



Filière SEM : Méthodes numériques pour les EDP Année Universitaire 2010-2011

Diffusion de la chaleur

Contact : *Christophe.Corre@legi.grenoble-inp.fr*

1 Modélisation du phénomène physique

On considère une région de volume V et de surface A au sein d'un solide conducteur de la chaleur. En appliquant le premier principe de la thermodynamique à ce système fermé, on peut écrire :

$$\frac{dU}{dt} = Q(t) + P(t)$$

où U est l'énergie interne contenue dans le volume V à l'instant t , Q est le flux de chaleur à travers la surface A et P est la puissance mécanique ou électrique produite dans le volume, qui est supposée nulle (en d'autres termes on suppose qu'il n'y a pas de sources ou de puits de chaleur à l'intérieur du volume considéré).

L'énergie interne contenue dans le volume peut s'exprimer en fonction de l'énergie interne spécifique u comme :

$$U = \int_V \rho u dV$$

où ρ désigne la masse volumique du solide considéré.

Le flux de chaleur Q peut s'exprimer à l'aide du vecteur flux de chaleur \vec{q} :

$$Q = - \int_A \vec{q} \cdot \vec{n} dA$$

où \vec{n} désigne la normale unitaire à la surface A pointant vers l'extérieur du volume V .

- En utilisant maintenant le lien entre l'énergie interne spécifique et la température (on notera $C(T)$ la capacité calorifique spécifique) d'une part et la loi de Fourier qui relie le vecteur flux de chaleur à la température locale T , montrer que l'équation d'évolution de la température T en fonction de la position \vec{x} et du temps t , dite *équation de la chaleur*, est une équation aux dérivées partielles (ou EDP) de la forme suivante :

$$\rho C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k(T) \vec{\text{grad}}(T)) \quad (1)$$

où $k(T)$ désigne la conductivité thermique du matériau, propriété du matériau, fonction de la température locale dans le cas général.

L'énergie interne contenue dans le volume V peut s'écrire, en utilisant $u = CT$:

$$U = \int_V \rho C T dV$$

et sa variation s'exprime donc comme (on supposera désormais $C = \text{cste}$; on conserve en revanche la prise en compte d'une conductivité thermique fonction de la température locale) :

$$\frac{dU}{dt} = \int_V \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dV$$

Le premier principe écrit en supposant $P = 0$ et en utilisant la loi de Fourier pour exprimer le flux de chaleur \vec{q} en fonction de la température T , soit $\vec{q} = -k(T) \vec{\text{grad}}(T)$, fournit :

$$\int_V \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int_A k(T) \vec{\text{grad}}(T) \cdot \vec{n} dA$$

L'intégrale de surface du membre de droite peut être transformée en intégrale de volume en utilisant la formule dite flux-divergence, soit :

$$\int_V \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int_V \text{div} \left(k(T) \vec{\text{grad}}(T) \right) dV$$

ou encore, en regroupant les deux termes dans une même intégrale :

$$\int_V \rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div} \left(k(T) \vec{\text{grad}}(T) \right) dV = 0$$

Puisque cette égalité est valable quel que soit le volume V c'est donc nécessairement l'intégrand qui est nul et on obtient ainsi la forme locale ou différentielle (1) de l'équation de la chaleur.

2 Problème complet 1D

2.1 Formulation

On considère un mur qui s'étend de $x = -L$ à $x = +L$ suivant la première direction d'espace x et de grandes dimensions devant L suivant les directions y et z . On suppose dans ces conditions que la température T dans le mur ne dépend que de l'abscisse x et du temps t .

- Dans le cas où les propriétés du matériau peuvent être supposées constantes, montrer que l'évolution de la température dans le mur est régie par l'EDP simplifiée :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2)$$

où α désigne la diffusivité thermique du matériau que l'on exprimera en fonction de la masse volumique, de la capacité calorifique spécifique et de la conductivité thermique.

