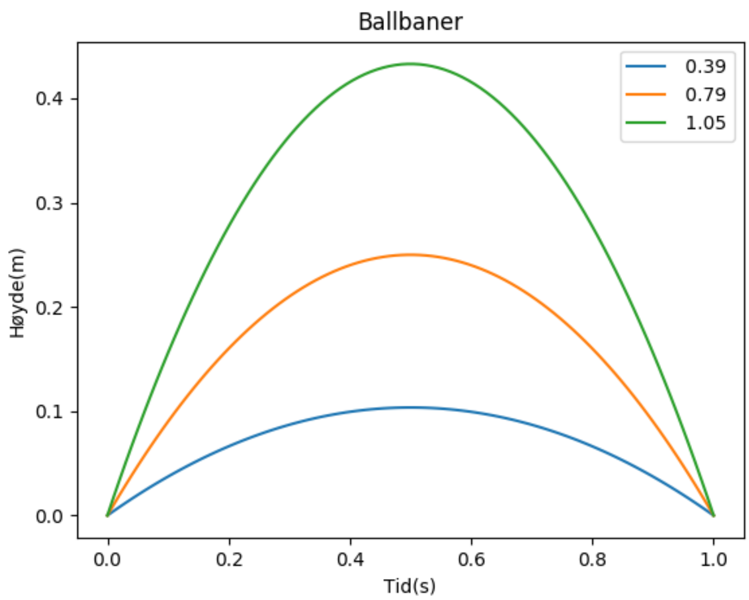
Lager vi et python-program ut i fra utrykken x^*, y^* vil vi få følgende :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

```

```python
tm = np.linspace(0, 1, 100)
theta = [np.pi/8, np.pi/4, np.pi/3]

for i in theta:
    xm = tm
    ym = np.tan(i)*tm*(1 - tm)
    plt.plot(xm, ym, label=f"{i: .2f}")

