Fundamentos do Controle Robusto via Otimização

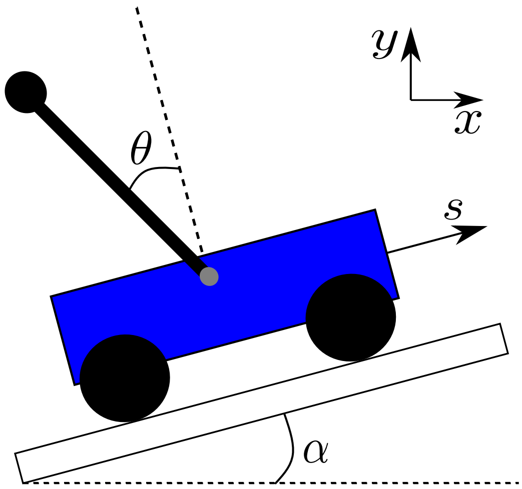
TP2 - Pêndulo Invertido sobre um carrinho em um plano inclinado

Prof. Luciano Frezzatto
Prof. Víctor Costa da Silva Campos

Belo Horizonte, 10 de Março de 2021

Conteúdo

Definição do problema de controle



Considere o sistema apresentado na figura acima. Nele, temos um pêndulo preso à um carrinho que se move em um plano inclinado. A modelagem deste sistema é apresentada no Apêndice A.

Como apresentado no apêndice, a dinâmica do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} M+m & -m\ell\cos(\theta) \\ -m\ell\cos(\theta) & m\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & m\ell\,\mathrm{sen}(\theta)\dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (M+m)g\,\mathrm{sen}(\alpha) \\ -mg\ell\,\mathrm{sen}(\alpha+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - k_v\dot{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

em que M é a massa do carrinho, m é a massa do pêndulo, g é a aceleração da gravidade, ℓ é a distância entre o centro de gravidade do pêndulo e o seu ponto de rotação, s é a distância percorrida pelo carrinho, θ é o ângulo entre o pêndulo e a reta normal ao plano, k_v é uma constante de atrito viscoso.

Definindo $v = \dot{s}, \omega = \dot{\theta}$ e usando algumas manipulações, podemos escrever a dinâmica do sistema em malha aberta como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M+m & -m\ell\cos(\theta) \\ 0 & 0 & -m\ell\cos(\theta) & m\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_v & -m\ell\,\mathrm{sen}(\theta)\omega \\ 0 & mg\ell\cos(\alpha)\,\mathrm{sinc}(\theta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(M+m)g\,\mathrm{sinc}(\alpha) \\ mg\ell\cos(\theta)\,\mathrm{sinc}(\alpha) \end{bmatrix} \alpha$$

com $\mathrm{sinc}(x) = \mathrm{sen}(x)/x$, se $x \neq 0$, ou 1, se $x = 0$.

Considerando os dados,

$$
\begin{aligned}
m &= 0.3 \text{ [kg]} \\
\ell &= 0.3 \text{ [m]} \\
M &= 1.5 \text{ [kg]} \\
g &= 9.78 \text{ [m/s}^2\text{]} \\
kv &= 1 \text{ [kg/s]}
\end{aligned}
$$

pedimos que

1. Utilizando a não-linearidade de setor, encontre uma representação TS para o sistema não-linear;
2. Considerando a inclinação do plano como uma perturbação **medida**, projetem uma lei de controle PDC que reduza o efeito da inclinação no ângulo do pêndulo e na posição do carrinho.

Nota 1.1

Em conjunto com este trabalho, segue também um ambiente de simulação gráfico que pode ser utilizado no windows para a visualização e teste dos controladores propostos.

O uso do mesmo não é obrigatório para o trabalho, e a ideia dele é apenas motivar aqueles que estiverem mais interessados. Assim que o ambiente de simulação é iniciado, ele abrirá uma janela para a seleção de um arquivo de mapa para ser utilizado. Este define o formato dos trilhos sobre os quais o carrinho se moverá na simulação, e alguns arquivos de mapas são fornecidos em conjunto com a simulação.

