1 CHAPITRE IV : RÉSEAUX DE PETRI [*]

Le modèle des réseaux de Petri (RdP) a été qui a développé dans les années 60-62 par le mathématicien allemand **Carl Adam Petri**. Ce modèle permet d'exprimer les caractéristiques des systèmes parallèles, telles que la synchronisation, la concurrence, le non-déterminisme et l'allocation de ressources.

Un réseau de Petri est un modèle graphique formé d'un ensemble de places représentant les ressources et d'un ensemble de transitions symbolisant les événements ou les opérations.

DÉFINITION : Un réseau de Petri R se définit par le tuple $(P, T, Pré, Post, M_0)$, où :

— $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ est un ensemble fini de places, pour lequel $n = |P|$;

— $T = \{t_1, t_2, ..., t_m\}$ est un ensemble de transitions, disjoint de P, et pour lequel $m = |T|$;

— $Pré$, : $P \times T \to IN$ est une application d'incidence avant, telle que $Pré(p, t)$ contient la valeur entière associée à l'arc allant de la place p à la transition t ;

— $Post$: $P \times T \to IN$ est une application d'incidence arrière, telle que $Post(p, t)$ contient la valeur entière associée à l'arc allant de la transition t à la place p ;

— M_0 : $P \to IN$ est le marquage initial qui donne la valeur initiale du nombre de jetons chaque place, et définit ainsi l'état initial du système.

- $Pré(p, t)$ représente le nombre de ressources de type p consommées par la transition t et $Post(p, t)$ représente le nombre de ressources de type p produites suite au tir de la transition t.

- $M(p)$ indique le marquage de la place p, c'est-à-dire le nombre (entier) de jetons contenus dans p.

Représentation graphique

Dans un réseau de Petri, les places sont représentées par des cercles, et les transitions par des traits. Ces différents sommets sont reliés entre eux par des arcs orientes, reliant les places aux transitions et les transitions aux places. Les poids des arcs sont donnés par les fonctions $Pré$ et $Post$. Par défaut, un arc sans poids possède un poids avec la valeur 1. Les marques sont représentées par des points ou des nombres à l'intérieur des places.

Les places qui possèdent des arcs qui les relient à une transition t (c'est-à-dire des arcs qui joignent ces places à t) sont appelées, par simplification, *places d'entrée* de t. Les places, reliées à une transition par un arc qui joint t à ces places, sont appelées *places de sortie* de la transition. Respectivement, on parle de *transitions d'entrée* et de *transitions de sortie* des places.

Représentation matricielle

Dans un réseau de Petri, le marquage M peut être représenté par un vecteur, et les applications $Pré$ et $Post$ par des matrices dont les lignes sont indicées par les n numéros de places et les colonnes par les m numéros de transitions comme suit :

— La matrice d'incidence arrière notée C^+ définit les relations entre les transitions et les places telle que : $C^+(p, t) = Post(p, t)$.

— La matrice d'incidence avant notée C^- définit les relations entre les places et les transitions telle que : $C^-(p, t) = Pré(p, t)$.

On note $Pré(., t)$ et $Post(., t)$ les colonnes de ces matrices associées à une transition t. On note $Pré(p, .)$ et $Post(p, .)$ les lignes associées à une place p.

*. Pr. N. GHARBI, Département Informatique - USTHB

Ces deux matrices peuvent être synthétisées en une seule matrice, dite *matrice d'incidence* définie par : $C = C^+ - C^-$ ou encore : $\forall p \in P, \forall t \in T : C(p,t) = Post(p,t) - Pré(p,t)$.
En fait, $C(p,t)$ indique la modification (le changement) apportée au marquage de la place p après le franchissement de la transition t, c'est-à-dire la différence entre ce qui est produit et ce qui est consommé.

2 Évolution d'un réseau de Petri [†]

À partir d'un marquage, un réseau de Petri peut évoluer si la condition de *tir* ou de *franchissement* d'une transition est vérifiée.