plt.xlabel("Tid(s)")
plt.ylabel("Hoyde(m)")
plt.title("Ballbaner")
plt.legend()
plt.savefig("bane.png")
plt.show()
```

Kodesnutt fra programmet ballbane.py

Velger vi å kjøre kodensnutten får man følgende plot av ballbaner:



Partikkelbaner

Her viser blå, grønn og oransj bane til utslagene for $\theta_1, \theta_2, \theta_3 = [\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$.

Oppgave 2

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = xyi + yj$$

a.)
Finn strømlinjene:

I oppgaven er vi gitt et stasjonært hastighetsfelt som ikke forandrer seg i tiden, og dermed kan utrykkes ved denne likningen:

$$\frac{dx}{\boldsymbol{F_1}} = \frac{dy}{\boldsymbol{F_2}}$$

Hvor $\boldsymbol{F_1}$ og $\boldsymbol{F_2}$ er to komponentfunksjoner i x, y-retning. Setter vi inn opplysningene får vi da:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{xy} &= \frac{dy}{y} \\ xy\,dy &= y\,dx\end{aligned}$$

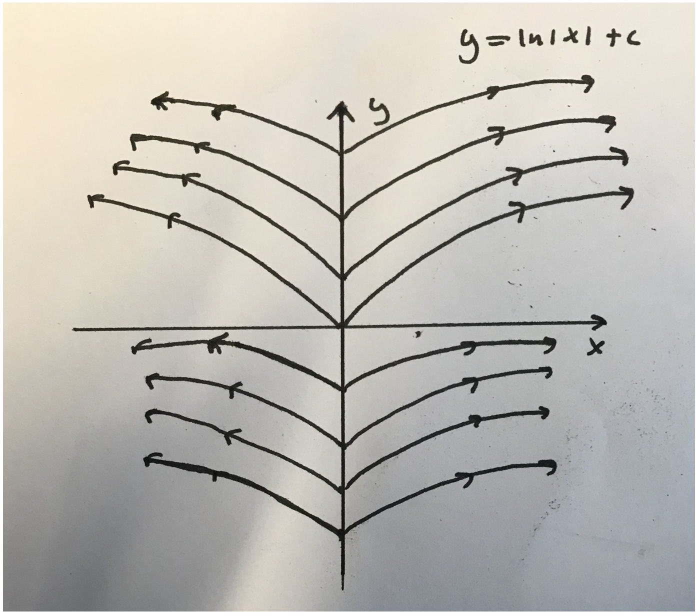
Ser vi på nærmere på utrykket er det nartulig at differentiallikningen kan løses som en separabel. Dermed separer vi likningen og samler x, y på hver sin side:

$$\begin{aligned}x\,dy &= 1\,dx \\ \int 1 &= \int \frac{1}{x}\,dx \\ \int 1\,dy &= \ln|x| + C \\ y &= \ln|x| + C\end{aligned}$$

Det er åpenlyst at den opprinelige differentiallikningen har en løsning for $y = 0$. Dette understreker observasjonen om at x-aksen er en mulig løsning av differentialet.

$$\begin{aligned}xy\,dy = y\,dx &= 0 \\ y = \ln|x| + C &= 0 \\ C &= -\ln|x|\end{aligned}$$

b.)
I oppgave a regnet vi ut det generelle utrykket for strøningsfeltet som viser til hvordan strømningslinjene oppfører seg i rommet. Vi husker at $\ln|x|$ som $\ln(x)$ vil stige mot 0 i $x = 1$ og i vårt tilfelle også $x = -1$. Deretter vil funksjonen stige mot uendelig for uendelige store x. Da vil strømingslinjene se noe slikt ut:

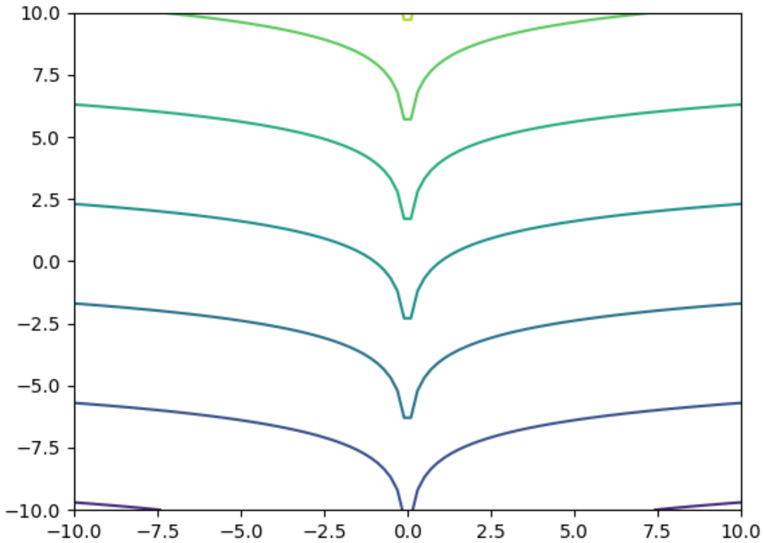


Håndtegning av strømningslinjene

Velger vi å plotte strømlinjene for å få et bedre bilde av feltet vil følgende python-program gi:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = np.linspace(-10, 10, 100)

x1, y1 = np.meshgrid(x, y)
C = y1 - np.log(abs(x1))

plt.contourf(x1, y1, C)
plt.show()
```

Kodesnutt fra programmet stromning.py



Plot av stromingslinjene for $y = \ln |x] + C$

Tilslutt i oppgaven ønsker vi å identifisere eventuelle stagnasjonspunkter (altså der hvor lokal hastigheten er lik 0) som i vårt tilfelle er der $\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} = 0$ grunnet at hastighetsfeltet er konstant.
Vi ser fra tidligere i oppgaven at vi får en løsning på differentialet for $y = 0$ som betyr at stagnasjonspunktet må befinne seg langs x-aksen. Ut i fra plotet må det befinne seg i knekkpunktet (nærme $(0,0)$ hvor strømlinjene ikke endrer seg).

c.)
Vis at det ikke finnes en strømfunksjon $\psi(x, y)$:
Her har vi to muligheter å bevise påstanden på. Vi kan enten regne på om divergensen til hastighetsfeltet er forskjellig fra null ($\nabla \cdot \boldsymbol{v} \neq 0$) eller bevise at et forsøk på å regne ut strømfunksjonen ender i en selvmotsigelse.
Vi velger å sjekke divergensen:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}, \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}, \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}) \cdot \boldsymbol{v}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}, \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}, \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}) \cdot (v_x, v_y)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}, \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}, \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}) \cdot (v_x \boldsymbol{i}, v_y \boldsymbol{j})$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = (\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y})$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = y + 1 \neq 0$$

