STK-1100

Obligatorisk Oppgave 1

Jonas Semprini Næss

Oppgave 1:

a.)

Vi har 5 personer som kan velge mellom 11. etasjer (Ettersom at de går på i 1. etasje).

Det vil si at sannsynligheten for at hver av de 5 personene går av i ulike etasjer kan skrives som

$P_{k,n} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1)$.

Dette tar også utgangspunkt i at det ikke er tilbakelegg.

$$P(A) = P_{k,n} = \frac{11}{11}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{7}{11} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{11^5}$$

$$= \underline{\underline{0{,}344 \approx 34{,}4\%}}$$

b.) Når vi skal finne sannsynligheten for at **minst to** av de 5 går av i samme etasje, må vi tenke på komplemente hendelser.

Sannsynligheten må dermed være gitt ved komplimentet av $[P_{k,n}(P(A))]$.

Vi ønsker:

$$P(A') = 1 - P(A)$$
$$= 1 - 0{,}344 = \underline{\underline{0{,}656 = 65{,}6\%}}$$

Det er altså 65,6% for at minst to går av i samme etasje c.) Vi anter nå at 3 av de 5 går av i samme etasje. Hvor mange ulike grupper kan dette være?

Når vi skal angripe dette spørsmålet, må vi forstå det som at vi velger K-objekter fra en mengde på n-objekter (uten tilbakelegg, uavhengig av rekkefølgen).

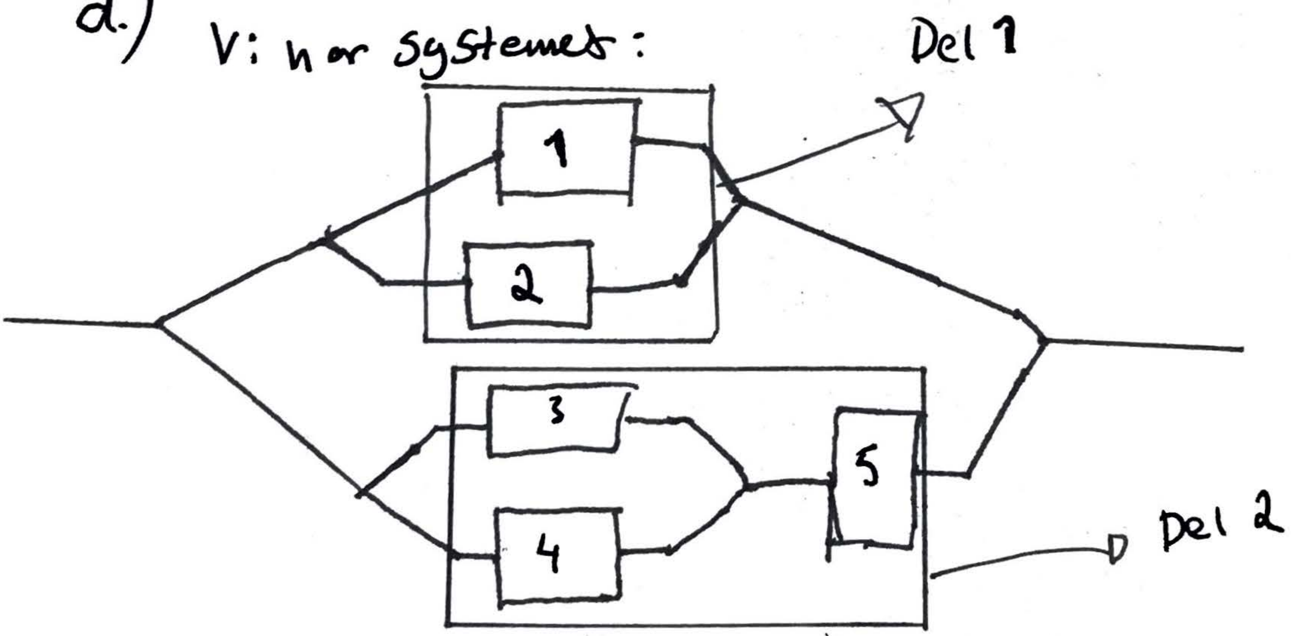
Da blir det tydelig at vi må bruke binomialkoeffisienten $\binom{n}{k}$ for å beregne de forskjellige kombinasjonene.

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}} \qquad \begin{matrix} n: 5 \\ k: 3 \end{matrix}$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = \frac{20}{2} = \underline{\underline{10}}$$

Altså har vi 10 mulige måter å ordne gruppene på.