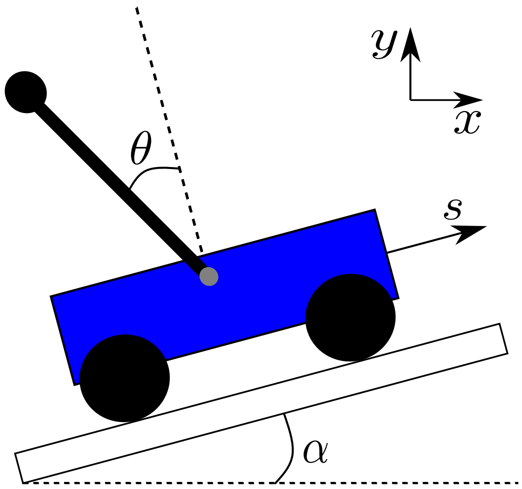
Após a escolha do arquivo de mapa a ser utilizado na simulação, o ambiente abrirá outra janela para a escolha do código do controlador a ser executado, estes devem ser programados em lua para rodarem no ambiente de simulação. Alguns códigos de exemplo que podem ser utilizados na simulação seguem também em conjunto neste trabalho (um código para controlar o carrinho com as setas do teclado, outro com um controlador proporcional de posição, e outro com um exemplo de código de controlador que precisa de variáveis internas para rodar).

Note que a dinâmica utilizada na simulação é um pouco mais complicada do que a que foi apresentada. Entretanto, o modelo apresentado é mais aconselhável para o projeto dos controladores.

Esclarecemos aqui o fato de que o entendimento dos materiais apresentados no apêndice, e o uso do ambiente de simulação fornecido **não são necessários para a realização do trabalho**.

APÊNDICE **A**

Modelagem usando Newton-Euler



Para esta modelagem, vamos considerar um pêndulo invertido sobre um carrinho que está preso sobre um trilho cuja inclinação é fixa.

A distância percorrida pelo carrinho no trilho (que seria o que teríamos como medida usando algum tipo de odometria) é descrita por s. O ângulo de rotação do pêndulo é descrito por θ, enquanto a inclinação do trilho no ponto atual é descrita por α.

Consideramos que a massa do carrinho é dada por M, que a massa do pêndulo é dada por m, que a aceleração da gravidade é dada por g, e a distância entre o centro de gravidade do pêndulo e o seu ponto de rotação é dada por ℓ.

Usando a segunda lei de Newton para o carrinho

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(M\dot{x}) &= F\cos(\alpha) - R_x + N_x \\
\frac{d}{dt}(M\dot{y}) &= F\,\mathrm{sen}(\alpha) - Mg - R_y + N_y
\end{aligned}
$$

com F uma força aplicada no carrinho no sentido do trilho, R_x e R_y as forças de reação na junta que liga o pêndulo ao carrinho, e N_x e N_y a força normal do trilho em relação ao carrinho.

Como a força normal de reação do trilho acontece apenas devido ao peso do carrinho e do pêndulo, temos que

$$
\begin{aligned}
N &= (M+m)g\cos(\alpha) \\
N_x &= -(M+m)g\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha) \\
N_y &= (M+m)g\cos^2(\alpha)
\end{aligned}
$$

Considerando que cada ponto do plano xy pode ser unicamente determinado como uma função da posição $s$do carrinho no trilho, temos

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\alpha)$$
$$\frac{dx}{ds} = \operatorname{sen}(\alpha)$$

Substituindo nas equações que tínhamos, obtemos

$$\frac{d}{dt}(M\dot{x}) = \frac{d}{dt}(M\dot{s}\cos(\alpha)) = M\cos(\alpha)\ddot{s}$$
$$\frac{d}{dt}(M\dot{y}) = \frac{d}{dt}(M\dot{s}\operatorname{sen}(\alpha)) = M\operatorname{sen}(\alpha)\ddot{s}$$

A posição do centro de massa do pêndulo pode ser escrita, no referencial inercial, como

$$\vec{r}_p = \begin{bmatrix} x(s) - \ell\operatorname{sen}(\alpha+\theta) \\ y(s) + \ell\cos(\alpha+\theta) \end{bmatrix}$$

de modo que a velocidade pode ser escrita como

$$\dot{\vec{r}}_p = \begin{bmatrix} \dot{x}(s) - \ell\cos(\alpha+\theta)\dot{\theta} \\ \dot{y}(s) - \ell\operatorname{sen}(\alpha+\theta)\dot{\theta} \end{bmatrix}$$
$$\dot{\vec{r}}_p = \begin{bmatrix} \dot{s}\cos(\alpha) - \ell\cos(\alpha+\theta)\dot{\theta} \\ \dot{s}\operatorname{sen}(\alpha) - \ell\operatorname{sen}(\alpha+\theta)\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

e sua aceleração pode ser escrita como

$$\ddot{\vec{r}}_p = \begin{bmatrix} \ddot{s}\cos(\alpha) + \ell\operatorname{sen}(\alpha+\theta)\dot{\theta}^2 - \ell\cos(\alpha+\theta)\ddot{\theta} \\ \ddot{s}\operatorname{sen}(\alpha) - \ell\cos(\alpha+\theta)\dot{\theta}^2 - \ell\operatorname{sen}(\alpha+\theta)\ddot{\theta} \end{bmatrix}$$