Pour $k = \text{cste}$ (on rappelle que C est également supposée constante par ailleurs), l'équation générale (1) peut se simplifier en :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C} \text{div}(\vec{\text{grad}}(T)) = \alpha \Delta T$$

où on a introduit d'une part la diffusivité thermique $\alpha = k/(\rho C)$ et où on a utilisé d'autre part l'identité $\text{div}(\vec{\text{grad}} f) = \Delta f$ avec Δ l'opérateur Laplacien.

Pour un problème mono-dimensionnel, $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ de sorte que l'équation de la chaleur prend bien la forme (2).

Le problème physique est complété par la donnée d'une condition initiale à l'intérieur du mur :

$$T(x, t = 0) = T_i \text{ pour } x \in]-L, +L[$$

et par des conditions aux limites, sur les parois $x = -L$ et $x = +L$. Classiquement, ces conditions peuvent être de type Dirichlet (valeurs imposées pour la température) ou de type Neumann (valeurs imposées pour le vecteur flux de chaleur *i.e.* pour le gradient de température). On suppose ici :

$$T(x = -L, t) = T_1 \text{ et } T(x = +L, t) = T_1$$

pour tout temps $t \geq 0$. On présente sur la figure 1 une vision qualitative de l'évolution de la température dans le mur pour le cas où la température initiale est supérieure à la température appliquée sur les faces du mur à partir de $t = 0$.

- En introduisant la température adimensionnée $\theta = \frac{T - T_1}{T_i - T_1}$ et les variables sans dimension $\xi = \frac{x}{L} + 1$ et $Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$ (on rappelle que Fo désigne le nombre de Fourier, temps adimensionné), montrer que le problème à résoudre peut se mettre sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \text{ pour } \xi \in [0, 2], Fo > 0 \\ \theta(\xi, 0) = 1 \text{ pour } \xi \in]0, 2[\\ \theta(0, Fo) = \theta(2, Fo) = 0 \text{ pour } Fo \geq 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

On peut exprimer la dérivée de la température T par rapport au temps physique t comme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{(T_i - T_1) \partial \theta}{t_{ref} \partial \tau}$$

où on a introduit la température adimensionnée θ et le temps adimensionné $\tau = t/t_{ref}$ avec t_{ref} un temps de référence qui n'a pas encore été défini.

On peut exprimer de façon similaire la dérivée seconde de la température par rapport à la variable d'espace x :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{(T_i - T_1) \partial^2 \theta}{L^2 \partial \xi^2}$$

En rassemblant ces deux expressions, l'équation de la chaleur en 1D peut s'exprimer comme :

$$\frac{(T_i - T_1) \partial \theta}{t_{ref} \partial \tau} = \alpha \frac{(T_i - T_1) \partial^2 \theta}{L^2 \partial \xi^2}$$

soit, après simplification et réorganisation :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\alpha t_{ref}}{L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}$$

Si on choisit alors comme temps de référence $t_{ref} = L^2/\alpha$, l'EDP adimensionnée qui décrit l'évolution de la température adimensionnée θ s'écrit simplement :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}$$

Il est classique de noter $Fo = \tau = t/t_{ref} = \alpha t/L^2$ le nombre de Fourier ou temps adimensionné d'évolution du champ de température. On cherche donc désormais à trouver $\theta(\xi, Fo)$ solution de l'EDP :

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}$$

Cette équation, qui s'applique dans le mur, soit pour $\xi \in [0, 2]$, est complétée par la condition initiale sur le champ adimensionné et les conditions aux limites en $\xi = 0$ et $\xi = 2$. Par définition de θ , on a :

$$\theta(\xi, 0) = \frac{T(x, 0) - T_1}{T_i - T_1} = \frac{T_i - T_1}{T_i - T_1} = 1$$

et

$$\theta(0, Fo) = \frac{T(-L, t) - T_1}{T_i - T_1} = \frac{T_1 - T_1}{T_i - T_1} = 0$$

de même $\theta(2, Fo) = 0$. On retrouve donc bien la formulation adimensionnée (3) du problème.

