Cours & Bilan pédagogique

Formalismes 6×6 « tout rotations » et passage à $SO(3,3)$

Dualité rotation/translation, temps 3D, sondes, vielbeins et borne c

Synthèse pédagogique

13 août 2025

Table des matières

CHEAT-SHEET (Lecture rapide Bac+2)

Schéma-blocs (lecture visuelle simple)

$$\boxed{f} \to \boxed{\left[\begin{smallmatrix} S_{XX} & S_{XY} \\ S_{YX} & S_{YY} \end{smallmatrix}\right]} \to \boxed{\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]} \to \boxed{\ell^\top}$$

$$\begin{bmatrix} X_{\text{eff}} \\ Y_{\text{eff}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{XX} & S_{XY} \\ S_{YX} & S_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_X \\ f_Y \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{\text{eff}} \\ Y_{\text{eff}} \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{X'} \to \boxed{e_s} \to \boxed{\Delta x} \qquad \qquad \boxed{Y'} \to \boxed{e_t,\, u_t} \to \boxed{\Delta\tau}$$

$$\Delta x \;=\; e_s X', \qquad \Delta\tau \;=\; u_t^\top e_t Y', \qquad v \;=\; \|\Delta x\|/\Delta\tau, \qquad \mathcal{A} \;=\; \ell_X^\top X' + \ell_Y^\top Y'.$$

Chaîne compacte.

$$f \xrightarrow{S} \begin{bmatrix} X_{\text{eff}} \\ Y_{\text{eff}} \end{bmatrix} \xrightarrow{M} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell^\top} \mathcal{A} = \ell_X^\top X' + \ell_Y^\top Y'.$$

Lecture (observables).

$$(X', Y') \xrightarrow{(e_s, e_t, u_t)} \big(\Delta x,\, \Delta\tau\big), \qquad v = \|\Delta x\|/\Delta\tau, \quad \Delta x = e_s X', \;\; \Delta\tau = u_t^\top e_t Y'.$$

Objets, dimensions et notations (immédiat)

— $f = \begin{bmatrix} f_X \\ f_Y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$: sonde droite (colonne) ; $\ell^\top = \begin{bmatrix} \ell_X^\top & \ell_Y^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 6}$: sonde gauche (ligne).

— $S = \begin{bmatrix} S_{XX} & S_{XY} \\ S_{YX} & S_{YY} \end{bmatrix} \in SO(3,3)$: champ (préparation).

— $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in SO(3,3)$: opérateur (action).

— $e_s, e_t \in GL(3)$: vielbeins ; $u_t \in \mathbb{R}^3$: direction temporelle unitaire.

— Invariant $J = \mathrm{diag}(I_3, -I_3)$.

Formules prêtes à l'emploi.

$$\begin{bmatrix} X_{\text{eff}} \\ Y_{\text{eff}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{XX} & S_{XY} \\ S_{YX} & S_{YY} \end{bmatrix}}_{S} \begin{bmatrix} f_X \\ f_Y \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} X_{\text{eff}} \\ Y_{\text{eff}} \end{bmatrix},$$

$$\Delta x = e_s X', \qquad \Delta\tau = u_t^\top e_t Y', \qquad v = \|\Delta x\|/\Delta\tau,$$

$$\mathcal{A} = \ell^\top M S f = \ell_X^\top X' + \ell_Y^\top Y'.$$

Mini-glossaire (aperçu, sans ToC)

Elliptique Rotation interne (comme $SO(3)$), conserve une norme euclidienne partielle.

Hyperbolique Boost (mélange X/Y) via cosh/sinh.

Parabolique Null-rotation (unipotente) : agit comme une translation selon la lecture choisie.

Vielbein Carte locale (unités, anisotropie) : e_s, e_t.

Sonde f (prépare) et $\ell^\top$ (lit) ; la particule apparaît après la lecture $(\Delta x, \Delta\tau)$.

Mini-glossaire (encadrés mnémotechniques)

Rotation (elliptique) : conserve une norme euclidienne ; bloc 3×3 orthogonal de déterminant +1.
Boost (hyperbolique) : mélange espace/temps (cosh/sinh).
Null-rotation (parabolique) : unipotente, agit comme une translation selon la lecture choisie.

Vielbein (e_s, e_t) : carte locale pour mesurer ; choisir $e_t = \frac{1}{c}I$ fixe l'échelle temporelle avec la vitesse c.
Sonde (f, ℓ) : *onde de test*. La particule apparaît après lecture des sorties $(\Delta x, \Delta\tau)$.

