

Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum I



Úloha č. III

Název úlohy: Studium proudění viskózní kapaliny trubicemi kruhového průřezu

Jméno: Jonáš Venc

Datum měření: 26. 2. 2024

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0–2	
Výsledky a zpracování měření	0–9	
Diskuse výsledků	0–4	
Závěr	0–1	
Použitá literatura	0–1	
Celkem	max. 17	

Posuzoval:

dne:

1 Pracovní úkoly

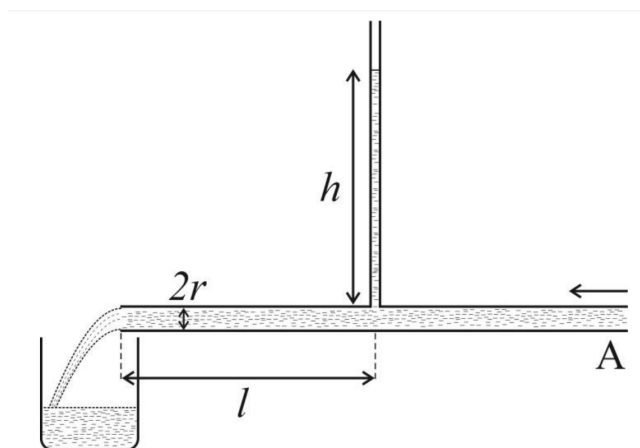
1. Pro tři vodorovné trubice s různými poloměry kruhového průřezu, které jsou opatřeny manometry, změřte závislost objemového průtoku Q_V na úbytku statického tlaku Δp na vyšetřované délce trubice l ve směru proudění.
2. Sestrojte graf závislosti $Q_V = Q_V(p)$.
3. Ze směrnice závislosti $Q_V = Q_V(p)$ v oblasti laminárního proudění určete poloměr trubice.
4. Upravený poloměr dosadte do vztahů pro výpočet Re a k .
5. Sestrojte graf závislosti $k = k(Re)$, kde k je součinitel odporu trubice a Re je Reynoldsovo číslo. Do grafu vynesete teoretickou závislost pro laminární i turbulentní proudění.

2 Teoretická část

Pro studium závislosti objemového průtoku Q_V na úbytku statického tlaku Δp použijeme aparaturu znázorněnou na obr. 1. Díky této závislosti určíme i oblasti laminárního a turbulentního proudění. Změnou rychlosti proudění vody v trubici s milimetrovou stupnicí se mění výška hladiny v manometru. Úbytek statického tlaku je dán vztahem

$$\Delta p = h\rho g, \quad (1)$$

kde ρ je hustota kapaliny a g je místní tíhové zrychlení.



Obr. 1: Schéma zařízení.

Objemový průtok je dán vztahem

$$Q_V = \frac{V}{t}, \quad (2)$$

kde V je objem kapaliny proteklé trubicí za čas t .

V oblasti laminárního proudění pro objemový průtok platí Poiseuillova rovnice

$$Q_V = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \Delta p, \quad (3)$$

kde r je vnitřní poloměr, l délka trubice a η dynamická viskozita proudící kapaliny.

Proudění je laminární pokud nepřekročí kritickou hodnotu Reynoldsova čísla

$$Re = \frac{r v_s}{\eta}, \quad (4)$$

kde v_s je střední rychlost proudění v trubici. Tato oblast je však určena pouze přibližně.

v_s lze vyjádřit jako

$$v_s = \frac{Q_V}{\pi r^2} \quad (5)$$

Úpravou lze součinitel odporu trubice k na základě naměřených hodnot vyjádřit jako

$$k = \frac{2r^5 \pi^2 \Delta p}{\rho Q_V^2 l} \quad (6)$$

Pro laminární proudění platí teoretický vztah

$$k = \frac{16}{Re}, \quad (7)$$

kde k je součinitel odporu trubice.

Pro trubice s hladkými stěnami lze použít v případě turbulentního proudění lze použít vztah:

$$k \approx \frac{0,133}{\sqrt[4]{Re}} \quad (8)$$

3 Výsledky a zpracování měření

3.1 Laboratorní podmínky

Měření bylo prováděno za laboratorních podmínek uvedených v tabulce 1. Pro naše měření je ale důležité, aby hodnoty (jako například teplota vody procházející trubicí) byly co možná nejvíce podobné po celou dobu.