DÉFINITION : Sensibilisation
Pour un marquage M, une transition t est **sensibilisée** (tirable ou franchissable) si et seulement si, pour tout $p \in P$, on a $M(p) \geq Pré(p,t)$.
(ou encore avec les notations matricielles, $M \geq C^-(.,t)$).

La condition de tir, liée à $Pré(p,t)$, explicite que, pour toutes les places p d'entrée de t, c'est-à-dire pour toutes les places dont les arcs sortants les joignent à t, le nombre de jetons dans p, soit $M(p)$, doit être supérieur ou égal au poids de l'arc allant de p à t, soit $Pré(p,t)$.
La sensibilisation de la transition t pour le marquage M se note $M[t\rangle$.

DÉFINITION : Tir de transition
Dans un réseau de Petri, toute transition t sensibilisée pour un marquage M, peut être tirée (ou franchie) et son tir (ou franchissement) conduit à un nouveau marquage M' défini par :
$\forall p \in P, M'(p) = M(p) - Pré(p,t) + Post(p,t)$
(ou encore $M' = M - C^-(.,t) + C^+(.,t)) = M + C(.,t)$.
On note par $M[t\rangle M'$ la relation correspondante définie dans $IN^n \times T \times IN^n$ et on dit que M donne M' après le tir de t.

Ainsi, la règle de tir signifie que le nouveau marquage M' sera obtenu, à partir du marquage précédent M, en supprimant d'abord, dans les places d'entrée de t, le nombre de jetons indiqué sur les arcs entrants de t ($Pré(p,t)$), et en ajoutant ensuite, à chaque place de sortie p' de t, le nombre de jetons correspondant au poids indiqué sur l'arc sortant de t vers p' (Post(p',t)).

Remarque : Le tir d'une transition d'un RdP s'effectue de façon *indivisible*.

DÉFINITION : Séquence de franchissements
Soit (R, M_0) un réseau de Petri marqué. Une **séquence de franchissements** $\sigma \in T^*$ est une séquence ordonnée de transitions $t_1, t_2, ..., t_n$ tel que : $\exists n$ marquages de $A(R, M_0)$: $M_1, M_2, ..., M_n$ et $\forall i \in [1,n], M_{i-1}[t_i\rangle M_i$.

DÉFINITION : Marquage accessible
Soit (R, M_0) un réseau de Petri marqué. Un marquage M est accessible si et seulement si $\exists \sigma \in T^*$ une séquence de franchissements telle que $M_0[\sigma\rangle M$.

DÉFINITION : Ensemble d'accessibilité
Soit (R, M_0) un réseau de Petri. L'ensemble des marquages accessibles ou **ensemble d'accessibilité** d'un réseau, noté $A(R, M_0)$ ou A, est l'ensemble des marquages atteints par une séquence de

†. Pr. N. GHARBI, Département Informatique - USTHB

franchissement :

$A(R, M_0) = \{M | \exists \sigma \in T^* \text{ tel que } M_0[\sigma\rangle M\}$

DÉFINITION : Graphe des marquages accessibles

Soit (R, M_0) un réseau de Petri. Le **graphe des marquages accessibles** d'un réseau, noté $G(R, M_0)$ est défini comme le graphe dont les noeuds (ou sommets) sont les marquages accessibles de $A(R, M_0)$ et dont les arcs, étiquetés par les noms des transitions, sont définis par la relation de tir entre les marquages. Donc, un arc étiqueté par t joint M à M' si et seulement si $M[t\rangle M'$.

2.1 Algorithme de construction du graphe d'accessibilité [‡]

Le graphe d'accessibilité $G(R, M_0)$ s'obtient de la manière suivante :

- M_0 est la racine du graphe ;
- pour chaque marquage M accessible à partir de M_0, trouver les transitions t_i sensibilisées ;
- sélectionner et tirer chaque t_i (à partir du même marquage) ; trouver le marquage suivant M' ; construire le nouveau sommet si M' est différent des marquages précédents ; noter l'arc correspondant ;
- tant qu'il existe des marquages non considérés, continuer.

