

Filière "Systèmes énergétiques et marchés"
Année Universitaire 2009-2010

BE de Méthodes Numériques pour les EDP
Equation d'advection linéaire en 2D
Eléments de correction

1 Code pour le schéma CIR ou schéma de Roe

Le codage ne pose pas de problème particulier. Il s'agit d'une simple extension par direction du code disponible en $1D$ dans lequel il faut simplement gérer correctement quelques spécificités que l'on passe en revue.

La boucle principale s'effectue *tant que* la norme du résidu reste supérieure à 10^{-5} . Bien sûr, il faut penser à initialiser cette norme à une valeur telle que l'on entre bien dans la boucle ! Dans le même ordre d'idées, on doit également penser à initialiser le compteur des itérations temporelles.

```
norm_res=1;
iter=0;
while log10(norm_res) > -5

    ...

end
```

Dans cette boucle on doit également penser à stocker ρ^n dans le tableau *rhoold* avant d'actualiser l'inconnue en affectant ρ^{n+1} au tableau *rho* :

```
rhoold=rho;

for i=2:imax-1
for j=2:jmax-1
rho(i,j) = rho(i,j)-(dt/dx)*(f1num(i,j) - f1num(i-1,j))
              -(dt/dy)*(f2num(i,j) - f2num(i,j-1));
end
end
```

Les erreurs les plus classiques commises sont des erreurs sur les indices des boucles, en particulier dans le calcul des flux numériques (cf. script *flux-numerique.sce*). Il ne faut pas hésiter à réaliser quelques figures du maillage (en le supposant très grossier bien sûr) et à y placer les flux numériques sur chaque face afin de se convaincre des variations d'indices pertinentes. Pour ce qui concerne le calcul de la norme du résidu et de la norme de l'erreur, on utilise les techniques classiques d'incrémentation d'un scalaire initialisé à zéro :

```
norm_res=0;
for i=1:imax
for j=1:jmax
```

```

norm_res=norm_res+(rho(i,j)-rhoold(i,j))*2;
end
end
norm_res=sqrt(norm_res/(imax*jmax));

norm_err=0;
for i=1:imax
for j=1:jmax
norm_err=norm_err+(rho(i,j)-rhoex(i,j))*2;
end
end
norm_err=sqrt(norm_err/(imax*jmax));

```

Lorsque le calcul est convergé on trace une élévation de la solution :

```

xset("window",1)
plot3d(x,y,rho);

```

puis les contours de la solution numérique et de la solution exacte :

```

xset("window",2)
contour2d(x,y,rho,20);

xset("window",3)
contour2d(x,y,rhoex,20);

```

et enfin la distribution en sortie (le long de la frontière supérieure donc) :

```

xset ("window",4)
plot2d(x(1:imax),[rho(1:imax,jmax),rhoex(1:imax,jmax)], [1,2]);

```

La solution exacte stationnaire est obtenue très facilement en appliquant la théorie des caractéristiques vue en cours dans laquelle y joue le rôle de t , la direction d'advection étant définie par le rapport $c = a/b$. En supposant $\rho(x, y) = \rho(x(y), y)$, on trouve que la solution ρ de $a\rho_x + b\rho_y = 0$ ou $\rho_y + c\rho_x = 0$ est donnée par $\rho(x, y) = \rho_0(x - cy)$. La distribution en entrée de domaine ($y = 0$) est donc advectée suivant la direction $c = a/b$. Quand $a = 0$, la direction d'advection est verticale, alignée avec le maillage, et on verra que la solution numérique du schéma de Roe peut être très satisfaisante dans ce cas. Quand $a \neq 0$, on mettra en évidence l'erreur dissipative très importante de ce schéma.

On présente ci-dessous les résultats obtenus par le schéma de Roe utilisé dans un maillage 41×21 (pour avoir un pas d'espace "rond", $\Delta x = \Delta y = 0.05$) avec $a = 0.5$. On peut noter sur la figure 1 que l'erreur atteint un plateau avant que le résidu ait atteint le niveau prescrit de 10^{-5} (typiquement quand le résidu vaut 10^{-3} on atteint le plateau stationnaire sur l'erreur. Les calculs sont réalisés en explicite donc le CFL doit être choisi suffisamment petit ; on constate que par rapport au cas $1D$ (limite $CFL = 1$) la limite de stabilité se situe plutôt en $CFL = 1/2$ désormais.