Tab. 1: Laboratorní podmínky

t / °C	p / hPa	vlhkost / %RH
22,9(40)	977,2(20)	34,7(25)

3.2 Rozměry trubic

Vnitřní průměry trubic byly měřeny pomocí plastového posuvného měřidla. Udávaná přesnost je 0,05 mm, protože je ale měřidlo vyrobené z plastu a již lehce opotřebované, ve skutečnosti je přesnost nižší. V tabulce 2 jsou uvedeny výsledné průměry pro každou trubicí (A, B a C). Každá trubice byla změřena třikrát.

Tab. 2: Vnitřní průměry trubic

číslo měření	d_A/mm	d_B/mm	d_C/mm
1	2,1(5)	2,7(5)	3,1(5)
2	2,1(5)	2,5(5)	3,0(5)
3	2,1(5)	2,7(5)	3,0(5)
aritmetický průměr	2,1	2,6	3,0
standardní odchylka	0	0,1	0,1

Vzdálenosti l každé trubice jsou uvedeny v tabulce 3. Tato vzdálenost byla změřena svinovacím metrem s přesností 0,5 mm.

Tab. 3: Délky trubic

číslo měření	d_A/mm	d_B/mm	d_C/mm
1	251(5)	250(5)	202(5)
2	251(5)	250(5)	202(5)
3	251(5)	250(5)	202(5)
výsledek	251(5)	250(5)	202(5)

3.3 Teplota vody

Teplota vody byla změřena rtuťovým teploměrem třikrát - na začátku, v průběhu a na konci celého měření. Voda do trubice přitéká ze zásobníku na vodu, který je umístěn nad aparaturou. Je žádoucí, aby voda přitékala stále se stejnou teplotou, ale kvůli okolní teplotě lze předpokládat, že se v průběhu času postupně ohřívá.

Tab. 4: Teploty vody

t / °C
21,8(5)
22,1(5)
22,2(5)

Na základě této teploty lze určit podle tabulek hustotu vody, která je $997,818 \text{ kg m}^{-3}$. Pro naše měření bude však pracovat s hodnotou $997(1) \text{ kg m}^{-3}$.

3.4 Závislost objemového průtoku na úbytku tlaku

Závislost průtoku na tlaku byla měřena pomocí odměrného válce a ručních stopek. Množství vody a tedy její rychlost a změna tlaku byla regulována otočným kohoutem. Na začátku měření trubice byla stupnice manometru přibližně rozdělena do oblastí, kde dochází k laminárnímu proudění a kde ne. Díky to bylo možné naplánovat jednotlivá měření pro dostatek dat v laminární oblasti.

V určité výšce manometru byl nastaven určitý tlak a poté změřen objem kapaliny proteklý trubicí za čas. V oblasti turbulentního proudění hladina vody v manometru neustále oscilovala, proto byla výška v tomto případě nastavena tak, aby hladina oscilovala kolem měřené hodnoty. Díky poměrně přesné milimetrové stupnici manometru byla nejistota výšky h odhadnuta na 0,05 cm ve stabilní oblasti laminárního proudění, v ostatních případech na 0,2 cm. Čas byl měřen pomocí stopek, kde počítáme s odchylkou reakční doby člověka, která je rovna přibližně 0,2 s. Nejistota měření objemu byla určena 10 ml pro trubicí C, pro trubicí A a B 2 ml. Tato chyba u trubice C je dána použitím méně přesného odměrného válce.

Chyba Δp byla vypočtena pomocí metody přenosu chyb podle

$$\frac{\sigma_{\Delta p}}{\Delta p} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2} \quad (9)$$

Chyba objemového průtoku Q_V byla vypočtena také podle metody přenosu chyb jako

$$\frac{\sigma_{Q_V}}{\frac{V}{t}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2} \quad (10)$$

