Fila de Prioridades

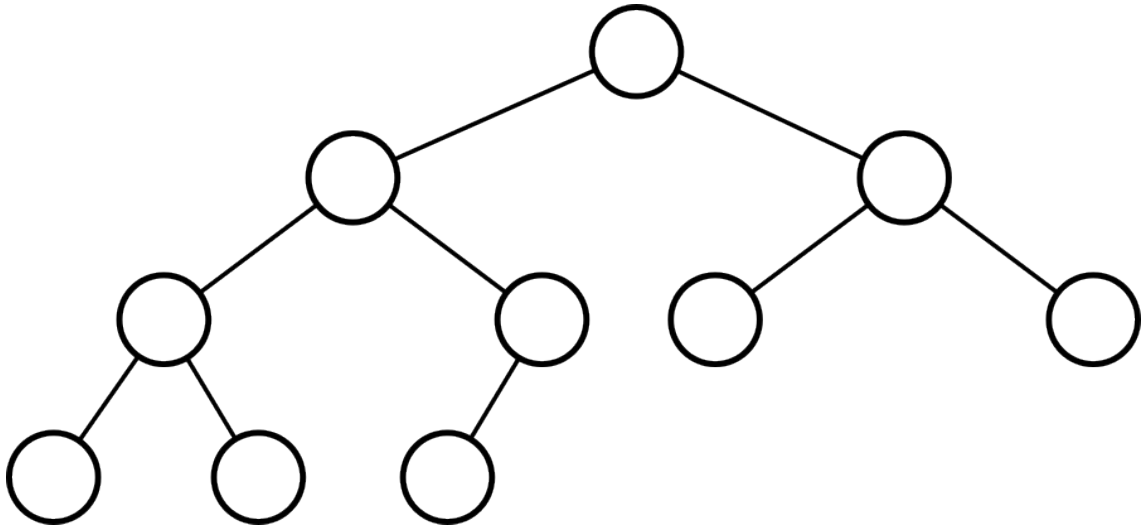
Profª. Rose Yuri Shimizu

Fila de Prioridades - TAD

- É um tipo abstrato de dados (TAD)
  - Estrutura de dados com comportamentos específicos
  - Acessadas por um conjunto de operações (interface)
- Existem operações que envolvem um grande volume de informações que precisam de alguma ordenação
  - Não necessariamente precisam estar totalmente ordenados
    - O importante é saber qual tem a maior prioridade
  - Não necessariamente precisam processar todos os dados
    - Conforme novos dados forem coletados, atualiza-se a fila de prioridades
  - Dados que são rankeados conforme um critério em que o mais importante é saber quem está no topo
  - Exemplos: mineração de dados, caminhos em grafos (verificar adjacentes na decisão do caminho)
- A fila pode ser com prioridade máxima (maior chave, maior prioridade) ou mínima (menor valor, maior prioridade)

Fila de Prioridades - Heap

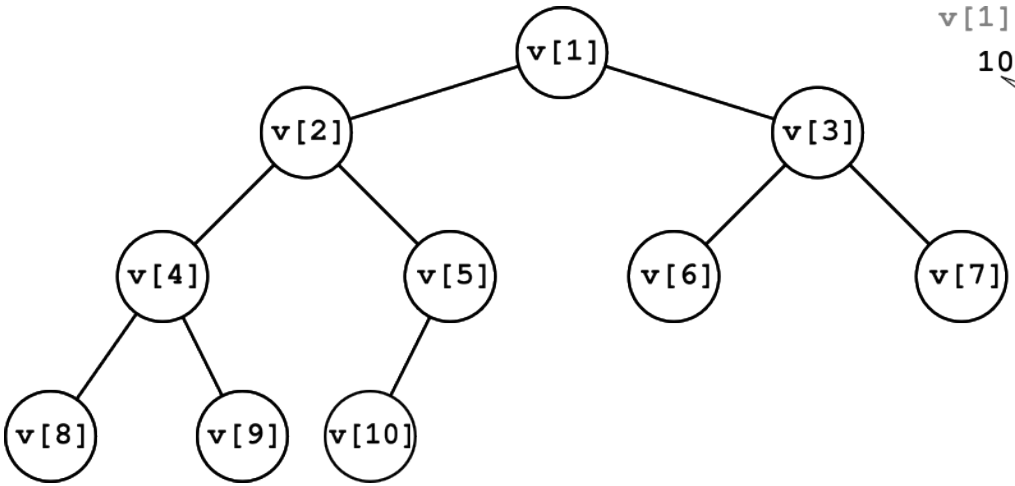
- Heap binária (heap): árvore binária quase completa com vetores
- Forma uma árvore binária quase completa, com as seguintes características:
  - Todos as folhas estão no nível "d" ou "d-1"
  - Todos os níveis exceto o último estão cheios
  - Os nós do último nível estão o mais a esquerda possível

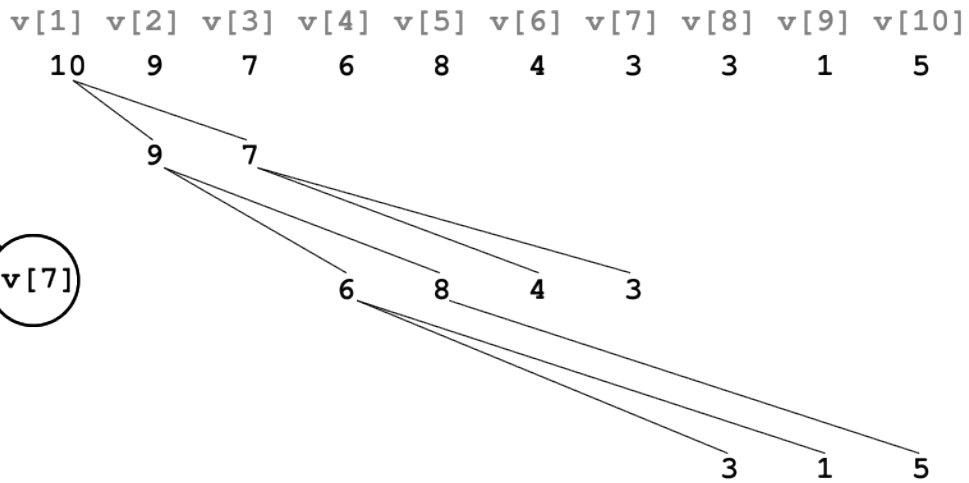


- Raiz: chave de maior prioridade
- Não ordena por completo, só garante-se que:
  - Quanto mais próximo à raiz, maior a prioridade
  - Cada nó possui filhos com valores menores ou iguais

Fila de Prioridades - Heap

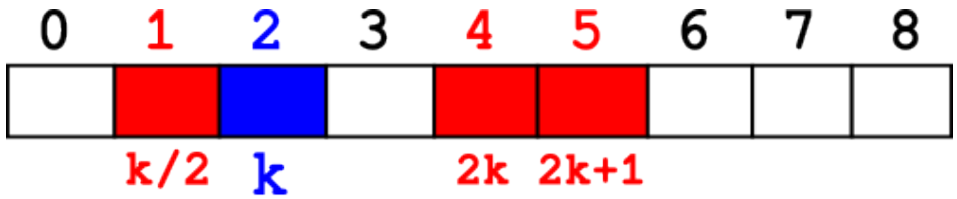
- Representada por um vetor:
  - Eficiente para as operações básicas (logarítmico) da fila de prioridades
  - Representação sequencial da árvore: facilidade em deixá-la completa
  - Acesso direto aos nós
  - Níveis da árvore acessada pelos seus índices
    - ★ Raiz: posição 1
    - ★ Filhos: 2 e 3
    - ★ Netos: 4, 5, 6 e 7
    - ★ E assim por diante.

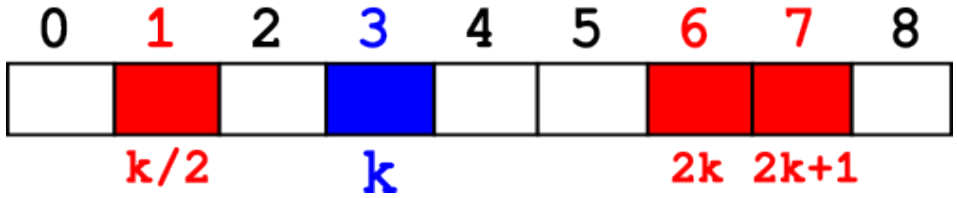




Fila de Prioridades - Heap

- Navegação trivial para cima e baixo:
  - Simples operação aritmética
  - Sendo um nó na posição k
    - ★ pai: $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$
    - ★ filhos: $2k$ e $2k+1$





- Tamanho N em um vetor pq[]
  - pq[N+1]: pq[1..N]
  - Não utiliza-se a posição pq[0] (??)
  - E se utilizar?
    - ★ pai: $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$
    - ★ filhos: $2k+1$ e $2k+2$

Fila de Prioridades - Heap

- Interface (manipulação da fila):
  - PQinit(int maxN): criar uma fila de prioridades com capacidade máxima inicial
  - PQempty(): testar se está vazia
  - PQinsert(Item v): inserir uma chave
  - PQdelmax(): retornar e remover (maior prioridade)
  - Busca??

Fila de Prioridades - Heap

```
1  #define less(A, B) ((A) < (B))
2  #define exch(A, B) { Item t=A; A=B; B=t; }
3
4  //static: acessível somente no arquivo
5  static Item *pq;
6  static int N;
7
8  void PQinit(int maxN) {
9      pq = malloc(sizeof(Item)*(maxN+1));
10     N = 0;
11 }
12
13 int PQempty() {
14     return N==0;
15 }
```

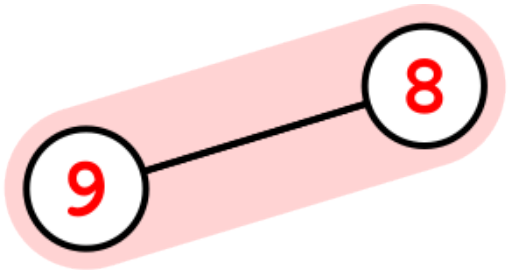
Fila de Prioridades - Heap - Inserção

- Inserção nas folhas da heap
- Restauração/conserto: subindo na heap (maior que o pai?)

Inserir 8 [8]

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

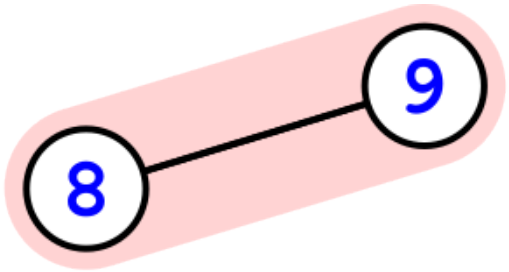
- Inserção nas folhas da heap
- Restauração/conserto: subindo na heap (maior que o pai?)



Inserir 9 [8, 9]

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

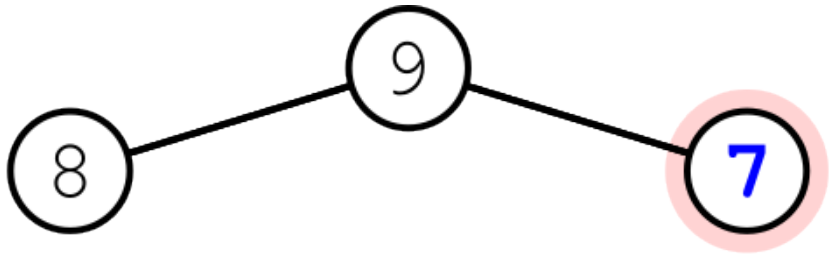
- Inserção nas folhas da heap
- Restauração/conserto: subindo na heap (maior que o pai?)



