Eksamen MEK-1100

Våren 2020

15. juni 2020

Oppgave 1:

Finn divergensen og virvlingen til følgende vektorfelt

i.) $\vec{u} = x\ \boldsymbol{i} + y\ \boldsymbol{j} + z\ \boldsymbol{k}$

Løsning:

Vi husker at divergensen og virvlingen til et vektorfelt i tre dimensjoner er gitt ved

$$\nabla \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right)$$

$$\nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z}. \end{vmatrix}$$

Da har vi at

$$\nabla \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right)$$
$$= (1 + 1 + 1)$$
$$= \underline{\underline{3}}$$

$$\nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x & y \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(0)$$
$$= \underline{\underline{0}}$$

ii.) $\vec{u} = r\cos(\theta)\ \boldsymbol{i_r} + r\sin(\theta)\ \boldsymbol{i_\theta} + z\ \boldsymbol{k}$

Her er vektorfeltet gitt i sylinderkoordinater hvilket betyr at vi har enhetsvektorer i radiell og asimutal retning $(\boldsymbol{i_r}, \boldsymbol{i_\theta})$. Da ser divergensen og virvlingen slik ut

$$\nabla \cdot \vec{u} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \vec{u_x}}{\partial r} r + \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{u_y}}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{u_z}}{\partial z}\right)$$

$$\nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i_r} & \boldsymbol{i_\theta} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \end{vmatrix}$$

Det gir dermed

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{u} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \cos(\theta)}{\partial r} r + \frac{1}{r} \frac{\partial r \sin(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) \\
&= \frac{2r \cos(\theta)}{r} + \frac{r \cos(\theta)}{r} + 1 \\
&= \underline{\underline{3 \cos(\theta) + 1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i_r} & \boldsymbol{i_\theta} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ r \cos(\theta) & r \sin(\theta) & z \end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial r} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ r \sin(\theta) & z \end{vmatrix} \boldsymbol{i_r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial z} \\ r \cos(\theta) & z \end{vmatrix} \boldsymbol{i_\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ r \cos(\theta) & r \sin(\theta) \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(0) + \frac{\partial}{\partial \theta}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin(\theta) + r \sin(\theta)) \\
&= \underline{\underline{0}}
\end{aligned}
$$

iii.) $\vec{u} = \boldsymbol{i_r} + \boldsymbol{i}$

Vi har at

$$
\boldsymbol{i} = \cos(\theta)\ \boldsymbol{i_r} - \sin(\theta)\ \boldsymbol{i_\theta}
$$

som ved transformering av $\vec{u}$ gir $\vec{u} = (\cos(\theta) + 1)\ \boldsymbol{i_r} - \sin(\theta)\ \boldsymbol{i_\theta}$. Dermed er divergensen og virvlingen

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{u} &= \frac{1}{r}\frac{\partial \cos(\theta) + 1}{\partial r} r - \frac{1}{r}\frac{\partial \sin(\theta)}{\partial \theta} \\
&= \frac{\cos(\theta) + 1}{r} - \frac{\cos(\theta)}{r} \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{r}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i_r} & \boldsymbol{i_\theta} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ r\cos(\theta) & r\sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial r}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} \boldsymbol{i_r} + \frac{\partial}{\partial \theta}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \cos(\theta) + 1 & 0 \end{vmatrix} \boldsymbol{i_\theta} + 0\boldsymbol{k} \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(0) + \frac{\partial}{\partial \theta}(0) + 0 \\
&= \underline{\underline{0}}
\end{aligned}$$

Oppgave 2:

a.)

Finn enhetsvektorene $\boldsymbol{e_u}, \boldsymbol{e_v}$ og skaleringsfaktorene til de elliptiske-koordinatene. Er enhetsvektorene ortogonale?

Løsning

En vilkårlig enhetsvektor i et gitt vektorrom er definert som

$$\boldsymbol{e} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

hvor $\vec{u}$ er en vektor ulik 0. Da har vi at

$$\boldsymbol{e_u} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|}$$

$$\boldsymbol{e_v} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|}$$

.

Regner vi så de partiell deriverte av $\vec{r}$ (på henholdsvis u, v), gir det

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = a\sinh(u)\cos(v)\boldsymbol{i} + a\cosh(u)\sin(v)\boldsymbol{j}$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = -a\cosh(u)\sin(v)\boldsymbol{i} + a\sinh(u)\cos(v)\boldsymbol{j}$$

hvor normen til de respektive vektorene er

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| &= \left|a\sinh(u)\cos(v) + a\cosh(u)\sin(v)\right| \\
&= \sqrt{(a\sinh(u)\cos(v))^2 + (a\cosh(u)\sin(v))^2} \\
&= \sqrt{\sinh^2(u)\cos^2(v) + \cosh^2(u)\sin^2(v)} \\
&= \sqrt{(\cosh^2(u) - 1)\cos^2(v) + \cosh^2(u)(1 - \cos^2(v))} \\
&= \sqrt{\cosh^2(u)\cos^2(v) - \cos^2(v) + \cosh^2(u) - \cosh^2(u)\cos^2(v))} \\
&= \sqrt{\cosh^2(u) - \cos^2(v)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| &= \left|-a\cosh(u)\sin(v) + a\sinh(u)\cos(v)\right| \\
&= \sqrt{((\cosh(u)\sin(v))^2 + (\sinh(u)\cos(v))^2} \\
&= \sqrt{((\cosh^2(u)(1 - \cos^2(v)) + (\cosh^2(u) - 1)\cos(v))^2} \\
&= \sqrt{\cosh^2(u) - \cos^2(v)}.
\end{aligned}$$

