Filière SEM : Méthodes numériques pour les EDP
Année Universitaire 2010-2011

Séance 4 : Advection 1D

Contact : *Christophe.Corre@legi.grenoble-inp.fr*

On reprend dans cette séance l'EDP d'advection $1D$ dont il n'a pas été possible, en séance 3, de trouver une solution approchée à l'aide d'un schéma centré d'ordre 2 couplé à une intégration en temps de type Euler explicite. On conserve ce choix d'avancement en temps mais on étudie dans cette séance une autre méthode de discrétisation en espace qui va nous permettre d'obtenir des solutions de l'équation d'advection 1D, sous une condition de stabilité qui sera déterminée. Les éléments attendus dans le rapport que vous ferez sur cette séance sont précisés à la fin du présent sujet.

1 Notion de décentrement

On souhaite toujours calculer de façon approchée la solution du problème aux valeurs initiales :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + a\,\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \\ \rho(x,0) = \rho_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

On suppose la vitesse d'advection a positive. On choisit de discrétiser la dérivée en espace par une formule non plus centrée mais décentrée et on fait appel à un décentrement "à gauche" ou "amont" qui fait appel aux valeurs de ρ aux points $j-1$ et j. On parle de décentrement amont en se référant au sens de la vitesse d'advection associée au problème : dans le cas considéré on suppose la vitesse d'advection $a > 0$ donc le transport se fait suivant les x croissants, de l'amont vers l'aval, et une formule qui utilise les valeurs aux points x_{j-1} et x_j pour approcher la dérivée première au point j est bien décentrée vers l'amont. On écrit ci-dessous le schéma obtenu, en faisant ou non appel à la notion de flux numérique h approchant le flux physique f :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial x} = 0\ ,\ f(\rho) = a\,\rho$$

$$\frac{\rho_j^{n+1}-\rho_j^n}{\Delta t} + a\frac{\rho_j^n-\rho_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \qquad\qquad \begin{cases} \dfrac{\rho_j^{n+1}-\rho_j^n}{\Delta t} + \dfrac{h_{j+\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0 \\ \\ h_{j+\frac{1}{2}}^n = f_j^n = a\rho_j^n\ ,\ h_{j-\frac{1}{2}}^n = f_{j-1}^n = a\rho_{j-1}^n \end{cases} \tag{2}$$

L'écriture faisant appel au flux numérique h peut apparaître artificiellement compliquée dans le cas du problème d'advection linéaire. Elle prend tout son intérêt dans le cas non-linéaire où le flux f

n'est plus une fonction linéaire de ρ comme on le verra en abordant le problème de la modélisation du trafic routier dans les prochaines séances.

Notons pour mémoire que le choix d'un schéma centré s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial x} = 0 \ , \ f(\rho) = a\,\rho$$

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + a\frac{\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + \dfrac{h_{j+\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0 \\ h_{j+\frac{1}{2}}^n = \mu f_{j+\frac{1}{2}} = a\mu\rho_{j+\frac{1}{2}}^n \ , \ h_{j-\frac{1}{2}}^n = \mu f_{j-\frac{1}{2}} = a\mu\rho_{j-\frac{1}{2}}^n \end{array} \right. \tag{3}$$

Afin de ne pas coder inutilement le nouveau schéma décentré à gauche (2), on souhaite étudier *a priori* ses propriétés de stabilité.

• Etablir une condition de stabilité sur $\lambda = \dfrac{a\Delta t}{\Delta x}$ pour le schéma (2), appliqué sous l'hypothèse $a > 0$. Le nombre λ est aussi appelé nombre de Courant-Friedrichs-Lewy (en référence aux auteurs qui l'ont les premiers introduit dans l'étude de schémas numériques pour l'advection) ou nombre CFL ou CFL tout court et la condition de stabilité obtenue est dite condition CFL.

• Implémenter dans le code Scilab développé le schéma décentré à gauche avec la condition de stabilité qui vient d'être établie.