On notera bien l'intérêt de l'adimensionnement du problème initial. La résolution de (3) fournit un champ adimensionné $\theta(\xi, Fo)$ qui peut aisément être transformé en champ dimensionné $T(x, t)$ pour connaître la distribution de température (en K) à l'instant t (exprimé en s) et au point x (exprimé en m) dans une paroi d'épaisseur $2L$ (exprimée en m), initialement à la température T_i (exprimée en K) et dont les parois sont maintenues à la température T_1 (exprimée en K).

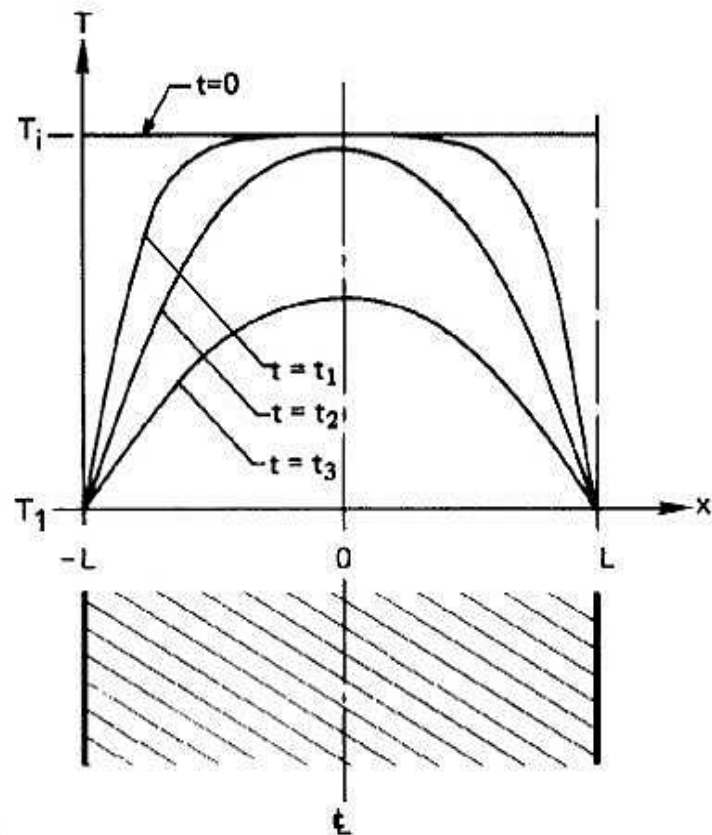


Fig. 1: Représentation qualitative de l'évolution de la température dans le mur dans une situation de refroidissement.

2.2 Solution exacte

- Rappeler la stratégie de résolution qui permet d'obtenir la solution exacte de l'EDP linéaire $\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}$:

$$\theta(\xi, Fo) = \exp(-\lambda^2 Fo) (A \sin(\lambda \xi) + B \cos(\lambda \xi)) \quad (4)$$

La solution générale de l'équation de la chaleur linéaire peut être obtenue soit par une technique de transformation de Laplace soit, encore plus simplement dans le cas présent, par une technique dite de séparation des variables. On postule $\theta(\xi, Fo) = f(\xi) \times g(Fo)$ où f (respectivement g) est une fonction de la seule variable ξ (respectivement Fo). L'EDP $\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}$ se transforme immédiatement, sous cette hypothèse sur la forme de θ , en :

$$f(\xi) \times g'(Fo) = f''(\xi) \times g(Fo)$$

où la notation ' désigne sans ambiguïté la dérivée première d'une fonction d'une seule variable (et '' sa dérivée seconde). On a donc aussi :

$$\frac{f''(\xi)}{f(\xi)} = \frac{g'(Fo)}{g(Fo)}$$

Cette égalité entre une fonction de ξ seulement d'une part et une fonction de Fo seulement d'autre part n'est possible qu'à condition que ces fonctions soient en réalité égales à une même constante :

$$\frac{f''(\xi)}{f(\xi)} = \frac{g'(Fo)}{g(Fo)} = K$$

On a donc ramené la résolution de l'EDP initiale à la résolution de deux équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} f''(\xi) - K f(\xi) = 0 \\ g'(Fo) = K g(Fo) \end{cases}$$

