



Filière SEM : Méthodes numériques pour les EDP
Année Universitaire 2010-2011

Advection 1D

Contact : *Christophe.Corre@legi.grenoble-inp.fr*

1 Notion de conservation de la masse

On considère l'écoulement tridimensionnel d'un fluide dans une hypothèse de milieu continu. On est donc en mesure de définir en chaque point du domaine fluide une masse volumique $\rho(\underline{r}, t)$, où \underline{r} désigne le vecteur des coordonnées spatiales et t est le temps, ainsi que la vitesse locale du fluide \underline{V} de composantes $u(\underline{r}, t)$, $v(\underline{r}, t)$ et $w(\underline{r}, t)$. La conservation de la masse du fluide peut se traduire en écrivant un bilan de masse sur un volume de contrôle fixe arbitraire V . La masse de fluide contenue dans V s'exprime de façon immédiate à partir de la masse volumique :

$$m = \int_V \rho(\underline{r}, t) dV$$

La variation de cette masse en fonction du temps est égale au bilan de flux de masse entrant et sortant du volume V soit :

$$\frac{dm}{dt} = - \int_{\partial V} \rho \underline{V} \cdot \underline{n} dS$$

où le signe $-$ dans cette expression est lié au choix de \underline{n} normale unitaire à la surface S pointant vers l'extérieur du volume V .

- En utilisant le théorème flux-divergence montrer que la loi de bilan de masse peut s'écrire sous la forme locale suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{V}) = 0 \quad (1)$$

Puisque le volume de contrôle est supposé fixe, on peut écrire :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\underline{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho(\underline{r}, t)}{\partial t} dV$$

Par ailleurs le théorème flux-divergence permet de transformer l'intégrale de flux à travers la surface ∂V en une intégrale sur le volume V :

$$\int_{\partial V} \rho \underline{V} \cdot \underline{n} dS = \int_V \text{div}(\rho \underline{V}) dV$$

En rassemblant ces expressions dans le bilan de masse on obtient donc :

$$\int_V \frac{\partial \rho(\underline{r}, t)}{\partial t} dV = - \int_V \text{div}(\rho \underline{V}) dV$$

soit encore, pour tout volume de contrôle V fixe :

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho(\underline{r}, t)}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{V}) \right) dV$$

d'où l'on tire finalement la forme locale de l'équation de conservation de la masse (1).

2 Equation d'advection 1D

On se place dans le cas d'un écoulement mono-dimensionnel ou 1D pour lequel l'équation (1) se réduit à :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

avec $\rho = \rho(x, t)$ et $u = u(x, t)$. On suppose que l'écoulement de fluide a lieu à vitesse à peu près constante, $u(x, t) = a = \text{cste}$. L'équation de conservation de la masse se réduit dans ce cas à l'équation dite d'advection 1D, de la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

Si on suppose de plus la distribution initiale de masse volumique dans le domaine fluide considéré donnée par $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$, l'évolution en temps et en espace de la masse volumique est donc régie par le problème dit aux valeurs initiales :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x) \end{cases} \quad (4)$$

- Montrer que la solution exacte du problème (4) est donnée par :

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - at) \quad (5)$$

Pour établir (5), on postulera pour ρ une solution de la forme $\rho(x(t), t)$.

On suppose $\rho(x, t)$ de la forme $\rho(x(t), t)$. Pour clarifier la démarche suivie, on note $f(t) = \rho(x(t), t)$. Le calcul de la dérivée totale de f par rapport à t fournit :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \times \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Compte tenu de l'équation (5) vérifiée par $\rho(x, t)$ on en déduit donc que $\frac{df}{dt} = 0$, soit $f(t) = \rho(x, t) = \text{cste}$ quand $\frac{dx}{dt} = a = \text{cste}$. Dans le plan (x, t) , dit plan des caractéristiques, la relation $dx/dt = a$ décrit une courbe, dite droite caractéristique, d'équation $x = at + \text{cste} = at + x_0$ - il s'agit donc d'une droite de pente $1/a$ dans le plan (x, t) . On vient donc de montrer que $f(t) = \text{cste}$, soit $\rho(x, t) = \text{cste}$ le long de la droite $x = at + x_0$ (cf. Fig.1). On peut exploiter cette propriété pour obtenir une expression explicite de la solution exacte de l'équation d'advection linéaire 1D. En effet, pour une droite caractéristique issue de $x = x_0$ à $t = 0$, on a $\rho(x, t) = \text{cste}$ qui est en particulier égal à la valeur initiale prise à $t = 0$ soit $\rho_0(x_0)$; comme de plus x , x_0 et t sont liés par l'équation de la droite caractéristique $x = x_0 + at$ on peut écrire $\rho(x, t) = \rho_0(x_0) = \rho_0(x - at)$ qui correspond bien à (5) et nous fournit donc la solution exacte souhaitée.