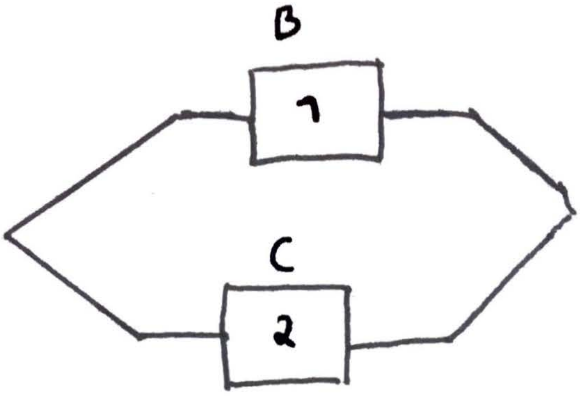
d.) Vi har systemet:



P(komponenten funker) = 0,9 = P(A)

Starter med å dele systemet opp i to deler

I)



$P(B) = P(C) = P(A) = 0{,}9$

Sjansen for at dette systemet fungerer er gitt ved $P(B \cup C)$, hvor B og C er som vist over.

$$\underline{P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)}$$

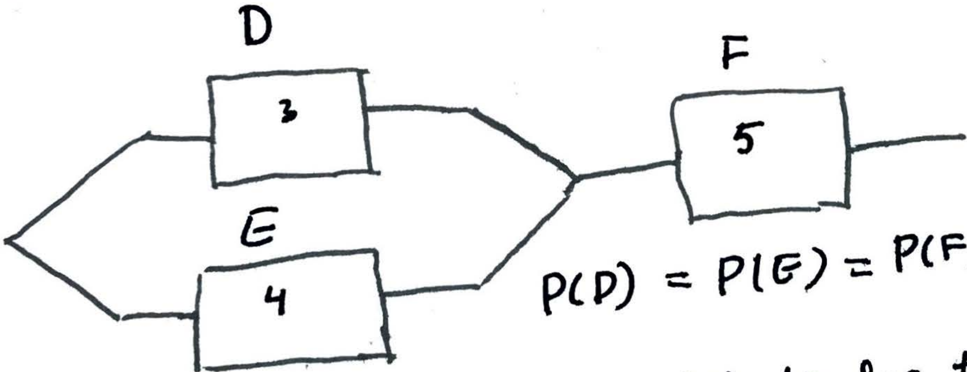
Setter vi inn får vi

$$= 0{,}9 + 0{,}9 - (0{,}9 \cdot 0{,}9)$$

$$= 1{,}8 - 0{,}9^2 = \underline{\underline{0{,}99}}$$

Videre må vi beregne sannsynligheten for at gren II også fungerer.

II.)



$P(D) = P(E) = P(F) = P(A) = 0{,}9$

Her har vi tre komponenter istedenfor to, som betyr at vi må finne sannsynligheten for at: 3 eller 4 fungerer, og 5 fungerer.

Det betyr at sannsynlighet kan finnes ved:

$$P(D \cup E \cap F) = \underbrace{(P(D) + P(E) - P(D \cap E))}_{P(B \cup C)} \cdot \underbrace{P(F)}_{P(F) = 0{,}9}$$

$$= 0{,}99 \cdot 0{,}9 = \underline{\underline{0{,}891}}$$

Nå som vi har regnet ut sannsynligheten for at hver av grenene funker kan vi regne på hele systemet.

Dermed blir sannsynligheten gitt ved at: Gren I eller gren II funker.

Da får vi totalt:

$$P(B \cup C \cup (P(D \cup E \cap F))) = P(\underbrace{B \cup C}_{I} \cup (\underbrace{D \cup E \cap F}_{J}))$$

$$= P(I \cup J) = P(I) + P(J) - P(I \cap J)$$

$$= 0{,}99 + 0{,}891 - (0{,}99 \cdot 0{,}891)$$

$$= 1{,}881 - (0{,}88209)$$

$$= \underline{\underline{0{,}99891 \approx 0{,}9989 \approx 0{,}999}}$$

Det er altså 99,9% for at heisen virker

Oppgave 2:

Doffen har daua!

$P(\text{Martin glemmer å mate}) = P(A') = \frac{1}{4}$

$P(\text{Husker å mate}) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(\text{Fisken overlever} \mid \text{Martin husker og mate}) = \frac{9}{10} = P(L \mid A)$

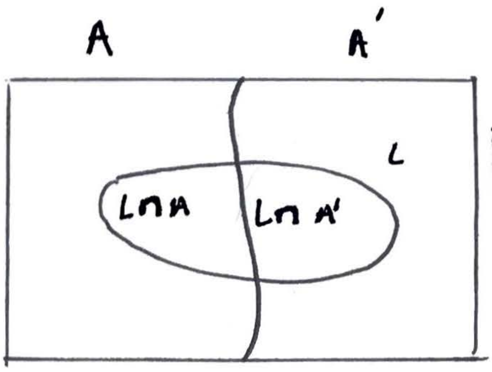
$P(\text{Fisken dør} \mid \text{Martin glemmer å mate}) = \frac{1}{2} = P(L' \mid A')$

OPPGAVEN ønsker at vi finner ut sannsynligheten for at Martin glemte å mate den, gitt at den er død.