Tab. 5: Trubice A

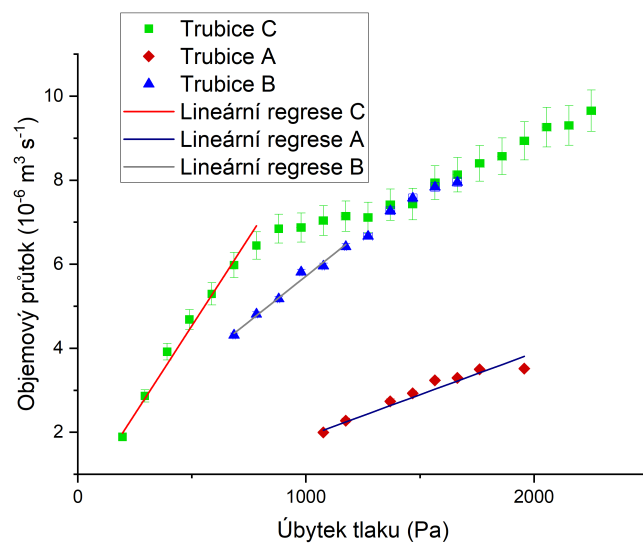
h / cm	V / ml	t / s	p / Pa	$Q_V/10^{-6}\frac{m^3}{s}$
11(0,05)	200(2)	100,1(2)	1077(5)	2,0(0,2)
12(0,05)	85(2)	37,3(2)	1175(5)	2,3(0,5)
14(0,05)	100(2)	36,5(2)	1370(5)	2,7(0,6)
15(0,05)	115(2)	39,3(2)	1468(5)	2,9(0,5)
16(0,05)	135(2)	41,7(2)	1566(5)	3,2(0,5)
17(0,05)	200(2)	60,7(2)	1664(5)	3,3(0,3)
18(0,05)	200(2)	57,2(2)	1762(5)	3,5(0,4)
20(0,05)	175(2)	49,8(2)	1958(5)	3,5(0,4)

Tab. 6: Trubice B

h / cm	V / ml	t / s	p / Pa	$Q_V/10^{-6}\frac{m^3}{s}$
7(0,05)	205(2)	47,5(2)	685(5)	4,3(0,5)
8(0,05)	205(2)	42,6(2)	783(5)	4,8(0,5)
9(0,05)	195(2)	37,7(2)	881(5)	5,2(0,6)
10(0,05)	200(2)	34,4(2)	979(5)	5,8(0,7)
11(0,05)	205(2)	34,4(2)	1077(5)	6,0(0,7)
12(0,05)	205(2)	31,9(2)	1175(5)	6,4(0,7)
13(0,2)	230(2)	34,5(2)	1273(20)	6,7(0,7)
14(0,2)	200(2)	27,5(2)	1370(20)	7,3(0,9)
15(0,2)	200(2)	26,4(2)	1468(20)	7,6(1)
16(0,2)	195(2)	24,9(2)	1566(20)	7,8(1)
17(0,2)	195(2)	24,5(2)	1664(20)	7,9(1)

Tab. 7: Trubice C

h / cm	V / ml	t / s	p / Pa	$Q_V/10^{-6}\frac{m^3}{s}$
23(0,2)	200(10)	20,7(2)	2251(20)	9,7(5)
22(0,2)	200(10)	21,5(2)	2154(20)	9,3(5)
21(0,2)	200(10)	21,6(2)	2056(20)	9,3(5)
20(0,2)	200(10)	22,4(2)	1958(20)	8,9(5)
19(0,2)	200(10)	23,3(2)	1860(20)	8,6(4)
18(0,2)	200(10)	23,8(2)	1762(20)	8,4(4)
17(0,2)	200(10)	24,6(2)	1664(20)	8,1(4)
16(0,2)	200(10)	25,2(2)	1566(20)	7,9(4)
15(0,2)	200(10)	26,9(2)	1468(20)	7,4(4)
14(0,2)	200(10)	27,0(2)	1370(20)	7,4(4)
13(0,2)	200(10)	28,1(2)	1273(20)	7,1(4)
12(0,2)	200(10)	28,0(2)	1175(20)	7,1(4)
11(0,2)	200(10)	28,4(2)	1077(20)	7,0(4)
10(0,2)	200(10)	29,1(2)	979(20)	6,9(3)
9(0,05)	200(10)	29,2(2)	881(5)	6,8(3)
8(0,05)	200(10)	31,0(2)	783(5)	6,5(3)
7(0,05)	200(10)	33,4(2)	685(5)	6,0(3)
6(0,05)	200(10)	37,8(2)	587(5)	5,3(3)
5(0,05)	200(10)	42,7(2)	489(5)	4,7(2)
4(0,05)	200(10)	51,1(2)	392(5)	3,9(2)
3(0,05)	200(10)	69,8(2)	294(5)	2,7(1)
2(0,05)	200(10)	105,8(2)	196(5)	1,9(1)



Obr. 2: Graf závislosti objemového průtoku na poklesu tlaku trubíc

U závislosti každé trubice byla určena lineární regrese v oblastech laminárního proudění. Tento fit je vážen nejistotou jednotlivých měření. Je zde určena i standardní chyba, která byla škálována s druhou odmocninou redukovaného chi-kvadrátu.