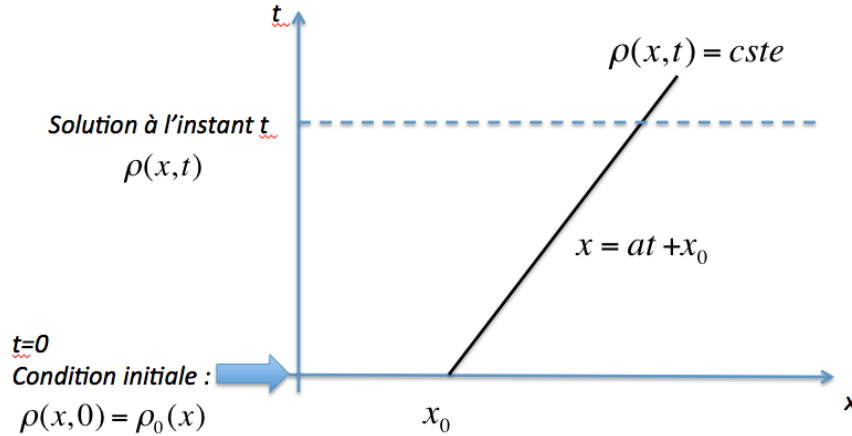


Fig. 1: Solution de l'équation d'advection linéaire 1D dans le plan des caractéristiques.

3 Résolution numérique

Dans le cas général où $u(x, t)$ dans (2) n'est pas constante mais varie par exemple en fonction de $\rho(x, t)$ (cf. le cas de l'équation dite du trafic qui sera étudiée ultérieurement), il n'est souvent plus possible de trouver une solution analytique de (2) et la résolution numérique de l'EDP s'avère indispensable dans ce cas. L'équation d'advection scalaire linéaire permet de valider les méthodes numériques qui seront utilisées en non-linéaire par la suite puisque la solution discrète peut être comparée à la solution exacte disponible dans ce cas.

3.1 Approche centrée

3.1.1 Principes de construction

On utilise la stratégie la plus simple possible pour discrétiser l'EDP (3) : intégration en temps de type Euler explicite et discrétisation centrée de la dérivée première en espace. En prévision d'une généralisation ultérieure au cas non-linéaire, on choisit de discrétiser (3) en partant de la forme conservative de la loi de bilan :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

où le flux physique $f(\rho)$ dépend linéairement de la variable conservative ρ : $f(\rho) = a\rho$ avec a la vitesse d'advection constante dans le cas considéré.

- Donner l'expression du flux dit numérique $h_{j\pm\frac{1}{2}}$ qui approche de façon centrée le flux physique $f_{j\pm\frac{1}{2}}$ et montrer que le schéma dit centré simple qui correspond aux choix de discrétisation indiqués ci-dessus peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + a \frac{\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (7)$$

- Indiquer la précision en temps et en espace de (7).

L'EDP $\rho_t + f(\rho)_x = 0$ (avec ici $f(\rho) = a\rho$) est discrétisée en écrivant tout d'abord le bilan de flux :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0 \quad (8)$$

Les flux $f_{j\pm\frac{1}{2}}$ doivent maintenant être approchés en utilisant les états $\rho_{j-1}, \rho_j, \rho_{j+1}$ voire ρ_{j-2}, ρ_{j+2} si un support plus étendu ou plus large qu'un simple support à 3 points est utilisé. On utilise ici une formule centrée simple :

$$f_{j-\frac{1}{2}} = a\rho_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a(\rho_{j-1} + \rho_j) + O(\Delta x^2) = a\mu\rho_{j-\frac{1}{2}} + O(h^2)$$

On note $h_{j-\frac{1}{2}}, h_{j+\frac{1}{2}}$ les flux numériques qui approchent (avec une précision d'ordre 2) les flux physiques $f_{j-\frac{1}{2}}$ et $f_{j+\frac{1}{2}}$ soit :

$$h_{j-\frac{1}{2}} = a\mu\rho_{j-\frac{1}{2}} \quad , \quad h_{j+\frac{1}{2}} = a\mu\rho_{j+\frac{1}{2}}$$

En injectant ces flux numériques dans l'expression (8), on obtient le schéma semi-discret (car discrétisé en espace seulement) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = -\frac{a\delta\mu\rho_j}{\Delta x}$$

où on a volontairement utilisé les opérateurs aux différences précédemment introduits, afin d'illustrer la compacité d'écriture offerte par ces notations.

