



Lista de Exercícios: Função Tangente Hiperbólica (tanh)

A função tangente hiperbólica $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ é uma função de ativação fundamental em machine learning que produz saídas no intervalo $[-1, 1]$, sendo centrada em zero. Aqui estão três exercícios práticos com cenários reais.

Exercício 1: Sistema de Análise de Sentimentos Centrado em Zero

Cenário: Uma empresa desenvolveu um sistema de análise de sentimentos que usa a função tanh para classificar comentários. Diferente da sigmoide, a tanh produz valores negativos para sentimentos negativos e positivos para sentimentos positivos, com zero representando neutralidade.

Dados dos comentários:

- Comentário A: "Produto excelente!" → score = 1.2
- Comentário B: "Não gostei muito" → score = -0.7
- Comentário C: "Produto OK" → score = 0.0
- Comentário D: "Fantástico!" → score = 2.3
- Comentário E: "Péssimo produto" → score = -1.5

Tarefas:

- Calcule $\tanh(x)$ para cada comentário usando $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- Converta os valores tanh para probabilidades usando $P = \frac{\tanh(x) + 1}{2}$
- Classifique cada comentário baseado no sinal da saída tanh

Resolução Passo a Passo:

Passo 1: Calcular $\tanh(x)$ para cada score

Comentário A (x = 1.2):

$$e^{1.2} = 3.320, \quad e^{-1.2} = 0.301$$
$$\tanh(1.2) = \frac{3.320 - 0.301}{3.320 + 0.301} = \frac{3.019}{3.621} = 0.834$$

Comentário B (x = -0.7):

$$e^{-0.7} = 0.497, \quad e^{0.7} = 2.014$$
$$\tanh(-0.7) = \frac{0.497 - 2.014}{0.497 + 2.014} = \frac{-1.517}{2.511} = -0.604$$

Comentário C (x = 0.0):

$$e^0 = 1, \quad e^{-0} = 1$$

$$\tanh(0) = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

Comentário D (x = 2.3):

$$e^{2.3} = 9.974, \quad e^{-2.3} = 0.100$$

$$\tanh(2.3) = \frac{9.974-0.100}{9.974+0.100} = \frac{9.874}{10.074} = 0.980$$

Comentário E (x = -1.5):

$$e^{-1.5} = 0.223, \quad e^{1.5} = 4.482$$

$$\tanh(-1.5) = \frac{0.223-4.482}{0.223+4.482} = \frac{-4.259}{4.705} = -0.905$$

Passo 2: Converter para probabilidades

- A: $P = \frac{0.834+1}{2} = 0.917$ (91.7%)
- B: $P = \frac{-0.604+1}{2} = 0.198$ (19.8%)
- C: $P = \frac{0+1}{2} = 0.500$ (50.0%)
- D: $P = \frac{0.980+1}{2} = 0.990$ (99.0%)
- E: $P = \frac{-0.905+1}{2} = 0.047$ (4.7%)

Passo 3: Classificação

- A: $0.834 > 0 \rightarrow$ **POSITIVO**
- B: $-0.604 < 0 \rightarrow$ **NEGATIVO**
- C: $0 = 0 \rightarrow$ **NEUTRO**
- D: $0.980 > 0 \rightarrow$ **POSITIVO**
- E: $-0.905 < 0 \rightarrow$ **NEGATIVO**

Exercício 2: Sistema de Controle de Motor (Saturação Suave)

Cenário: Um sistema de controle usa a função tanh para gerar comandos de motor limitados entre -1 e +1. Valores positivos giram no sentido horário, negativos no anti-horário. A tanh fornece saturação suave, evitando mudanças bruscas.

Erros de posição detectados:

- Erro A: +0.5 (pequeno erro positivo)
- Erro B: -0.8 (erro negativo moderado)
- Erro C: +3.0 (grande erro positivo)
- Erro D: -2.5 (grande erro negativo)
- Erro E: +0.1 (erro muito pequeno)

Tarefas:

- Calcule o comando de motor $u = \tanh(\text{erro})$ para cada caso
- Analise o efeito da saturação para erros grandes vs pequenos

c) Compare com um sistema que usasse saturação abrupta (limitação em ± 1)

Resolução Passo a Passo:

Passo 1: Calcular comandos de motor

Erro A (x = 0.5):

$$\tanh(0.5) = \frac{e^{0.5} - e^{-0.5}}{e^{0.5} + e^{-0.5}} = \frac{1.649 - 0.607}{1.649 + 0.607} = 0.462$$