La vue en élévation de la solution permet de bien visualiser le caractère extrêmement dissipatif du schéma de Roe (schéma d'ordre 1). Les isovaleurs de la solution numérique et exacte, présentées

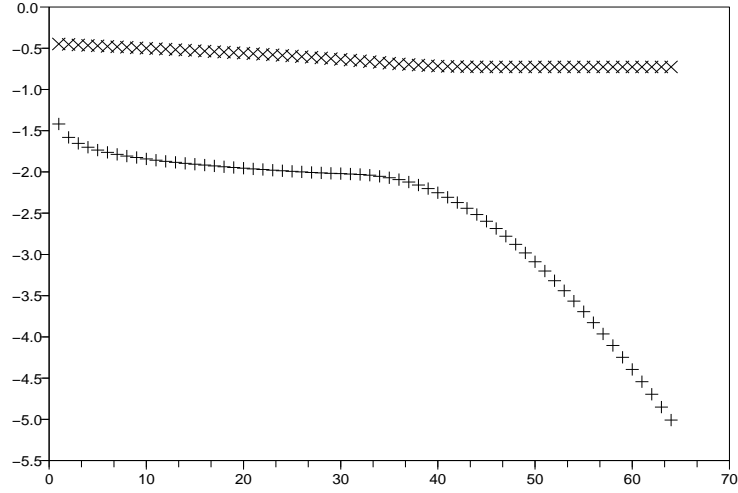


Fig. 1: Evolution du résidu et de l'erreur pour le schéma de Roe (maillage 41×21 , $CFL = 0.5$).

respectivement sur les figures 3 et 4 permettent de faire le même constat. Enfin, la distribution de la solution le long de la frontière de sortie est une dernière représentation de ce caractère dissipatif, qui se prêtera à la superposition de solutions. La fonction *Exporter* des fenêtres graphiques permet de disposer de sorties graphiques propres à insérer dans les rapports ; la fonction *Sauvegarder* permet ensuite de *Charger* plusieurs courbes et d'effectuer ainsi des comparaisons entre schémas ou entre maillages plus ou moins raffinés. Par exemple la figure 6 illustre la superposition des isovaleurs de la solution exacte et de la solution calculée par le schéma de Roe dans un maillage 41×21 et permet de visualiser l'écart entre la solution numérique et la solution exacte lié à la dissipation numérique du schéma ;

2 Code pour le schéma de Lax-Wendroff

Attention, il y a une subtilité ! Le schéma de Lax-Wendroff en $2D$ n'est pas l'extension purement directionnel de la version $1D$ comme le montre l'application des principes de construction de ce schéma, donnés en cours. On part du développement de Taylor :

$$\rho^{n+1} = \rho^n + \Delta t \rho_t^n + \frac{\Delta t^2}{2} \rho_{tt}^n + O(\Delta t^3)$$

On utilise alors :

$$\rho_t = -f_x - g_y$$

et

$$\rho_{tt} = -f_{xt} - g_{yt} = -(f_t)_x - (g_t)_y = -(aw_t)_x - (bw_t)_y = (a(f_x + g_y))_x + (b(f_x + g_y))_y$$

En injectant ces dérivées spatiales dans le développement de Taylor ci-dessus on obtient :

$$\rho^{n+1} = \rho^n - \Delta t(f_x + g_y) + \frac{\Delta t^2}{2}(a(f_x + g_y))_x + (b(f_x + g_y))_y$$