En explicitant, on a :

$$\begin{aligned}\frac{a\delta\mu\rho_j}{\Delta x} &= \frac{a\mu\rho_{j+\frac{1}{2}} - a\mu\rho_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \\ &= \frac{a\frac{1}{2}(\rho_j + \rho_{j+1}) - a\frac{1}{2}(\rho_{j-1} + \rho_j)}{\Delta x} \\ &= a \frac{\rho_{j+1} - \rho_{j-1}}{2\Delta x}\end{aligned}$$

et on retrouve donc une classique formule de différence centrée sur 3 points approchant à l'ordre 2 la dérivée première en espace au point j du maillage.

On achève l'écriture du schéma en choisissant un avancement en temps de type Euler explicite soit :

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} = - \frac{h_{j+\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = - \frac{a\delta\mu\rho_j^n}{\Delta x}$$

ce qui correspond bien au schéma (7). Puisque des développements de Taylor immédiats permettent d'établir :

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_j^n + O(\Delta t)$$

et

$$\frac{\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n}{2\Delta x} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_j^n + O(\Delta x^2)$$

on en déduit, en injectant ces développements dans l'expression (7) du schéma et en supposant ρ solution exacte de l'EDP initiale, que l'erreur de troncature du schéma centré simple est de la forme $\epsilon = O(\Delta t, \Delta x^2)$; ce schéma est donc précis à l'ordre 1 en temps et à l'ordre 2 en espace.

3.1.2 Mise en oeuvre

La forme (7) du schéma est celle qui se prête au calcul de l'erreur de troncature. Pour coder ce schéma, puis analyser en particulier ses propriétés de stabilité, on utilisera plutôt la forme équivalente suivante :

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{a\Delta t}{\Delta x}}_{=\lambda} (\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n) \quad (9)$$

On se propose d'appliquer le schéma (9) à la résolution du problème (4) sur le domaine $[x_1, x_2]$ avec $x_1 = -5$ et $x_2 = 5$, une distribution initiale de type Gaussienne, $\rho_0(x) = \exp(-\beta x^2)$ avec $\beta = 20$ et une vitesse d'advection $a = 0.1$.

Deux types de conditions aux limites sont envisageables :

- conditions d'extrapolation depuis l'intérieur du domaine : on "laisse sortir" du domaine le signal associé à la distribution initiale en écrivant en $x = x_1$ la relation $\rho_1^n = \rho_2^n \ \forall n$ et en $x = x_2$ la relation $\rho_{imax}^n = \rho_{imax-1}^n \ \forall n$. L'inconvénient de ce type de conditions aux limites réside dans le fait que le domaine de calcul doit être choisi suffisamment étendu pour permettre l'advection de la distribution initiale quand le temps augmente (cf. Fig.2).

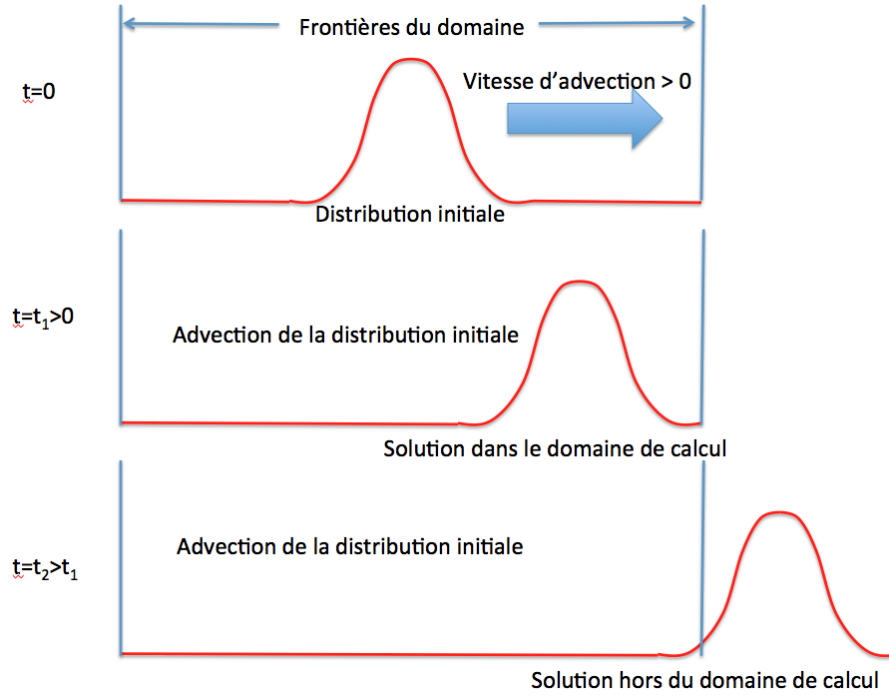


Fig. 2: Evolution typique de la solution dans le cas où des conditions aux limites de type "extrapolation depuis l'intérieur du domaine" sont utilisées aux frontières du domaine de calcul.