Restaurando 9 [9, 8]

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

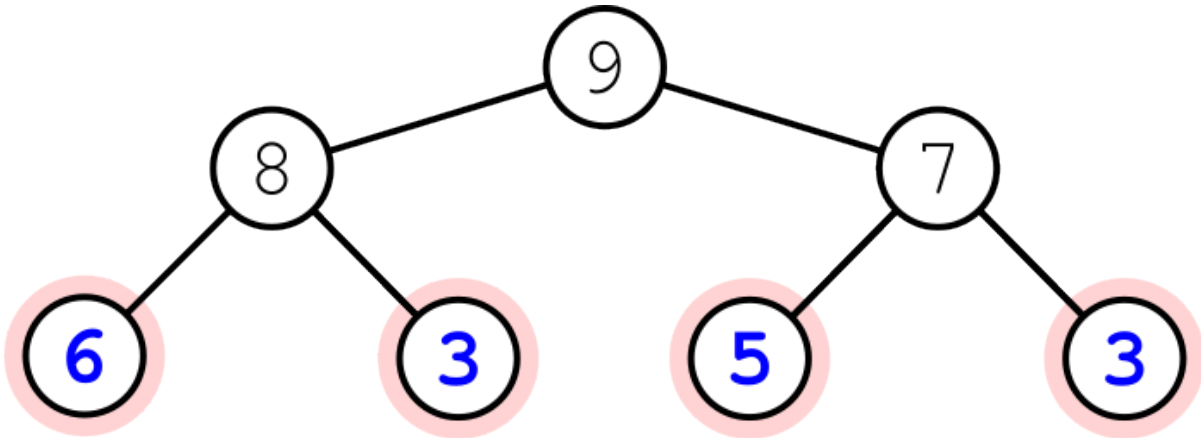
- Inserção nas folhas da heap
- Restauração/conserto: subindo na heap (maior que o pai?)



Inserir 7 [9, 8, 7]

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

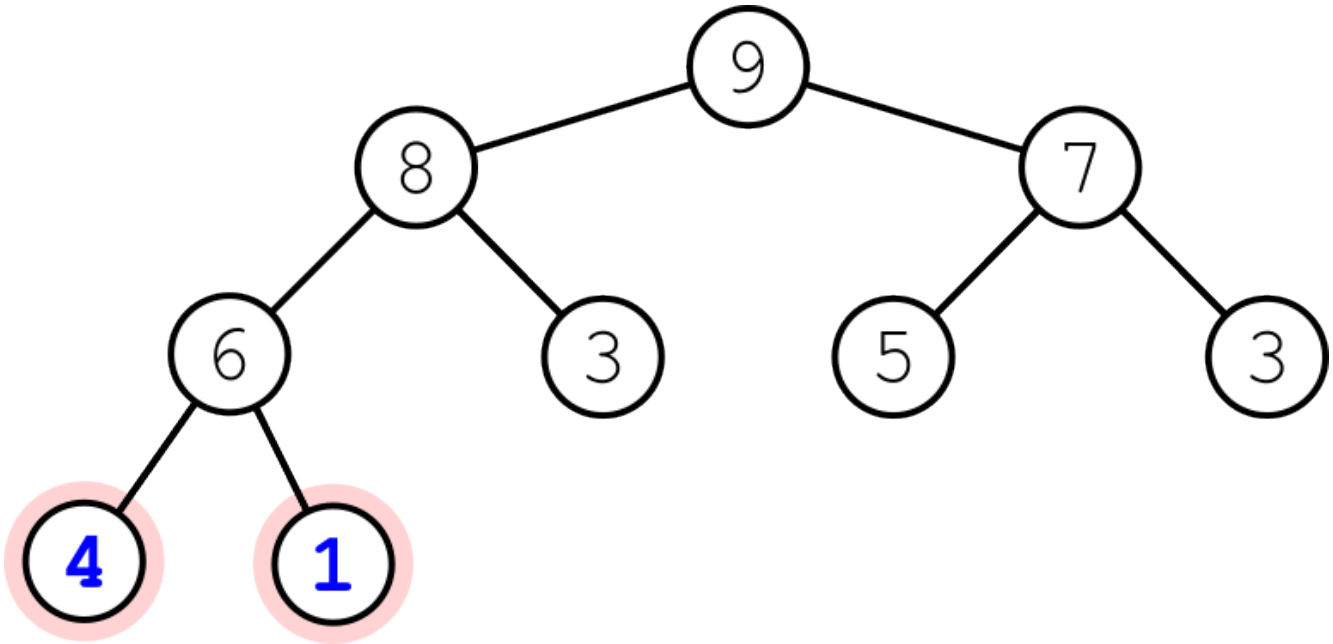
- Inserção nas folhas da heap
- Restauração/conserto: subindo na heap (maior que o pai?)



Inserir 6,3,5,3 [9, 8, 7, 6, 3, 5, 3]

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

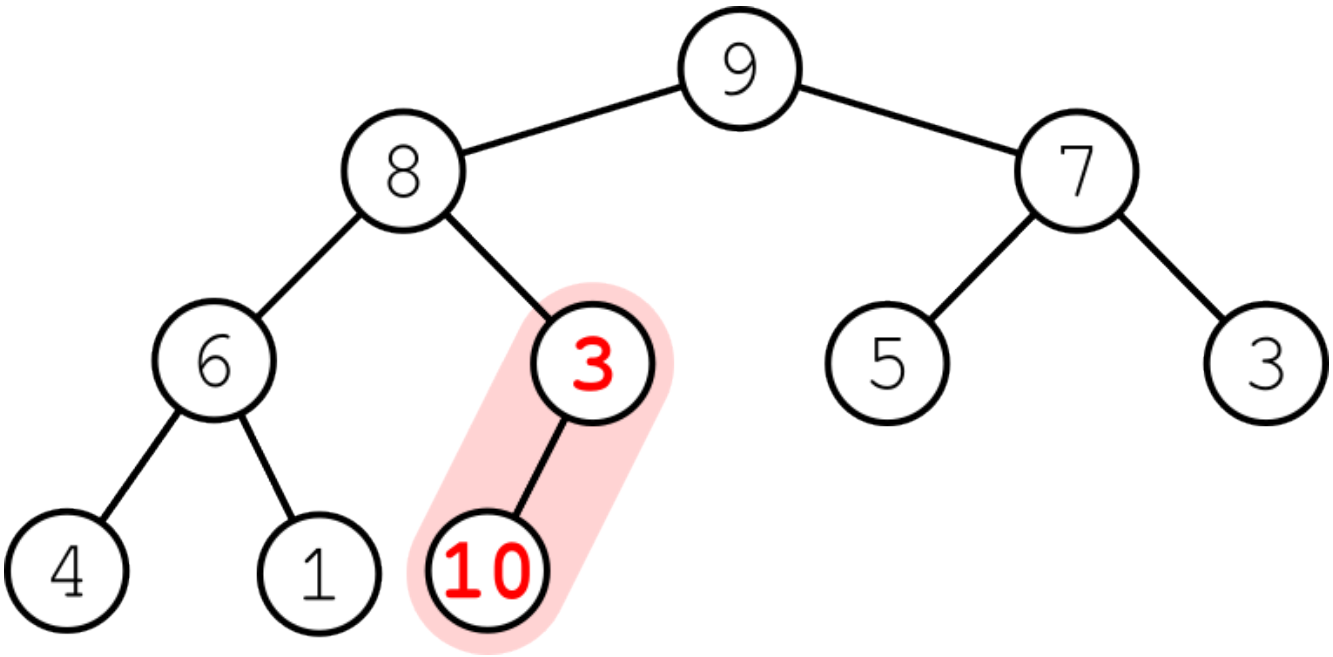
- Inserção nas folhas da heap
- Restauração/conserto: subindo na heap (maior que o pai?)



Inserir 4,1 [9, 8, 7, 6, 3, 5, 3, 4, 1]

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

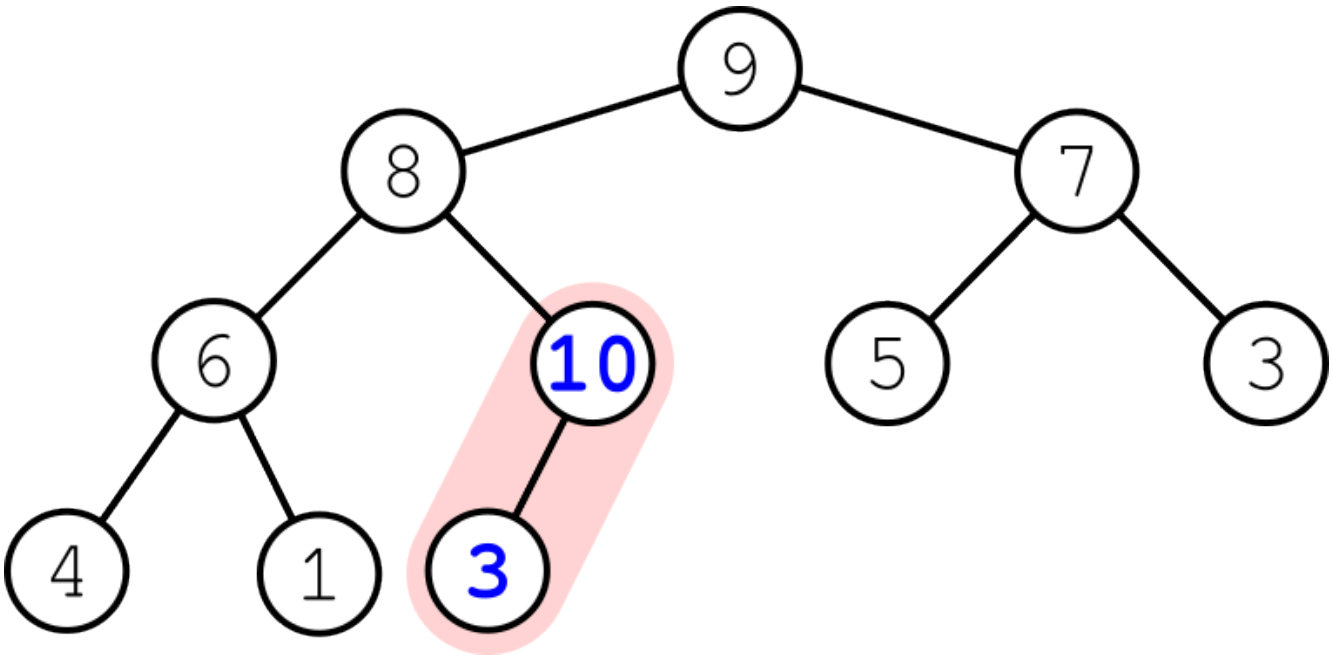
- Inserção nas folhas da heap
- Restauração/conserto: subindo na heap (maior que o pai?)