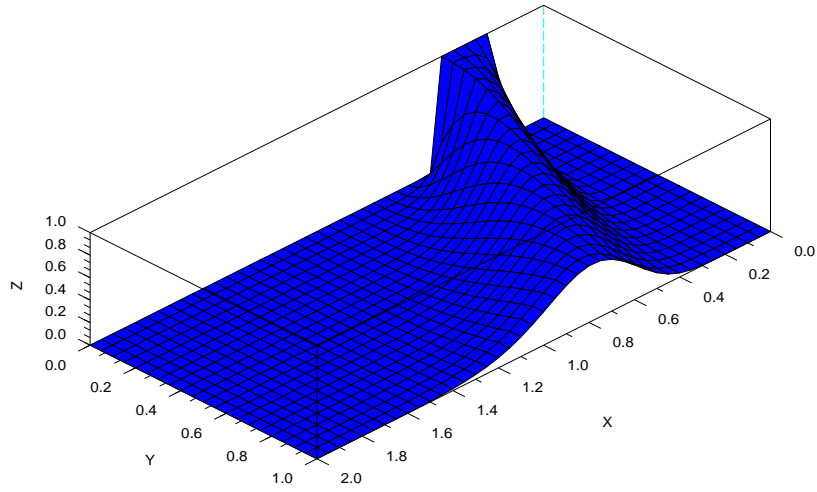


Fig. 2: Vue en élévation de la distribution spatiale de la solution stationnaire calculée par le schéma de Roe (maillage 41×21).

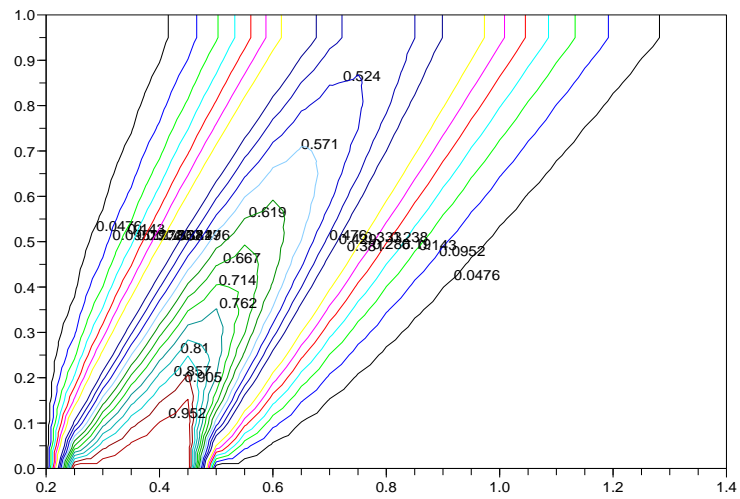


Fig. 3: Isovaleurs de la solution stationnaire calculée par le schéma de Roe (maillage 41×21).

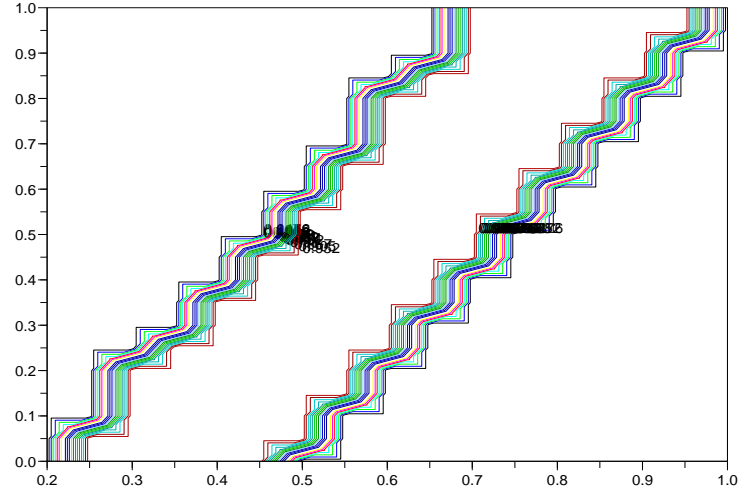


Fig. 4: Isovaleurs de la solution stationnaire exacte (maillage 41×21).