Dermed har vi totalt.

$$\boldsymbol{e_u} = \underline{\underline{\frac{a\sinh(u)\cos(v)\boldsymbol{i} + a\cosh(u)\sin(v)\boldsymbol{j}}{\sqrt{\cosh^2(u) - \cos^2(v)}}}}$$

$$\boldsymbol{e_v} = \underline{\underline{\frac{-a\cosh(u)\sin(v)\boldsymbol{i} + a\sinh(u)\cos(v)\boldsymbol{j}}{\sqrt{\cosh^2(u) - \cos^2(v)}}}}$$

Videre har vi at skaleringsfaktorene i det elliptiske koordinatsystemet er.

$$h_u = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| = \underline{\underline{\sqrt{\cosh^2(u) - cos^2(v)}}}$$

$$h_v = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| = \underline{\underline{\sqrt{\cosh^2(u) - cos^2(v)}}}$$

Sluttvis må vi sjekke om enhetsvektorene er ortogonale, hvilket betyr at de må oppfylle kravet $\boldsymbol{e_u} \cdot \boldsymbol{e_v} = 0$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e_u} \cdot \boldsymbol{e_v} &= \left(\frac{a\sinh(u)\cos(v)\boldsymbol{i} + a\cosh(u)\sin(v)\boldsymbol{j}}{\sqrt{\cosh^2(u) - \cos^2(v)}}\right) \cdot \left(\frac{-a\cosh(u)\sin(v)\boldsymbol{i} + a\sinh(u)\cos(v)\boldsymbol{j}}{\sqrt{\cosh^2(u) - \cos^2(v)}}\right) \\
&= \frac{-\sinh(u)\cosh(u)\sin(v)\cos(v) + \sinh(u)\cosh(u)\sin(v)\cos(v)}{cosh^2(u) - \cos^2(v)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise. (Det er verdt å merke seg at skaleringsfaktorene i oppgaven holder ettersom at koordinatsystemet er ortogonalt, og enhetsvektorene utgjør en basis for rommet.)

b.)

Gitt et skalarfelt f og en vektor

$$\vec{w} = w_u \boldsymbol{e}_u + w_v \boldsymbol{e}_v$$

Gi ∇f, $\nabla \cdot \vec{w}$ og LaPlace operatoren ∇^2 i elliptiske koordinater.

Løsning:

Vi har at

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\boldsymbol{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\boldsymbol{e}_v$$

$$= \frac{1}{h_u^2}\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} + \frac{1}{h_v^2}\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

$$= \frac{1}{h_u^2}\frac{\partial f \partial \vec{r}}{\partial u^2} + \frac{1}{h_v^2}\frac{\partial f \partial \vec{r}}{\partial v^2}$$

$$\nabla \cdot \vec{w} = \frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial(\vec{w_u} h_v)}{\partial u} + \frac{\partial(\vec{w_v} h_u)}{\partial v}\right]$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v}{h_u}\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right]$$

c.)

Presenter en skisse av koordinatkurvene i et Kartesisk koordinatsystem. Det vil si, skisser kurver med konstante verdier for baåde u eller v, jamfør Fig. 6.3 i Vector Calculus.

Løsning:

Tar vi utgangspunkt i posisjonvektoren har vi at

$$x = a\cosh(u)\cos(v) \tag{1}$$

$$y = a\sinh\sin(v) \tag{2}$$

hvor likningen for en ellipse og hyperbel er gitt ved.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