Da blir uttrykket:

$$P(A' \mid L') = \frac{P(A' \cap L')}{P(L')}, \text{ hvor } \boxed{P(A' \cap L') = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}}$$

Det kompliserte med denne OPPGAVEN er å finne $P(L')$. Husker vi til bake til begrepet om Total sannsynlighet kan vi dele opp utfallsrommet i Ak disjunkte begivenheter. I tillegg til disse disjunkte begiventhetene ønsker vi å finne ut hva de har til felles med handelsen $\boxed{B}$ som i vårt tilfelle er $P(A)$.



Da får vi at

$$P(A' \mid L') = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{40} + \frac{3}{40}} = \frac{\frac{1}{8}}{5} = \frac{5}{8}$$

: Dermed får vi uttrykket

$$P(A' \mid L') = \frac{P(A' \cap L')}{P(L' \mid A') \cdot P(A') + P(A)\, P(L' \mid A)}$$

$$= \frac{P(A' \cap L')}{P(A') \cdot P(L' \mid A') + P(A) \cdot P(L' \mid A)}$$

Hvor $P(L' \mid A) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

Oppgave 3:

a.)

Når vi nå skal bevise den kumulative fordelingen må vi huske at:

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x)$$

Ser vi på $P(X > x)$ kan vi ekspandere det som

$$P(X > x) = P(X > 0) \cdot P(X > 1 | X > 0) \ldots P(X > x | X > x - 1)$$

Som gir

$$P(X > x) = P(X > 0) \cdot P(X > 1 | X \geq 0) \ldots P(X > x | X \geq x - 1)$$

Det er verdt å merke seg at q_x er sannsynligheten for at en x-år gammel mann dør i løpet av et år.

Dette svarer til et generelt utrykk for punktsannsynligheten i de x-årene.

Dermed blir $q_x = P(X = x | X \geq x)$.

Da vil vi videre kunne uttrykke $P(X > x)$ slik.

$$P(X > x) = (1 - q_0) \cdot (1 - q_1) \ldots (1 - q_x) = \prod_{y=0}^{x} (1 - q_y)$$

Setter vi dette inn i $F(x)$ får vi

$$F(x) = 1 - P(X \geq x) = 1 - \prod_{y=0}^{x} (1 - q_{y+35})$$

Hvor q_x blir tellbar fra og med 35 fylte år.

b.)

For å finne et utrykk for punktsannsynligheten starter vi med å se på hvordan den kumulative

fordelingen er definert for x_i og x_{i-1}begivenheter.

$$F(x_i) = P(X = x_1) + P(X = x_2) \ldots P(X = x_{i-1}) + P(X = x_i)$$

$$F(x_i) = P(X = x_1) + P(X = x_2) \ldots P(X = x_{i-1})$$

Hvilket videre kan skrives som

og

$$\sum_{i=1}^{x} F(x_i) \qquad \sum_{i=1}^{x-1} F(x_i)$$

Det er tydelig at for å finne $P(X = x_i)$ (sannsynlighetsfordelingen) må vi subtrahere de to summene.

Da står vi igjen med leddene

$$\sum_{i=1}^{x} F(x_i) - \sum_{i=1}^{x-1} F(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