Podle vztahu (3) pro směrnici grafu platí

$$f = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \quad (11)$$

dynamická viskozita vody má při naší teplotě hodnotu

$$\eta = 950 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s} \quad (12)$$

Jednotlivé směrnice závislostí jsou

Trubice	Směrnice se standardní chybou / $\text{kg}^{-1}\text{m}^4\text{s}$
A	$(2,0 \pm 0,2) \cdot 10^{-9}$
B	$(4,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-9}$
C	$(8,4 \pm 0,4) \cdot 10^{-9}$

Ze vztahu (9) lze odvodit rovnost pro výpočet poloměru trubice ze směrnice

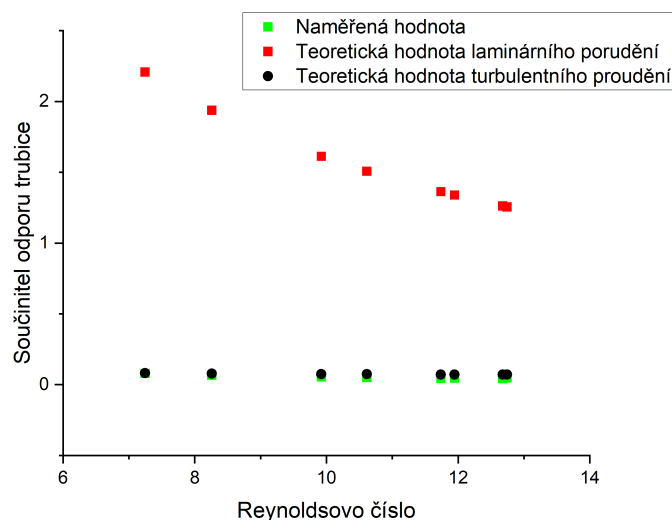
$$r = \sqrt[4]{\frac{8\eta fl}{\pi}} \quad (13)$$

Poté můžeme porovnat výsledky průměry trubice změřené plastovým posuvným měřidlem a výpočtem ze směrnice. Rovnost (11) nám dává pouze poloměr, proto musíme výsledek ještě vynásobit dvěma.

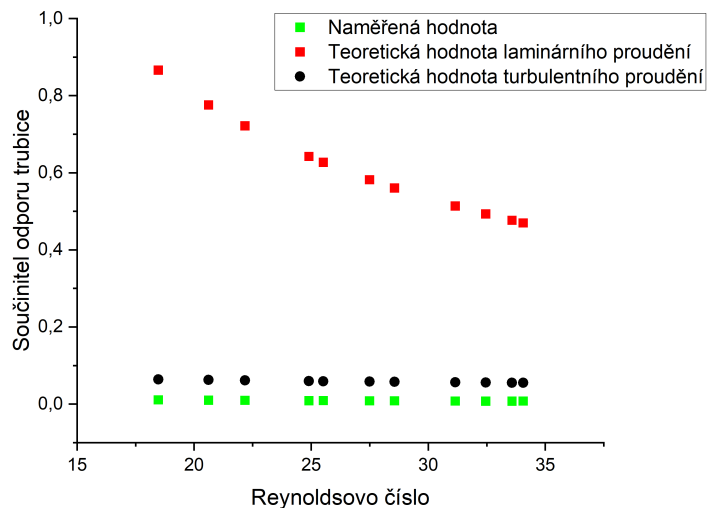
Trubice	Vnitřní průměr podle měřidla / mm	Vnitřní průměr ze směrnice / mm
A	2,1	2,1
B	2,6	2,5
C	3,0	2,8