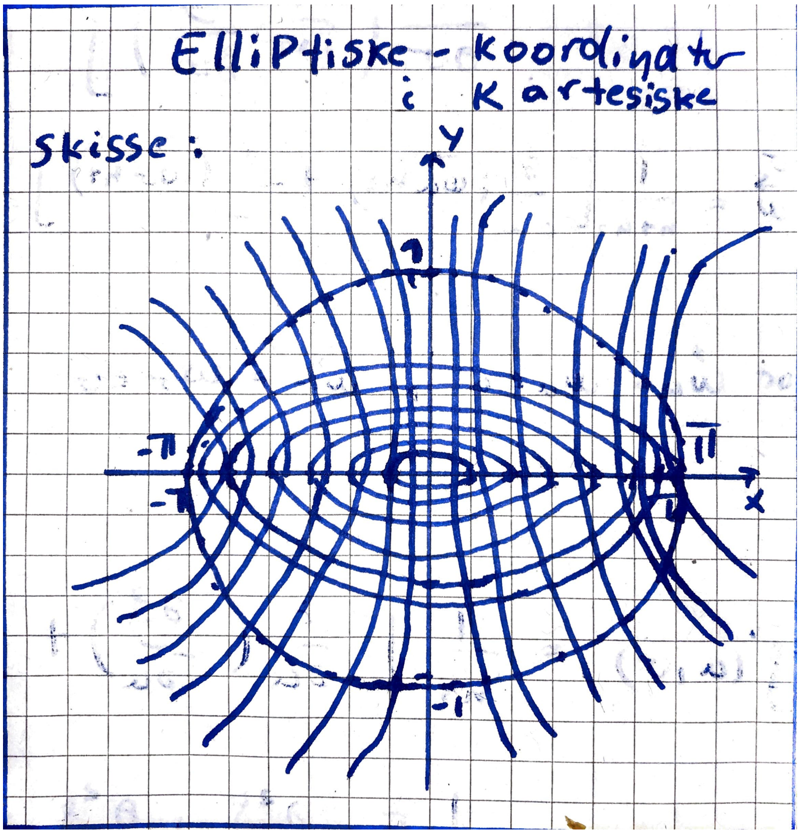
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Snur vi dermed på utrykkene i (1), (2) får vi identitene

$$\frac{x^2}{a^2\cosh^2(u)} + \frac{y^2}{a^2\sinh^2(u)} = \cos^2(v) + \sin^2(v) = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2(v)} - \frac{y^2}{a^2\sin^2(v)} = \cosh^2(u) - \sinh^2(v) = 1$$

og likeledes vist at koordinatsystemet er satt sammen av ellipser og hyperbler. En mulig skisse kan se slik ut.



Skisse av elliptiske koordinater.

c.)

Lag konturplott av skalarfeltet

$$f(u, v) = (1 - u^2)\cos(2v)$$

Finn ∇f (i elliptiske eller Kartesiske koordinater) og lag et pilplott av denne i samme figur som det Kartesiske konturplottet. Kommenter retningen på pilene.

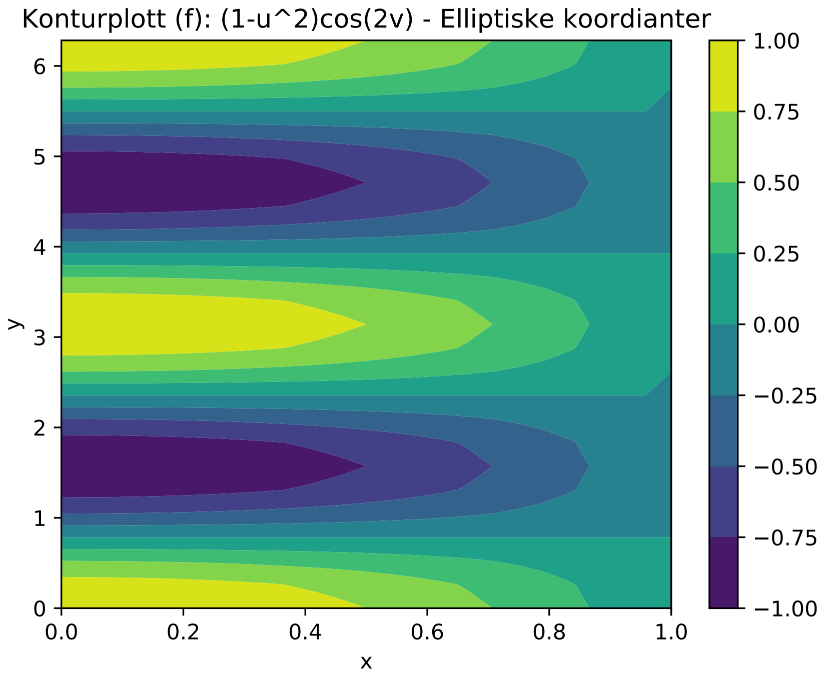
Løsning:

Vi løser oppgaven ved å lage et python-script. Det kan se følgelig ut

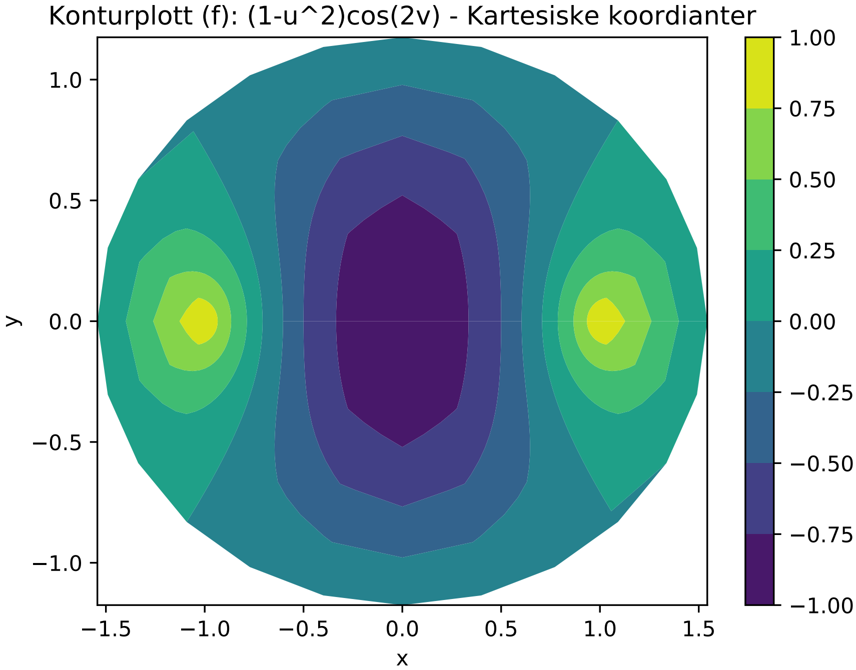
```python
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

u, v = psi = sp.symbols('u,v', real=True)
rv = (sp.cosh(u)*sp.cos(v), sp.sinh(u)*sp.sin(v))

def basisvektorer(psi, rv):

    b = np.zeros((len(psi), len(rv)), dtype=object)
    for i, ui in enumerate(psi):
        for j, rj in enumerate(rv):
            b[i, j] = sp.simplify(rj.diff(ui, 1))
    return b

def skaleringsfaktorer(b):

    h = np.zeros(b.shape[0], dtype=object)
    for i, s in enumerate(np.sum(b**2, axis=1)):
        h[i] = sp.simplify(sp.sqrt(s))
    return h

def enhetsvektorer(psi, rv):

    b = basisvektorer(psi, rv)
    hi = skaleringsfaktorer(b)
    return b / hi[None, :], hi


e, hi = enhetsvektorer(psi, rv)

f = (1 - u**2)*sp.cos(2*v)
N = 100
ui = np.broadcast_to(np.linspace(0, 1, N)[:, None], (N, N))
vi = np.broadcast_to(np.linspace(0, 2*(np.pi), N)[None, :], (N, N))
fj = sp.lambdify((u, v), f)(ui, vi)
plt.contourf(ui, vi, fj)

mesh = []

for rj in rv:
    mesh.append(sp.lambdify((u, v), rj)(ui, vi))

x, y = mesh

plt.contourf(x, y, fj)

df = np.array((1/hi[0]*f.diff(u, 1), 1/hi[1]*f.diff(v, 1)))
gradientf = e[0]*df[0] + e[1]*df[1]
print(gradientf)
dfdxi = sp.lambdify((u, v), gradientf[0])(ui, vi)
```

```
dfdyi = sp.lambdify((u, v), gradientf[1])(ui, vi)
plt.quiver(x, y, dfdxi, dfdyi, scale=20)
plt.show()
```

som gir konturplottene av f.



Konturplott av skalarfunksjonen $f(u, v)$.

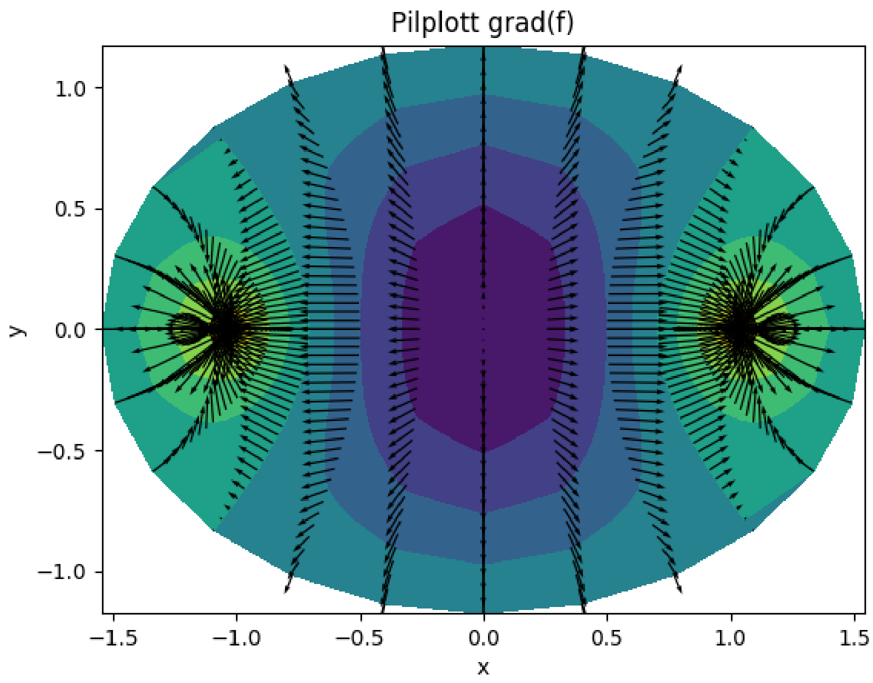


Konturplott av skalarfunksjonen $f(u, v)$.