Inserir 10 [9, 8, 7, 6, 3, 5, 3, 4, 1, 10]

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

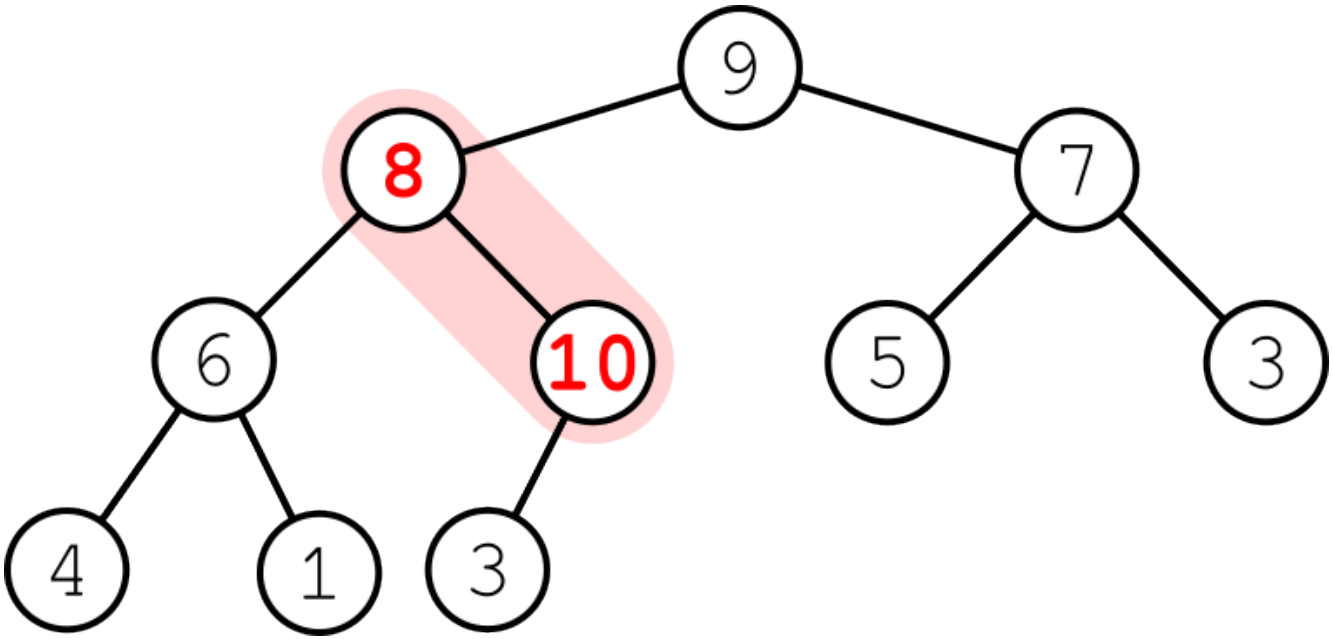
- Inserção nas folhas da heap
- Restauração/conserto: subindo na heap (maior que o pai?)



Restaurando 10 [9, 8, 7, 6, 3, 5, 3, 4, 1, 10]

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

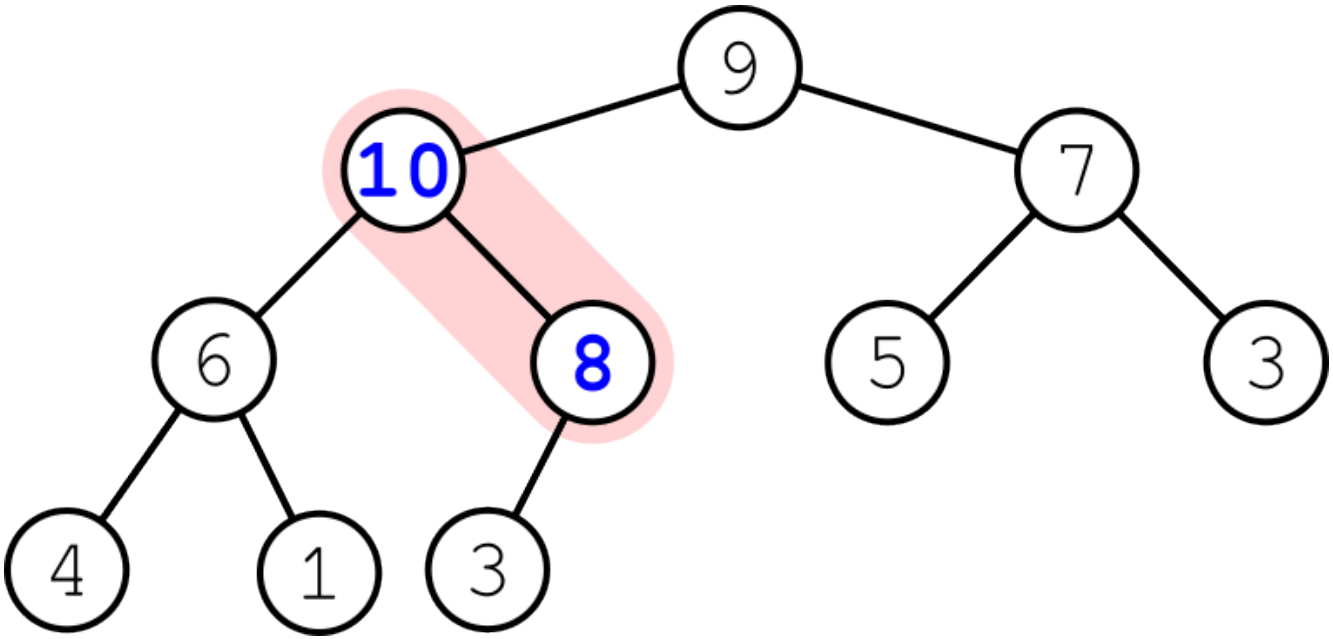
- Inserção nas folhas da heap
- Restauração/conserto: subindo na heap (maior que o pai?)



Restaurando 10 [9, 8, 7, 6, 10, 5, 3, 4, 1, 3]

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

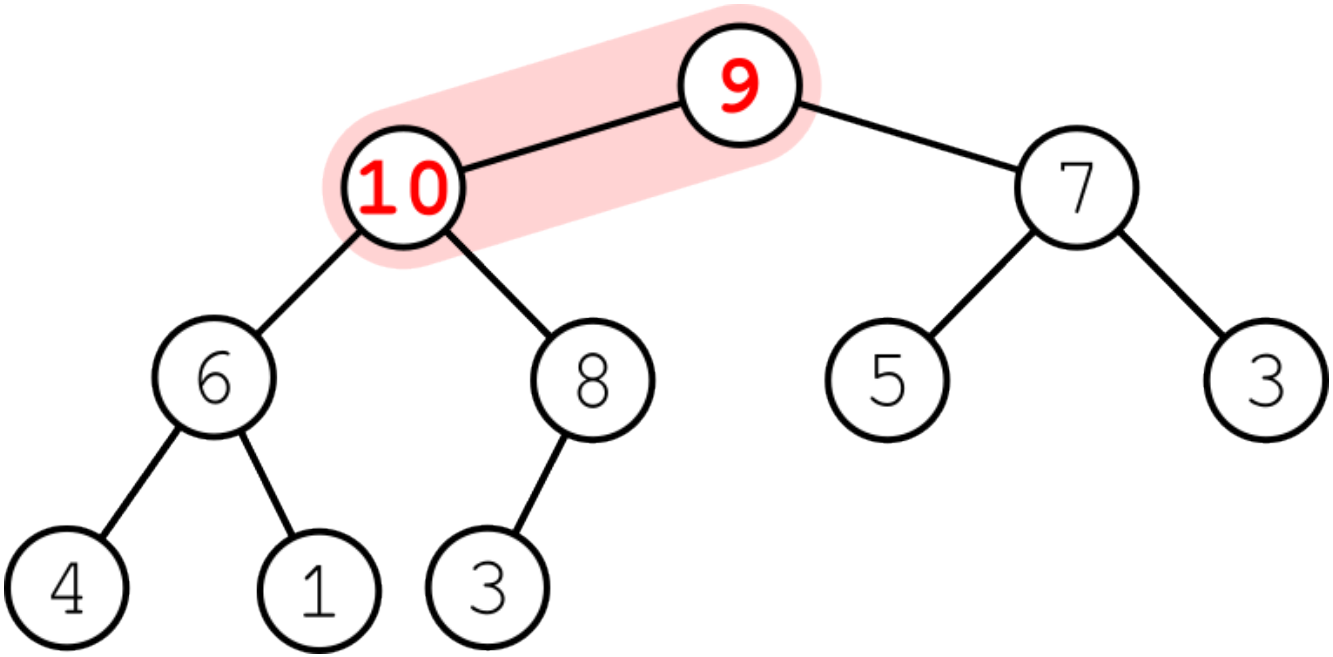
- Inserção nas folhas da heap
- Restauração/conserto: subindo na heap (maior que o pai?)



Restaurando 10 [9, 8, 7, 6, 10, 5, 3, 4, 1, 3]

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

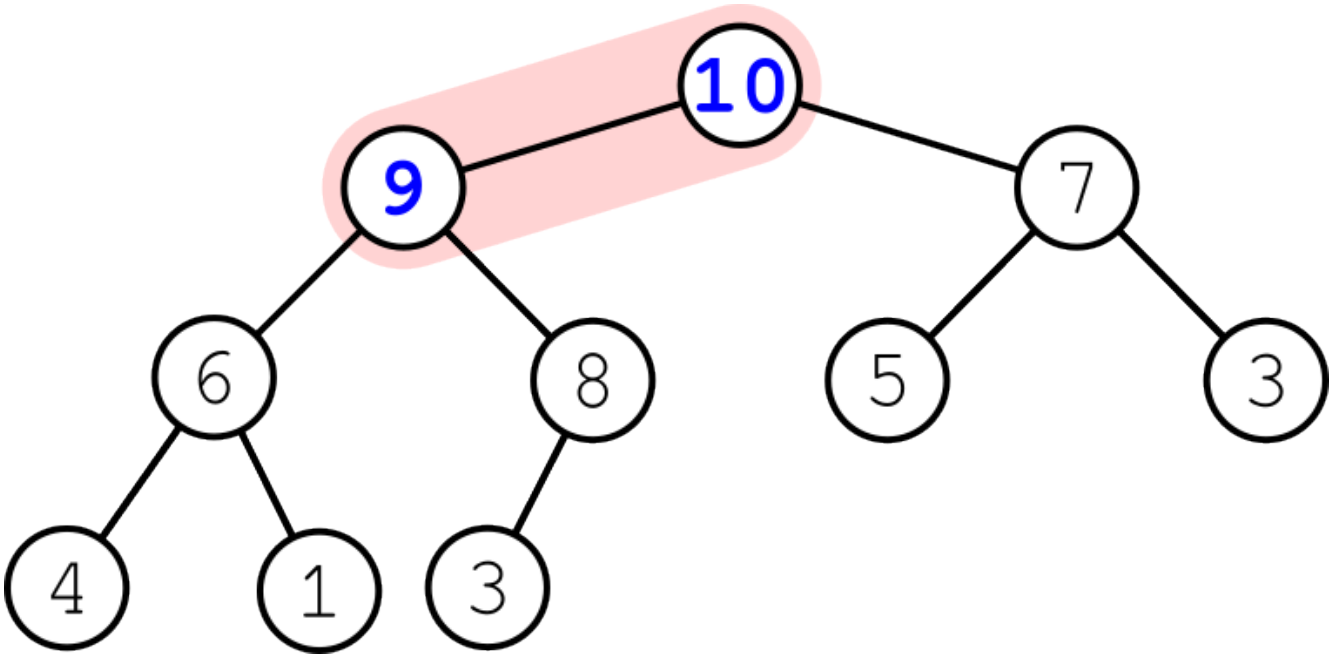
- Inserção nas folhas da heap
- Restauração/conserto: subindo na heap (maior que o pai?)