- conditions de périodicité : en exprimant la périodicité de la solution, *i.e.* le fait que la solution qui sort par la frontière $x = x_2$ rentre immédiatement dans le domaine par la frontière $x = x_1$, on peut observer l'évolution de la solution numérique sur des temps longs tout en conservant un domaine de calcul de taille réduite (cf. Fig.3). Numériquement, on traduit la périodicité en utilisant les conditions aux limites : $\rho_1^n = \rho_{imax-1}^n \forall n$ et $\rho_{imax}^n = \rho_2^n \forall n$

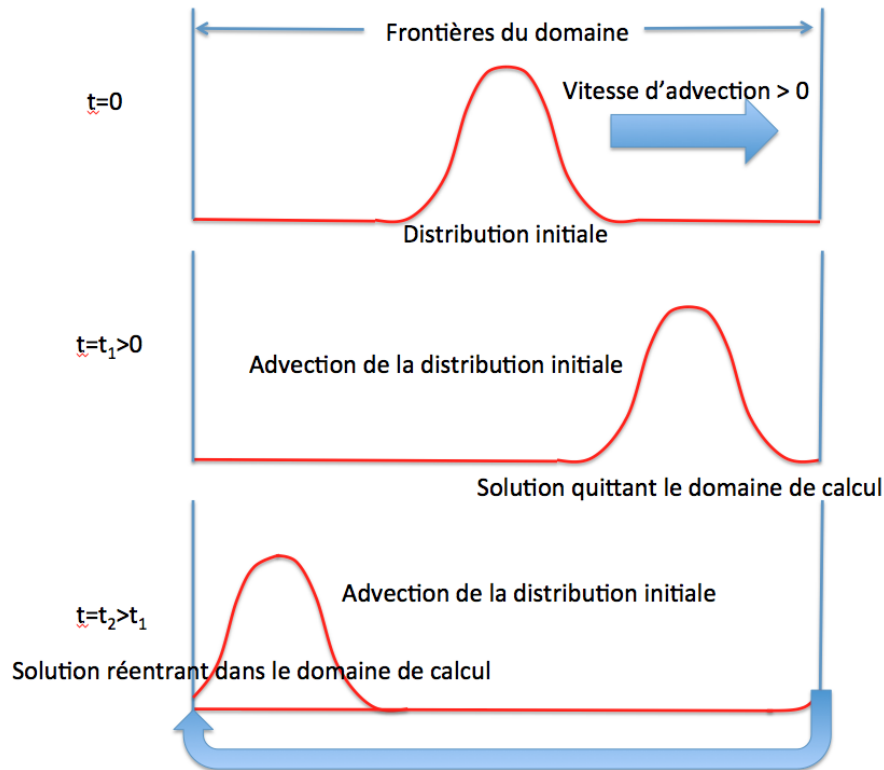


Fig. 3: Evolution typique de la solution dans le cas où des conditions aux limites de périodicité sont utilisées aux frontières du domaine de calcul.

- Adapter au présent problème le code développé pour résoudre l'équation de diffusion 1D dans les séances 1 et 2. On pourra conserver le "programme principal" (en le renommant de façon ad hoc), le script *param.sce* (en supprimant les paramètres qui ne sont plus pertinents et en introduisant les nouveaux paramètres associés au problème traité) ainsi que le script *solex.sce* qui pourra être renommé *init.sce* et dont la fonction, une fois modifiée de façon ad hoc, servira à calculer la distribution $\rho_0(x)$ utilisée pour l'initialisation du problème et pour obtenir la solution exacte. On pourra renommer *theta* en *rho* (le problème est supposé ici directement et uniquement résolu sous forme adimensionnée).
- Effectuer une première simulation à l'aide du schéma (9) mis en oeuvre avec $imax = 201$ (soit un pas d'espace uniforme $\Delta x = 10/200 = 0.05$) et un pas de temps Δt choisi de telle sorte que la solution se déplace d'une cellule au cours d'un pas de temps (*i.e.* $a = \Delta x / \Delta t$ soit $\Delta t = \Delta x / a$ ou $\Delta t = 0.5$ dans le cas présent. On se limitera à quelques itérations seulement (*itermax* = 10 typiquement) avec un affichage toutes les deux itérations par exemple. Commenter le résultat obtenu et effectuer quelques expériences numériques en réduisant le pas de temps (mais en augmentant alors le nombre d'itérations et la fréquence d'affichage associée).
- Expliquer le comportement observé par une analyse de stabilité du schéma (9).