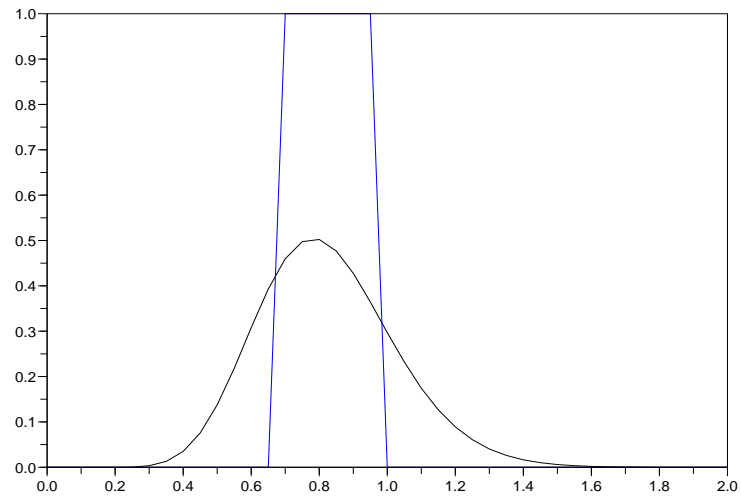


Fig. 5: Distribution exacte et calculée (Roe, maillage 41×21) de ρ le long de la frontière de sortie $y = 1$.

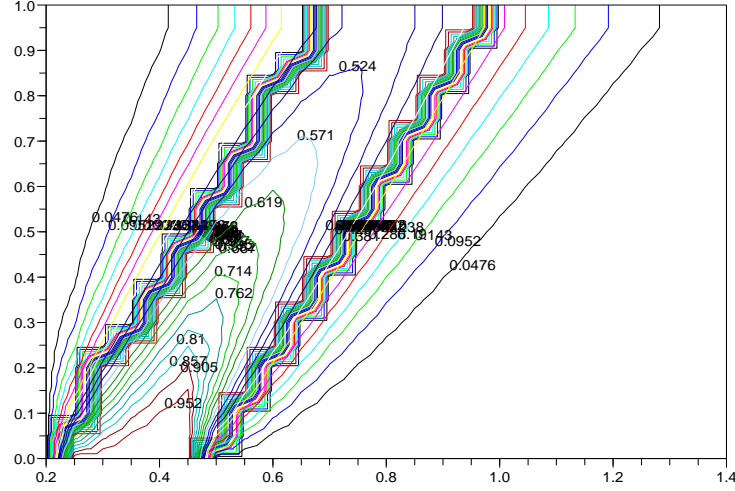


Fig. 6: Isovaleurs de la solution stationnaire exacte et calculée par le schéma de Roe (maillage 41×21).

ou encore

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} = -[f - \frac{a\Delta t}{2}(f_x + g_y)]_x - [g - \frac{b\Delta t}{2}(f_x + g_y)]_y$$

Le flux numérique du schéma Lax-Wendroff dans la direction x est donc une approximation centrée de $f - \frac{a\Delta t}{2}(f_x + g_y)$ soit, après discrétisation :

$$h_{i+\frac{1}{2},j}^1 = \frac{1}{2} (f_{i+1,j}^1 + f_{i,j}^1) - \frac{a\Delta t}{2} \left[\frac{f_{i+1,j}^1 - f_{i,j}^1}{\Delta x} + \frac{\frac{1}{4}(f_{i,j+1}^2 + f_{i+1,j+1}^2 - f_{i,j-1}^2 - f_{i+1,j-1}^2)}{\Delta y} \right]$$

Là-encore, ne pas hésiter à faire un petit croquis pour comprendre les formules ci-dessus : on doit évaluer de façon centrée en $i + \frac{1}{2}, j$ la quantité $f_x + g_y$; pour f_x on utilise une différence centrée sur un maillage dans la direction x soit $(f_{i+1,j}^1 - f_{i,j}^1)/\Delta x$. Pour g_y , on utilise également une différence centrée sur une maille, dans la direction y cette fois, soit $(f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^2 - f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^2)/\Delta y$. Ensuite, on estime de façon centrée les états en $i + \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}$:

$$f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^2 = \frac{1}{4} (f_{i,j}^2 + f_{i+1,j}^2 + f_{i+1,j+1}^2 + f_{i,j+1}^2)$$

et

$$f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^2 = \frac{1}{4} (f_{i,j}^2 + f_{i+1,j}^2 + f_{i+1,j-1}^2 + f_{i,j-1}^2)$$

d'où la formule ci-dessus pour le flux numérique LW, après simplification.