Gradienten til f (∇f) blir gjennom scriptet gitt ved utrykket.

```
[-2*u*cos(v)*cos(2*v)*sinh(u)/(sin(v)**2*cosh(u)**2
+ cos(v)**2*sinh(u)**2)
+ 2*(1 - u**2)*sin(v)*sin(2*v)*cosh(u)/(sin(v)**2*cosh(u)**2
+ cos(v)**2*sinh(u)**2)
- 2*u*sin(v)*cos(2*v)*cosh(u)/(sin(v)**2*cosh(u)**2
+ cos(v)**2*sinh(u)**2)
- 2*(1 - u**2)*sin(2*v)*cos(v)*sinh(u)/(sin(v)**2*cosh(u)**2
+ cos(v)**2*sinh(u)**2)]
```

Og pilplottet i kartesiske koordinater som følger, ser noe slikt ut.



Pilplott av $\nabla f(u, v)$.

Vi observerer at pilene på plottet beveger seg i retning, sentrum av ellipsene skissert i det kartesiske koordinatsystemet, og følger hyperbelbaner som vist i skissen jmf. oppgave 2b.). Det er også mulig å observere at pilene former små ellipser der gradienten til f er størst.

Oppgave 3:

a.)

Vis at strømfunksjonen er

$$\psi(x, y, t) = \cos(x)\cos(y)e^{-2\nu t}$$

Hvordan kunne vi vite på forhånd at dette feltet har en strømfunksjon? Har dette vektorfeltet et skalarpotensial? Hvis ja, finn skalarpotensialet.

Løsning:

Vi har at

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

som ved integrasjon gir

$$\psi = -\int e^{-2\nu t} \cos(x)\sin(y)\ dy$$

$$\psi = -\int e^{-2\nu t} \sin(x)\cos(y)\ dx$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-2\nu t}\left[\cos(x)\cos(y)\right] + f(x) = e^{-2\nu t}\left[\cos(x)\cos(y)\right] + f(y)$$

hvor vi oppnår likhet hvis $f(x) = f(y) = 0$, og strømfunksjonen er dermed gitt ved

$$\psi(x, y, t) = e^{-2\nu t}\cos(x)\cos(y)$$

som var det vi skulle vise.

Vi husker at en strømfunksjon eksisterer så fremt man har en inkompressibel(divergensfri) strømning i to dimensjoner. Sjekker vi dermed divergensen til feltet vårt har vi

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{u} &= \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y}\right)\\ &= \cos(x)\cos(y) + (-\cos(x)\cos(y))\\ &= 0\end{aligned}$$

og kan konkludere med at det eksisterer en strømfunksjon til feltet vårt.

For at et vilkårlig vektorfelt skal ha et skalarpotensial må det blant annet oppfylle et krav om å være virvelfritt. Tester vi med vårt gitte felt har vi

$$\nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= e^{-2\nu t}\left(\frac{\partial - \sin(x)\cos(y)}{\partial x} - \left(\frac{\partial \cos(x)\sin(y)}{\partial y}\right)\right)\boldsymbol{k}$$

$$= e^{-2\nu t}\left(-\cos(x)\cos(y) - \cos(x)\cos(y)\right)\boldsymbol{k}$$

$$= -e^{-2\nu t}2\cos(x)\cos(y)\boldsymbol{k} \neq 0$$

hvilket betyr at det ikke finnes et skalarpotensial. Man kan også sjekke ved å regne ut skalarpotensialet direkte, og observere om det ender i en selvmotsigelse.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \cos(x)\sin(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\sin(x)\cos(y)$$

$$\Downarrow$$

$$\phi = e^{-2\nu t}\int \cos(x)\sin(y)\ dx$$

$$\phi = e^{-2\nu t}\int -\sin(x)\cos(y)\ dy$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-2\nu t}\left[\sin(x)\sin(y)\right] + f(y) = e^{-2\nu t}\left[-\sin(x)\sin(y)\right] + f(x)$$

Som det i dette tilfellet gjør.

b.)

Lag et pilplott av vektorfeltet $\vec{u}(x, y, 0)$*. Plott i samme figur strømlinjer til* $\vec{u}$