Nous donnons dans ce qui suit, l'algorithme formelle permettant la construction de ce graphe.

- M_0 est le marquage initial ;
- A est l'ensemble des marquages accessibles ;
- A_1 est l'ensemble des marquages accessibles non encore franchis ;
- P est l'ensemble des places ;
- T est l'ensemble des transitions ;
- M est le marquage courant ;
- Z est l'ensemble des transitions franchissables à partir d'un marquage donné M ;

DÉBUT

$A := \{M_0\}$;

$A_1 := \{M_0\}$;

Tant que $(A_1 \neq \emptyset)$ **Faire**

1. choisir un marquage M de A_1 ;
2. $A_1 := A_1 \setminus \{M\}$;
3. $Z := \{t \in T \text{ tel que } M[t\rangle\}$;
4. **Tant que** $(Z \neq \emptyset)$ **Faire**
   - sélectionner une transition t de Z ;
   - $Z := Z \setminus \{t\}$;
   - calculer le nouveau marquage atteint M' tel que : $M' := M - Pr\acute{e}(., t) + Post(., t)$;
   - **Si** $M' \notin A$ **Alors**

   (a) construire le nouveau sommet M' ;

   (b) ajouter M' à l'ensemble des marquages accessibles $A := A \cup \{M'\}$;

   (c) ajouter M' à l'ensemble $A_1 := A_1 \cup \{M'\}$;

   FinSi

   lier le marquage M à M' par t ;

Fin Tant que

Fin Tant que

FIN.

‡. Pr. N. GHARBI, Département Informatique - USTHB

3 Analyse comportementale des réseaux de Petri

L'analyse comportementale permet la vérification des propriétés qualitatives comportementales en se basant sur le graphe des marquages accessibles.

DÉFINITION : Bornitude
Une place p d'un réseau marqué (R, M_0) est dite $k-$**bornée** ($k \in IN$) si :
$\forall M \in A(R, M_0), M(p) \leq k.$
Un réseau de Petri (R, M_0) *est* ***borné*** *si :*
$\exists k \in IN$ tel que $\forall m \in A(R, m_0), \forall p \in P, M(p) \leq k.$

Ainsi, si le réseau est borné, une borne du réseau est un entier supérieur ou égal à tout marquage accessible d'une place quelconque. Par contre, si au moins une des places peut contenir un nombre de jetons aussi élevé que possible, nous dirons que le réseau est *non borné*.
Si le réseau est borné par $k = 1$, nous dirons aussi qu'il est ***binaire***.

PROPOSITION :
Soit (R, M_0) *un réseau de Petri. Le réseau* (R, M_0) *est borné si et seulement si* $A(R, M_0)$ *est fini.*

La vérification de la propriété de bornitude peut se faire sans la construction du graphe d'accessibilité en utilisant ce qui suit :

PROPOSITION :
Un réseau marqué (R, M_0) est non borné si et seulement s'il admet une séquence de franchissement : $M_0[\sigma_1\rangle M_1[\sigma_2\rangle M_2$ avec $M_2 > M_1$ ($M_2 \geq M_1$ et pour une place p, $M_2(p) > M_1(p)$).

Un autre aspect du fonctionnement d'un réseau dont nous nous préoccuperons est de savoir si le système s'arrête dans certaines situations. Ainsi, une propriété importante à vérifier concerne *l'absence de blocage* dans l'activité de tout ou une partie des transitions du réseau. Par exemple, un système téléphonique ne doit jamais se bloquer, quel que soit le comportement des utilisateurs. Autrement dit, de tout état atteint, on peut franchir au moins une transition.

