

1 Introduction

L'évaluation des performances s'intéresse au calcul des paramètres de performances d'un système. Ces paramètres sont de différents types et dépendent du système étudié, tels que : le débit, le nombre moyen d'une entité donnée, le temps d'attente, le temps de réponse, le taux d'utilisation des ressources, une probabilité donnée, etc.

1.1 Quand évaluer les performances d'un système ?

L'évaluation des performances d'un système peut se faire à deux niveaux : en conception ou en exploitation.

- **En conception** : cela signifie que le système n'existe pas encore et qu'il s'agit de le concevoir en respectant un cahier des charges.
- **En exploitation** : cette fois-ci, le système existe, mais on souhaite le modifier ou le tester en dehors de son point de fonctionnement normal, dans le but de répondre à de nouveaux objectifs.

1.2 Etapes de l'valuation des performances

- Une première étape de *modélisation* permettant de passer du système au modèle.
- Une seconde étape d'*analyse des performances* du modèle obtenu.

Un rebouclage est nécessaire si les performances obtenues ne sont pas celles espérées.

1.3 Formalismes de modélisation

Un modèle est une abstraction mathématique d'un système réel. Il peut être décrit soit par un ensemble d'équations ou à l'aide d'un formalisme mathématique.

Différents types de formalismes ont été développés, tels que : les chaînes de Markov, les files d'attente, les réseaux de Petri, etc.

2 CHAÎNES DE MARKOV *

2.1 Rappels Mathématiques

Soit Ω l'espace de toutes les réalisations possibles d'une expérience aléatoire. Chaque élément ω de Ω est appelé *événement élémentaire*. Pour le lancer d'un dé, on aura par exemple $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Variable aléatoire : Soit Ω un ensemble d'événements possibles d'une expérience aléatoire. On appelle **variable aléatoire** une application :

$$X : \Omega \rightarrow E$$

$$\omega \rightarrow X(\omega)$$

E est dit *espace d'états* de la variable aléatoire X . Il correspond à l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire X .

Remarque : Une variable aléatoire est dite *discrète* lorsque $E \subseteq \mathbb{Z}$ ou bien *continue* lorsque $E \subseteq \mathbb{R}$.

*, Pr. N. GHARBI, Département Informatique - USTHB

Exemple : Considérons l'expérience aléatoire résultant du lancer d'un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On associe à cette expérience la variable aléatoire définie par : $X(\omega) = -1$ si $\omega \leq 3$ et $X(\omega) = 1$ si $\omega \geq 4$. Ainsi, l'espace d'états $E = \{-1, 1\}$.

2.2 Processus stochastiques et chaînes de Markov

Les processus stochastiques sont des modèles mathématiques utiles pour la description des systèmes comportant des phénomènes de nature probabiliste (qui dépendent du hasard) en fonction d'un paramètre qui est généralement le temps.

Définition : Un processus stochastique $\{X(t), t \in T\}$ est une famille de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité, prenant des valeurs dans l'espace d'états E et indexée par le paramètre t . L'ensemble des temps T de même que E peuvent être discrets ou continus :

- Si $T \subseteq \mathbb{N}$ (ou dans \mathbb{Z}) et $E \subseteq \mathbb{N}$, on dit que le processus est à temps discret et à espace d'état discret, ou bien une *chaîne à temps discret*.
- Si $T \subseteq \mathbb{N}$ (ou dans \mathbb{Z}) et $E \subseteq \mathbb{R}$, on dit que le processus est à temps discret et à espace d'état continu.
- Si $T \subseteq [0, +\infty[$ (ou dans \mathbb{R}) et $E \subseteq \mathbb{N}$, on dit que le processus est à temps continu et à espace d'état discret, ou bien une *chaîne à temps continu*.
- Si $T \subseteq [0, +\infty[$ (ou dans \mathbb{R}) et $E \subseteq \mathbb{R}$, on dit que le processus est à temps continu et à espace d'état continu.

Processus markoviens : Un processus markovien est un processus stochastique qui satisfait la propriété **markovienne** ou encore la propriété de **perte de mémoire** définie comme suit :

$P[X(t_{n+1}) = x_{n+1} / X(t_n) = x_n, \dots, X(t_0) = x_0] = P[X(t_{n+1}) = x_{n+1} / X(t_n) = x_n]$ pour tout $t_{n+1} > t_n > t_{n-1} > \dots > t_1 > t_0$.

