MACRO/RAFFO–2021/JMC/1+Versão-1

Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Parallel Distributed Control(PDC) de um Pendulo Invertido Via Representação Takagi-Sugeno

Número de matrícula: 2016086496
Estudante: Jonatan Mota Campos
Orientador: Guilherme Vianna Raffo
Co-orientador:

21 de março de 2021

Sumário

1 Modelagem Dinâmica

1.1 Formulação Newton Euler e Representação Via Sistema Descritor

Pela modelagem de Newton Euler, que não será demonstrada aqui por ja ter sido demonstrada no arquivo fornecido para o trabalho obtêm-se o modelo dinâmico abaixo:

$$\begin{bmatrix} M+m & -mlcos(\theta) \\ -mlcos(\theta) & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & mlsin(\theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (M+m)gsin(\alpha) \\ -mglsin(\alpha+\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - k_v\dot{s} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Onde, M é a massa do carrinho, m é a massa do pendulo, g é a aceleração da gravidade, l é a distancia entre o centro de gravidade do pendulo e seu eixo de rotação, s é a distância percorrida pelo carrinho, θ é a incliinação do pendulo, e k_v é uma constante de atrito viscoso.

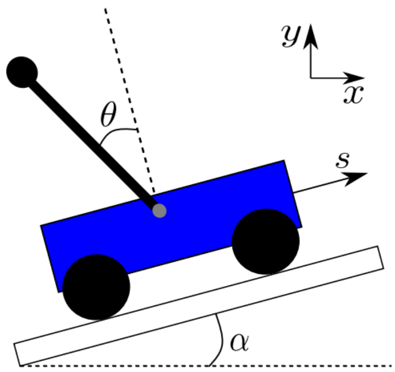

Figura 1: Pêndulo Invertido

Definindo ainda $v = \dot{s}$ e $\omega = \dot{\theta}$ escreve-se a dinâmica em malha aberta como,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M+m & -mlcos(\theta) \\ 0 & 0 & -mlcos(\theta) & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_v & -mlsin(\theta)\omega \\ 0 & mglcos(\alpha)sinc(\theta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(M+m)gsinc(\alpha) \\ mglcos(\theta)sinc(\alpha) \end{bmatrix} \alpha \end{aligned} \tag{2}$$

Fazendo $\bar{\alpha} = sinc(\alpha)\alpha$ escreve-se o sistema descritor quasi-LPV como,

$$\boldsymbol{E}(x)\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B_u}u + \boldsymbol{B_\alpha}(x)\bar{\alpha} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M+m & -mlcos(\theta) \\ 0 & 0 & -mlcos(\theta) & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_v & -mlsin(\theta)\omega \\ 0 & mglcos(\alpha)sinc(\theta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(M+m)g \\ mglcos(\theta) \end{bmatrix} \bar{\alpha} \end{aligned} \tag{4}$$

1.2 Representação Takagi-Sugeno Via Não Linearidade de Setor

Nessa seção será utilizada a técnica de não linearidade de setor para buscar um modelo Takagi-Sugeno exato dentro de um domínio compacto. São escolhidas as seguintes não linearidades:

$$\begin{cases} z_1 = cos(\theta) \\ z_2 = sin(\theta)\omega \\ z_3 = cos(\alpha)sinc(\theta) \end{cases} \tag{5}$$

Dessa forma obtemos um modelo dinâmico na forma,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M+m & -mlcos(\theta) \\ 0 & 0 & -mlcos(\theta) & ml^2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_v & -mlz_2 \\ 0 & mglz_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \theta \\ v \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(M+m)g \\ mglz_1 \end{bmatrix} \bar{\alpha} \right\} \tag{6}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f(x, u, \hat{\alpha})} \tag{7}$$

Como $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f(0,0,0)} = 0$ podemos utilizar a técnica da não linearidade de setor. Tomando a condição de que estamos projetando um controlador para atuar em um terreno com inclinação máxima e minima conhecidas de forma que $\alpha \in$ [-10°,10°], além de que da geometria do problema $\theta \in$ [-90°,90°], e assumindo que a velocidade angular do pendulo varie como $\omega \in$ [-$\frac{pi}{6}$($\frac{rad}{s}$) ,$\frac{pi}{6}$($\frac{rad}{s}$)].

$$a_1^{max} = 1 \tag{8}$$
$$a_1^{min} = 0 \tag{9}$$
$$\tag{10}$$
$$a_2^{max} = 0.5236 \tag{11}$$
$$a_2^{min} = -0.5236 \tag{12}$$
$$\tag{13}$$

2 Controle

2.1 Lei de Controle PDC

2.2 Lei de Controle PDC com $\mathcal{H}_\infty$