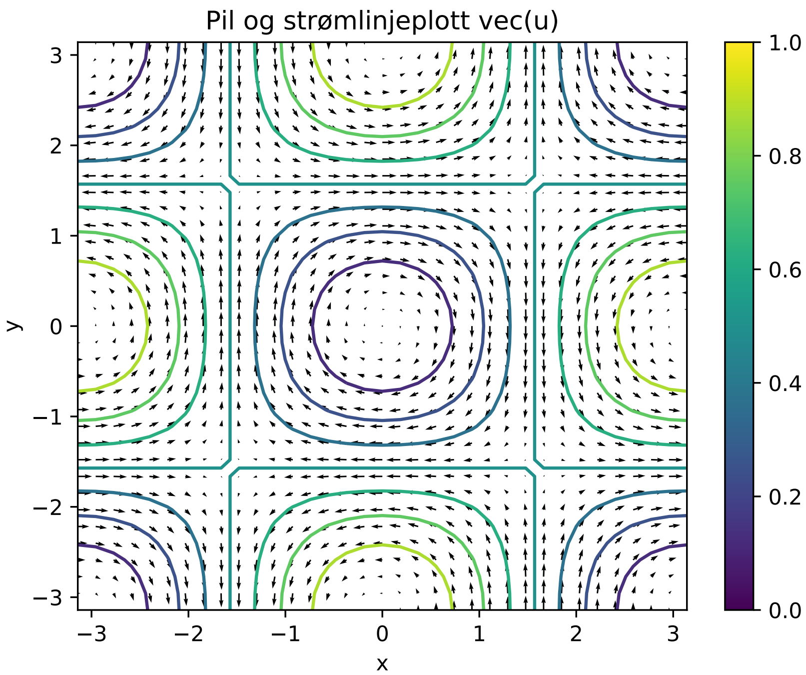
Løsning

For å løse oppgaven lager vi et python-script, som kan se slik ut.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = y = np.linspace(-np.pi, np.pi, 35)
```

```
x_, y_ = np.meshgrid(x, y)

u_x = np.cos(x_)*np.sin(y_)
u_y = -np.sin(x_)*np.cos(y_)

curlz = -2*np.cos(x_)*np.cos(y_)

plt.contour(x_, y_, curlz)
plt.quiver(x_, y_, u_x, u_y)