Restaurando 10 [9, 10, 7, 6, 8, 5, 3, 4, 1, 3]

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

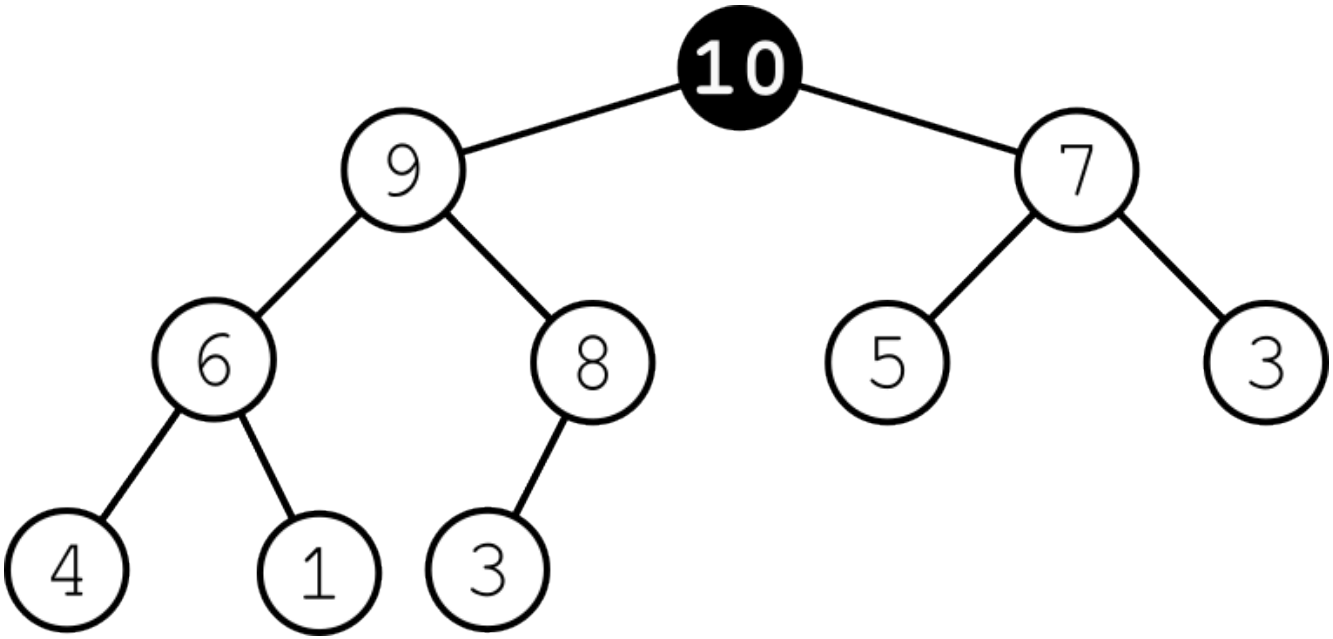
- Inserção nas folhas da heap
- Restauração/conserto: subindo na heap (maior que o pai?)



Restaurando 10 [10, 9, 7, 6, 8, 5, 3, 4, 1, 3]

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

- Inserção nas folhas da heap
- Restauração/conserto: subindo na heap (maior que o pai?)



Fila de Prioridades - Heap - Inserção

- Adicionar uma nova chave no fim do vetor

```
1 void PQinsert(Item v) {
2     //adicionar no fim
```

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

- Adicionar uma nova chave no fim do vetor

```
1 void PQinsert(Item v) {
2     //adicionar no fim
3     pq[++N] = v;
4
5     //consertar o elemento na posição N
6     fixUp(N);
7 }
```

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

- Restaura a ordenação da heap: bottom-up (swim - fixUp)
  - Flutue (swap) caso a chave seja maior que seu pai
  - Repetidamente, flutue até pai maior ou raiz

```
1 void fixUp(int k)
2 {
3   //se não for raiz e maior que o pai
```

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

- Restaura a ordenação da heap: bottom-up (swim - fixUp)
  - Flutue (swap) caso a chave seja maior que seu pai
  - Repetidamente, flutue até pai maior ou raiz

```
1 void fixUp(int k)
2 {
3   //se não for raiz e maior que o pai
4   while(k>1 &&
```

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

- Restaura a ordenação da heap: bottom-up (swim - fixUp)
  - Flutue (swap) caso a chave seja maior que seu pai
  - Repetidamente, flutue até pai maior ou raiz

```
1 void fixUp(int k)
2 {
3   //se não for raiz e maior que o pai
4   while(k>1 && less(pq[k/2],pq[k]))
5   {
6     //troque
```

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

- Restaura a ordenação da heap: bottom-up (swim - fixUp)
  - Flutue (swap) caso a chave seja maior que seu pai
  - Repetidamente, flutue até pai maior ou raiz

```
1 void fixUp(int k)
2 {
3   //se não for raiz e maior que o pai
4   while(k>1 && less(pq[k/2],pq[k]))
5   {
6     //troque
7     exch(pq[k], pq[k/2]);
8
9     //subir: atualizar k
```

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

- Restaura a ordenação da heap: bottom-up (swim - fixUp)
  - Flutue (swap) caso a chave seja maior que seu pai
  - Repetidamente, flutue até pai maior ou raiz

```
1  void fixUp(int k)
2  {
3    //se não for raiz e maior que o pai
4    while(k>1 && less(pq[k/2],pq[k]))
5    {
6      //troque
7      exch(pq[k], pq[k/2]);
8
9      //subir: atualizar k
10     k = k/2;
11   }
12 }
```

Fila de Prioridades - Heap - Inserção

- Complexidade: $1 + \log N$ comparações - $O(\log N)$

```
1  void fixUp(int k)
2  {
3    //k até 1 - reduzindo metade por iteração
4    //altura da árvore ≈ log k
5    while(k>1 && less(pq[k/2],pq[k]))
6    {
7      exch(pq[k], pq[k/2]);
8      k = k/2;
9    }
10 }
```

Fila de Prioridades - Heap - Remoção

1. Remover qual elemento??

Fila de Prioridades - Heap - Remoção

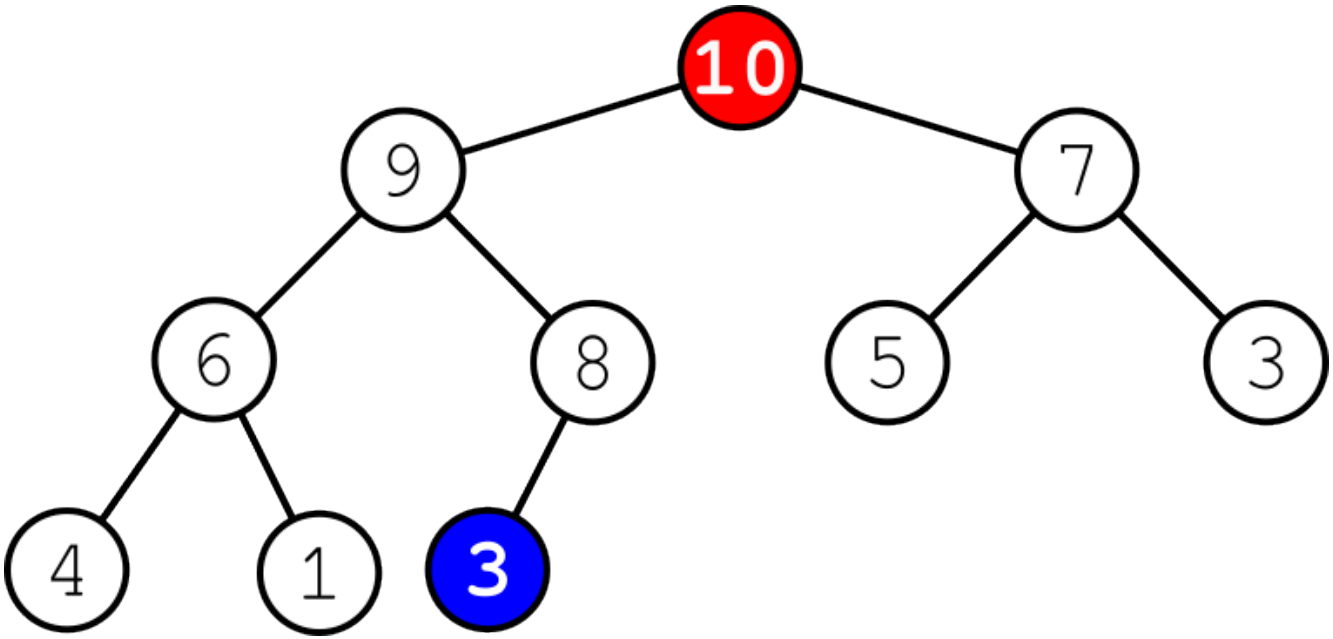
1. Remover qual elemento??
2. Substituir a raiz por uma folha

Fila de Prioridades - Heap - Remoção

1. Remover qual elemento??
2. Substituir a raiz por uma folha
3. Restauração/conserto: descendo na heap

Fila de Prioridades - Heap - Remoção

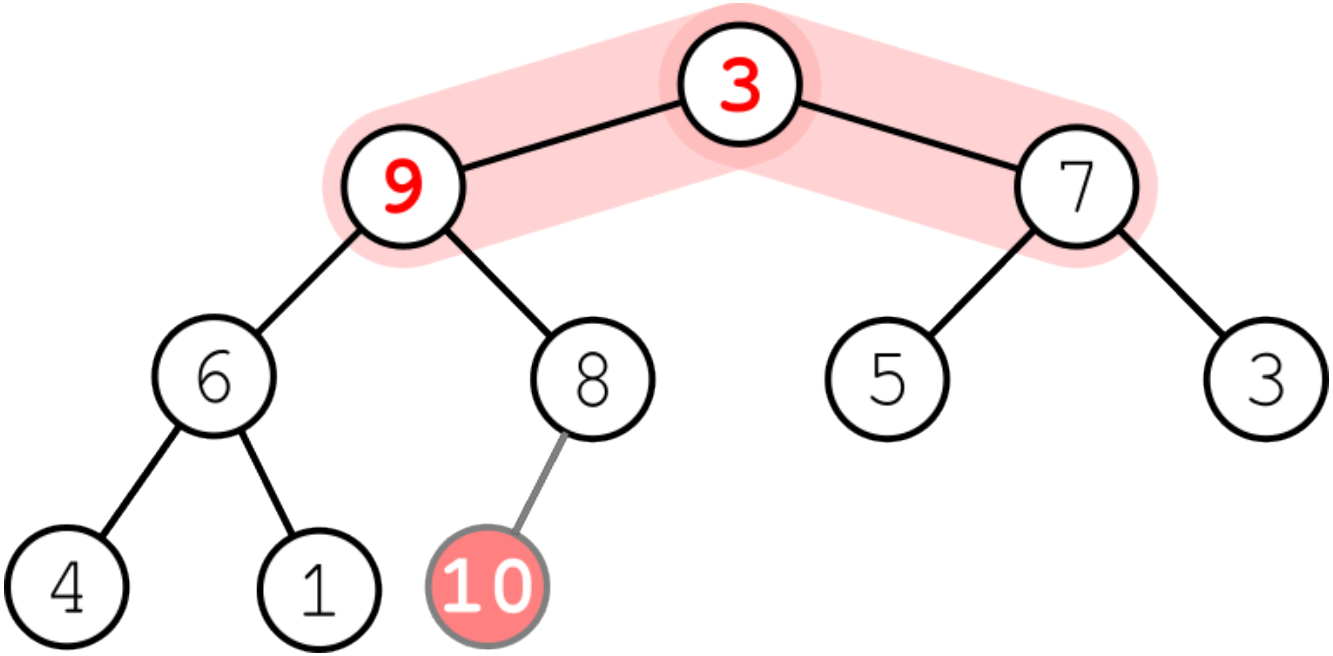
Substituir a raiz por uma folha



Remover 10 [**10**, 9, 7, 6, 8, 5, 3, 4, 1, **3**]

Fila de Prioridades - Heap - Remoção

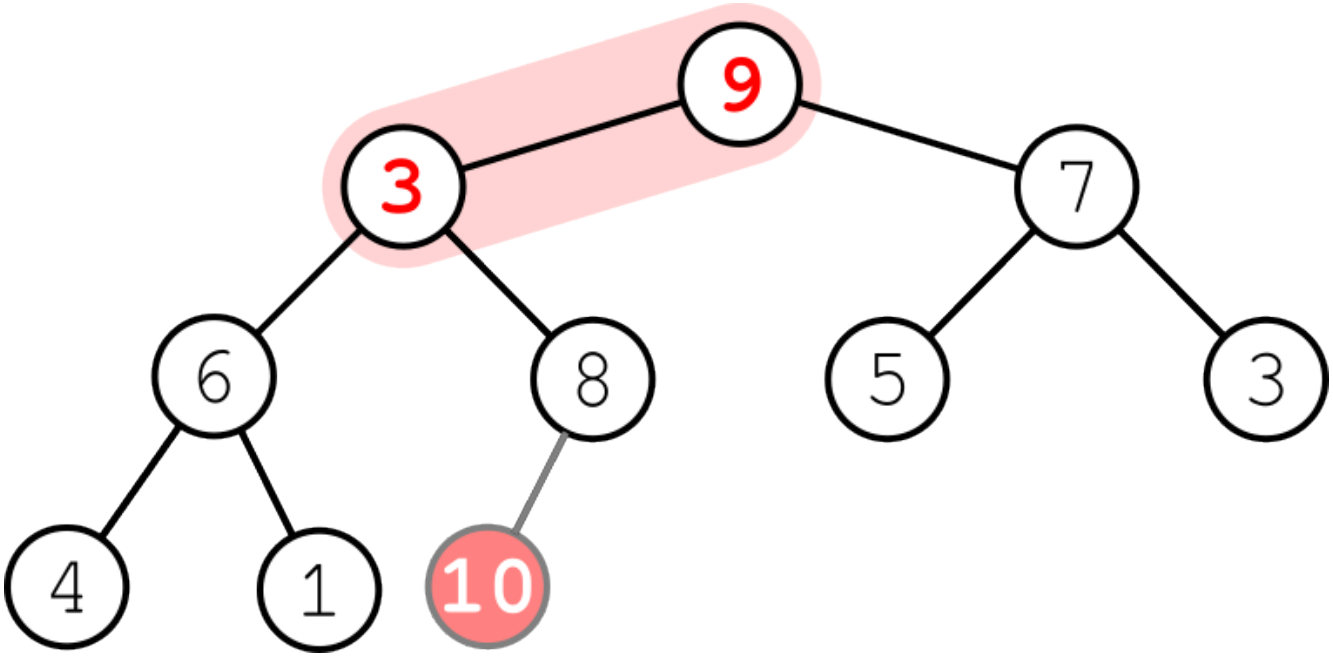
Restauração/conserto: descendo na heap (maior filho?)