Invariance $SO(3,3)$: $M^\top J M = J$ avec $J = \mathrm{diag}(I_3, -I_3)$.
Blocs : $A^\top A - C^\top C = I$, $B^\top B - D^\top D = -I$, $A^\top B - C^\top D = 0$.

Notations, objets, définitions (lecture immédiate)

Espaces et objets.

— $\mathbb{R}^n$: espace vectoriel réel de dimension n. $\mathbf{I}_n$: identité $n \times n$.

— $\mathbf{J} = \mathrm{diag}(\mathbf{I}_3, -\mathbf{I}_3)$: forme bilinéaire signature $(3,3)$. Invariant $Q(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V}^\top \mathbf{J} \boldsymbol{V} = \|\mathbf{X}\|^2 - \|\mathbf{Y}\|^2$.

— $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$: $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ (partie *spatiale*), $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^3$ (partie *temporelle 3D*).

Acteurs fondamentaux (tous 6×6).

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{XX} & \mathbf{S}_{XY} \\ \mathbf{S}_{YX} & \mathbf{S}_{YY} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}.$$

S *prépare* un état effectif (champ) ; **M** *agit* (opérateur physique). Les deux peuvent (et idéalement doivent) appartenir à $\mathrm{SO}(3,3) = \{\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{6\times 6} \,|\, \mathbf{G}^\top \mathbf{J} \mathbf{G} = \mathbf{J}, \det = 1\}$ pour préserver l'invariant Q. Voir la structure en blocs et les contraintes associées dans les chapitres suivants. :contentReference[oaicite :2]index=2

Sondes et lecture (mesure).

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_X \\ \mathbf{f}_Y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad \text{(sonde droite, ``prépare'')} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\ell}^\top = \begin{bmatrix} \ell_X^\top & \ell_Y^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 6} \quad \text{(sonde gauche, ``lit'').}$$

$\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t \in \mathrm{GL}(3)$ sont des *vielbeins* (cartes locales d'unité et d'orientation) pour l'espace et le "temps 3D" ; $\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^3$ est unitaire et extrait un *temps scalaire* $\Delta\tau = \mathbf{u}_t^\top \mathbf{e}_t \, \mathbf{Y}'$.

Chaîne de calcul (posée dès maintenant).

$$\underbrace{\mathbf{f}}_{\text{sonde}} \xrightarrow{\mathbf{S}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\text{eff}} \\ \mathbf{Y}_{\text{eff}} \end{bmatrix}}_{\text{état effectif}} \xrightarrow{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{Y}' \end{bmatrix}}_{\text{état agi}} \xrightarrow[\text{lecture}]{\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t, \mathbf{u}_t} (\Delta \boldsymbol{x}, \Delta\tau), \qquad \begin{cases} \Delta \boldsymbol{x} = \mathbf{e}_s \, \mathbf{X}', \\ \Delta\tau = \mathbf{u}_t^\top \mathbf{e}_t \, \mathbf{Y}', \\ v = \dfrac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|}{\Delta\tau}. \end{cases}$$

$\mathbf{X}_{\text{eff}}, \mathbf{Y}_{\text{eff}}$ sont définis *immédiatement* par

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\text{eff}} \\ \mathbf{Y}_{\text{eff}} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_X \\ \mathbf{f}_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{XX}\mathbf{f}_X + \mathbf{S}_{XY}\mathbf{f}_Y \\ \mathbf{S}_{YX}\mathbf{f}_X + \mathbf{S}_{YY}\mathbf{f}_Y \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{Y}' \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\text{eff}} \\ \mathbf{Y}_{\text{eff}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X}_{\text{eff}} + \mathbf{B}\mathbf{Y}_{\text{eff}} \\ \mathbf{C}\mathbf{X}_{\text{eff}} + \mathbf{D}\mathbf{Y}_{\text{eff}} \end{bmatrix}.$$

Cette écriture compacte évite tout flottement de notation et rend explicite le rôle *de* *chaque* sous-bloc. Elle est cohérente avec ta version actuelle et la clarifie. :contentReference[oaicite :3]index=3

Mini-glossaire (utilisable partout).