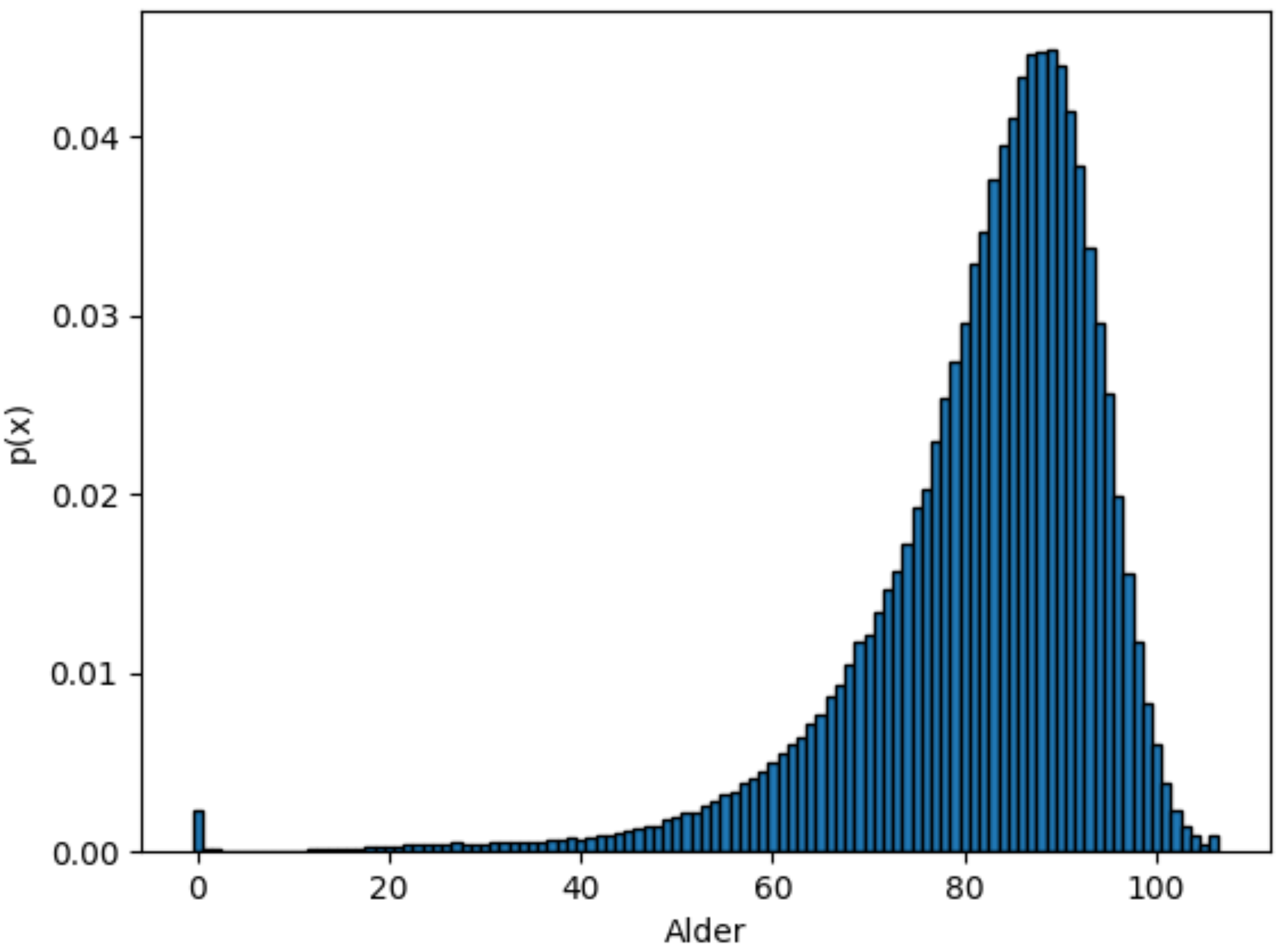
Som gir at

$$P(X = x) = F(x) - F(x - 1)$$

c.)

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd

#Leser inn verdiene fra dødelighetsstatistikken
doed = pd.read_csv("https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/STK1100/v20/dodssannsynlighet-f
#Henter ut aldersverdiene fra dokumentet
alder = doed["ald"].values
#Ekstraherer antall menn i de visse aldrene fra dokumentet
menn = doed["dod"].values

#Sannsynlighetsfordeling gitt i promille (Per tusendel)
qx = menn/1000
#Funksjonen S(x) viser til overlevelsessansynligheten (Bevist i oppgave a)
Sx = np.cumprod(1-qx)
#Funksjonen F(x) som viser den kumulative annsynlighetsfordelingen.
Fx = 1-Sx

tmp = np.zeros(107)
#Legger til F(x)-verdiene i en array tom array som gjør det enklere å plotte.
#Med verdier fra 1 til 106
tmp[1:107] = Fx[:106]
#P(X = x) = F(x) - F(x - 1)
px = Fx-tmp