Le résultat obtenu à l'aide du schéma centré simple appliqué avec les conditions spécifiés dans l'énoncé est présenté sur la figure 4 ; on constate clairement le caractère instable du schéma dans ces conditions d'utilisation (la solution discrète est représentée en trait continu noir, la solution exacte est tracée en trait bleu) puisque la distribution initiale s'amplifie au lieu de rester d'amplitude constante et de se propager sans déformation à la vitesse a . On ne multiplie pas dans ce corrigé les expériences numériques ; disons simplement que le fait de réduire le pas de temps peut repousser la divergence de la solution mais sans jamais l'empêcher. L'amplification catastrophique de la distribution initiale semble se produire quel que soit le choix des paramètres numériques. Pour expliquer ce comportement et se convaincre ainsi qu'il ne s'agit pas d'une erreur de programmation mais bien du comportement attendu de ce schéma centré simple, on applique une étude de stabilité linéaire ou étude de stabilité de type Von Neumann au schéma (9) - suivant la procédure décrite dans un précédent corrigé.

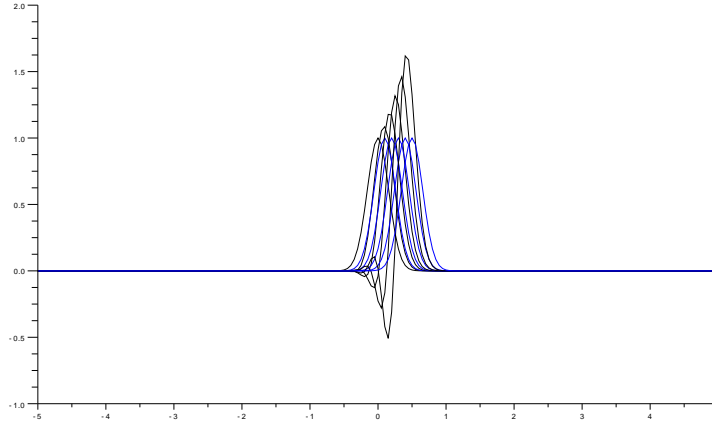


Fig. 4: Evolution de la solution du problème aux valeurs initiales (4) calculée à l'aide du schéma (9) dans un maillage $imax = 201$ avec $\Delta t = 0.5$.

On considère le schéma écrit sous la forme (9) soit :

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{1}{2}\lambda(\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n)$$

avec $\lambda = a\Delta t/\Delta x$. On suppose ρ^n de la forme $\hat{\rho}^n e^{ij\eta}$ où on rappelle que η est le nombre d'onde réduit. En injectant dans l'expression du schéma on obtient :

$$\hat{\rho}^{n+1} e^{ij\eta} - \hat{\rho}^n e^{ij\eta} = -\frac{1}{2}\lambda (\hat{\rho}^n e^{i(j+1)\eta} - \hat{\rho}^n e^{i(j-1)\eta})$$

soit, après simplification et en exploitant la définition du coefficient d'amplification $g = \hat{\rho}^{n+1}/\hat{\rho}^n$:

$$g - 1 = -\frac{1}{2}\lambda (e^{i\eta} - e^{-i\eta})$$

ou encore

$$g(\eta; \lambda) = 1 - i\lambda \sin(\eta)$$

On rappelle qu'un schéma est stable si le module du facteur d'amplification est inférieur ou égal à 1 pour toute valeur du nombre d'ondes réduit ; dans le cas du schéma centré simple appliqué à l'équation d'advection linéaire on observe de façon immédiate que le module du facteur d'amplification est strictement supérieur à 1, quelle que soit la valeur du paramètre $\lambda \neq 0$ dès lors que le nombre d'onde réduit est différent de 0 (modulo 2π). On a en effet :

$$|g(\eta; \lambda)|^2 = 1 + \lambda^2 \sin^2(\eta)$$

Il n'est donc pas possible de trouver $\Delta t \neq 0$ qui permette d'éviter l'amplification de l'erreur et la divergence de la simulation. Le schéma (9) est donc tout simplement inutilisable pour résoudre l'équation d'advection. On va donc recourir à d'autres stratégies de discrétisation (en conservant l'avancement en temps de type Euler explicite) qui vont être étudiées en Séance 4.