Dermed har vi bevist at divergensen er forskjellig fra null og at det således ikke finnes en strømfunksjon $\psi(x, y)$

Oppgave 3

Et hastighetsfelt i planet er gitt ved $\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j}$ der

$$v_x = \cos(x)\sin(y), \quad v_y = -\sin(x)\cos(y)$$

a.)
Finn divergensen $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$ *og virvlingen* $\nabla \times \boldsymbol{v} = (\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y})\boldsymbol{k}$ *av hastighetsfeltet.*
Vi starter med divergensen som gir oss:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{v} &= \frac{\partial \cos(x)\sin(y)}{\partial x} + \frac{\partial - \sin(x)\cos(y)}{\partial y} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{v} &= -\sin(x)\sin(y) + (-\sin(x) - \sin(y)) \\
\nabla \cdot \boldsymbol{v} &= -\sin(x)\sin(y) + \sin(x)\sin(y) \\
\nabla \cdot \boldsymbol{v} &= 0
\end{aligned}$$

Siden divergensen er lik null betyr det at mengden vektorer som passerer inn i et gitt tversnitt av en flate er lik den samme mengden som trenger ut av samme tversnitt.
Videre blir virvlingen til feltet:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = (\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y})\boldsymbol{k} \\
\nabla \times \boldsymbol{v} &= (\frac{-\partial \sin(x)\cos(y)}{\partial x} - \frac{\partial \cos(x)\sin(y)}{\partial y})\boldsymbol{k} \\
\nabla \times \boldsymbol{v} &= -\cos(x)\cos(y) - (\cos(x)\cos(y)) \\
\nabla \times \boldsymbol{v} &= -2\cos(x)\cos(y)
\end{aligned}$$

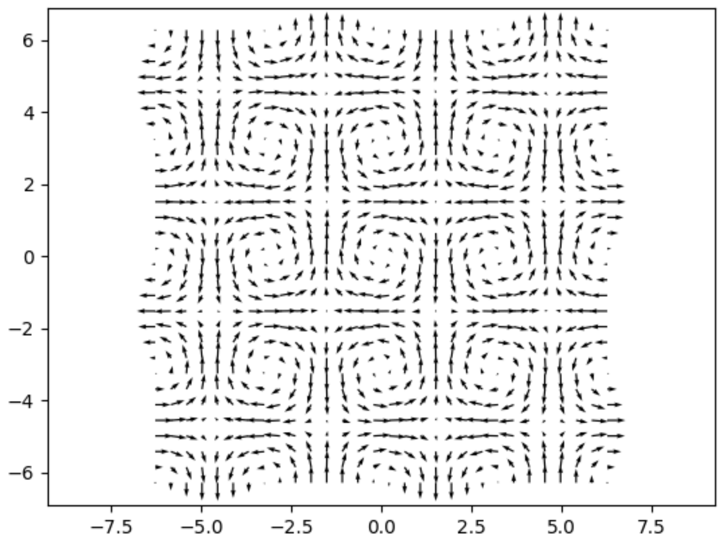
b.)
Tegn opp strømvektorer langs x- og y-aksen:
For å visualisere denne oppgaven lager vi et python-program og plotter v_x og v_y i et intervall med $x, y \in [-2\pi, 2\pi]$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, 30)
y = np.linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, 30)
```