Mas, pela segunda lei de Newton aplicada no pêndulo, temos

$$m\ddot{\vec{r}}_p = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y - mg \end{bmatrix}$$

Juntando tudo, temos as equações

$$M\cos(\alpha)\ddot{s} = F\cos(\alpha) - (M+m)g\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) - R_x$$

$$M\operatorname{sen}(\alpha)\ddot{s} = F\operatorname{sen}(\alpha) - Mg + (M+m)g\cos^2(\alpha) - R_y$$

$$m\cos(\alpha)\ddot{s} + m\ell\operatorname{sen}(\alpha+\theta)\dot{\theta}^2 - m\ell\cos(\alpha+\theta)\ddot{\theta} = R_x$$
$$m\operatorname{sen}(\alpha)\ddot{s} - m\ell\cos(\alpha+\theta)\dot{\theta}^2 - m\ell\operatorname{sen}(\alpha+\theta)\ddot{\theta} = R_y - mg$$

Somando a primeira equação com a terceira, e a segunda equação com a quarta (para eliminarmos R_x e R_y), temos

$$(M+m)\cos(\alpha)\ddot{s} + m\ell\,\text{sen}(\alpha+\theta)\dot{\theta}^2 - m\ell\cos(\alpha+\theta)\ddot{\theta} = F\cos(\alpha) - (M+m)g\,\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$(M+m)\,\text{sen}(\alpha)\ddot{s} - m\ell\cos(\alpha+\theta)\dot{\theta}^2 - m\ell\,\text{sen}(\alpha+\theta)\ddot{\theta} = F\,\text{sen}(\alpha) - (M+m)g\,\text{sen}^2(\alpha)$$

Multiplicando a primeira equação por $\cos(\alpha)$ e a segunda equação por $\text{sen}(\alpha)$ e somando as duas, obtemos

$$(M+m)\ddot{s} + m\ell\,\text{sen}(\theta)\dot{\theta}^2 - m\ell\cos(\theta)\ddot{\theta} = F - (M+m)g\,\text{sen}(\alpha)$$

e representa uma das equações que representa a dinâmica do sistema.

Voltando às equações do pêndulo, temos

$$\begin{aligned} m\cos(\alpha)\ddot{s} + m\ell\,\text{sen}(\alpha+\theta)\dot{\theta}^2 - m\ell\cos(\alpha+\theta)\ddot{\theta} &= R_x \\ m\,\text{sen}(\alpha)\ddot{s} - m\ell\cos(\alpha+\theta)\dot{\theta}^2 - m\ell\,\text{sen}(\alpha+\theta)\ddot{\theta} &= R_y - mg \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por $\ell\cos(\alpha+\theta)$, e a segunda por $\ell\,\text{sen}(\alpha+\theta)$ e somando as duas, temos

$$m\ell\cos(\theta)\ddot{s} - m\ell\ddot{\theta} = \ell(R_x\cos(\alpha+\theta) + R_y\,\text{sen}(\alpha+\theta)) - mg\ell\,\text{sen}(\alpha+\theta)$$

É possível se mostrar que as forças de reação do pêndulo são tais que

$$R_x\cos(\alpha+\theta) + R_y\,\text{sen}(\alpha+\theta) = 0$$

E podemos escrever a dinâmica como

$$\begin{bmatrix} M+m & -m\ell\cos(\theta) \\ -m\ell\cos(\theta) & m\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & m\ell\,\text{sen}(\theta)\dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (M+m)g\,\text{sen}(\alpha) \\ -mg\ell\,\text{sen}(\alpha+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Consideramos que a força aplicada sobre o carrinho possui duas componentes, uma força de atrito viscoso sobre o carrinho e uma força externa que servirá como sinal de controle. De forma que podemos escrever

$$F = u - k_v\dot{s}$$