De façon similaire, on obtient dans la direction y :

$$h_{i,j+\frac{1}{2}}^2 = \frac{1}{2} (f_{i,j+1}^2 + f_{i,j}^2) - \frac{b\Delta t}{2} \left[\frac{f_{i,j+1}^2 - f_{i,j}^2}{\Delta y} + \frac{\frac{1}{4}(f_{i+1,j}^1 + f_{i+1,j+1}^1 - f_{i-1,j}^1 - f_{i-1,j+1}^1)}{\Delta x} \right]$$

On code facilement ce schéma en modifiant les fonctions $q1 - num$ et $q2 - num$ dans le script *model.sce* :

```
function y=q1_num(rhol,rhor)
```

```
if ischema==1
y=abs(a)
end
```

```
if ischema==2
y=a*dt
end
```

```
endfunction
```

```
function y=q2_num(rhol,rhor)
```

```
if ischema==1
y=abs(b)
end
```

```
if ischema==2
y=b*dt
end
```

```
endfunction
```

On ajoute ensuite les formules de flux numérique pour LW dans *flux-numerique.sce* :

```
if ischema==2 then
```

```
for i=1:imax-1
for j=2:jmax-1
q1(i,j)=q1_num(rho(i,j),rho(i+1,j));
res1=(f1_phys(rho(i+1,j))-f1_phys(rho(i,j)))/dx
      +0.25*(f2_phys(rho(i,j+1))+f2_phys(rho(i+1,j+1))
            -f2_phys(rho(i,j-1))-f2_phys(rho(i+1,j-1)))/dy;
f1num(i,j) = 0.5*(f1_phys(rho(i,j))+f1_phys(rho(i+1,j)))-0.5*q1(i,j).*res1;
end
end
```

```
for i=2:imax-1
for j=1:jmax-1
q2(i,j)=q2_num(rho(i,j),rho(i,j+1));
res2=(f2_phys(rho(i,j+1))-f2_phys(rho(i,j)))/dy
      +0.25*(f1_phys(rho(i+1,j))+f1_phys(rho(i+1,j+1))
            -f1_phys(rho(i-1,j))-f1_phys(rho(i-1,j+1)))/dx;
f2num(i,j) = 0.5*(f2_phys(rho(i,j))+f2_phys(rho(i,j+1)))-0.5*q2(i,j).*res2;
end
end
```

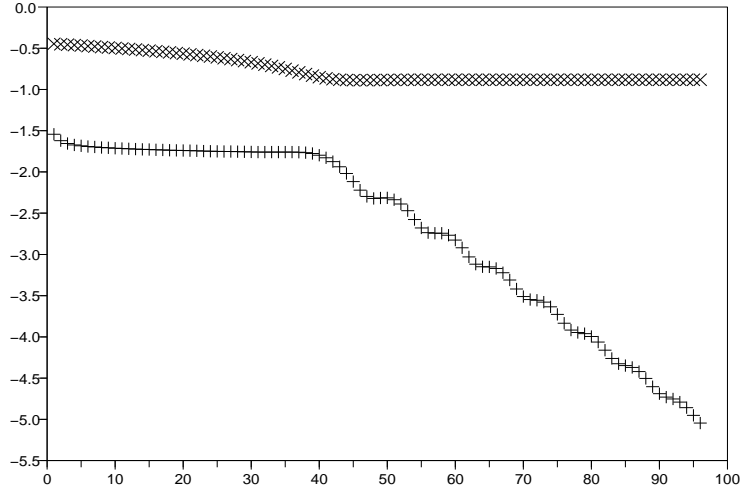


Fig. 7: Evolution du résidu et de l'erreur pour le schéma de LW (maillage 41×21 , $CFL = 0.5$).

end

On notera que des variables intermédiaires *res1*, *res2* ont été introduites afin de rendre un peu plus lisibles les formules (et donc de rendre également le code plus simple à corriger en cas d'erreur).