```
x1, y1 = np.meshgrid(x, y)

vx = np.cos(x1)*np.sin(y1)
vy = - (np.sin(x1))*(np.cos(y1))

plt.quiver(x1, y1, vx, vy)
plt.axis("equal")
plt.show()
```

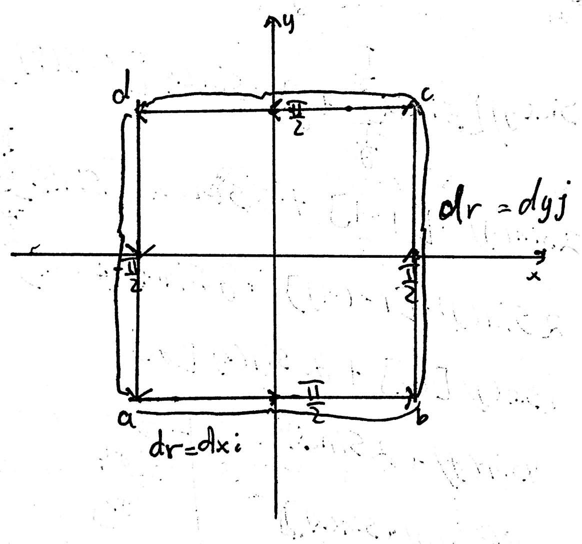
Kodesnutt fra programmet stromlinjer.py

Kjører vi dette programmet gir det følgende plot:



Plot av stromingslinjene for v_x, v_y

c.)
Finn sirkulasjonen om randa til kvadratet $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ *og* $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ For å gjøre denne oppgaven mer klar starter vi med å tegne opp det visualiserte kvadratet vi tar utgangspunkt i.



Kvadrat med gitte x, y koordinater

Før vi angriper oppgaven fullstendig er det viktig å bemerke seg hvordan sirkulasjon er definert. Vi arbeider i bunn og grunn med et linje/kurve-integral, men innenfor et lukket området hvor vi ønsker å beregne hvor mye feltet "dytter" deg langs en gitt strekning/vei. Det blir derfor naturlig å tenke på skalarprodukt ettersom at vi ønsker å finne ut av hvor mye en vektor blir påvirket i retningen av en annen. Dermed kan vi definere integralet som:

$$S = \oint \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{r}$$

Hvor S betegner sirkulasjonsintegralet og $d\boldsymbol{r}$ viser til avstandsendringen i x, y-retning.

Bruker vi tegningen skissert over ser vi at bevgelsen i horisontal retning gir $\boldsymbol{dr} = dx\boldsymbol{i}$ og i vertikal retning $\boldsymbol{dr} = dy\boldsymbol{j}$. Dette gjør at vi kan skrive opp integralet i fire intervaller i henhold til punktene $[a, b, c, d]$ som vist over.

$$
\begin{aligned}
S &= \oint \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{dr} = \int_a^b \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{dr} + \int_b^c \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{dr} + \int_c^d \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{dr} + \int_d^a \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{dr} \\
S &= \int_a^b \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{dr} + \int_b^c \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{dr} - \int_c^d \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{dr} - \int_d^a \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{dr}
\end{aligned}
$$

Her har vi i linje to endret fortegn ettersom at avstandsendringen foregår i motsatt retning av utgangsbevegelsen. Det gir $\boldsymbol{dr} = -dx\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{dr} = -dy\boldsymbol{j}$ i intervallene $[c, d] \wedge [d, a]$.
Setter vi så inn grensene får vi:

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{dr} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{dr} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{dr} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{dr} \\
S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v} \cdot (dx\boldsymbol{i}) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v} \cdot (dy\boldsymbol{j}) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v} \cdot (dx\boldsymbol{i}) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v} \cdot (dy\boldsymbol{j}) \\
S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v_x} \cdot (dx\boldsymbol{i}) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v_y} \cdot (dy\boldsymbol{j}) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v_x} \cdot (dx\boldsymbol{i}) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v_y} \cdot dy \\
S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v_x}\, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v_y}\, dy - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v_x}\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v_y}\, dy
\end{aligned}
$$

Vi husker at $\int_a^b f(x, y)\, dx = -\int_b^a f(x, y)\, dx$:

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v_x}\, dx - (-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v_x}\, dy) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v_y}\, dx - (-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v_y}\, dy) \\