Les solutions de ces EDO sont bien connues. L'EDO sur la fonction $g(Fo)$ fournit :

$$g(Fo) = C_1 \exp(K Fo)$$

où C_1 est une constante indéterminée pour le moment. Si K est une constante positive, la fonction g croît exponentiellement en fonction de Fo , autrement dit, la température dans le mur croît exponentiellement au cours du temps ce qui est bien sûr physiquement impossible. On a donc nécessairement $K < 0$, ce que l'on traduit en posant $K = -\lambda^2$. Ainsi :

$$\begin{cases} f(\xi) = C_2 \sin(\lambda \xi) + C_3 \cos(\lambda \xi) \\ g(Fo) = C_1 \exp(-\lambda^2 Fo) \end{cases}$$

La fonction $\theta(\xi, Fo)$ prend donc la forme générale (4) avec $A = C_1 C_2$ et $B = C_1 C_3$.

- Déterminer les coefficients inconnus de cette solution générale de l'équation de la chaleur 1D instationnaire en utilisant les conditions aux limites et la condition initiale spécifique au problème traité.

On rappelle que les coefficients de la série de Fourier décomposant l'unité sont donnés par $A_n = \frac{4}{n\pi}$ avec n un entier impair.

- Retrouver ainsi la solution exacte ou analytique (ou en anglais *closed-form solution*) du problème (3) :

$$\theta(\xi, Fo) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \exp\left(-Fo \left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\xi\right) \quad (5)$$

Pour préciser les constantes λ , A et B qui apparaissent dans la solution générale (4) de l'équation de la chaleur 1D dans le cas linéaire, on va maintenant exploiter les conditions aux limites et la condition initiale spécifiques au problème traité à savoir (3). La condition aux limites en $\xi = 0$ fournit ainsi $\theta(0, Fo) = 0 = \exp(-\lambda^2 Fo) \times B$ donc $B = 0$. La condition aux limites en $\xi = 2$ fournit par ailleurs $\theta(2, Fo) = 0 = \exp(-\lambda^2 Fo) \times A \sin(2\lambda)$ donc soit $A = 0$, soit la constante λ est telle que $2\lambda = n\pi$ avec $n = 0, 1, \dots$. On écarte la solution $A = 0$ qui conduirait à $\theta(\xi, Fo) = 0$ physiquement incompatible avec la condition initiale (on ne peut pas passer instantanément de $\theta = 1$ à $\theta = 0$) ; on a donc établi en utilisant les conditions aux limites spécifiques au problème que la solution est de la forme :

$$\theta(\xi, Fo) = A_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 Fo\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\xi\right)$$

où la constante A_n est relative à la n ème solution. Cependant, il reste une difficulté à résoudre : la satisfaction de la condition initiale. Clairement, aucune des solutions élémentaires ci-dessus ne permet de satisfaire la condition initiale $\theta(\xi, 0) = 1$. Cependant, puisque l'EDP est linéaire, toute somme de solutions de l'EDP est également solution du problème. On peut donc écrire la solution θ sous la forme :

$$\theta(\xi, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 Fo\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\xi\right)$$

Le terme $n = 0$ n'a pas été inclus dans la somme puisque sa contribution est nulle. La condition initiale ($Fo = 0$) impose :

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\xi\right) = 1$$

On peut alors établir (on ne détaille pas ce point ici) que les coefficients A_n du développement de l'unité en série de Fourier sont tels que $A_n = \frac{4}{n\pi}$ avec n un entier impair. En écrivant alors plutôt l'entier impair n avec $n = 1, \infty$ sous la forme $2n+1$ avec $n = 0, \infty$, on obtient bien la forme (5) de la solution exacte du problème (3).

2.3 Analyse physique

La solution exacte (5) du problème (3) a été programmée dans un code *Scilab* qui est mis à votre disposition (programme principal : *heat1D_analytique.sce* faisant appel aux scripts *param.sce* pour la définition des paramètres du problème et *solex.sce* pour le calcul de la solution adimensionnée exacte par la formule (4).

- Prenez en main ce petit code et utilisez-le (avec les valeurs dimensionnées fournies pour T_i , T_1 , L et α) pour répondre à la question suivante : au bout de combien de temps la température au coeur du mur a-t-elle été divisée par 2 par rapport à sa valeur initiale ?