Le schéma de LW est stable sous la même condition que le schéma de Roe (CFL maximal égal à $1/2$). Comme l'illustrent les figures 7 à 10, qui correspondent à une simulation en maillage 41×21 , la solution fournie par le schéma de LW (schéma d'ordre 2 en espace) est beaucoup plus précise que celle du schéma de Roe (nettement moins dissipative) mais présente par contre des oscillations (car on advecte une condition initiale discontinue). Ces oscillations ne seraient pas présentes si la condition d'entrée était une Gaussienne par exemple (une initiative pourrait être d'effectuer un tel calcul en modifiant simplement la fonction *rho - inlet* dans *model.sce*). Enfin, la sauvegarde des résultats permet de superposer les courbes de convergence des schémas de Roe et de LW (dans le même maillage 41×21) ainsi que par exemple la distribution en sortie. On observe ainsi sur la figure 11 que le schéma de Roe converge un peu plus rapidement que le schéma de Lax-Wendroff, ce qui est logique car il est plus dissipatif, mais pour atteindre un niveau d'erreur supérieur (logique là-aussi puisque ordre 1 et ordre 2 respectivement pour Roe et LW). Cette erreur plus importante est bien mise en évidence sur la distribution de sortie 12. On observe également que le schéma de LW (comme en $1D$, démonstration donnée en cours) génère une solution oscillante. Une stratégie optimisée consiste à utiliser un schéma dit limité qui combine Roe et LW pour fournir une solution à la fois précise et non-oscillante.

3 Cas particulier d'une advection alignée avec le maillage ($a = 0$)

On obtient la solution exacte dans le cas où $a = 0$ (voir figures 13 et 14). On peut démontrer "à la main" ce résultat. La même observation est valable pour le schéma de Lax-Wendroff. La morale à en

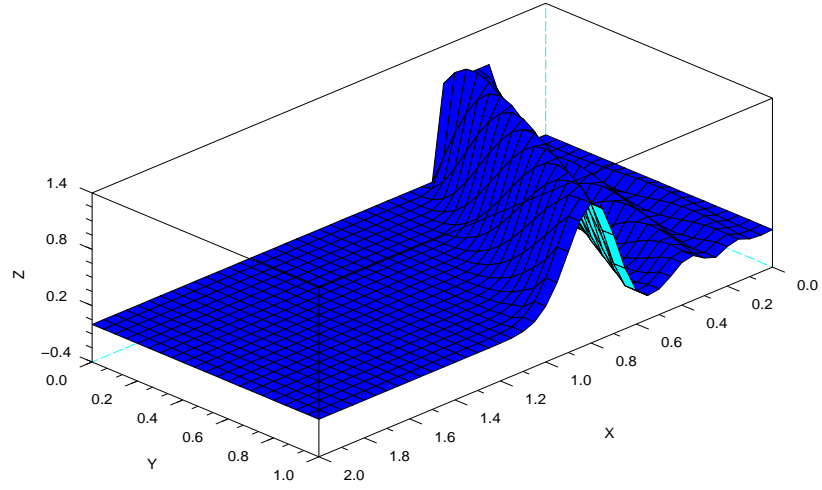


Fig. 8: Vue en élévation de la distribution spatiale de la solution stationnaire calculée par le schéma de LW (maillage 41×21).