S &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v_x}\, dx + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{v_y}\, dx \\
S &= 2\sin(y) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx - 2\sin(x) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)\, dy \\
S &= 2\sin(y)[\sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\sin(x)[\sin(y)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
S &= 2\sin(y)[1 - (-1)] - 2\sin(x)[1 - (-1)] \\
S &= 4\sin(y) - 4\sin(x) \\
S &= 4(\sin(y) - \sin(x))
\end{aligned}
$$

Siden vi starter i punktet $a = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ holder y seg konstant og vi kan sette inn $-\frac{\pi}{2}$ i $\sin(y)$. Samme gjelder når vi beveger oss i y-retning hvor vi i punktet $b = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ser at $x = (\frac{\pi}{2})$. Da ender vi opp med:

$$S = 4(\sin(-\frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{\pi}{2}))$$
$$S = 4(-1 - 1) = -8$$

d.)
Når vi skal vise at det finnes en strømfunksjon $\psi(x, y)$ husker vi at vi kan skrive det på komponentform som:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Snur vi om på utrykkene slik at ψ kommer alene i begge tilfeller får vi:

$$-v_x\, \partial y = \partial \psi$$
$$v_y\, \partial x = \partial \psi$$

Herfra må vi integrere begge sider for å finne den antideriverte til ψ

$$-\int v_x\, \partial y = \int \partial \psi_1$$
$$\int v_y\, \partial x = \int \partial \psi_2$$
$$\psi_1 = -\int \cos(x)\sin(y)\, \partial y$$
$$\psi_2 = -\int \sin(x)\cos(y)\, \partial x$$
$$\psi_1 = -\cos(x) - \cos(y) + f_1(x)$$
$$\psi_2 = -\cos(y) - \cos(x) + f_2(y) + C$$
$$\psi_1 = \cos(x)\cos(y) + f_1(x)$$
$$\psi_2 = \cos(x)\cos(y) + f_2(y) + C$$

Ser vi på utrykkene og setter $C = 0$ er det tydelig at strømfunksjonen må være gitt ved $\psi(x, y) = \cos(x)\cos(y)$ etter som at det er en kontinuerlig funksjon med divergens lik null (**jmf. 3a.**) og definert for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

e.)

Bruk Taylorutvikling av andre orden til å finne tilnærmede strømlinjer nær origo. Vi husker hvordan Taylorutvkling er definert for flervariable funksjoner:

$$Tnf(x,y) \cong f(x_0,y_o) + (\frac{\partial f}{\partial x})_{x_0,y_0}(x-x_0) + (\frac{\partial f}{\partial y})_{x_0,y_0}(y-y_0) + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})_{x_0,y_0}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})_{x_0,y_0}(y-y_0)^2 + (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})_{x0,y0}(x-x_0)(y-y_0)$$

Starter vi med å regne ut de partiell deriverte i $(x_0, y_0 = (0,0))$ får vi:

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \cos(x_0)\cos(y_0) = 1 \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\sin(x)\cos(y) \\
\frac{\partial \psi}{\partial y} &= -\cos(x)\sin(y) \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -\cos(x)\cos(y) = -\psi \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= -\cos(x)\cos(y) = -\psi \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \sin(x)\sin(y)
\end{aligned}$$

Setter vi dette inn i formelen gir det:

$$\begin{aligned}
T_2\psi(x,y) &= 1 - \sin(0)\cos(0)(x) - \cos(0)\sin(0)(y) - \frac{1}{2}\cos(0)\cos(0)(x)^2 - \frac{1}{2}\cos(0)\cos(0)(y)^2 + \sin(0)\sin(0)(x)(y) \\
T_2\psi(x,y) &= 1 - 0 - 0 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 0 \\
T_2\psi(x,y) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \\
T_2\psi(x,y) &= 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)
\end{aligned}$$

Langs en strømlinje er strømfunksjonen konstant som betyr at $\psi = \psi_k$, med $\psi_k \in \mathbb{R}$ Dette gir at:

$$\begin{aligned}
\psi_k &\approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\
2 - 2\psi_k &\approx x^2 + y^2
\end{aligned}$$

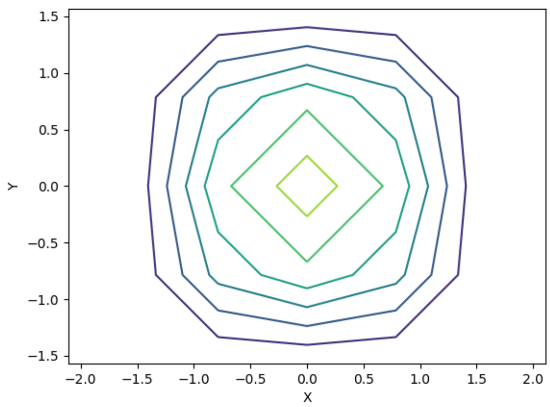
Hvor $2 - 2\psi_k$ er en konstant som vi kan kalle for for C. Da er $x^2 + y^2 \approx C$ som sier at nær origo danner strømlinjene sirkler med sentrum i origo.

Oppgave 4

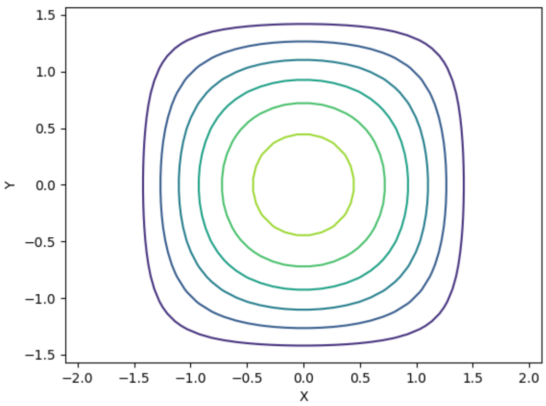
a.)
Vi tar utgangspunkt i programmet streamfun.py:

```python
from numpy import linspace, meshgrid, cos, pi
import matplotlib.pyplot as plt
n = x
def streamfun(n):
    '''Regner ut et grid og en stromfunksjon'''

    x=linspace(-0.5*pi,0.5*pi,n)
    [X,Y] = meshgrid(x,x)

    psi=cos(X)*cos(Y)

    plt.contour(X,Y, psi)
    plt.axis("equal")
    plt.xlabel("X")
    plt.ylabel("Y")
    plt.savefig("Oppgave4(2).png")
    plt.show()
    return X, Y, psi

streamfun(n)
```

Når vi kjører koden for $n = 5$ og $n = 30$ gir det oss følgende plot:



Plot av stromingslinjene for $n = 5$



Plot av stromingslinjene for $n = 30$

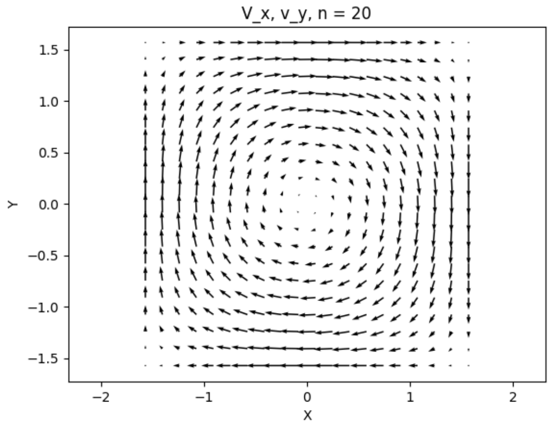
Vi ser ut i fra diagrammene at for få n-verdier blir det færre vektorer slik at konturlinjene ikke likner sirkler. Øker vi derimot n mot 30 eller høyere blir sirklene mer markante, og det styrker observasjonen vi gjorde i oppgave 3.) om at strømlinjene danner sirkler med sentrum i origo.

b.)

```python
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import linspace, meshgrid, cos, pi, sin
n = 20
def velfield(n):
    x1 = linspace(-0.5*pi,0.5*pi,n)

    [X,Y] = meshgrid(x1,x1)

    U = cos(X)*sin(Y)
    V = -sin(X)*cos(Y)

    return X, Y, U, V

x,y,u,v = velfield(n)

plt.quiver(x,y,u,v)

plt.title("V_x, v_y, n = 20")
plt.xlabel("X")
plt.ylabel("Y")
plt.axis("equal")
plt.savefig("hastighetf.png")
plt.show()
```

Mulig løsning på 4b. velfield.py

Plotet vi får av scriptet gir:



Plot av hastighetslinjene for $n = 20$

Vi ser ut i fra plottet at tangentvektorene til strømlinjene i a.) sirkulerer i omegn $(0, 0)$ og er tilnærmet null i origo ettersom at både $v_x, v_y = 0$ i punktet.