On renvoie au document d'introduction à Scilab et aux TD de méthodes numériques de 1ère année pour ce qui concerne la prise en main de Scilab. Il est important de bien avoir conscience que les scripts (fichiers .sce ou .sci) sont simplement des séquences d'instructions qui sont exécutées par le logiciel, dans la console de commande, suivant l'ordre de leur écriture. Le premier point auquel on doit prêter attention lorsque Scilab a été lancé est de définir correctement le répertoire courant (voir la commande "Changer le répertoire courant" du menu "Fichier" dans la console). Le répertoire courant doit être défini comme celui qui contient l'ensemble des scripts utilisés par le code. De plus, pour éviter tout problème de localisation du répertoire et des fichiers, on pensera bien à utiliser à partir de la racine Z : des noms de répertoires et de scripts qui ne contiennent ni accents, ni espaces (si on veut faire apparaître un espace on utilisera un tiret bas $_$).

Le code proposé pour la solution exacte du problème de diffusion (linéaire) est organisé en 3 scripts : le script `heat1D_analytique.sce` correspond au programme principal : il s'ouvre avec la mise à zéro de toutes les variables et des fenêtres graphiques afin d'éviter toute interférence avec l'exécution possible de scripts précédents. Ce script principal charge ensuite les différents paramètres du problème en exécutant le script `param.sce` (équivalent d'une "sub-routine") puis charge la fonction `solex.sce` qui va être utilisée ensuite pour le calcul et le tracé de la solution exacte.

Dans `param.sce`, l'utilisateur spécifie avant de lancer le script principal les paramètres physiques (T_i , T_1 , L et α) et numériques du problème. Les paramètres numériques utilisés par le code dans le cas du calcul de la solution exacte sont simplement le nombre de points $imax$ en lesquels la solution exacte est calculée, Le choix du pas d'avancement en temps adimensionné ΔFo , le nombre d'itérations en temps adimensionné $itermax$ (le temps adimensionné final du calcul sera donc $Fo = itermax \times \Delta Fo$), la fréquence `freq_dist` d'affichage de la distribution spatiale de θ . Cette fréquence sera choisie en relation avec le nombre $itermax$ afin qu'un tracé trop fréquent de la solution dans la fenêtre graphique 0 ne ralentisse pas excessivement le déroulement du calcul de la solution exacte. Enfin le dernier paramètre relatif à la solution exacte est le nombre de modes retenu pour le calcul de la solution exacte (5) ; la somme de $n = 0$ à $+\infty$ qui apparaît dans cette expression est bien sûr remplacée en pratique par une somme de $n = 0$ à une valeur maximale, $nmode$. Compte tenu de la forme de la solution exacte (avec présence de termes exponentiels d'argument proportionnel à $-n^2$, qui tendent donc très rapidement vers 0 lorsque n augmente sauf si Fo est petit, i.e. aux premiers instants de l'évolution de la solution) on peut généralement se limiter à utiliser quelques modes seulement ... sauf si l'on veut une solution précise quand Fo est petit, auquel cas il est nécessaire d'augmenter significativement $nmode$. Dans le cas présent, on a retenu de façon systématique une valeur élevée de $nmode$ qui offre une représentation précise de la solution $\forall Fo$ - tout en étant inutilement coûteuse quand Fo n'est plus proche de 0.

Les arguments de la fonction `solex` sont, dans l'ordre, le nombre de Fourier (argument `tau`), la position (adimensionnée) en espace (argument `eta`) et le nombre de modes (argument `nmax`). On notera bien la syntaxe de déclaration d'une fonction sous Scilab - on a utilisé ici `y` pour stocker la valeur de retour de la fonction.