Restaurando 3 [**3**, **9**, **7**, 6, 8, 5, 3, 4, 1, 10]

Fila de Prioridades - Heap - Remoção

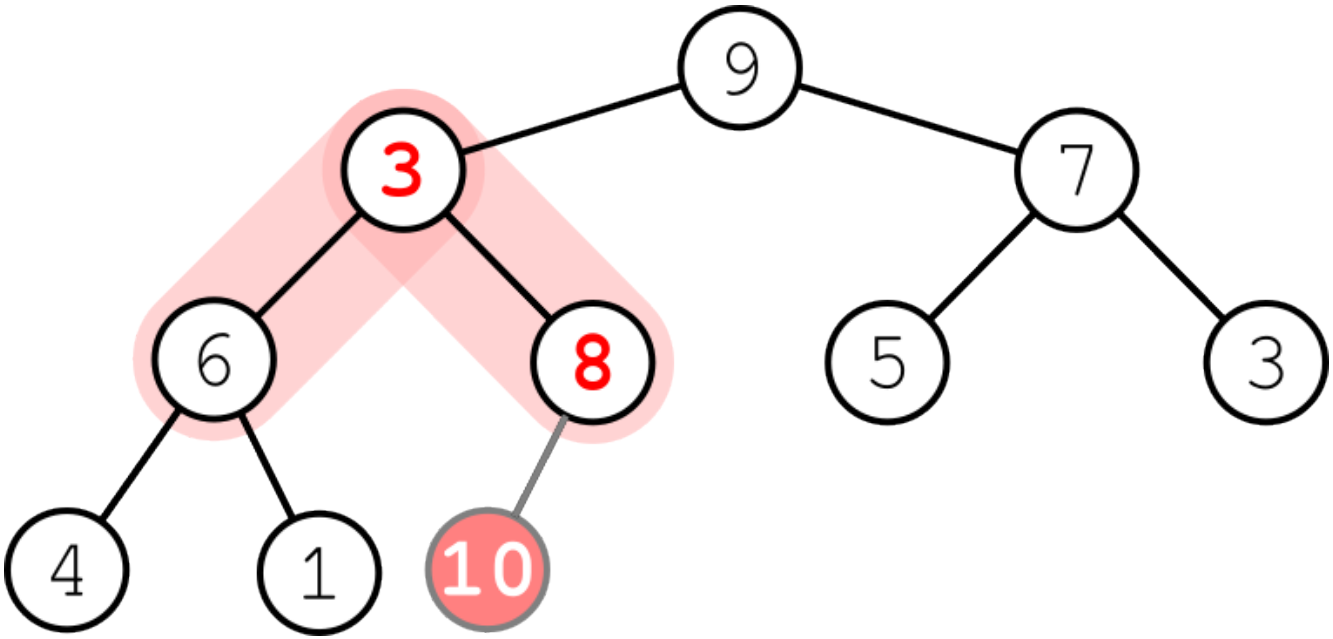
Restauração/conserto: descendo na heap (maior filho?)



Restaurando 3 [**9**, **3**, 7, 6, 8, 5, 3, 4, 1, 10]

Fila de Prioridades - Heap - Remoção

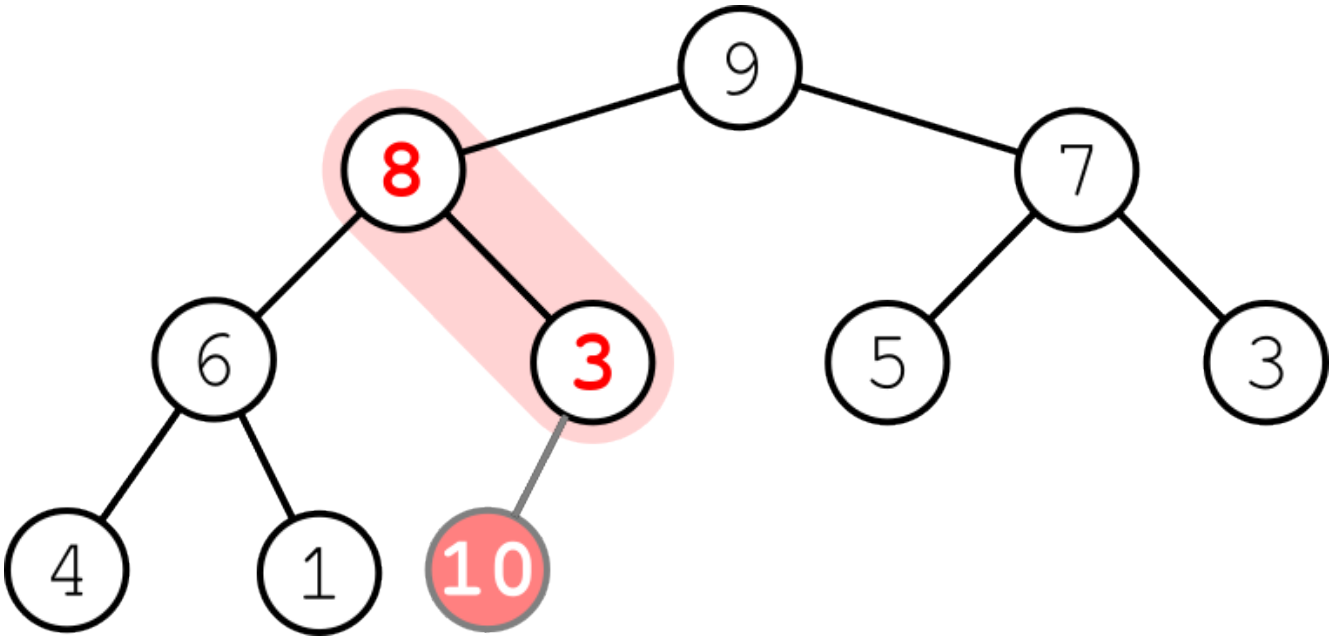
Restauração/conserto: descendo na heap (maior filho?)



Restaurando 3 [9, **3**, 7, **6**, **8**, 5, 3, 4, 1, 10]

Fila de Prioridades - Heap - Remoção

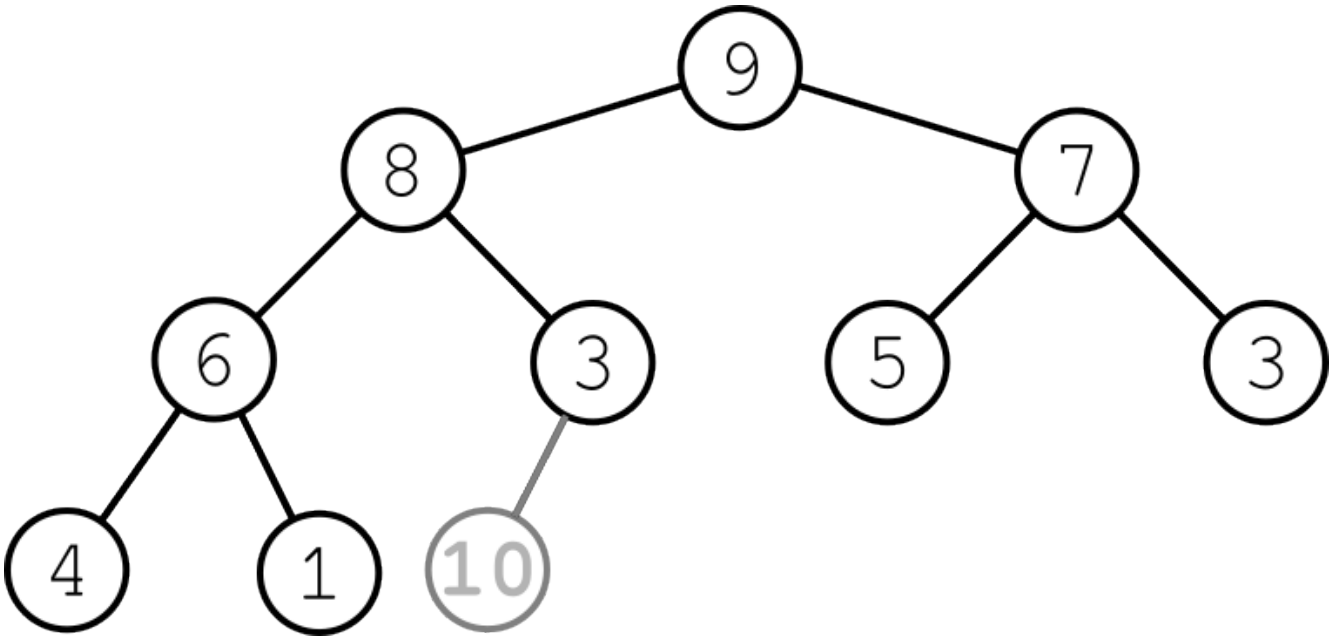
Restauração/conserto: descendo na heap (maior filho?)



Restaurando 3 [9, **8**, 7, 6, **3**, 5, 3, 4, 1, 10]

Fila de Prioridades - Heap - Remoção

Restauração/conserto: descendo na heap (maior filho?)