Erro B (x = -0.8):

$$\tanh(-0.8) = \frac{e^{-0.8} - e^{0.8}}{e^{-0.8} + e^{0.8}} = \frac{0.449 - 2.226}{0.449 + 2.226} = -0.664$$

Erro C (x = 3.0):

$$\tanh(3.0) = \frac{e^{3.0} - e^{-3.0}}{e^{3.0} + e^{-3.0}} = \frac{20.086 - 0.050}{20.086 + 0.050} = 0.995$$

Erro D (x = -2.5):

$$\tanh(-2.5) = \frac{e^{-2.5} - e^{2.5}}{e^{-2.5} + e^{2.5}} = \frac{0.082 - 12.182}{0.082 + 12.182} = -0.987$$

Erro E (x = 0.1):

$$\tanh(0.1) = \frac{e^{0.1} - e^{-0.1}}{e^{0.1} + e^{-0.1}} = \frac{1.105 - 0.905}{1.105 + 0.905} = 0.100$$

Passo 2: Análise da saturação

Erro	Comando	Interpretação
A: +0.5	+0.462	Moderado horário
B: -0.8	-0.664	Moderado anti-horário
C: +3.0	+0.995	Quase saturação (máxima)
D: -2.5	-0.987	Quase saturação (mínima)
E: +0.1	+0.100	Fraco horário

Passo 3: Vantagens da saturação suave

- **Continuidade:** Sem mudanças bruscas no comando
- **Diferenciabilidade:** Gradiente sempre definido
- **Proporcionalidade:** Erros pequenos geram comandos proporcionais

Exercício 3: Neurônio em Rede Neural (Camadas Ocultas)

Cenário: Um neurônio em uma camada oculta de rede neural recebe diferentes entradas ponderadas e usa tanh como função de ativação. A saída centrada em zero facilita o treinamento da próxima camada.

Entradas do neurônio (após soma ponderada + bias):

- Entrada 1: 1.8 (ativação forte positiva)
- Entrada 2: -1.2 (ativação moderada negativa)

- Entrada 3: 0.3 (ativação fraca positiva)
- Entrada 4: 4.0 (entrada muito alta)
- Entrada 5: -3.2 (entrada muito baixa)

Tarefas:

- Calcule a ativação $\tanh(x)$ para cada entrada
- Classifique o nível de ativação (BAIXO < 0.5, ATIVO 0.5-0.9, SATURADO > 0.9)
- Explique por que tanh é preferível à sigmoide em camadas ocultas

Resolução Passo a Passo:

Passo 1: Calcular ativações

Entrada 1 (x = 1.8):

$$\tanh(1.8) = \frac{e^{1.8} - e^{-1.8}}{e^{1.8} + e^{-1.8}} = \frac{6.050 - 0.165}{6.050 + 0.165} = 0.947$$

Entrada 2 (x = -1.2):

$$\tanh(-1.2) = \frac{e^{-1.2} - e^{1.2}}{e^{-1.2} + e^{1.2}} = \frac{0.301 - 3.320}{0.301 + 3.320} = -0.834$$

Entrada 3 (x = 0.3):

$$\tanh(0.3) = \frac{e^{0.3} - e^{-0.3}}{e^{0.3} + e^{-0.3}} = \frac{1.350 - 0.741}{1.350 + 0.741} = 0.291$$

Entrada 4 (x = 4.0):

$$\tanh(4.0) = \frac{e^{4.0} - e^{-4.0}}{e^{4.0} + e^{-4.0}} = \frac{54.598 - 0.018}{54.598 + 0.018} = 0.999$$

Entrada 5 (x = -3.2):

$$\tanh(-3.2) = \frac{e^{-3.2} - e^{3.2}}{e^{-3.2} + e^{3.2}} = \frac{0.041 - 24.533}{0.041 + 24.533} = -0.997$$

Passo 2: Classificação dos níveis

Entrada	Ativação	Nível
1	+0.947	SATURADO
2	-0.834	ATIVO
3	+0.291	BAIXO
4	+0.999	SATURADO
5	-0.997	SATURADO

Passo 3: Vantagens da tanh sobre sigmoide em camadas ocultas

Comparação: tanh vs sigmoide

Entrada	Sigmoide	Tanh	Diferença
-2	0.119	-0.964	Centrado em zero
-1	0.269	-0.762	Simetria
0	0.500	0.000	Zero real
1	0.731	+0.762	Maior gradient
2	0.881	+0.964	Saturação balanceada