— **Elliptique** : rotation interne (type SO(3)) au sein de **X** ou **Y**.
— **Hyperbolique (boost)** : mélange contrôlé $\mathbf{X} \leftrightarrow \mathbf{Y}$ (blocs cosh/sinh).
— **Parabolique (null-rotation)** : unipotente, stabilise une direction nulle $Q = 0$; *lu* correctement, cela agit comme une translation *sans jamais quitter le tout-rotation*.
— **Vielbein $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t$** : change de base local (unités, anisotropie, gravitation effective).
— **Sondes $\mathbf{f}, \boldsymbol{\ell}^\top$** : préparation/lecture (onde → corpuscule via $\boldsymbol{\ell}^\top \mathbf{MSf}$).

1 Motivation et état 6D : pourquoi (3+3) ?

1.1 Mettre rotations et translations sur un pied d'égalité

Dans l'espace euclidien classique, une rotation est une matrice 3×3 et une translation est un *vecteur* ajouté. Ici, nous voulons **tout coder par des matrices** : les couplages carrés B, C permettent de rendre les translations comme des *null-rotations* (paraboliques) dans une signature $(3,3)$.

1.2 Chaîne de calcul en une ligne

$$\boxed{f \xrightarrow{S} (X_{\text{eff}}, Y_{\text{eff}}) \xrightarrow{M} (X', Y') \xrightarrow{e_s, e_t, u_t} (\Delta x, \Delta \tau) \xrightarrow{/} v}.$$

C'est la recette complète : préparation S, action M, lecture (vielbeins), extraction des observables.

1.3 Ce que gagne un lecteur Bac+2

— Une vision **unifiée** des mouvements (rotations, boosts, translations) par blocs 3×3.
— Des **rôles explicites** de chaque sous-bloc (A, B, C, D et $S_{..}$) dès le début.
— La possibilité d'introduire un **temps vectoriel 3D** pour mieux coupler cinématique et lecture.

2 Définition de $SO(3,3)$ et contraintes en blocs

2.1 Invariant et forme bilinéaire

$$J = \mathrm{diag}(I_3, -I_3), \qquad \langle V, W \rangle = V^\top J W, \qquad Q(V) = \|X\|^2 - \|Y\|^2.$$

Le groupe $SO(3,3)$ préserve Q et a $\det = 1$:

$$SO(3,3) = \{M \in \mathbb{R}^{6\times 6} \mid M^\top J M = J,\ \det M = 1\}.$$

2.2 Écriture par blocs et lecture Bac+2

Pour $M = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$, les contraintes équivalentes à $M^\top J M = J$ sont :

$$A^\top A - C^\top C = I_3, \tag{1}$$
$$B^\top B - D^\top D = -I_3, \tag{2}$$
$$A^\top B - C^\top D = 0. \tag{3}$$

À retenir : A, D ressemblent à des rotations internes ; B, C sont des *ponts* qui transfèrent l'information entre X et Y. Les trois familles (elliptique, hyperbolique, parabolique) sont contenues dans $SO(3,3)$.

3 Trois familles de « rotations » en $SO(3,3)$

3.1 Elliptiques (internes)

$B = C = 0$, $A, D \in SO(3)$: rotations *à l'intérieur* des sous-espaces X et Y.

3.2 Hyperboliques (boosts)

Mélange d'une composante de X et d'une de Y via un bloc $\left(\begin{smallmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{smallmatrix}\right)$, inséré dans M.

3.3 Paraboliques (null-rotations)

Transformations unipotentes : elles stabilisent une direction *nulle* ($Q = 0$). En lecture adaptée, elles *agissent comme des translations*.

4 Opérateur M (agit) et Champ S (prépare) : rôles exhaustifs

4.1 Lecture bloc par bloc (aucun élément oublié)

On écrit

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{XX} & \mathbf{S}_{XY} \\ \mathbf{S}_{YX} & \mathbf{S}_{YY} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{S}$ fabrique l'état effectif $\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\text{eff}} \\ \mathbf{Y}_{\text{eff}} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_X \\ \mathbf{f}_Y \end{bmatrix}$. $\mathbf{M}$ produit l'état agi $\begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{Y}' \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\text{eff}} \\ \mathbf{Y}_{\text{eff}} \end{bmatrix}$.

Sous-blocs de S.