Restaurando 3 [9, 8, 7, 6, 3, 5, 3, 4, 1, 10]

Fila de Prioridades - Heap - Remoção

- Troca a raiz com o último elemento

```
1 Item PQdelmax() {
2   //troque topo -> ultimo
```

Fila de Prioridades - Heap - Remoção

- Troca a raiz com o último elemento

```
1 Item PQdelmax() {
2   //troque topo -> ultimo
3   exch(pq[1], pq[N]);
4
5   //reposiocione
```

Fila de Prioridades - Heap - Remoção

- Troca a raiz com o último elemento

```
1 Item PQdelmax() {
2   //troque topo -> ultimo
3   exch(pq[1], pq[N]);
4
5   //reposiocione
6   fixDown(1, N-1);
7
8   //retorne o removido
```

Fila de Prioridades - Heap - Remoção

- Troca a raiz com o último elemento

```
1  Item PQdelmax() {
2    //troque topo -> ultimo
3    exch(pq[1], pq[N]);
4
5    //reposiocione
6    fixDown(1, N-1);
7
8    //retorne o removido
9    return pq[N--];
10 }
```

- Restaura a ordenação da heap: top-down (sink - fixDown)
  - Afunde caso a chave seja menor que os filhos
    - Swap com o maior filho
  - Repetidamente, afunde até ser maior ou igual que os filhos ou ser folha

```
1 void fixDown(int k, int N) { //afunda k
2   //enquanto tive filho (?)
```

- Restaura a ordenação da heap: top-down (sink - fixDown)
  - Afunde caso a chave seja menor que os filhos
    - Swap com o maior filho
  - Repetidamente, afunde até ser maior ou igual que os filhos ou ser folha

```
1 void fixDown(int k, int N) { //afunda k
2   //enquanto tive filho (?)
3   while(2*k <= N) {
4     int j = 2*k; //filho da esquerda
5
6     //se tiver filho da direita e for maior?
```

- Restaura a ordenação da heap: top-down (sink - fixDown)
  - Afunde caso a chave seja menor que os filhos
    - Swap com o maior filho
  - Repetidamente, afunde até ser maior ou igual que os filhos ou ser folha

```
1 void fixDown(int k, int N) { //afunda k
2   //enquanto tive filho (?)
3   while(2*k <= N) {
4     int j = 2*k; //filho da esquerda
5
6     //se tiver filho da direita e for maior?
7     if(j<N && less(pq[j], pq[j+1])) j++;
8
9     //pq[k] maior que o maior filho?
```

- Restaura a ordenação da heap: top-down (sink - fixDown)
  - Afunde caso a chave seja menor que os filhos
    - Swap com o maior filho
  - Repetidamente, afunde até ser maior ou igual que os filhos ou ser folha

```
1  void fixDown(int k, int N) { //afunda k
2    //enquanto tive filho (?)
3    while(2*k <= N) {
4      int j = 2*k; //filho da esquerda
5
6      //se tiver filho da direita e for maior?
7      if(j<N && less(pq[j], pq[j+1])) j++;
8
9      //pq[k] maior que o maior filho?
10     if(!less(pq[k], pq[j])) break;
11
12     //senão, afunde (troque com o filho)
```

- Restaura a ordenação da heap: top-down (sink - fixDown)
  - Afunde caso a chave seja menor que os filhos
    - Swap com o maior filho
  - Repetidamente, afunde até ser maior ou igual que os filhos ou ser folha

```
1  void fixDown(int k, int N) { //afunda k
2    //enquanto tive filho (?)
3    while(2*k <= N) {
4      int j = 2*k; //filho da esquerda
5
6      //se tiver filho da direita e for maior?
7      if(j<N && less(pq[j], pq[j+1])) j++;
8
9      //pq[k] maior que o maior filho?
10     if(!less(pq[k], pq[j])) break;
11
12     //senão, afunde (troque com o filho)
13     exch(pq[k], pq[j]);
14
15     //atualiza k para o maior filho
```

- Restaura a ordenação da heap: top-down (sink - fixDown)
  - Afunde caso a chave seja menor que os filhos
    - Swap com o maior filho
  - Repetidamente, afunde até ser maior ou igual que os filhos ou ser folha

```
1  void fixDown(int k, int N) { //afunda k
2    //enquanto tive filho (?)
3    while(2*k <= N) {
4      int j = 2*k; //filho da esquerda
5
6      //se tiver filho da direita e for maior?
7      if(j<N && less(pq[j], pq[j+1])) j++;
8
9      //pq[k] maior que o maior filho?
10     if(!less(pq[k], pq[j])) break;
11
12     //senão, afunde (troque com o filho)
13     exch(pq[k], pq[j]);
14
15     //atualiza k para o maior filho
16     k = j;
17   }
18 }
```

Fila de Prioridades - Heap - Remoção

- Complexidade: $2 \log N$ comparações - $O(\log N)$

```
1  void fixDown(int k, int N) {
2    int j;
3    //2*k até N - dobrando a cada iteração
4    //altura da árvore ≈ log k
5    while(2*k <= N) {
6      j = 2*k;
7      if(j<N && less(pq[j], pq[j+1])) j++; //1
8      if(!less(pq[k], pq[j])) break;       //1
9      exch(pq[k], pq[j]);
10     k = j;
11   }
12 }
```

Fila de Prioridades - Heap - Várias filas

```
1  /**************************/
2  /* Implementacao com array */
3  /* Varias filas            */
4  /**************************/
5  typedef int Item;
6  typedef struct {
7      Item *pq;
8      int N;
9  }PQueue;
10
11 PQueue *PQinit(int);
12 int PQempty(PQueue*);
13 void PQinsert(PQueue*, Item);
14 Item PQdelmax(PQueue*);
15
16 void fixUp(PQueue*, int);
17 void fixDown(PQueue*, int);
```

Fila de Prioridades - Heap - Alterar prioridade

- Se temos o índice na fila de prioridades é trivial

```
1  void PQchange(int k, int valor)
2  {
3    if (v[k] < valor) {
4      v[k] = valor;
5      fixUp(k);
6    } else {
7      v[k] = valor;
8      fixDown(k, N);
9    }
10 }
```

Fila de Prioridades - Heap - Alterar prioridade

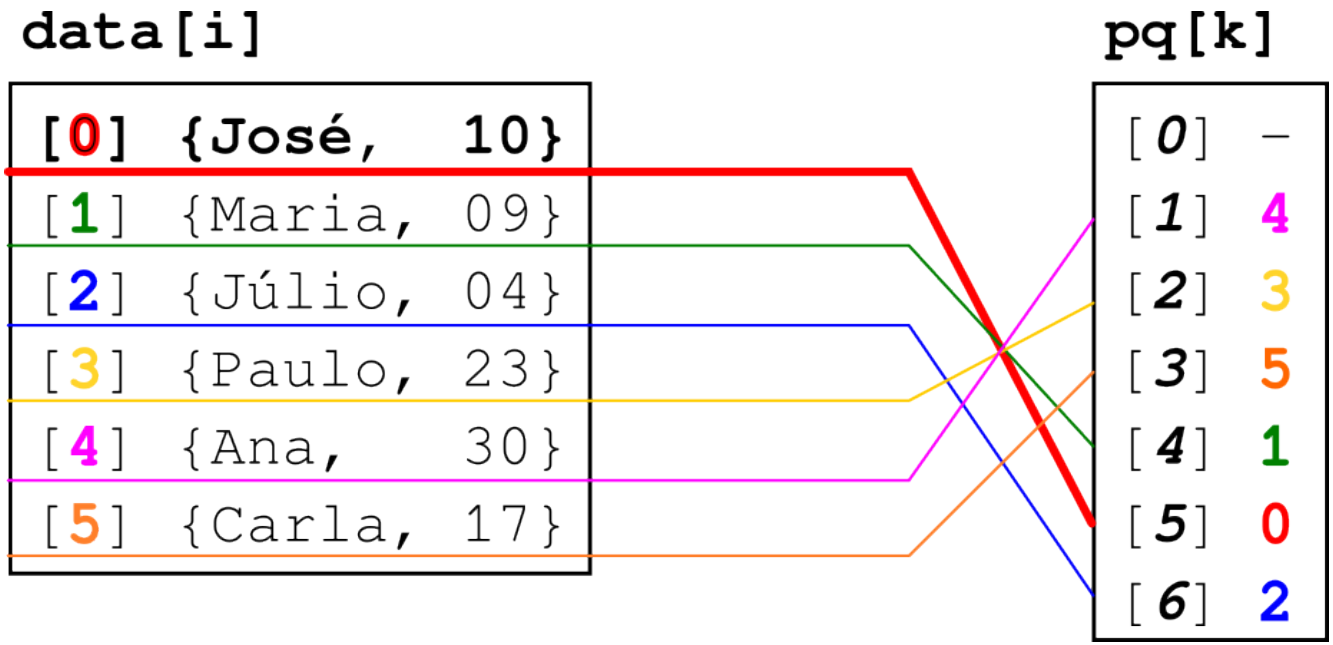
- Se não tem o acesso direto?
- Alterar a chave de valor 10 por 50?

pq[k]

[0]	–
[1]	30
[2]	23
[3]	17
[4]	09
[5]	10
[6]	04

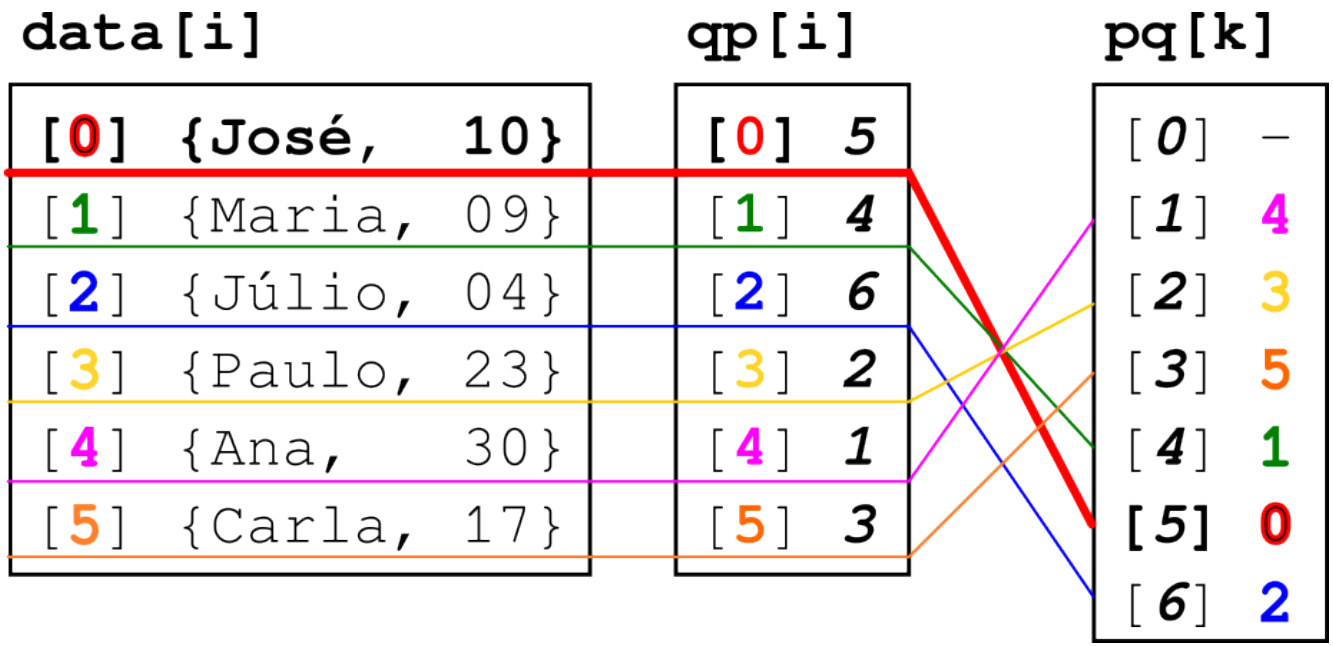
Fila de Prioridades - Heap - Alterar prioridade

- Base de dados: `data[i]`
- Fila de prioridades: posições da base de dados
  - `pq[k] = i`
  - `i` o índice em `data[i]`
  - `k` sua prioridade (posição na fila)
- Se alterar algum dado de `data`?
  - Se data[0].chave = 50?