On définit dans le programme principal les éléments du tableau xi qui contient les valeurs discrètes prises par $\xi_i = (i - 1) \times \Delta\xi$ avec i variant de 1 à $imax$ et $xi(1) = 0$, $xi(imax) = 2$. On initialise le temps adimensionné Fo et on trace la solution initiale qui correspond à $\theta = 1$ pour tous les points intérieurs ($i = 2$ à $i = imax - 1$) et à $\theta = 0$ pour $i = 1$ et $i = imax$. On entre ensuite dans la boucle en temps (indice de boucle $iter$) dans laquelle on incrémente la variable Fo du pas fixé dFo à chaque itération ; pour la fréquence $freq_dist$ choisie, on effectue une boucle sur i et on calcule, au temps correspondant à Fo , au point $xi(i)$ la solution exacte en appelant la fonction `solex` avec le nombre de modes $nmode$ défini par l'utilisateur. A la fin de la boucle en temps adimensionné, on utilise les valeurs physiques rentrées dans `param.sce` pour tracer la température dimensionnée T en fonction de l'abscisse dimensionnée x à l'instant physique (dimensionné) final t correspondant à la valeur finale du nombre de Fourier.

Une première façon, très simple, de répondre à la question posée consiste à procéder par "tâtonnement", en jouant sur le nombre maximal d'itérations et en examinant la solution finale tracée par le programme. On rappelle que deux stratégies sont possibles pour exécuter le script principal `heat1D_analytique.sce` : le lancer depuis la console en utilisant la commande "Exécuter" du menu "Fichier" ou bien (on recommande plutôt cette option) utiliser "Exécuter" (raccourci "CTRL+E") depuis la fenêtre Scipad dans laquelle on aura ouvert le fichier du script.

On présente sur la figure 2 le résultat fourni par le code avec $dFo = 0.0001$, $itermax = 1000$ soit un temps final adimensionné $Fo = 0.1$ qui correspond à un temps physique $t_{final} = L^2 \times Fo / \alpha = 0.1^2 \times 0.1 / (0.4 \times 10^{-5}) = 250$ secondes. Ce temps (dimensionné) final est affiché par le script dans la console à la fin de son exécution. On présente également sur la figure 3 la distribution de température (dimensionnée) au temps final $t = 250$ s. Chaque courbe de la figure 2 correspond successivement à la distribution adimensionnée à $Fo = 0.01$, $Fo = 0.02$, ... $Fo = 0.1$ soit $t = 25$ s, $t = 50$ s, ... $t = 250$ s. Clairement, la température en $x = 0$ au coeur du mur n'a pas été divisée par 2 par rapport à sa valeur initiale au bout de 250 s : elle se situe encore à 95 °C environ.

Si on pousse le calcul jusqu'à un temps 10 fois plus grand, en utilisant $dFo = 0.001$, sans modifier $itermax$ ni $freq_dist$ on obtient les résultats présentés sur les figures 4 et 5. Au temps final, $t = 2500$ s, la température en $x = 0$ est descendue à 28.5 °C environ donc on sait au moins que le temps recherché se situe entre 250 s et 2500 s. On peut bien sûr s'appuyer sur les courbes adimensionnées de la figure 4 pour affiner l'estimation mais il faut d'abord préciser à quelle valeur de θ correspond la réduction par un facteur 2 de $T(x = 0)$ par rapport à sa valeur initiale T_i . L'égalité $T(x = 0) = T_i/2$ se traduit en effet par

$\theta(\xi = 1) = \frac{T_i/2 - T_1}{T_i - T_1}$ soit, pour les valeurs physiques utilisées $\theta(\xi = 1) = 0.375$. Puisque

chaque courbe de la figure 4 correspond à un temps physique multiple de 250 s, la cinquième courbe correspondant à $t = 1250$ s semble, graphiquement, fournir une bonne estimation du temps recherché au bout duquel $\theta(\xi = 1) = 0.375$ soit $T(x = 0) = 50$ °C. On peut vérifier ce point en relançant le code avec $itermax = 500$ et $freq_dist = 50$ de façon à disposer d'une sortie finale dimensionnée qui corresponde à $t = 1250$ s. Ces résultats présentés sur les figures 6 et 7 confirment bien l'estimation de 1250 s ou un peu plus de 20 minutes pour le temps nécessaire à l'abaissement de moitié de la température au coeur du mur.