— $\mathbf{S}_{XX}$: *préparation spatiale interne* — transforme $\mathbf{f}_X$ en contribution à $\mathbf{X}_{\text{eff}}$.
— $\mathbf{S}_{XY}$: *mélange sonde-temps → espace* — injecte $\mathbf{f}_Y$ dans $\mathbf{X}_{\text{eff}}$.
— $\mathbf{S}_{YX}$: *mélange sonde-espace → temps* — injecte $\mathbf{f}_X$ dans $\mathbf{Y}_{\text{eff}}$.
— $\mathbf{S}_{YY}$: *préparation temporelle interne* — transforme $\mathbf{f}_Y$ en contribution à $\mathbf{Y}_{\text{eff}}$.

Sous-blocs de M.

— $\mathbf{A}$: *action interne sur* $\mathbf{X}_{\text{eff}}$ (rotation elliptique, ou partie d'un boost via compatibilité $\mathbf{M}^\top \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{J}$).
— $\mathbf{D}$: *action interne sur* $\mathbf{Y}_{\text{eff}}$ (idem côté "temps 3D").
— $\mathbf{B}$: *transfert* $\mathbf{Y}_{\text{eff}} \to \mathbf{X}'$. Sous lecture adaptée, un *bloc de translation* (null-rotation) apparaîtra : $\Delta x = \mathbf{e}_s(\mathbf{A}\mathbf{X}_{\text{eff}} + \mathbf{B}\mathbf{Y}_{\text{eff}})$.
— $\mathbf{C}$: *transfert* $\mathbf{X}_{\text{eff}} \to \mathbf{Y}'$. Contrôle les composantes "boost" et les $\Delta\tau$ observés : $\Delta\tau = \mathbf{u}_t^\top \mathbf{e}_t(\mathbf{C}\mathbf{X}_{\text{eff}} + \mathbf{D}\mathbf{Y}_{\text{eff}})$.

4.2 Formules opérationnelles (rappel compact)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\text{eff}} \\ \mathbf{Y}_{\text{eff}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{XX} & \mathbf{S}_{XY} \\ \mathbf{S}_{YX} & \mathbf{S}_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_X \\ \mathbf{f}_Y \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{Y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\text{eff}} \\ \mathbf{Y}_{\text{eff}} \end{bmatrix}.$$

$$\Delta x = \mathbf{e}_s\, \mathbf{X}' = \mathbf{e}_s\, (\mathbf{A}\, \mathbf{X}_{\text{eff}} + \mathbf{B}\, \mathbf{Y}_{\text{eff}}), \qquad \Delta\tau = \mathbf{u}_t^\top \mathbf{e}_t\, \mathbf{Y}' = \mathbf{u}_t^\top \mathbf{e}_t\, (\mathbf{C}\, \mathbf{X}_{\text{eff}} + \mathbf{D}\, \mathbf{Y}_{\text{eff}}), \quad v = \frac{\|\Delta x\|}{\Delta\tau}.$$

4.3 Interprétations physiques et cosmologiques

Tout-rotation et "translations" lues. Dans SO(3,3), les *null-rotations* (transformations unipotentes stabilisant des directions nulles de Q) miment des translations *après lecture*. Concrètement, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ jouent le rôle d'*interfaces* entre parties espace/temps 3D; $\mathbf{B}$ induit un décalage spatial lu dans Δx, $\mathbf{C}$ ajuste le temps propre lu dans $\Delta\tau$. Ainsi la translation *émerge* de la géométrie rotationnelle via la paire (préparation $\mathbf{S}$, lecture $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t, \mathbf{u}_t$). Cette idée est cohérente avec la « rotation à l'infini » des traitements projectifs/duaux, mais ici gardée au sein d'une dimension 6 fixe. :contentReference[oaicite :4]index=4

Dualité champ/particule via les sondes. $\mathbf{f}$ (onde de test) est "préparée" en $[\mathbf{X}_{\text{eff}}; \mathbf{Y}_{\text{eff}}]$ par $\mathbf{S}$. Après l'action $\mathbf{M}$, la *particule* apparaît au moment de la *lecture* : amplitude scalaire $\alpha = \boldsymbol{\ell}^\top \mathbf{MSf}$ ou observables $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\tau)$. La symétrie est forte : $\mathbf{S}$ et $\mathbf{M}$ sont du même type (mêmes contraintes SO(3,3)), l'un prépare la scène, l'autre joue la dynamique — les sondes font le lien ondes/corpuscules.