Fila de Prioridades - Heap - Lista de índices - qp[]

- Lista de posições de `data` em `pq`
- Sendo `qp[i] = k` $\leftrightarrow$ `data[i]` está em `pq[k]`
  - `pq[k] = i`
  - `pq[qp[i]] = i`

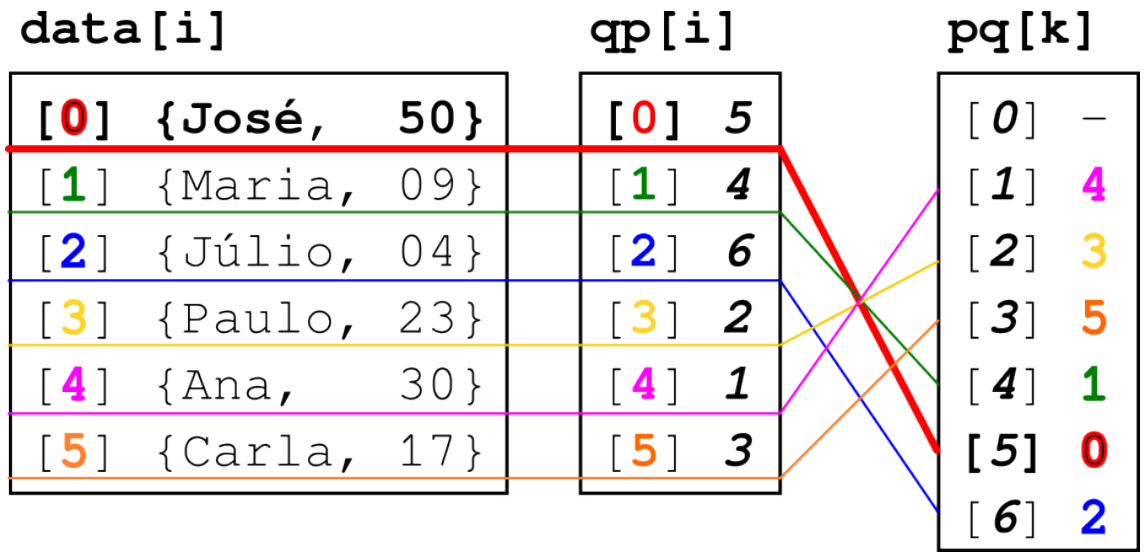


```c
typedef struct {
  char nome[20];
  int chave;
} Item;

static int *pq;
static int *qp;
static int N;

void PQinit(int);
void PQinsert(int);
void PQchange(int);
int PQdelmax();

int main(){
  Item data[6] = {{"José",  10},
                  {"Maria",  9},
                  {"Júlio",  4},
                  {"Paulo", 23},
                  {"Ana",   30},
                  {"Carla", 17}};

  PQinit(6);
  for(int i=0; i<6; i++) PQinsert(i);

}
```

```
1  void PQinit(int maxN)
2  {
3    pq = malloc(sizeof(int)*(maxN+1));
4    qp = malloc(sizeof(int)*(maxN+1));
5    N = 0;
6  }
7
8  //data[k]
9  void PQinsert(int k)
10 {
11   pq[++N] = k; //inserir na última posição
12   qp[k] = N;   //lista de índices
13
14   fixUp(N);    //consertar a heap
15                //pq[N/2].chave < pq[N].chave
16 }
```

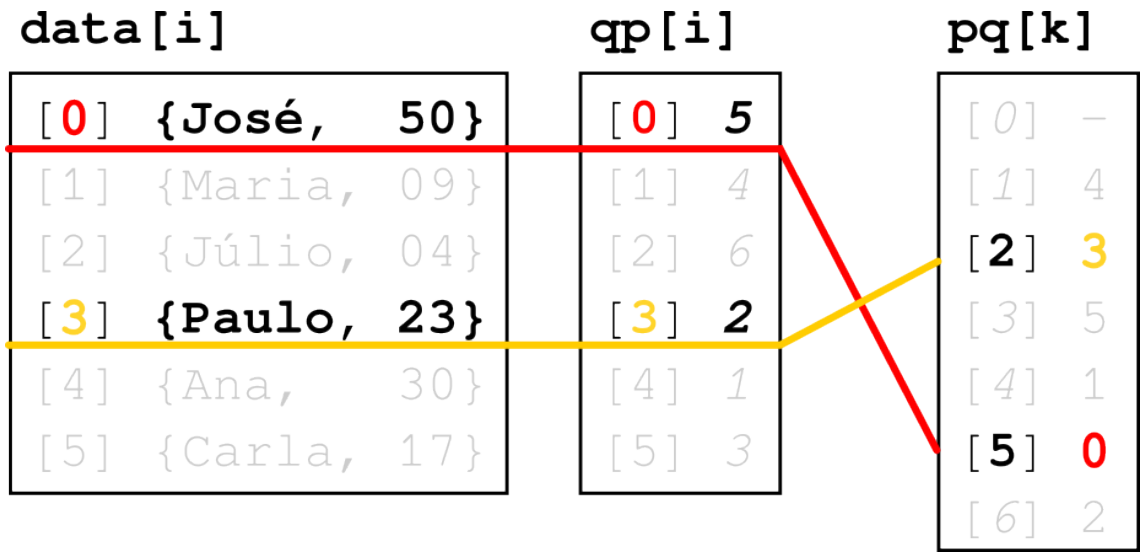
Fila de Prioridades - Heap - Alterar prioridade

- `data[0].chave = 50`
- Atualizar fila de prioridades:
  - `PQchange(0)`
  - Encontrar sua posição na fila através da lista
    - ⋆ `data[0]` → `qp[0]=5` → `pq[qp[0]]` → `pq[5]=0`



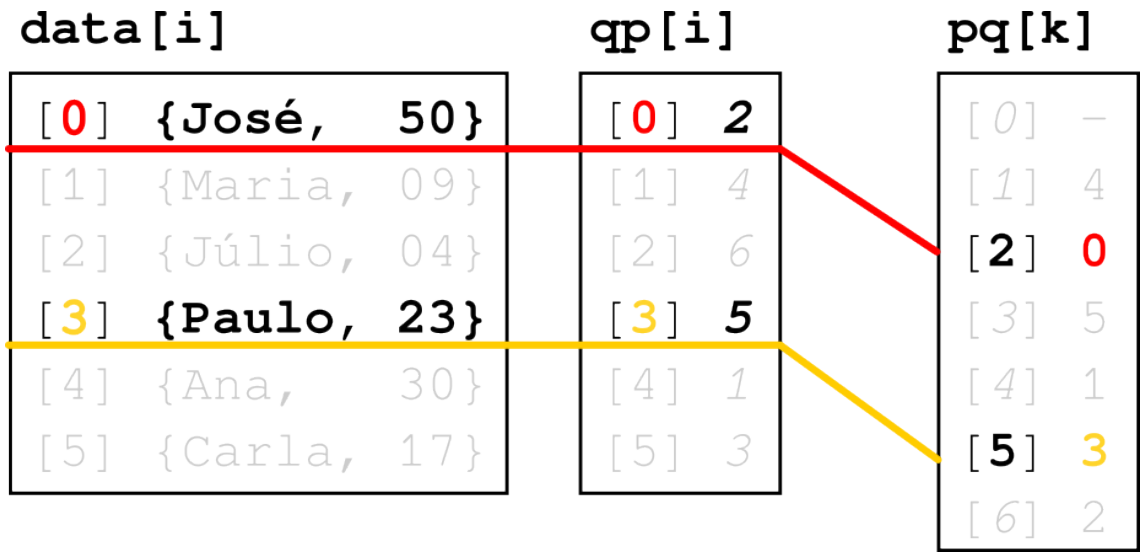
Fila de Prioridades - Heap - Alterar prioridade

- `data[0].chave = 50`
- Atualizar fila de prioridades:
  - `PQchange(0)`
  - Encontrar sua posição na fila através da lista
    - ⋆ `data[0]` → `qp[0]=5` → `pq[qp[0]]` → `pq[5]=0`
  - Consertar a heap
    - ⋆ `fixUp(qp[0])`: motivo?
    - ⋆ `fixDown(qp[0], N)`: motivo?



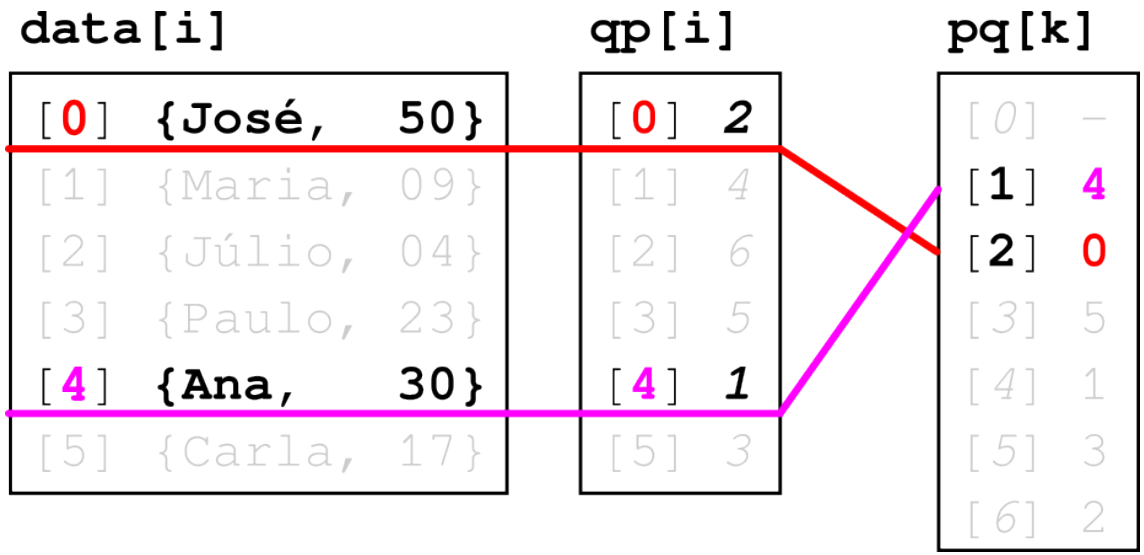
Fila de Prioridades - Heap - Alterar prioridade

- `data[0].chave = 50`
- Atualizar fila de prioridades:
  - `PQchange(0)`
  - Encontrar sua posição na fila através da lista
    - ⋆ `data[0]` → `qp[0]=5` → `pq[qp[0]]` → `pq[5]=0`
  - Consertar a heap
    - ⋆ `fixUp(qp[0])`: motivo?
    - ⋆ `fixDown(qp[0], N)`: motivo?



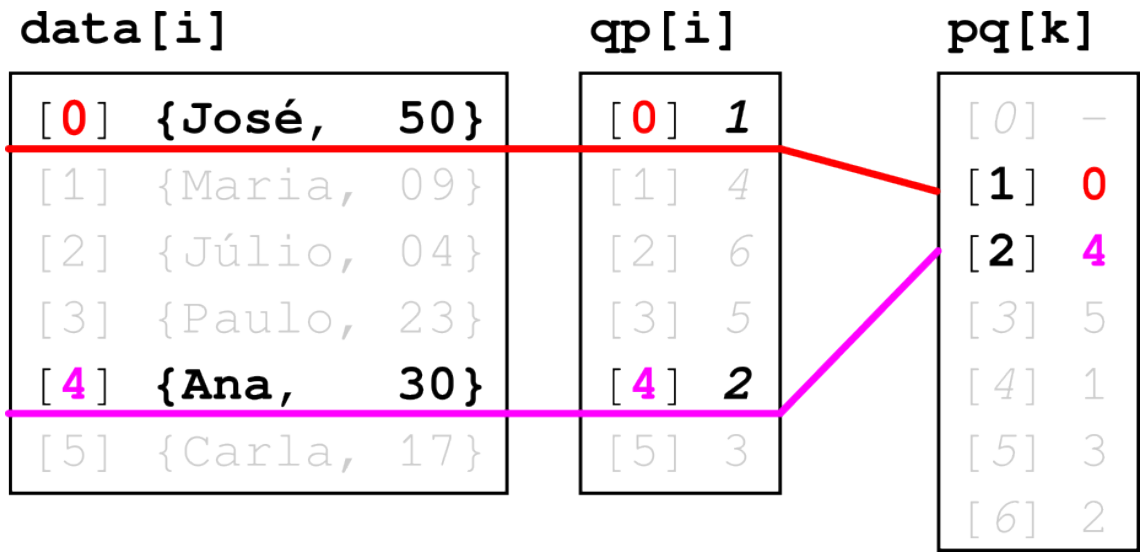
Fila de Prioridades - Heap - Alterar prioridade

- `data[0].chave = 50`
- Atualizar fila de prioridades:
  - `PQchange(0)`
  - Encontrar sua posição na fila através da lista
    - ⋆ `data[0]` → `qp[0]=5` → `pq[qp[0]]` → `pq[5]=0`
  - Consertar a heap
    - ⋆ `fixUp(qp[0])`: motivo?
    - ⋆ `fixDown(qp[0], N)`: motivo?