• Effectuer des simulations sur quelques itérations, suivant les consignes détaillées données dans le sujet du TD 3, en utilisant tout d'abord un pas de temps moitié du pas de temps maximal admissible puis le pas de temps maximal admissible calculé ci-dessus (*i.e.* $CFL = 1/2$ puis $CFL = 1$). Observer et commenter. Justifier en particulier que l'utilisation du schéma avec $CFL = 1$ constitue un cas très particulier.

• Afin de mieux apprécier l'erreur introduite par le schéma avec $CFL = 1/2$, effectuer 1 puis 5 puis 10 "tours de boîte", *i.e.* ajuster le nombre d'itérations (et la fréquence d'affichage) de façon à faire revenir (théoriquement) la distribution initiale à sa position initiale après avoir parcouru une distance égale à un multiple de la longueur du domaine de calcul. Quantifier l'erreur obtenue en amplitude (niveau de $\rho(x,t)$) et en phase (position du signal suivant x) - l'erreur en amplitude est dite erreur de dissipation (elle est analogue aux effets d'une dissipation ou diffusion physique) tandis que l'erreur de phase est aussi appelée erreur de dispersion.

On se place maintenant dans le cas $a < 0$ (on choisira $a = -0.1$, les autres paramètres restant inchangés).

• Montrer que le schéma décentré à gauche (2) n'est plus utilisable dans ce cas, par une analyse a priori du facteur d'amplification puis par la mise en oeuvre pratique de ce schéma .

• On choisit alors de décentrer à droite (donc toujours amont puisque l'on utilise les points j et $j+1$ pour discrétiser la dérivée première en espace au point j, avec le point $j+1$ en amont du point j pour un écoulement qui circule vers les x négatifs) soit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial x} = 0 \ , \ f(\rho) = a\,\rho$$

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + a\frac{\rho_{j+1}^n - \rho_j^n}{\Delta x} = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + \dfrac{h_{j+\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0 \\ \\ h_{j+\frac{1}{2}}^n = f_{j+1}^n = a\rho_{j+1}^n \ , \ h_{j-\frac{1}{2}}^n = f_j^n = a\rho_j^n \end{array} \right. \tag{4}$$

• Montrer, par une analyse a priori puis par une étude pratique, que le schéma (4) permet bien de résoudre l'EDP d'advection linéaire sous une condition de stabilité qui sera précisée.

On souhaite éviter en pratique de devoir écrire une formule de schéma aux différences distincte selon le signe de a et on préférerait donc une écriture unifiée pour le schéma décentré à gauche (2) et le schéma décentré à droite (4).

• Montrer que le schéma décentré unifié peut s'écrire sous la forme suivante, dans laquelle on précisera l'expression du coefficient de dissipation numérique q :

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + a\frac{\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n}{2\Delta x} = q\frac{\rho_{j+1}^n - 2\rho_j^n + \rho_{j-1}^n}{\Delta x} \tag{5}$$

ou, de façon équivalente, en utilisant une écriture faisant appel à la notion de flux numérique h approchant le flux physique $f(\rho) = a\,\rho$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + \dfrac{h_{j+\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0 \\ \\ h_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_j^n) - q(\rho_{j+1}^n - \rho_j^n) = \mu f_{j+\frac{1}{2}} - q\,\delta\rho_{j+\frac{1}{2}} \end{array} \right. \tag{6}$$

• Utiliser (5) pour conclure sur la précision du schéma décentré mis en oeuvre.

2 Rapport n° 1

Le rapport demandé doit former un tout cohérent. Vous rappellerez donc dans une première partie le problème traité et présenterez les méthodes utilisées (schémas décentrés à gauche et à droite) en donnant leurs propriétés de précision et de stabilité telles qu'établies par vous. Dans une seconde partie, vous présenterez les résultats de simulation obtenus pour les différents cas listés (a positif ou négatif, $CFL = 1$ ou $CFL = 1/2$) et vous associerez aux figures présentées vos propres commentaires.