Ainsi, la propriété Markovienne définit un processus stochastique dont le comportement dans le futur (à l'instant t_{n+1}) ne dépend que de l'état courant (à l'instant t_n) et pas de l'historique. Ainsi, les processus markoviens sont des processus sans mémoire.

Chaîne de Markov : Une chaîne de Markov est un processus markovien à espace d'état discret, qui peut être fini ou infini mais dénombrable ($E \subseteq \mathbb{N}$).

- Si $T \subseteq \mathbb{Z}$ (ou \mathbb{N}), le processus est une chaîne de Markov à temps discret.
- Si $T \subseteq \mathbb{R}$ (ou $[0, +\infty[$), le processus est une chaîne de Markov à temps continu.

3 Chaînes de Markov à temps discret[†]

DÉFINITION :

Un processus stochastique $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à espace d'état discret et à temps discret, est une chaîne de Markov à temps discret (CMTD) si et seulement si :

$$P[X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0] = P[X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}]$$

où : X_n représente l'état du système à l'instant n .

Ainsi, la probabilité pour que la chaîne soit dans un certain état à la n ème étape du processus ne dépend que de l'état du processus à l'étape précédente (la $n-1$ ème étape) et pas des états dans lesquels il se trouvait aux étapes antérieures.

[†]. Pr. N. GHARBI, Département Informatique - USTHB

Nous nous intéressons particulièrement aux **CMTD homogènes** où les probabilités $P[X_n = j \mid X_{n-1} = i]$ ne dépendent pas de n . On peut alors définir la *probabilité de transition* d'un état i vers un état j , p_{ij} qui ne dépend pas de l'étape n :

$$p_{ij} = P[X_n = j \mid X_{n-1} = i] = P[X_1 = j \mid X_0 = i], \forall n \in \mathbb{N}.$$

$p_{ij} = p_{ij}^{(1)}$: représente la probabilité de transition de l'état i à l'état j en une étape.

Où : $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$.

Notons que $p_{ii} \geq 0$ car il est possible de rester dans un même état i entre deux étapes consécutives.

Une CMTD peut être décrite soit par :

- Un graphe orienté, dans lequel on associe à chaque état de la chaîne un noeud et à chaque transition possible entre deux états i et j avec $p_{ij} > 0$, un arc orienté pondéré par la probabilité de transition ;
- Une matrice de transition $P = \|p_{ij}\|$ qui est une matrice carrée d'ordre fini ou infini correspondant à la cardinalité de l'espace l'état et dont les éléments correspondent aux probabilités de transition entre états.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \dots & p_{1j} \dots \\ p_{21} & p_{22} \dots & p_{2j} \dots \\ \dots & & \\ p_{i1} & p_{i2} \dots & p_{ij} \dots \\ \dots & & \end{pmatrix}$$

La distribution de l'état initial :

L'état initial d'un système est défini par le vecteur des probabilités : $\pi^{(0)} = [\pi_0^{(0)}, \pi_1^{(0)}, \dots]$

où : $\pi_i^{(0)} = P[X_0 = i]$ est la probabilité que la chaîne se trouve à l'instant initial à l'état i .

Dire qu'initialement le système est dans l'état j signifie que $\pi_j^{(0)} = 1$ et $\pi_i^{(0)} = 0, \forall i \neq j$.

3.1 Analyse transitoire : ‡

L'analyse d'une CMTD au régime transitoire consiste à déterminer le vecteur des probabilités d'état $\pi^{(n)}$: $\pi^{(n)} = [\pi_i^{(n)}, i \in E]$

où : $\pi_i^{(n)} = P[X_n = i]$ est la probabilité que la chaîne se trouve à l'instant n (à la nième étape du processus) dans l'état i .

Ce vecteur des probabilités $\pi^{(n)}$ dépend :

- de la matrice de transition P ;
- du vecteur des probabilités d'état initiales $\pi^{(0)}$.

$$\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)}.P = \pi^{(n-2)}.P^2 = \dots = \pi^{(0)}.P^n$$

La matrice P comprend les probabilités de transition en une seule étape (p_{ij}), tandis que la matrice P^n comprend les probabilités de transition en n étapes ($p_{ij}^{(n)}$).