DÉFINITION : Pseudo-vivacité [§]
Un réseau de Petri (R, M_0) est dit **pseudo-vivant** si : $\forall M \in A(R, M_0), \exists t \in T$ tel que $M[t\rangle$
Dans le cas d'un marquage sans transition franchissable, on parle d'un *marquage mort* ou *marquage puits.*

PROPOSITION : *Soit* (R, M_0) *un réseau de Petri. Le réseau* (R, M_0) *est pseudo-vivant si et seulement si tout noeud de* $G(R, M_0)$ *admet un successeur.*

DÉFINITION : Quasi-vivacité
Un réseau de Petri (R, M_0) est **quasi-vivant** si : $\forall t \in T, \exists M \in A(R, M_0)$ tel que $M[t\rangle$

PROPOSITION : *Soit* (R, M_0) *un réseau de Petri. Le réseau* (R, M_0) *est quasi-vivant si et seulement si toute transition étiquette un arc de* $G(R, M_0)$.

Ainsi, la quasi-vivacité désigne la possibilité de franchir au moins une fois chaque transition. Lorsqu'une transition est démunie de cette propriété, l'opération qu'elle représente est par conséquent inutile au fonctionnement du système que le réseau modélise. D'ailleurs, une fréquente erreur de modélisation est de concevoir un réseau dans lequel une transition n'est jamais franchissable. Il est

§. Pr. N. GHARBI, Département Informatique - USTHB donc important d'éliminer cette erreur de conception.

Les deux propriétés précédentes assurent une certaine correction du système, mais ne permettent pas d'affirmer que dans n'importe quel état atteint, le système dispose encore de toutes ses fonctionnalités. Autrement dit, si toute transition peut toujours être ultérieurement franchie à partir d'un état quelconque du système.

DÉFINITION : Vivacité
Un réseau de Petri (R, M_0) est **vivant** si, pour tout marquage $M \in A(R, M_0)$, le réseau (R, M) est quasi-vivant. Autrement dit : :
$\forall M \in A(R, M_0), \forall t \in T, \exists M' \in A(R, M)$ tel que $M'[t\rangle$
Autrement dit, $\forall M \in A(R, M_0), \forall t \in T, \exists \sigma \in T^*$ tel que $M[\sigma.t\rangle$

La propriété de vivacité est liée à l'activité du système. D'ailleurs, ***un réseau vivant modélise un système en fonctionnement permanent sans aucun blocage***, et dont toutes ses actions peuvent être exécutées. La non satisfaction de cette propriété caractérise des situations de blocage total (état du système à partir duquel aucune évolution n'est plus possible), ou de blocage partiel c'est-à-dire qu'une partie du système est inaccessible.

DÉFINITION : Réseau sans blocage [¶]
Un réseau de Petri (R, M_0) est dit **sans blocage** si tout marquage accessible depuis M_0 n'est pas un marqauge mort.

Remarque : Un réseau sans blocage signifie que le système est en fonctionnement permanent mais pas nécessairement vivant, car la propriété de vivacité est plus forte que le non blocage.

Une autre propriété importante consiste à vérifier la possibilité de toujours revenir à un état donné, qui représente la réinitialisation du système.

DÉFINITION : Existence d'un état d'accueil
Un réseau de Petri (R, M_0) admet un état d'accueil M_a si :
$\forall M \in A(R, M_0), \exists \sigma \in T^*$ tel que $M[\sigma\rangle M_a$
Autrement dit, un état d'accueil est un état accessible quelque soit l'évolution du réseau.

Remarque : Si le marquage initial est l'état d'accueil alors le système modélisé est **réinitialisable**.
Ainsi, un RdP est réinitialisable si le marquage initial est atteignable à partir de tous les autres marquages. La réinitialisation implique que le modèle peut se réinitialiser lui-même. Ceci est important pour la reprise automatique en cas d'erreur ou de panne, car elle garantit le fait que le système, après un nombre fini d'étapes, retournera à un état admissible. Par contre, si le modèle de RdP n'est pas réinitialisable, il ne peut y avoir de reprise automatique, ainsi l'intervention manuelle est nécessaire.

¶. Pr. N. GHARBI, Département Informatique - USTHB