Seção 1

Condição utilizando o Lema de Finsler

A ideia deste documento é mostrar para vocês como o Lema de Finsler para encontrarmos condições para sistemas descritores. Iremos apresentar aqui a ideia geral, para análise de estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo, e esperamos que vocês consigam aplicar esta ideia para obter condições LMI para a síntese de um controlador PDC de custo garantido H_∞ que deve ser projetado no trabalho.

Considere um sistema linear invariante no tempo, descrito por

$$E\dot{x} = Ax + Bu$$

se considerarmos uma função de Lyapunov quadrática $V = x^T P x$, sabemos que podemos escrever sua derivada temporal como

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x^T & \dot{x}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P \\ * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

Se considerarmos que a lei de controle é dada por $u = Kx$, sabemos que o sistema em malha fechada pode ser descrito por

$$E\dot{x} = (A + BK)x$$

e que portanto, a relação

$$\begin{bmatrix} A + BK & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = 0$$

pode ser utilizada no lema de Finsler para encontrarmos condições LMI considerando a derivada temporal da nossa função de Lypaunov. Como de costume, de forma a conseguirmos recuperar os ganhos da lei de controle, consideramos as seguintes condições **suficientes** (note que perdemos a necessidade pois escolhemos uma forma específica para as variáveis de folga introduzidas com o Lema de Finsler)

$$\begin{bmatrix} 0 & P \\ * & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N^{-T} \\ \mu N^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + BK & -E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T + K^T B^T \\ -E^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^{-1} & \mu N^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} N^{-T}(A + BK) + (A + BK)^T N^{-1} & P - N^{-T}E + \mu (A + BK)^T N^{-1} \\ * & -\mu \left(N^{-T}E + E^T N^{-1} \right) \end{bmatrix} < 0$$

Fazendo uma transformação de congruência (multiplicando à esquerda por diag(N^T, N^T) e à direita por diag(N, N)), e fazendo as transformações linearizantes, $\bar{P} = N^T P N, Y = KN$, chegamos nas condições

$$\begin{bmatrix} AN + N^T A^T + BY + Y^T B^T & \bar{P} - EN + \mu\left(N^T A^T + Y^T B^T\right) \\ * & -\mu\left(EN + N^T E^T\right) \end{bmatrix} < 0$$

lembrando que, para garantir que a função de Lyapunov é definida positiva, devemos também utilizar a condição $\bar{P} > 0$.