$p_{ij}^{(n)}$: représente la probabilité de transition de l'état i à l'état j en n étapes. Elle est définie par :

$$p_{ij}^{(n)} = P[X_{k+n} = j \mid X_k = i] = P[X_n = j \mid X_0 = i], \forall k \in \mathbb{N}.$$

‡. Pr. N. GHARBI, Département Informatique - USTHB

Ainsi, les équations de Kolmogorov peuvent être appliquées comme suit :

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(m)} \cdot p_{kj}^{(n-m)}, \quad 0 < m < n.$$

Cette relation exprime le fait que pour aller de l'état i à l'état j en n étapes, on peut aller de l'état i à l'état k en m étapes, puis aller de cet état k à l'état j en $n - m$ étapes, et ce pour tous les états k (d'où la somme).

3.2 Paramètres de performances d'une CMTD

Des paramètres de performance intéressants peuvent être obtenus à partir d'une CMTD, tels que :

- $p_{ij}^{(n)}$: la probabilité d'aller d'un état i à un état j en n étapes ;
- $f_{ii}^{(n)}$: la probabilité que le premier retour en i ait lieu n étapes après l'avoir quitté ;
- f_{ii} : la probabilité de revenir en i après l'avoir quitté : $f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$;
- M_i : le temps moyen (le nombre moyen d'étapes) de retour en i : $M_i = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)}$;
- f_{ij} : la probabilité d'aller d'un état i à un état j ;
- M_{ij} : le temps moyen nécessaire à la transition d'un état i à un état j d'aller d'un état i à un état j .

3.3 Classification des états §

Définition : CMTD irréductible

Une chaîne de Markov à temps discret est dite irréductible ssi de tout état i on peut atteindre tout état j (en un nombre fini d'étapes) : $\forall i, j \in E, \exists m \geq 1$ tel que $p_{i,j}^{(m)} \neq 0$
où : $p_{i,j}^{(m)}$ désigne la probabilité de transition de l'état i à l'état j en m étapes.

Ainsi, toute CMTD non irréductible (réductible) possède au moins une sous-chaîne absorbante.

Définition : CMTD apériodique

La période d'un état j est : $D(j) = \text{PGCD}\{k \geq 1/p_{j,j}^{(k)} > 0\}$. C'est le plus grand commun diviseur des longueurs des circuits allant de j à j .

La période d'une CMTD est égale au PGCD de la période de chacun de ses états. Elle est égale au PGCD de la longueur de tous les circuits du graphe.

Une CMTD est dite périodique si sa période est supérieure à 1 (et **apériodique** si sa période est égale à 1).

Définition : Un état i est dit :

- Transitoire si $f_{ii} < 1$;
- Récurrent si $f_{ii} = 1$; de plus il est :
 - Récurrent nul si le temps moyen de retour est infini : $M_i = \infty$;
 - Récurrent non nul (ou récurrent positif) si le temps moyen de retour est fini : $M_i < \infty$.

On aboutit ainsi à la double classification représentée dans Fig. 1.

Ainsi, une première classification des états d'une CMTD consiste à dire si l'état est apériodique ou bien périodique. Dans ce dernier cas, préciser sa période. Une deuxième classification consiste à montrer si l'état est transitoire, récurrent nul ou récurrent non nul.

§. Pr. N. GHARBI, Département Informatique - USTHB



Fig. 1: Classification des états d'une CMTD

Attention, on regarde toujours le premier retour.

Propriété : Tous les états d'une **CMTD irréductible** sont de même nature : soit tous transitoires, soit tous récurrents nuls, soit tous récurrents non nuls. Si de plus les états sont périodiques, ils sont tous de même période.

Propriété : Une CMTD finie ne peut comporter que des états transitoires ou récurrents non nuls. Ainsi, un état récurrent nul ne peut donc exister que dans une CMTD infinie.

Propriété : Tous les états d'une **CMTD irréductible finie** sont récurrents non nuls.

Remarque : Ces propriétés restent valables pour les sous-chaines absorbantes.

3.4 Calcul de la probabilité et du temps moyen de transition entre états :

La probabilité d'aller d'un état i à un état j est définie par :

$$f_{ij} = \sum_{k \neq j} p_{ik} \cdot f_{kj}.$$

Le temps moyen (nombre d'étapes moyen nécessaire à la transition d'un état i à un état j est défini par :

$$M_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} \cdot M_{kj}.$$

3.5 Analyse stationnaire : ¶

Lorsque le système aura fonctionné suffisamment longtemps ($n \rightarrow \infty$), il atteint le régime stationnaire défini par le vecteur limite ou le vecteur des probabilités stationnaires : $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(n)}$.