3.5 Součinitel odporu trubice

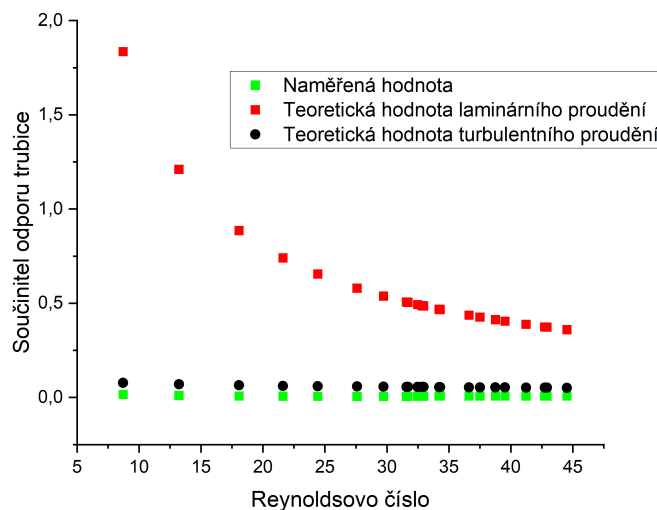
Nyní dosadíme upravený poloměr do vztahu (4) pro výpočet Reynoldsova čísla (6) pro součinitel odporu trubice. Tyto hodnoty pak porovnáme s teoretickou závislostí (7).



Obr. 3: Závislost součinitele odporu trubice A na Reynoldsově čísle



Obr. 4: Závislost součinitele odporu trubice B na Reynoldsově čísle



Obr. 5: Závislost součinitele odporu trubice C na Reynoldsově čísle

4 Diskuse výsledků

Z obrázku 2 je možné vyčíst do jaké výšky manometru leží jednotlivé výsledky na přímce a tedy mají laminární průběh.

Trubice A je ve všech měřených bodech laminární. To se shoduje i s pozorováním v průběhu měření. Na grafu je vidět bod s výškou 20 cm, který je jako jediný vzdálený od fitované přímky. Jedná se pravděpodobně o nepřesnost měření způsobená vysokou výškou hladiny vody v manometru, kde již může být zhoršená přesnost měření.

V trubici B leží body na přímce do výšky 12 cm, což se také plně shoduje s pozorováním. Bod ve výšce 10 cm také pravděpodobně nese malou nepřesnost měření.

V případě trubice C lineární regrese prochází celkem 7 body, což odpovídá do výšky 8 cm. Ve skutečnosti bylo pozorováno laminární chování (hladina vody v manometru neoscillovala) v oblasti s alespoň o 5 cm vyšší hladinou, než vychází z grafu. Bodů pro analýzu bylo změřeno dostatek, ale vylepšit tento experiment lze měřením objemu vody proteklou trubicí s vyšší přesností.

Avšak i přes nižší přesnost měření u trubice C je nejistota přijatelná, jak vidíme na obrázku 2. U trubic A a B je chyba měření tak malá, že ani nejsou na grafu vidět jednotlivé chybové úsečky.

V porovnání vnitřních průměrů trubic změřených nepřesným plastovým posuvným měřidlem a vypočteným ze směrnice grafu rozdíl vyšel překvapivě nízký, téměř zanedbatelný. Plastové měřidlo již bylo lehce opotřebované a trubice nemusela mít ve všech směrech stejný průměr. Díky těmto vynikajícím výsledkům jsme ověřili, že takto zvolené směrnice přímk jsou vhodné dobře odpovídající realitě.

U grafů závislosti součinitele odporu trubice na Reynoldsově čísla naměřené hodnoty spíše korelují s turbulentním prouděním.

5 Závěr

V tomto experimentu jsme úspěšně změřily závislosti objemových průtoků na úbytku statického tlaku všech třech trubic. Poté jsme sestrojili jednotlivé grafy a určili oblasti laminárního proudění. Jak ukazují výpočty, tyto oblasti byly vhodně zvoleny.

Grafy závislosti $k=k(\text{Re})$ porovnávají teoretickou hodnotu laminárního a turbulentního proudění s hodnotou naměřenou.

6 Použitá literatura

- [1] MFF. *Studijní text*: [Online]. [cit. 3. března 2024].
https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_103.pdf
- [2] MFF. *Dodatek k měření* [Online]. [cit. 3. března 2024].
https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_103_dodatek.pdf
- [3] ČÍŽEK, Jakub. *Chyby měření* [Online]. [cit. 3. března 2024].
<https://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/upf/cizek/index.html>