STK1100 Oblig 1

Jonas Thoen Faber

February 14, 2020

Oppgave 1

a)

Først må vi finne totalt antall mulige utfall:

$$N_{\text{total antall utfall}} = 11^5$$

Finner deretter antall ordnede utvalg uten tilbakelegging der rekkefølgen ikke spiller noe rolle:

$$N_{\text{gunstige utfall}} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

Sannsynligheten for at hver av de 5 personene går av på ulik etasje blir da:

$$P(5 \text{ i forskjellige etasjer}) = \frac{N_{\text{gunstige utfall}}}{N_{\text{total utfall}}} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{11^5} \approx \underline{\underline{0.344}}$$

b)

Sannsynligheten for at ingen går av i samme etasje fant vi i oppgave a). Altså finner vi sannsynligheten for at minst to går av i samme etasje på følgende måte:

$$P(\text{minst to går av i samme etasje}) = 1 - P(5 \text{ i forskjellige etasjer}) = \underline{\underline{0.656}}$$

c)

Vi har 5 personer som kan rangeres på 5! ulike måter og vi vet at 3 av personene går av i 8. etasje. Resten skal av i en annen tilfeldig etasje. Antall uordnere utvalg er gitt ved binomialkoeffisienten på følgende måte:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \underline{\underline{10}}$$

d)

Først finner vi sannsynligheten for at komponent 1 eller 2 fungerer. I tillegg antar vi at komponentene er uavhengige av hverandre. Dette gir:

$$P(1 \cup 2) = P(1) + P(2) - P(1 \cap 2)$$

$$= P(1) + P(2) - P(1) \cdot P(2) = 2 \cdot 0.9 - 0.9^2 = 0.99$$

Samme sannsynlighet gjelder for komponent 3 og 4:

$$P(3 \cup 4) = P(1 \cup 2) = 0.99$$

Ser vi på komponentene 3 og 4 så er de seriekoblet med komponent 5. Altså må minst en av komponent 3 og 4 i tillegg til komponent 5 fungere for at alarmen skal funke. Vi får da:

$$P((3 \cup 4) \cap 5) = P(3 \cup 4) \cdot P(5) = 0.99 \cdot 0.9 = 0.891$$

Til slutt har vi at øvre gren (komponent 1 og 2) er parallellkoblet med nedre gren (komponent 3, 4 og 5). For å gjøre dette noe enklere kaller vi øvre gren A og nedre gren B. Vi får:

$$P(\text{Alarmen funker}) = P(\text{A} \cup \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A} \cap \text{B})$$

$$= P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A}) \cdot P(\text{B}) = 0.99 + 0.891 - 0.99 \cdot 0.891 = \underline{\underline{0.9989}}$$

Oppgave 2

Vi har to typer hendelser der A er at Martin har husket på å mate Doffen og B der Doffen har daua. Vi har gitt at Doffen har daua og ønsker og finne sannsynligheten for at Martin glemte å mate fisken. Vi bruker Bayes setning siden vi har at A og A' er disjunkte og at $A \cup A' = S$. Dette gir oss uttrykket:

$$P(A'|B) = \frac{P(B|A') \cdot P(A')}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A') \cdot P(A')}$$

Vi kjenner alle uttrykkene fra oppgaveteksten som gir oss følgende:

$$P(A'|B) = \frac{1/2 \cdot 1/4}{9/10 \cdot 3/4 + 1/2 \cdot 1/4} = \frac{1/8}{27/40 + 1/8} = \frac{1/8}{32/40} = \frac{5}{\underline{\underline{32}}}$$

Oppgave 3

a)

En kumulativ fordelingsfunksjon er gitt ved at man summerer opp sannsynlighetene fra et initial punkt opp til et annet ønsket punkt. I dette tilfelle fra der hvor mannen er 35 år og opp mot en viss alder. Vi har et uttrykk for sannsyligheten for at mannen dør det neste året gitt som q_x. Dersom vi ser på uttrykket gitt i oppgaven

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - \prod_{y=0}^{x} (1 - q_{35+y})$$

så ser vi at produktleddene vil være nært 1 i starten dersom vi antar at q_{35+y} er liten til å begynne med. Den kumulative fordelingsfunksjonen er altså omtrent lik 0 i starten før den gradvis går mot 1 ettersom sannsynligheten for dødelighet endres med årene. Det funksjonen gjør er å ta produktet med sannsylighetene for at mannen overlever etter x år og trekker det fra 1. Dette gir oss da den kumulative fordelingen.

b)

$$F(x) - F(x-1) = P(X \leq x) - P(X \leq x-1)$$

$$= 1 - \prod_{y=0}^{x} (1 - q_{35+y}) - \left(1 - \prod_{y=0}^{x-1} (1 - q_{35+y})\right)$$

$$= - \prod_{y=0}^{x} (1 - q_{35+y}) + \prod_{y=0}^{x-1} (1 - q_{35+y})$$

$$= -(1 - q_{35+x}) \cdot \prod_{y=0}^{x-1} (1 - q_{35+y}) + \prod_{y=0}^{x-1} (1 - q_{35+y})$$