On verra dans la suite comment obtenir assez rapidement la valeur de π indépendamment de la distribution initiale et sans calculer les distributions intermédiaires $\pi^{(n)}$.

L'analyse du système en régime permanent nécessite la vérification au préalable de certaines propriétés de la chaîne de Markov ayant rapport avec l'ergodicité.

Propriété :

Une chaîne de Markov à temps discret finie est ergodique si et seulement si elle est apériodique et irréductible.

¶. Pr. N. GHARBI, Département Informatique - USTHB

Définition : Stationnarité

Une chaîne de Markov admet une distribution stationnaire sur ses états si elle est ergodique.

Ainsi, si la CMTD est ergodique, le système qu'elle modélise se stabilise après l'écoulement d'un temps infini et il existe toujours une seule distribution des probabilités stationnaires π qui est indépendante de la distribution initiale et qui est solution du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} \pi.P = \pi \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

Propriété : Dès l'instant où les probabilités stationnaires existent, on a :

$$\pi_j = \frac{1}{M_j}, \forall j \in E.$$

Où : M_j est le temps moyen de retour en j .

Propriété : Une CMTD à espace d'état infinie peut être ergodique.

4 Chaînes de Markov à temps continu ^{||}

Contrairement aux chaînes de Markov à temps discret, les CMTC permettent de représenter une évolution continue du temps.

DÉFINITION : Chaîne de Markov à temps continu

Un processus stochastique $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ à espace d'état discret (dénombrable finie ou infinie) et à temps continu est une chaîne de Markov à temps continu (CMTC) si et seulement si :

$P[X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}, X(t_{n-2}) = i_{n-2}, \dots, X(t_0) = i_0] = P[X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}], \forall n$
et $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n$.

En d'autres termes, la probabilité pour que la chaîne soit dans un certain état à l'instant t_n ne dépend donc que de l'état du processus à l'instant t_{n-1} et pas des états dans lesquels il se trouvait aux instants antérieurs (t_0, \dots, t_{n-2}) .

DÉFINITION :

Une chaîne de Markov à temps continu est caractérisée par :

- Le temps passé dans tout état i de la chaîne est une variable aléatoire distribuée selon la loi exponentielle de taux μ_i ;
- Les transitions d'un état i vers les autres états sont probabilistes.

Remarque : Dans les CMTC, nous considérons les taux de transition au lieu des probabilités de transition d'état. En fait, le temps de transition de l'état i à l'état j est distribué selon une loi exponentielle de taux $\mu_{ij} = \mu_i \cdot p_{ij}$, où p_{ij} est la probabilité de se rendre dans l'état j en quittant l'état i et le temps passé dans l'état i est exponentiel de taux μ_i .

4.0.1 Description des chaînes de Markov à temps continu

En pratique, une CMTC peut être décrite soit par un *diagramme de transition d'état* ou bien par une matrice des taux de transition dite : *générateur infinitésimal*

- Le diagramme de transition est un graphe orienté et libellé dont les sommets correspondent aux états de la chaîne de Markov et les arcs sont étiquetés par les taux de la distribution exponentielle associés à la transition d'un état à un autre.

^{||}. Pr. N. GHARBI, Département Informatique - USTHB

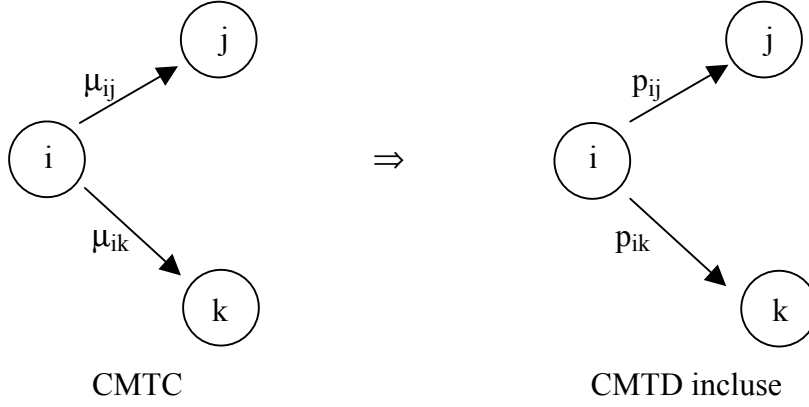


Fig. 2: CMTD incluse dans une CMTC

- Le générateur infinitésimal Q est une matrice carrée, d'ordre égal au nombre d'états de la chaîne. Un élément q_{ij} désigne le taux de transition μ_{ij} de l'état i vers l'état j , $i \neq j$. Les éléments diagonaux q_{ii} sont choisis, par définition, égaux à l'opposé de la somme des autres éléments de la ligne :

$$q_{ij} = \begin{cases} \mu_{ij} & \text{si } i \neq j \\ -\sum_{k=1, k \neq i}^n \mu_{ik} & \text{si } i = j \end{cases}$$

où :