Rôle des vielbeins $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t$ et de $\mathbf{u}_t$. $\mathbf{e}_s$ et $\mathbf{e}_t$ encodent les *unités locales*, l'anisotropie et la gravitation effective (lecture locale « façon vielbein »). Fixer $\mathbf{e}_t = \frac{1}{c}\mathbf{I}_3$ borne naturellement les vitesses lues $v \le c$. Faire dépendre $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t$ de la position/temps propre modélise l'inhomogénéité (milieux, gravitation, cosmologie locale). :contentReference[oaicite :5]index=5

5 Ponts avec les formalismes usuels

5.1 SE(3) (matrices homogènes 4×4)

Au voisinage de l'identité, si l'on fige une sonde f_Y (et la lecture), le terme $B\,Y_{\text{eff}}$ joue le rôle d'une *colonne affine* de translation, tandis que A correspond à la rotation $SO(3)$. Ici, la translation *n'est plus un simple vecteur* mais un *bloc carré* relié à une null-rotation.

5.2 Quaternions duaux

Même idée : la partie « duale » encode la translation ; notre B en donne une version matricielle symétrique face au A rotationnel.

5.3 Géométrie conforme (CGA)

Les « points à l'infini » sont liés au cône nul ; les null-rotations de $SO(3,3)$ en sont des analogues à dimension constante.

6 Exemples (pas à pas, Bac+2)

6.1 Exemple 1 : rotation spatiale pure

Choisir $B = C = 0$, $A = R_x(\theta)$, $D = I_3$. Alors $X' = R_x(\theta)X_{\text{eff}}$, $Y' = Y_{\text{eff}}$. La lecture donne $\Delta x = e_s R_x(\theta) X_{\text{eff}}$ et $\Delta\tau = u_t^\top e_t Y_{\text{eff}}$.

6.2 Exemple 2 : boost simple

Insérer un bloc $\left(\begin{smallmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{smallmatrix}\right)$ dans un plan (x_i, y_i) au sein de M. Le rapport v est borné par l'échelle de e_t (choix de c).

6.3 Exemple 3 : null-rotation (effet translation)

Prendre $M = \exp\left(\begin{smallmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (unipotent) et une préparation/lecture adaptées. Alors Δx apparaît comme un décalage constant, comme une *translation* en pratique, bien que tout soit par multiplication matricielle.

7 Relativité locale, gravitation effective et cosmologie 3D

7.1 Relativité locale (cinématique hyperbolique)

Les mélanges $\mathbf{X} \leftrightarrow \mathbf{Y}$ se font via des sous-blocs *hyperboliques* $(\cosh\phi, \sinh\phi)$ insérés dans $\mathbf{M}$ de façon à respecter $\mathbf{M}^\top \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{J}$. La lecture $\Delta \boldsymbol{x} = \mathbf{e}_s \mathbf{X}'$, $\Delta\tau = \mathbf{u}_t^\top \mathbf{e}_t \mathbf{Y}'$ conduit à $v = \|\Delta \boldsymbol{x}\| / \Delta\tau$. Le choix d'échelle $\mathbf{e}_t = \frac{1}{c}\mathbf{I}_3$ fixe immédiatement une borne $v \leq c$. Les rotations elliptiques restent internes $(\mathbf{A}, \mathbf{D})$, tandis que $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ portent les boosts/"translations" lues.

7.2 Gravitation effective (vielbeins et inhomogénéité)

Plutôt que courber l'espace globalement, on laisse varier localement la carte de lecture : $\mathbf{e}_s(\boldsymbol{r}, \tau)$, $\mathbf{e}_t(\boldsymbol{r}, \tau)$ (et éventuellement $\mathbf{M}$).

- *Redshift gravitationnel* (lecture) : un facteur d'échelle dans $\mathbf{e}_t$ modifie $\Delta\tau$ observé sans changer la structure rotationnelle sous-jacente.
- *Lentille gravitationnelle* (lecture) : anisotropie dans $\mathbf{e}_s$ déforme la mesure des directions, modélisant des déviations d'angle.
- *Champs effectifs* : variations lentes de $\mathbf{M}$ couplées à $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t$ miment une connexion (façon vielbein), sans déroger au *tout-rotation* des blocs 3×3.