plt.colorbar()
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Pil og stromlinjeplott vec(u)')
plt.savefig('Oppgave3b.pdf')
plt.show()
```

Det gir følgende plot ved gjennomkjøring.



Pil og strømlinjeplott av feltet $\vec{u}(x, y, 0)$.

c.)

Hva blir fluksen

$$\oint \vec{u} \cdot \vec{n} \; ds$$

ut av et rektangulært område $\Omega = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$*, som omsluttes av kurven* C*? Her er* $\vec{n}$ *normalvektoren som peker ut fra området og* ds *er et linjeelement langs kurven* C*. Forklar hvorfor man kan bruke Gauss' divergensteorem her selv om det bare er et to-dimensjonalt integral.*

Hva blir sirkulasjonen

$$\oint \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

når vi beveger oss mot klokka (altså fra $(0,0)$ *til* $(\frac{\pi}{2}, 0)$ *osv.)? Finn resultatet både ved direkte regning av kurveintegralet, og ved å benytte et passende integralteorem.*

Løsning:

Gitt at vektorfeltet vårt $\vec{u}$, er kontinuerlig og deriverbar i området Ω kan vi skrive $\vec{u}$ som en komponentfunksjon i henholdsvis x, y-retning. Altså

$$\vec{u} = P_x(x,y)\boldsymbol{i} + Q_y(x,y)\boldsymbol{j}$$

$$\vec{n} = \frac{dy\boldsymbol{i} - dx\boldsymbol{j}}{ds} \qquad \boxed{\sqrt{dy^2 + dx^2} = ds}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = P_x(x,y)dy - Q_y(x,y)dx$$

videre vet vi at for alle enkle, stykkevis glatte og lukkede kurver gjelder Greens teorem og vi kan omskrive kurveintegralet som

$$\oint_C P_x(x,y)dy - Q_y(x,y)dx = \iint_\Omega \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \; dxdy$$

men $\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}$ er simpelthen definisjonen av divergensen til $\vec{u}$.$\left(\nabla \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right)\right)$
Som betyr at vi kan skrive dobbeltintegralet som

$$\iint_\Omega \nabla \cdot \vec{u} \; dxdy = \oint_C \vec{u} \cdot \vec{n} \; ds$$

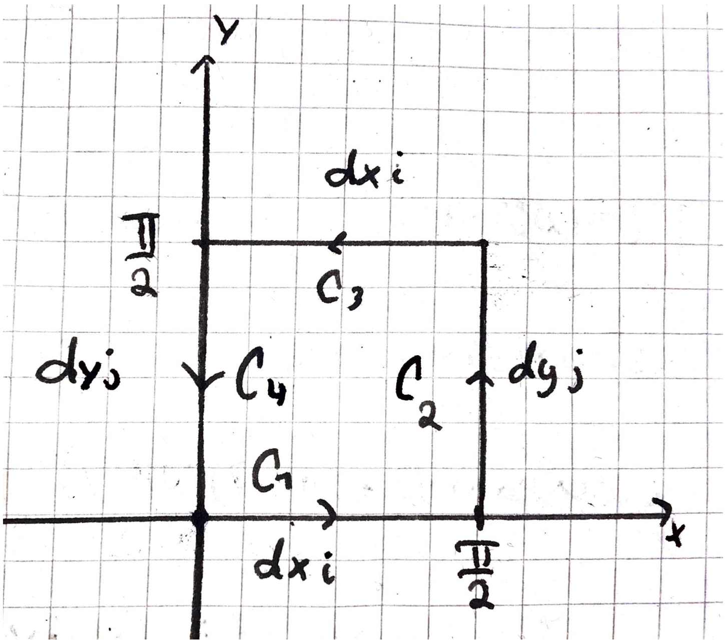
og vi har dermed vist at vi kan bruke divergensteoremet selv i to dimensjoner.

Bruker vi resultatet vi nettopp fant, gir det at fluksen ut av området Ω er.

$$\iint_\Omega \nabla \cdot \vec{u} \; dxdy = \iint_\Omega 0 \; dxdy$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

Videre ønsker vi å beregne sirkulasjonen rundt kurven C direkte som et kurveintegral, hvilket i følge skissen under kan deles opp i fire intervaller.



Skisse av bevegelsen om kurven $\mathcal{C}$.

Dermed har vi

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{u} \cdot dx\boldsymbol{i} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{u} \cdot dy\boldsymbol{j} + \int_{\mathcal{C}_3} \vec{u} \cdot dx\boldsymbol{i} + \int_{\mathcal{C}_4} \vec{u} \cdot dy\boldsymbol{j}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{u} \cdot dx\boldsymbol{i} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{u} \cdot dy\boldsymbol{j} + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \vec{u} \cdot dx\boldsymbol{i} + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \vec{u} \cdot dy\boldsymbol{j}$$

$\mathcal{C}_1 :\ d\vec{r} = dx\boldsymbol{i}, \quad y = 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{u}\ dx\boldsymbol{i} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(y)\boldsymbol{i} - \sin(x)\cos(y)\boldsymbol{j} \cdot dx\boldsymbol{i}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin(x)\boldsymbol{j} \cdot dx\boldsymbol{i}$$

$$= 0$$

$\mathcal{C}_2 :\ d\vec{r} = dy\boldsymbol{j}, \quad x = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{u} \cdot dy\boldsymbol{j} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(y)\boldsymbol{i} - \sin(x)\cos(y)\boldsymbol{j} \cdot dy\boldsymbol{j}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(y)\boldsymbol{j} \cdot dy\boldsymbol{j}$$

$$= -1$$

$\mathcal{C}_3 :\ d\vec{r} = dx\boldsymbol{i}, \quad y = \frac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \vec{u} \cdot dx\boldsymbol{i} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(x)\sin(y)\boldsymbol{i} - \sin(x)\cos(y)\boldsymbol{j} \cdot dx\boldsymbol{i}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(x)\boldsymbol{i} \cdot dx\boldsymbol{i}$$

$$= -1$$

$\mathcal{C}_4 :\ d\vec{r} = dy\boldsymbol{j}, \quad x = 0$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \vec{u} \cdot dy\boldsymbol{j} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(x)\sin(y)\boldsymbol{i} - \sin(x)\cos(y)\boldsymbol{j} \cdot dy\boldsymbol{j}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(y)\boldsymbol{i} \cdot dy\boldsymbol{j}$$

$$= 0$$

som tilsammen gir

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \underline{\underline{-2e^{-2\nu t}}}.$$

Vi kan likeledes regne ut sirkulasjon ved hjelp at Stokes teorem, hvor vi integrerer virvlingen til $\vec{u}$ over området Ω. Det gir

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Omega} \nabla \times \vec{u} \; d\boldsymbol{\Omega}$$

$$= e^{-2\nu t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\cos(x)\cos(y) \; dxdy$$

$$= -2e^{-2\nu t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y) \left[-\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \; dy$$

$$= -2e^{-2\nu t} \left[\sin(y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \underline{\underline{-2e^{-2\nu t}}}$$

d.)

La $\psi(x, y, 0) = z$ representere høyde og $\beta(x, y, z) = z - \cos(x)\cos(y) = 0$ en ekviskalarflate. Finn flatenormalen.

Hvis man holder seg på ekviskalarflaten β og går en full sirkel med radius 1 $(x^2 + y^2 = 1)$ rundt origo, hvor lang er da denne buelengden?

Hint: Her blir utregningen veldig komplisert om man ikke benytter seg av programmeringsverktøy til å gjøre utregningene.

Løsning:

Flatenormalen til en ekviskalarflate er generelt definert som

$$\vec{n} = \frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|}$$

finner vi først gradienten til β har vi

$$\nabla\beta = -\frac{\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

$$= \sin(x)\cos(y)\boldsymbol{i} + \cos(x)\sin(y)\boldsymbol{j} + 1$$

derav er normen

$$|\nabla\beta| = \sqrt{(\sin(x)\cos(y))^2 + (\cos(x)\sin(y))^2 + 1}$$

$$= \sqrt{\sin^2(x)\cos^2(y) + \cos^2(x)\sin^2(y) + 1}$$

hvilket totalt gir oss flatenormalen

$$\vec{n} = \frac{\sin(x)\cos(y)\boldsymbol{i} + \cos(x)\sin(y)\boldsymbol{j} + 1}{\sqrt{\sin^2(x)\cos^2(y) + \cos^2(x)\sin^2(y) + 1}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sin(x)\cos(y)\boldsymbol{i} + \cos(x)\sin(y)\boldsymbol{j} + 1}{\sqrt{\cos^2(y) + \cos^2(x) - 2\cos^2(y)\cos^2(x) + 1}}}}.$$

For å finne buelengden bruker vi en numerisk tilnærming hvor vi summerer over avstandene mellom hvert punkt på enhetssirkelen og ekviskalarflaten β. Dette kan gjøres ved å lage et python-script som kan se slik ut.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy as sp

n = 75
t = np.linspace(0, 2*np.pi, n+1)

x = np.cos(t)
y = np.sin(t)

z_flate = np.cos(x)*np.cos(y)

buelengde = 0

for i in range(0, n):
    punkt_a_b = t[i+1] - t[i]
    punkt_a2_b2 = z_flate[i+1] - z_flate[i]

    buelengde += np.sqrt((punkt_a2_b2)**2 + (punkt_a_b)**2)

print(f"{buelengde: .3f}")
```

Det gir at buelengden er tilnærmet lik $\underline{\underline{6.292 \text{ enheter}}}$

e.)