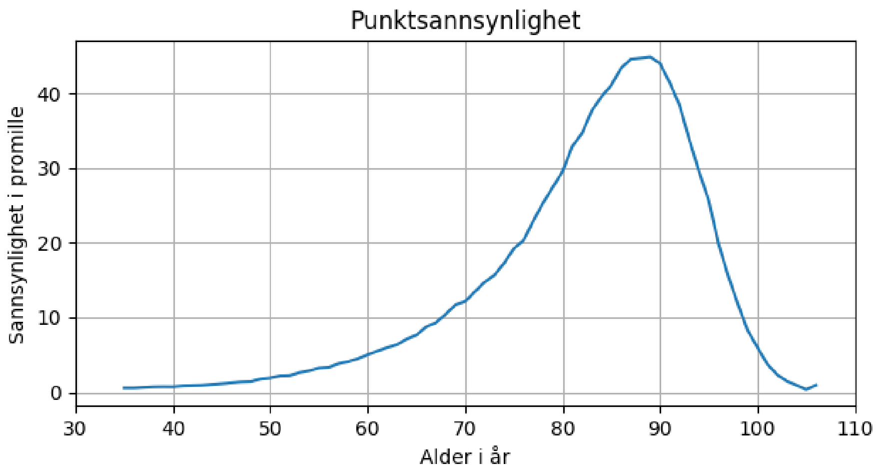
$$= (1 - 1 + q_{35+x}) \cdot \prod_{y=0}^{x-1} (1 - q_{35+y})$$

$$= q_{35+x} \cdot \prod_{y=0}^{x-1} (1 - q_{35+y})$$

Uttrykket som er gitt i produktsekvensen er sannsynligheten for at personen overlevde de foregående årene. Disse må være inkludert dersom man skal kunne regne ut sannsynligheten for at mannen dør et gitt år. Dette gir oss da uttrykket for punktsannsynligheten:

$$p(x) = F(X = x) = F(x) - F(x-1)$$

c)



Figur 1: Punktsannsynlighet i alderen 35 til 106 år.

Vi ser fra Figur 1 hvordan hvordan punktsannsynligheten utvikler seg med alderen på mannen. Den er størst ved omtrent 89 års alderen.

d)

$h(x) = 0$ for $X \leq 31$ fordi mannen vil ikke få utbetalt noe de første 31 årene. Pansjonsutbetalingene fra forsikringsselskapet vil ikke mannen er fylte 67 år. Nåverdien må da være lik 0.

Vi antar i denne oppgaven at alle pengene som går til pensjonsordning blir betalt straks mannen er fylte 35 år. Dersom verdien om k år skal være lik 100 000, må mannen betale inn 100 000 / 1.03^k det gjeldende året dersom renta er på 3 %. Utbetalingene skjer ikke før mannen er fylt 67 år, altså er $X \geq 32$. Dersom vi ønsker å finne den fulle nåverdien mannen må betale til forsikringsselskapet, må vi summere over alle verdier mannen vil få utbetalt dersom han blir X år gammel. Dette er gitt ved:

$$h(X) = \sum_{k=32}^{X} \frac{100000}{1.03^k}$$

som vist i oppgaven. Dette kan skrives om:

$$h(X) = \frac{100000}{1.03^{32}} + \frac{100000}{1.03^{33}} + ... + \frac{100000}{1.03^{X}}$$

$$= \frac{100000}{1.03^{32}} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.03} + \frac{1}{1.03^2} + ... + \frac{1}{1.03^{X-32}}\right)$$

$$= \frac{100000}{1.03^{32}} \cdot \sum_{k=0}^{X-32} \frac{1}{1.03^k}$$

$$= \frac{100000}{1.03^{32}} \cdot \sum_{k=0}^{X-32} \left(\frac{1}{1.03}\right)^k$$

Vi kjenner igjen summen som en geometrisk rekke som gir oss:

$$h(X) = \sum_{k=32}^{X} \frac{100000}{1.03^k} = \frac{100000}{1.03^{32}} \cdot \frac{1-(1/1.03)^{X-31}}{1-1/1.03}$$

e)

Det generelle uttrykket for forventningsverdi er gitt ved følgende formel:

$$E(X) = \sum_{X \in D} x \cdot p(x)$$

der X er en diskret stokastisk variabel og $p(x) = p(X = x)$ for $x \in D$ er punktsannsynligheten. Siden X kan være et tifeldig tall, kan vi erstatte X med $h(X)$ da dette er nåverdien som er avhengig av X. D er domenet det er snakk om, i dette tilfellet fra aldersspennet 35 år til 106 år. Da får vi uttrykket:

$$E[h(X)] = \sum_{x=0}^{71} h(x)p(x)$$

Vi bruker Python for å finne forventningsverdien til $h(x)$. Etter å ha kodet dette i Python, får vi at $E[h(X)] = 495929.1$ kroner for $x \in (0, 71)$.