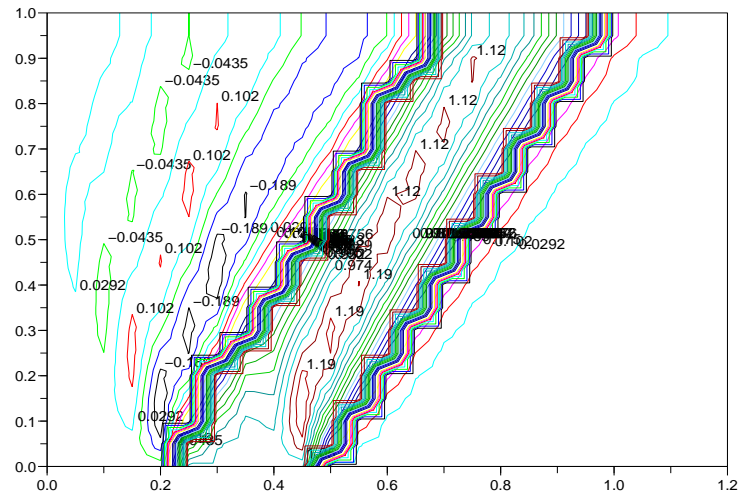


Fig. 9: Isovaleurs de la solution stationnaire exacte et calculée par le schéma de LW (maillage 41×21).

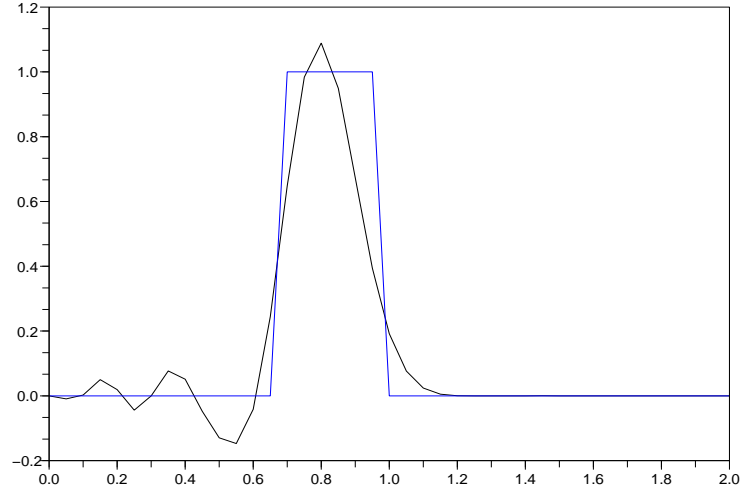


Fig. 10: Distribution exacte et calculée (LW, maillage 41×21) de ρ le long de la frontière de sortie $y = 1$.

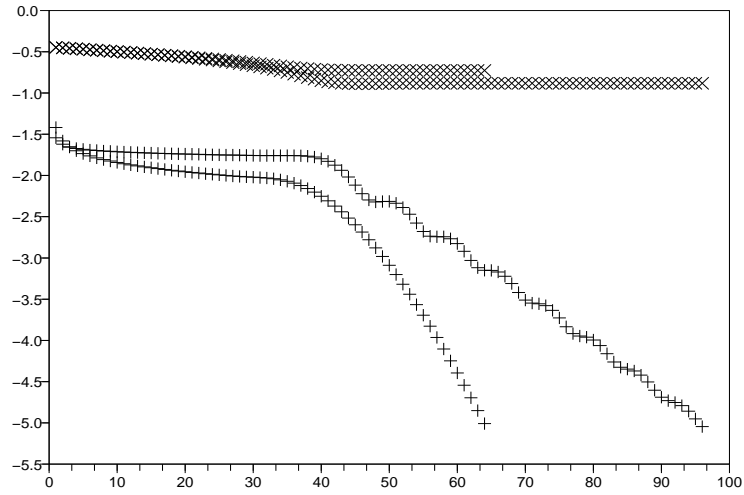


Fig. 11: Evolution du résidu et de l'erreur pour les schémas de Roe et de LW (maillage 41×21 , $CFL = 0.5$).