Newtons andre lov for inkompressibel strømning (inkludert friksjon) gir oss momentumlikningen

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

Vis at den partikkelderiverte av feltet $\vec{u}$ er gitt ved

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -2\nu\vec{u} - \frac{1}{2}\left(\sin(2x)\boldsymbol{i} + \sin(2y)\boldsymbol{j}\right)e^{-4\nu t}$$

Bruk dette og videre innsetting i momentumlikningen til å finne trykket ρ

Løsning:

Vi har at den partikkelderiverte til feltet $\vec{u}$ er

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\vec{u}_x}{\partial t} + \vec{u}_x \frac{\partial \vec{u}_x}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial \vec{u}_x}{\partial y} + \frac{\vec{u}_y}{\partial t} + \vec{u}_x \frac{\partial \vec{u}_y}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial \vec{u}_y}{\partial y}$$

starter vi med de partiell deriverte til x, y-komponentene av $\vec{u}$ gir det.

$$\frac{\partial \vec{u}_x}{\partial x} = -e^{-2\nu t} \sin(x)\sin(y)$$

$$\frac{\partial \vec{u}_x}{\partial y} = e^{-2\nu t} \cos(x)\cos(y)$$

$$\frac{\partial \vec{u}_y}{\partial x} = -e^{-2\nu t} \cos(x)\cos(y)$$

$$\frac{\partial \vec{u}_y}{\partial y} = e^{-2\nu t} \sin(x)\sin(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -2\nu\vec{u}$$

Setter vi så inn resulatet i likningen over har vi

$$\frac{D\vec{u}_x}{Dt} = -2\nu\vec{u}_x - e^{-4\nu t}\cos(x)\sin(y)\sin(x)\sin(y) - e^{-4\nu t}\sin(x)\cos(y)\cos(x)\cos(y)$$

$$\frac{D\vec{u}_y}{Dt} = -2\nu\vec{u}_y - e^{-4\nu t}\cos(x)\sin(y)\cos(x)\cos(y) - e^{-4\nu t}\sin(x)\cos(y)\sin(x)\sin(y)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned}\frac{D\vec{u}}{Dt} &= -e^{-4\nu t}\left(\cos(x)\sin(x)\left(\sin^2(y)+\cos^2(y)\right) + \cos(y)\sin(y)\left(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right)\right) \\ &\quad - 2\nu(\vec{u}_x + \vec{u}_y) \\ &= -2\nu\vec{u} - e^{-4\nu t}\left(\cos(x)\sin(x) + \cos(y)\sin(y)\right) \\ &= -2\nu\vec{u} - \frac{1}{2}\left(\sin(2x)\boldsymbol{i} + \sin(2y)\boldsymbol{j}\right)e^{-4\nu t}\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

Bruker vi så momentumlikningen videre har vi at gradienten til trykkfeltet er

$$\nabla\rho = -\frac{D\vec{u}}{Dt} + \nu\nabla^2\vec{u}$$

hvor $\nu\nabla^2\vec{u}$ gir

$$\nu\nabla^2\vec{u} = \nu\left(\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial y^2}\right)$$

$$= \nu e^{-2\nu t}\left(-\cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)\right)$$

$$= -2\nu e^{-2\nu t}\left(\cos(x)\sin(y) - \sin(x)\cos(y)\right)$$

$$= -2\nu\vec{u}$$

og dermed står vi igjen med

$$\nabla\rho = \frac{1}{2}\left(\sin(2x)\boldsymbol{i} + \sin(2y)\boldsymbol{j}\right)e^{-4\nu t}$$

som sluttvis gir

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}\boldsymbol{i} = \frac{1}{2}e^{-4\nu t}\sin(2x)\boldsymbol{i}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial y}\boldsymbol{j} = \frac{1}{2}e^{-4\nu t}\sin(2y)\boldsymbol{j}$$

$$\Downarrow$$

$$\rho = \frac{1}{2}e^{-4\nu t}\int\sin(2x)\ dx$$

$$\rho = \frac{1}{2}e^{-4\nu t}\int\sin(2y)\ dy$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{1}{4}e^{-4\nu t}\cos(2x) + C = -\frac{1}{4}e^{-4\nu t}\cos(2y) + C.$$

Hvilket betyr at trykkfeltet er gitt ved funksjonen

$$\rho(x,y) = \underline{\underline{-\frac{1}{4}\left(\cos(2x) + \cos(2y)\right)e^{-4\nu t}}}$$