f)

Det er som nevnt renter på innbetalingene som stiger med antall år. Dersom mannen sparer K kroner det året han blir 35 år, vil rentene på disse pengene ha $K \cdot 1.03^k$ i verdi etter k år. Vi ser på summen av alle premieinnbetalingene med renter til året han fyller 67 år:

$$K \cdot 1.03^{31} + K \cdot 1.03^{30} + ... + K \cdot 1.03^0$$

Siden verdien på K stiger med årene, betyr det at nåverdien synker med årene. Altså får vi at nåverdiene er gitt ved:

$$K \cdot \frac{1}{1.03^{31}} + K \cdot \frac{1}{1.03^{30}} + ... + K \cdot \frac{1}{1.03^0}$$

$$K \cdot \left(\frac{1}{1.03^{31}} + \frac{1}{1.03^{30}} + ... + \frac{1}{1.03^0}\right)$$

$$K \cdot \sum_{k=0}^{31} \frac{1}{1.03^k}$$

Dette gjelder da så lenge vi antar at mannen blir minst 66 år gammel:

$$K \cdot \sum_{k=0}^{\min(X,31)} \frac{1}{1.03^k}$$

Vi kjenner denne summen som en geometrisk rekke siden kvotienten er mindre enn 1. Utvider vi summen får vi da:

$$K \cdot \sum_{k=0}^{\min(X,31)} \frac{1}{1.03^k} = K \cdot \frac{1-(1/1.03)^{\min(X,31)+1}}{1-1/1.03} = K \cdot g(X)$$

Som var det vi skulle forklare.

g)

Siden nåverdien $K \cdot g(X)$ avhenger kun av den stokastiske variabelen X, betyr det at nåverdien også er en stokastisk variabel. Premieinnbetalingene slutter i det mannen fyller 67 år som vil si at for $X \geq 32$, så er $K \cdot g(X) = a$ der a er den siste innbetalingsverdien før mannen ble pansjonert. Vi kan dermed utvide summasjonen fra 35 til 106 år slik at vi får forventning til nåverdien av samlede premieinnbetalinger:

$$E[g(X)] = \sum_{x=0}^{71} g(x)p(x)$$

som var det vi skulle forklare. Vi finner forventningsverdien ved hjelp av Python nok en gang. Vi får da at $E[g(X)] = 20.37$ for $x \in (0, 71)$.

h)

$$K \cdot E[g(X)] = E[h(X)]$$

$$\Rightarrow K = \frac{E[h(X)]}{E[g(X)]} = \frac{495929.1}{20.37} = \underline{\underline{24346.1}}$$

Kode som tilhører oppgave 3

```
import numpy as np, matplotlib.pyplot as plt

data = np.loadtxt("dodssannsynlighet-felles.txt",skiprows=1)
sorted = np.transpose(data)

alder = sorted[0]
dod = sorted[1]/1000


############ oppgave 3c) ############
def punktsannsynlighet(x,q):
    if x==0:
        return q[x]
    else:
        prod=(1-q[0])
        for y in range(x-1):
            prod *= (1-q[y+1])
        return q[x]*prod

pkt_san = np.zeros(len(alder))
for i in range(len(alder)):
    pkt_san[i] = punktsannsynlighet(int(alder[i]),dod)

# Sum av punktsannsynlighet skal vaere lik 1. Sjekker om det er
# sant i etterfolgende print
print("Sum over punktsannsynlighetene: ", sum(pkt_san))

plt.plot(alder[35:],pkt_san[35:]*1000)
plt.grid(); plt.xlabel("Alder i aar"); plt.ylabel(r"Sannsynlighet i promille")
plt.title("Punktsannsynlighet")
#plt.show()


############ oppgave 3e) ############
def h(X):
    if X<32:
        return 0
    else:
        return (100000/1.03**32) * (1-(1/1.03)**(X-31)) / (1-1/1.03)

E_h = 0
for i in range(72):
    E_h += h(i)*pkt_san[i+35]

print("Forventet naaverdi av pensjonsutbetaling: %.1f" % E_h)

############ oppgave 3g) ############
def g(X):
    if X<=31:
        return (1-(1/1.03)**(X+1)) / (1-1/1.03)
    else:
        return (1-(1/1.03)**(32)) / (1-1/1.03)

```

```python
E_g = 0
for i in range(72):
    E_g += g(i)*pkt_san[i+35]

print("Forventet naaverdi av premieinnbetalingene: %.2f" % E_g)
plt.show()


"""
Utskrift fra terminal:
Sum over punktsannsynlighetene:  1.0
Forventet naaverdi av pensjonsutbetaling: 495929.1
Forventet naaverdi av premieinnbetalingene: 20.37
"""
```