Vantagens da tanh:

- 1. **Centrada em zero:** Média das ativações próxima de zero
- 2. **Simétrica:** Trata valores positivos e negativos igualmente
- 3. **Gradiente maior:** Derivada máxima é 1 vs 0.25 da sigmoide
- 4. **Convergência mais rápida:** Facilita otimização em redes profundas

Propriedades Importantes da Função Tanh

Valores de Referência:

Input (x)	tanh(x)	Probabilidade P	Interpretação
-3	-0.995	0.002	Quase certeza negativa
-2	-0.964	0.018	Forte negativo
-1	-0.762	0.119	Moderado negativo
0	0.000	0.500	Ponto neutro
1	+0.762	0.881	Moderado positivo
2	+0.964	0.982	Forte positivo
3	+0.995	0.998	Quase certeza positiva

Características Fundamentais:

- 1. **Intervalo:** Saída sempre em [-1, +1]
- 2. **Centrada em zero:** $f(0) = 0$, facilitando aprendizado
- 3. **Simétrica:** $f(-x) = -f(x)$ (função ímpar)
- 4. **Derivada:** $f'(x) = 1 - \tanh^2(x)$, máxima em $x=0$
- 5. **Saturação suave:** Transição gradual para ± 1

Quando Usar a Tanh:

- **Camadas ocultas:** Especialmente em RNNs e MLPs
- **Sistemas de controle:** Quando precisa de saída limitada e centrada
- **Classificação com interpretação bipolar:** Positivo/negativo em torno de zero
- **Quando zero-centricidade é importante:** Para facilitar otimização

A função tanh é, portanto, uma excelente escolha quando você precisa de uma função de ativação que combine as vantagens da sigmóide (saída limitada, diferenciabilidade) com as vantagens de ser centrada em zero e simétrica!

```
<div style="text-align: center">✱✱</div>
```

1. <https://eailab.labmax.org/2024/02/28/funcao-de-ativacao-o-nucleo-da-composicao-de-neuronios-artificiais/>
2. <https://matheusfacure.github.io/2017/07/12/activ-func/>
3. <https://aiplanet.com/learn/getting-started-with-deep-learning/neural-networks-for-classification-problems/256/binary-classification-neural-networks>
4. <https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/08/21082013Marcio-de-Castro-Alhadas.pdf>
5. <https://translate.google.com/translate?u=https%3A%2F%2Flatironschool.com%2Fblog%2Fhyperbolic-tangent-activation-for-neural-networks%2F&hl=pt&sl=en&tl=pt&client=srp>
6. <https://www.geeksforgeeks.org/machine-learning/activation-functions-neural-networks/>
7. <https://translate.google.com/translate?u=https%3A%2F%2Fwww.cuemath.com%2Fcalculus%2Fhyperbolic-functions%2F&hl=pt&sl=en&tl=pt&client=srp>
8. <https://www.deeplearningbook.com.br/funcao-de-ativacao/>
9. <https://www.kaggle.com/code/avadhutvarvatkar/activations-functions-in-deep-learning>
10. <https://pt.scribd.com/document/602003137/Aula-8-Derivada-das-funcoes-hiperbolicas>
11. <https://translate.google.com/translate?u=https%3A%2F%2Fmedium.com%2Fai-enthusiast%2Fmasterin-g-tanh-a-deep-dive-into-balanced-activation-for-machine-learning-4734ec147dd9&hl=pt&sl=en&tl=pt&client=srp>
12. <https://stackoverflow.com/questions/79270936/activation-function-tanhz-in-binary-classification>
13. <https://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/download/170/201>
14. <https://fatosmath.wordpress.com/wp-content/uploads/2018/05/funcoeshiperbolicas.pdf>
15. <https://blog.grancursosonline.com.br/funcoes-de-ativacao-de-redes-neurais-e-como-sao-cobradas-em-concursos/>
16. <https://community.deeplearning.ai/t/better-activation-functions-tanh-sigmoid/224869>
17. <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/9335/2/arquivototal.pdf>
18. <https://iaexpert.academy/2020/05/25/funcoes-de-ativacao-definicao-caracteristicas-e-quando-usar-cada-uma/>
19. <https://towardsdatascience.com/how-to-choose-the-right-activation-function-for-neural-networks-3941ff0e6f9c/>

20. <https://sites.icmc.usp.br/apperon/exerc-funcoes-hiperbolicas.pdf>