- n correspond au nombre d'états de la chaîne de Markov.
- μ_{ij} désigne le taux de la distribution associée à la transition de l'état i à l'état j . S'il n'y a pas de transition, l'élément est nul.

4.0.2 Chaîne de Markov incluse **

Il existe un lien très fort entre les CMTC et les CMTD et ce lien peut être formalisé par la définition de la *CMTD incluse* dans la CMTC.

Définition : La CMTD incluse dans la CMTC de générateur infinitésimal Q , dont les termes q_{ij} ($i \neq j$) sont donnés par $\mu_{ij} = \mu_i \cdot p_{ij}$, est une chaîne de Markov à temps discret dont la matrice de transition a pour éléments les p_{ij} (voir Fig. 2).

Ainsi, si la CMTC est caractérisée par des taux de transition μ_{ij} entre états, les probabilités de transition de la chaîne incluse sont données par :

$$p_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\mu_i} = \frac{\mu_{ij}}{\sum_{k \neq i} \mu_{ik}}$$

Soit un état i d'une CMTC, avec une transition vers l'état j et une autre vers l'état k . Le temps passé dans l'état i est exponentiel de taux μ_i . Partant de l'état i , la variable aléatoire mesurant le temps de transition vers l'état j (resp. état k) suit une loi exponentielle de taux μ_{ij} (resp. μ_{ik}). On a alors :

$$\mu_i = \mu_{ij} + \mu_{ik}$$

$$\mu_{ij} = \mu_i \cdot p_{ij}$$

**. Pr. N. GHARBI, Département Informatique - USTHB

$$\begin{aligned}\mu_{ik} &= \mu_i \cdot p_{ik} \\ p_{ij} &= \frac{\mu_{ij}}{\mu_{ij} + \mu_{ik}} \\ p_{ik} &= \frac{\mu_{ik}}{\mu_{ij} + \mu_{ik}}\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour savoir lequel des états j ou k sera visité en sortant de i , on "tire" une réalisation particulière pour chacune de ces deux variables aléatoires (suivant respectivement des lois exponentielles de taux μ_{ij} et μ_{ik}). La plus petite des deux valeurs générées correspond à la transition qui sera effectivement empruntée.

De même que dans les CMTD, pour définir la nature d'un état, on calcule la probabilité d'y revenir un jour lorsqu'on le quitte. Or, pour obtenir cette valeur, on a besoin des probabilités de cheminement (transition) dans le graphe, d'où l'intérêt de la chaîne incluse, car le temps passé dans un état fournit seulement des informations sur la vitesse à laquelle on circule dans le graphe. Ainsi, la nature de tout i dans une CMTC est la même que celle du même état dans la CMTD incluse.

4.0.3 Conditions d'existence et calcul d'une distribution stationnaire^{††}

Pour confirmer l'existence du régime stationnaire, on doit vérifier si la CMTC est irréductible.

Propriété : Une CMTC finie et irréductible est ergodique.

Propriété : Une CMTC est irréductible si et seulement si la CMTD incluse est irréductible.

En termes de graphe, une chaîne de Markov est irréductible, si et seulement si elle comporte une unique composante fortement connexe.

Propriété : Dans une CMTC ergodique, le vecteur π des probabilités stationnaires $\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_i(t)$ existe toujours et est l'unique solution du système matriciel suivant :

$$\begin{cases} \pi \cdot Q = 0 \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

où : E est l'espace des états de la chaîne de Markov.

La résolution de ce système d'équations, nous donnerait les probabilités stationnaires des différents états, ou encore la proportion de temps que le processus passe (en régime stationnaire) dans ces différents états.

Remarque : À l'état stationnaire, pour tout état j , le flux sortant de j = flux entrant dans j . Cette équation est dite : *équation d'état*.

^{††}. Pr. N. GHARBI, Département Informatique - USTHB