7.3 Cosmologie locale (temps 3D, dilatation/anisotropie)

On peut représenter une *dilatation cosmologique* effective par un $\mathbf{e}_t(\tau)$ dilatant la lecture temporelle : $\Delta\tau = \mathbf{u}_t^\top \mathbf{e}_t(\tau)\, \mathbf{Y}'$; combinée à un $\mathbf{e}_s(\tau)$, cela simule un facteur d'échelle anisotrope. Le « temps 3D » offre une riche cinématique interne (précession, inclinaison) : la projection $\mathbf{u}_t^\top \mathbf{e}_t\, \mathbf{Y}'$ remplace l'unique temps scalaire usuel, tout en permettant de retrouver ce dernier comme *lecture* dans la direction $\mathbf{u}_t$ choisie.

Message clé. *Sans quitter* SO(3, 3) ni ajouter de colonne affine, on obtient : cinématique relativiste (boosts), "translations" via null-rotations, gravitation/cosmologie effectives via vielbeins — le tout compatible avec la chaîne $\mathbf{f} \to \mathbf{S} \to \mathbf{M} \to (\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t, \mathbf{u}_t) \to$ observables. :contentReference[oaicite :6]index=6

8 Dualités et symétries : panorama unifié

8.1 Rotation $\leftrightarrow$ Translation (null-rotations)

Dans SO(3, 3), les *null-rotations* (unipotentes) agissent, après lecture, comme des translations : l'effet "déplacement" provient d'un *bloc carré* (**B** ou **C**) et non d'un vecteur ajouté. Ainsi, rotation et translation sont mis sur un *pied d'égalité* au niveau matriciel : tout est rotation adaptée à la signature, la translation étant une rotation « au bord du cône nul ». $\Rightarrow$ Symétrie conceptuelle atteinte. :contentReference[oaicite :7]index=7

8.2 Transformation $\leftrightarrow$ Champ (M vs S)

S (préparation) et **M** (action) vérifient les mêmes contraintes SO(3, 3). La première sculpte $[\mathbf{X}_{\text{eff}}; \mathbf{Y}_{\text{eff}}]$ à partir de la sonde $\mathbf{f}$; la seconde propulse $[\mathbf{X}'; \mathbf{Y}']$. $\Rightarrow$ *Dualité champ/particule* : onde (préparation et propagation) $\longrightarrow$ corpuscule (projection locale via $\boldsymbol{\ell}^\top$ ou via lecture $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t, \mathbf{u}_t$).

8.3 Espace $\leftrightarrow$ Temps (3D)

Le temps est vectoriel : $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^3$. Les boosts mélangent **X** et **Y**, les rotations internes agissent séparément. La mesure scalaire du temps ($\Delta\tau$) n'est qu'une *projection* $\mathbf{u}_t^\top \mathbf{e}_t \mathbf{Y}'$. $\Rightarrow$ Symétrie structurelle : on peut travailler « espace et temps 3D » sur un pied d'égalité, puis *choisir* une lecture (donc un temps scalaire) adaptée à l'expérience.

8.4 Local $\leftrightarrow$ Global (vielbeins)

$\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t$ transforment les quantités internes en observables. En les rendant dépendants du point, on encode des effets « géométriques » (gravitation, expansion locale) *sans* abandonner l'esthétique rotationnelle. $\Rightarrow$ Pont simple vers des lectures relativistes/-cosmologiques.

8.5 Ponts algébriques (SE(3), quaternions duaux, CGA)

Près de l'identité et sous lecture adaptée, **B** rejoue la colonne affine de SE(3). Les quaternions duaux « translation = rotation à l'infini » sont réinterprétés ici au sein d'un bloc carré. La géométrie conforme (CGA) et ses points à l'infini se reflètent dans le cône nul de SO(3, 3), sans explosion dimensionnelle. $\Rightarrow$ Le formalisme 6×6 sert de *carrefour* cohérent. :contentReference[oaicite :8]index=8

9 Perspectives, bonnes pratiques et check-list

9.1 Bonnes pratiques

— Toujours préciser f (sonde), S (préparation), M (action), (e_s, e_t, u_t) (lecture).
— Vérifier $M^\top JM = J$ et $S^\top JS = J$ quand on prétend rester dans $SO(3,3)$.
— Documenter l'interprétation *physique* de chaque bloc (A, B, C, D et $S_{..}$).

9.2 Pistes

— Dériver des cartes explicites vers $SE(3)$, quaternions duaux, CGA.
— Étendre la lecture pour inclure des temps multiples (3D) et des constantes d'échelle (dont c).
— Explorer les null-rotations comme traductions *pures* au sens de la lecture choisie.