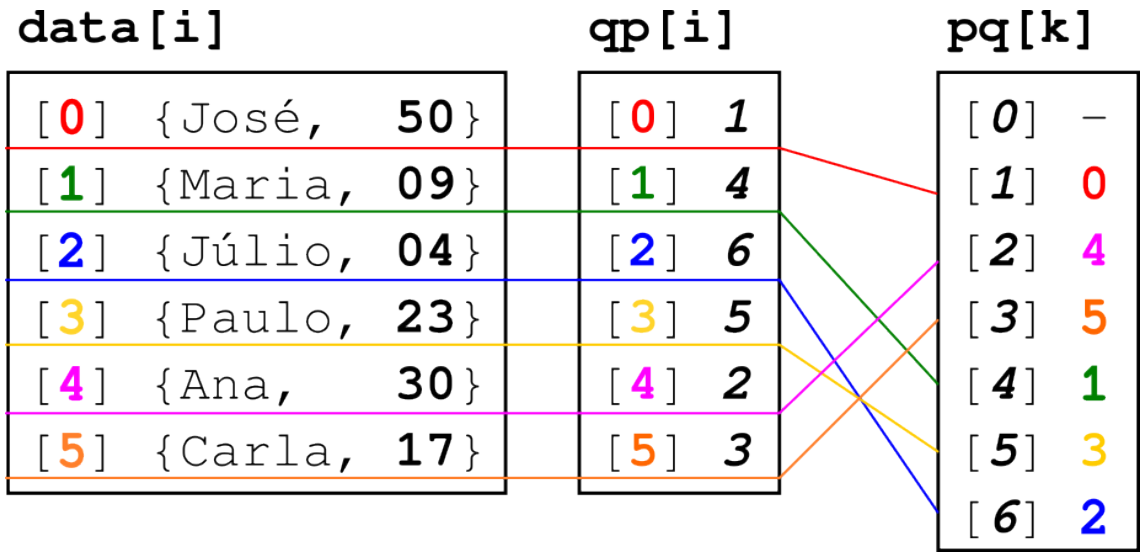
Fila de Prioridades - Heap - Alterar prioridade

- `data[0].chave = 50`
- Atualizar fila de prioridades:
  - `PQchange(0)`
  - Encontrar sua posição na fila através da lista
    - ⋆ `data[0]` → `qp[0]=5` → `pq[qp[0]]` → `pq[5]=0`
  - Consertar a heap
    - ⋆ `fixUp(qp[0])`: motivo?
    - ⋆ `fixDown(qp[0], N)`: motivo?



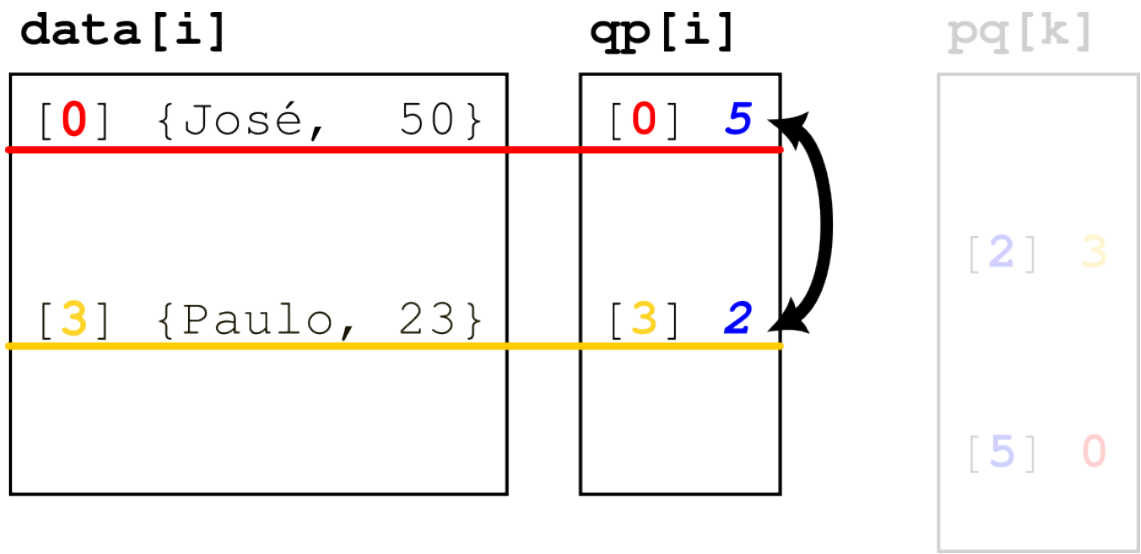
Fila de Prioridades - Heap - Alterar prioridade

- `data[0].chave = 50`
- Atualizar fila de prioridades:
  - `PQchange(0)`
  - Encontrar sua posição na fila através da lista
    - ⋆ `data[0]` → `qp[0]=5` → `pq[qp[0]]` → `pq[5]=0`
  - Consertar a heap
    - ⋆ `fixUp(qp[0])`: motivo?
    - ⋆ `fixDown(qp[0], N)`: motivo?

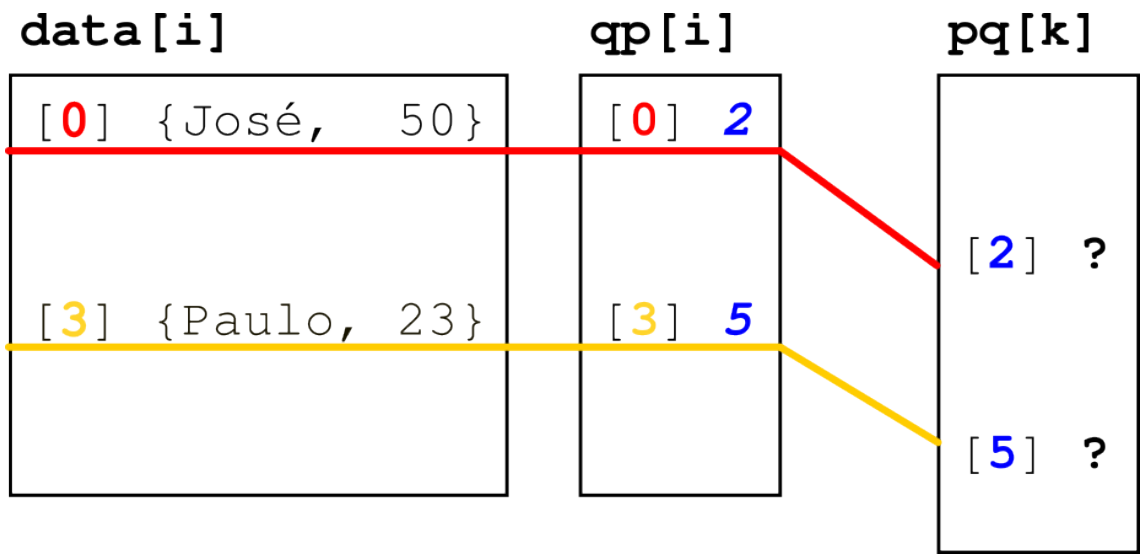


```
1  void PQchange(int i) {
2    //atualizar data[i] na fila
3    //data[i] está na posição qp[i]
4    fixUp(qp[i]);
5    fixDown(qp[i], N);
6  }
7
8  void fixUp(int k) {
9    while(k>1 && less(pq[k/2],pq[k])) comparação?
10   {
11     exch(pq[k], pq[k/2]); ALTERAÇÃO!!!!
12     k = k/2;
13   }
14 }
15
16 void fixDown(int k, int N) {
17   int j;
18   while(2*k <= N) {
19     j = 2*k;
20     if(j<N && less(pq[j], pq[j+1])) j++;
21     if(!less(pq[k], pq[j])) break; comparação?
22     exch(pq[k], pq[j]); ALTERAÇÃO!!!!
23     k = j;
24   }
25 }
```

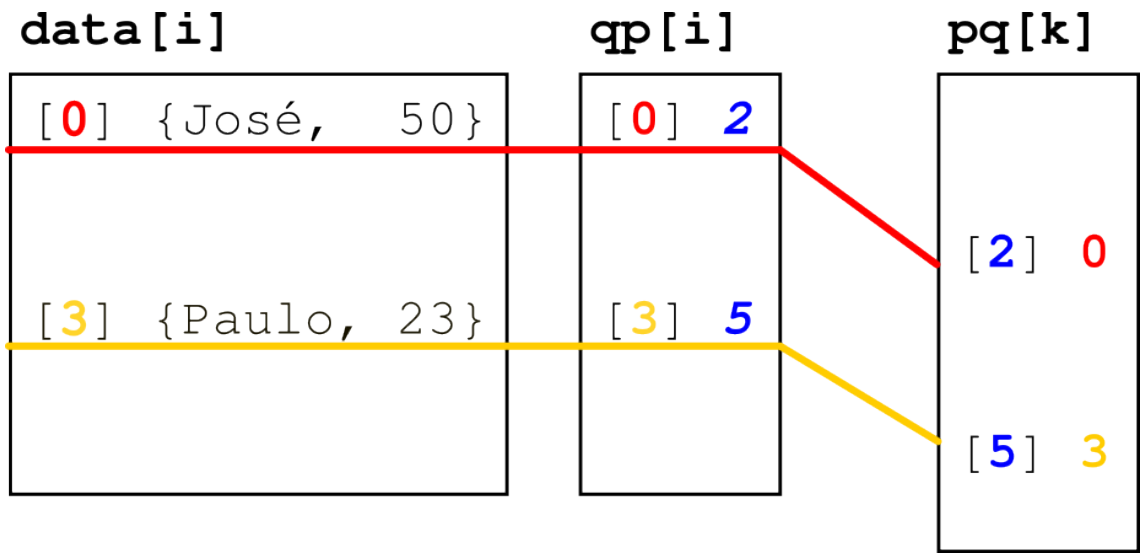
```
1  //swap das posções p/ data[a] e data[b]
2  void exch(int a, int b) {
3    //atualizar lista de índices
4
5
6
7
8    //atualizar fila de prioridades
9
10
11 }
```



```
1  //swap das posções p/ data[a] e data[b]
2  void exch(int a, int b) {
3    //atualizar lista de índices
4    int k = qp[a];
5    qp[a] = qp[b]; //troca a posição: data[a] ↔ data[b]
6    qp[b] = k;     //troca a posição: data[b] ↔ data[a]
7
8    //atualizar fila de prioridades
9
10
11 }
```



```
1  //swap das posções p/ data[a] e data[b]
2  void exch(int a, int b) {
3    //atualizar lista de índices
4    int k = qp[a];
5    qp[a] = qp[b];
6    qp[b] = k;
7
8    //atualizar fila de prioridades
9    pq[qp[a]] = a; //na fila pq, posição qp[a], está data[a]
10   pq[qp[b]] = b; //na fila pq, posição qp[b], está data[b]
11 }
```



Fila de Prioridades - Heap - Alterar prioridade

```
1  int main(){
2    Item data[6] = {{"José",  10},
3                    {"Maria",  9},
4                    {"Júlio",  4},
5                    {"Paulo", 23},
6                    {"Ana",   30},
7                    {"Carla", 17}};
8
9    PQinit(6);
10   for(int i=0; i<6; i++) PQinsert(i);
11
12   data[0].chave = 50;
13   PQchange(0);
14
15   int k = PQdelmax();
16   printf("%d %s\n", data[k].chave, data[k].nome);
17 }
```