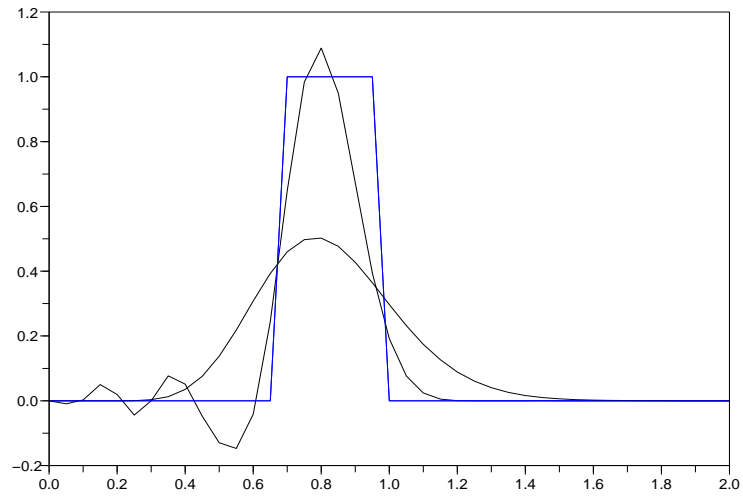


Fig. 12: Distribution exacte et calculée (Roe et LW, maillage 41×21) de ρ le long de la frontière de sortie $y = 1$.

tirer est bien sûr de ne pas se fier à un cas particulier pour évaluer les propriétés de précision d'une méthode numérique !

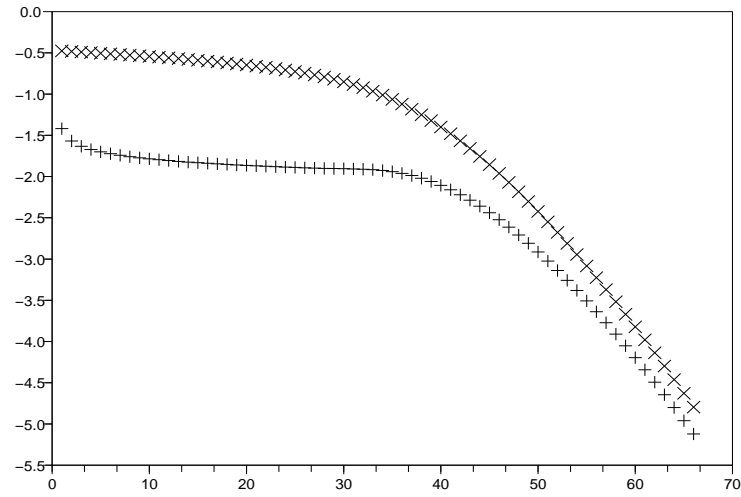


Fig. 13: Evolution du résidu et de l'erreur pour le schéma de Roe dans le cas $a = 0$ (maillage 41×21 , $CFL = 0.5$).

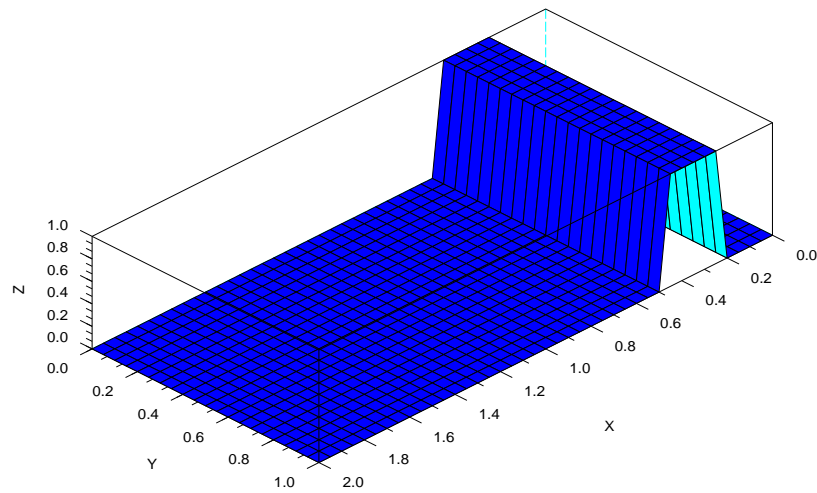


Fig. 14: Vue en élévation de la distribution spatiale de la solution stationnaire calculée par le schéma de Roe dans le cas $a = 0$ (maillage 41×21).