10 Exemple numérique fil rouge (ligne à ligne)

10.1 Choix simples mais non triviaux

— **Sonde** : $f_X = (1,0,0)^\top, \quad f_Y = (0,1,0)^\top$.
— **Préparation** : $S = \mathrm{diag}(S_{XX}, S_{YY})$ avec $S_{XX} = R_z(\frac{\pi}{6})$, $S_{YY} = R_y(\frac{\pi}{9})$.
$S_{XY} = S_{YX} = 0 \Rightarrow S \in SO(3,3)$ (bloc diagonal).
— **Action** : on compose une *rotation interne* et un *boost simple* sur la paire (x_1, y_1).
Prenons $A = R_x(\frac{\pi}{12})$, $D = R_z(\frac{\pi}{10})$.
Boost de rapidité $\phi = \frac{1}{5}$ entre x_1 et y_1 : $\begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}$ inséré dans M (indices $(1,1)$ des blocs X et Y).

— **Lecture** : $e_s = I_3$, $e_t = \frac{1}{c} I_3$ (fixe l'échelle), $u_t = (1,0,0)^\top$.

10.2 Étape 1 : préparation $(X_{\text{eff}}, Y_{\text{eff}})$

$$X_{\text{eff}} = S_{XX} f_X = R_z(\tfrac{\pi}{6})(1,0,0)^\top = (\cos\tfrac{\pi}{6},\ \sin\tfrac{\pi}{6},\ 0)^\top,$$

$$Y_{\text{eff}} = S_{YY} f_Y = R_y(\tfrac{\pi}{9})(0,1,0)^\top = (0,\ \cos\tfrac{\pi}{9},\ \sin\tfrac{\pi}{9})^\top.$$

10.3 Étape 2 : action M (rotation interne + boost)

Rotation interne :

$$\tilde{X} = A\, X_{\text{eff}}, \qquad \tilde{Y} = D\, Y_{\text{eff}}.$$

Boost sur la paire $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_1 \end{pmatrix}, \qquad (x_2', x_3') = (\tilde{x}_2, \tilde{x}_3),\ (y_2', y_3') = (\tilde{y}_2, \tilde{y}_3).$$

10.4 Étape 3 : lecture et observables

$$\Delta x = e_s X' = X', \qquad \Delta\tau = u_t^\top e_t Y' = \tfrac{1}{c} y_1', \qquad v = \|\Delta x\| / \Delta\tau.$$

10.5 Remarques

- On a bien $M^\top J M = J$: une rotation bloc-diagonale + un boost élémentaire donne un $M \in SO(3,3)$.
- Ici, l'effet *translation-like* apparaît si l'on fige Y_{eff} et que l'on lit uniquement X' : le boost injecte un décalage contrôlé par $\sinh\phi$.

A Vérifications $SO(3,3)$ (Sympy)

Test $M^\top J M = J$ **et** $S^\top J S = J$

Python/Sympy (copier-coller dans un notebook) :

```
import sympy as sp
I3 = sp.eye(3)
J  = sp.diag(1,1,1,-1,-1,-1)

def Rz(theta):
    c,s = sp.cos(theta), sp.sin(theta)
    return sp.Matrix([[c,-s,0],[s,c,0],[0,0,1]])

def Rx(theta):
    c,s = sp.cos(theta), sp.sin(theta)
    return sp.Matrix([[1,0,0],[0,c,-s],[0,s,c]])

def block(M11,M12,M21,M22):
    return sp.Matrix(sp.BlockMatrix([[M11,M12],[M21,M22]]))

# Exemple: S bloc-diagonal
Sxx = Rz(sp.pi/6); Syy = Rz(sp.pi/10)
S   = block(Sxx, sp.zeros(3), sp.zeros(3), Syy)
print("S^T J S - J =")
print((S.T*J*S - J).simplify())

# Exemple: M = rotation (bloc) + boost (x1<->y1)
A = Rx(sp.pi/12); D = Rz(sp.pi/10)
B = sp.zeros(3); C = sp.zeros(3)
M = block(A,B,C,D)

# Insérer boost sur indices 0 (x1) et 3 (y1)
phi = sp.Rational(1,5)
cosh, sinh = sp.cosh(phi), sp.sinh(phi)
M_boost = sp.eye(6)
M_boost[0,0]=cosh; M_boost[0,3]=sinh
M_boost[3,0]=sinh; M_boost[3,3]=cosh

M = M_boost * M  # compose
print("M^T J M - J =")
print((M.T*J*M - J).simplify())
```