width = 1
plt.bar(alder,px,width,edgecolor="black")
plt.xlabel("Alder")
plt.ylabel("p(x)")
plt.show()
```

Ved å kjøre dette programmet får vi følgende plot:



..

Hvor x-aksen viser aldersgruppene og y-aksen viser punktsannsynligheten til hvor mange som overlever i de gitte aldersgruppene.

d.)

Ut i fra oppgaveteksten får ikke mannen pensjonsutbetalinger før han er fylte 67 år. Det vil si at selv om han er 66 år 11 måneder og 30 dager vil han likevel ikke få utbetalt penger. Den stokastiske variabelen X beskriver mannens alder og vi kan dermed lage en funksjon $h(X)$ som beskriver denne utbetalingsfordelingen, forbeholdt rentefoten på 3%.

$$h(X) = \begin{cases} \frac{100000}{1.03^X} & X \geq 32, \\ 0 & X \leq 31, \end{cases}$$

Her ser vi at når X er mindre eller lik 31 vil ikke mannen få noe utbetalt, det er simpelthen fordi han er fylte 66 år helt frem til X = 32. Fra og med X = 32 vil mannen få pensjonsutbetaling og vi vet at nåverdien til pensjonsutbetalingen er gitt ved $\frac{B}{1.03^k}$ hvor B = 100000 kr. Da blir det naturlig å skrive opp utviklingen fra X = 32 som en sum.

$$h(X) = \sum_{k=32}^{X} \frac{100000}{1.03^k}$$

Studerer vi summen nærmere ser vi raskt at det er en endelig geometrisk rekke som kan utvides via definisjonen :

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^n}{1-a}$$

Som gir:

$$a_0 \sum_{k=32}^{X} a^k = \frac{1-(\frac{1}{1.03})^{X-31}}{1-\frac{1}{1.03}}$$

Hvor $a_0 = \frac{100000}{1.03^{32}}$.

e.)

Når vi nå skal finne forventet nåverdi må vi tenke på hvordan forventningsverdien er definert. Forventningsverdien er tolket ut i fra at man har en diskret stokastisk variabel X med en punktsannsynlighet f(x) hvor man summerer over alle mulige verdier av X. Da vil forventningsverdien E[X] gi:

$$E[X] = \sum_{x} xf(x)$$

Punktsannsynligheten er allerede gitt ved $p(x)$ og i vårt tilfelle ønsker vi å finne ut forventningsverdien til nåverdien ($E[h(X)]$) som innsatt i utrykket gir:

$$E[h(X)] = \sum_{x} h(x)p(x)$$

Og setter vi inn grensene får vi:

$$E[h(X)] = \sum_{x=0}^{71} h(x)p(x)$$

```
p = px[32:72]
a0 = 100000/(1.03**(32))
X = np.arange(32,72)
hx = a0 * (1 - (1/(1.03**(X - 31)))) / (1 - (1/1.03))
EhX = (np.sum(p*hx))
print(EhX)
```

Kjører vi denne lille kodesnutten for å simulere E[h(X)] får vi at forventet nåverdi ligger på

501511.924 kr

f.)

Når vi ser på premieinnbetalingene til mannen antar vi at han betaler fra han er 35 år helt opp til sine fylte 67 år. Da får vi at premieinnbetalingen blir summen av nåverdiene til hver og en av dem.

$$\sum_{k=0}^{min(X,31)} \frac{K}{1.03^k}$$

Så vet vi at g(X) er definert som:

$$g(X) = \sum_{x=0}^{min(X,31)} \frac{1}{1.03^k} = \frac{1 - (\frac{1}{1.03})^{min(X,31)+1}}{1 - \frac{1}{1.03}}$$

Hvor min(X, 31) + 1 viser til at rentene for premieinnbetalingen fortsetter selv etter siste innbetaling.

Tilslutt ser vi at :

$$\sum_{k=0}^{min(X,31)} \frac{K}{1.03^k} = Kg(x)$$

g.)

Vi følger samme prinsipp som i oppgave e.) (jmf. E[X]) der vi har :

$$E[X] = \sum_x xf(x)$$

Setter vi inn g(x) får vi:

$$E[g(X)] = \sum_{x=0}^{71} g(x)p(x)$$

Så må vi huske på at mannen betaler en fast premie (K) hvert år slik at hele summen må ganges med denne konstanten. Da sitter vi igjen med med :

$$K\sum_{x=0}^{71} g(x)p(x) = KE[g(X)]$$

Som var det vi skulle bevise.

Regner vi ut summen ved hjelp av en liten kodesnutt(som vist under) får vi at E[g(X)] = 20.60

```
a0 = 100000/(1.03**(32))
X = np.arange(72)
gx = (1-(1/1.03)**(np.minimum(X,31)+1))/(1-(1/1.03))


EgX=np.sum(gx*px)
print(f"{EgX: .2f}")
```

h.)

Vi har :

$$K \cdot E[g(X)] = E[h(X)]$$

Og vi ønsker å regne ut K (den faste premieverdien) så vi dividerer begge sider med E[g(X)] slik at :

$$K = \frac{E[h(X)]}{E[g(X)]} = 24345{,}24$$

Altså er den årlige premien på 24345,24 kroner.