On peut bien sûr affiner le résultat obtenu par observation visuelle des courbes solutions en intégrant directement un test au sein du code. Il s'agit en effet tout simplement de repérer le temps réduit ou adimensionné au bout duquel $\theta(\xi = 1)$ passe en-dessous de la valeur 0.375 et d'afficher le temps dimensionné correspondant (on peut également afficher la distribution de température $T(x)$ obtenue pour cet instant précis). Ces opérations sont facilement codées dans le script `heat1D_analytique_complet.sce` fourni par ailleurs. On notera l'utilisation d'une variable `flag` qui permet de ne retenir que la première occurrence positive du test $\theta(\xi = 1) \leq 0.375$. On doit prêter attention au fait que dans la version du code initialement fournie l'évaluation de la solution exacte est effectuée à l'intérieur du test sur la fréquence d'affichage ce qui tend à fausser l'analyse puisque la précision de l'estimation sur le temps recherché dépend donc non seulement du pas de discrétisation dFo mais aussi de la fréquence d'affichage. Dans cette version complète, on a donc correctement découplé la partie affichage et la partie analyse. Les fenêtres 0 et 2 permettent de visualiser d'une part l'évolution de la distribution $\theta(\xi)$ pour différents nombres de Fourier (avec la fréquence `freq_dist`) et d'autre part l'évolution de la température $T(x = 0)$ avec cette même fréquence `freq_dist`. Par ailleurs, les fenêtres 1 et 3 affichent la distribution $T(x)$ à l'instant pour lequel $T(x = 0) = T_i/2$ et la distribution finale de $T(x)$.

En contrepartie, la solution exacte est maintenant calculée à chaque itération et non plus seulement toutes les `freq_dist` itérations ; le coût de mise en oeuvre du code devient alors beaucoup plus élevé et si l'on souhaite obtenir une réponse dans un temps raisonnable on aura intérêt à jouer sur le paramètre `nmode` : en effet, à partir du moment où on ne s'intéresse pas à la solution exacte pour Fo proche de zéro, seuls quelques modes suffisent pour obtenir une valeur convergée de la série qui définit cette solution exacte. Si on souhaite connaître avec une précision de 1 s par exemple le temps $t_{1/2}$ au bout duquel $T(x = 0)$ est passée de T_i à $T_i/2$ on doit utiliser dFo tel que le pas de temps dimensionné correspondant soit 1 s ; on prend donc $dFo = 0.0004$ et puisque $t = 1250$ s on effectue 1250 itérations avec un pas d'affichage de 10 itérations et on se limite à `nmode = 10` au lieu de `nmode = 100`. On trouve alors $t_{1/2} = 1239$ s (le temps de calcul nécessaire pour obtenir ce résultat correspond à 44 s de temps CPU environ) ; les évolutions du champ de température adimensionnée dans le mur et de la température dimensionnée en $x = 0$ sont tracées sur les figures 8 et 9. On refait tourner cette simulation avec `nmode = 5` et `nmode = 20`. On trouve toujours $t_{1/2} = 1239$ s mais au bout d'un temps de calcul égal à 28 s pour `nmode = 5` et 75 s pour `nmode = 20`. Le choix `nmode = 5` est donc suffisant pour assurer une représentation précise de la solution exacte dès lors que Fo est suffisamment grand. Si on superpose les évolutions de $T(x = 0)$ calculées avec `nmode = 5`, `nmode = 10` et `nmode = 20` on observe par contre des différences significatives aux premiers instants de la simulation. On illustre sur la figure 10 l'influence du choix du paramètre `nmode` sur l'exactitude de la solution analytique : si `nmode = 5` suffit bien à assurer une solution précise à $t = 50$ s soit $Fo = 0.02$ (les termes de la suite définissant la solution exacte sont rapidement négligeables quand n augmente dans (5)), la suite n'est clairement pas convergée avec `nmode = 5` ni même `nmode = 10` quand $Fo = 0.002$. L'utilisation de la solution exacte pour les premiers instants de l'évolution de la température dans le mur doit donc être menée avec un nombre suffisamment élevé de modes pour garantir la bonne convergence de la suite et par conséquent la précision de cette formule analytique.

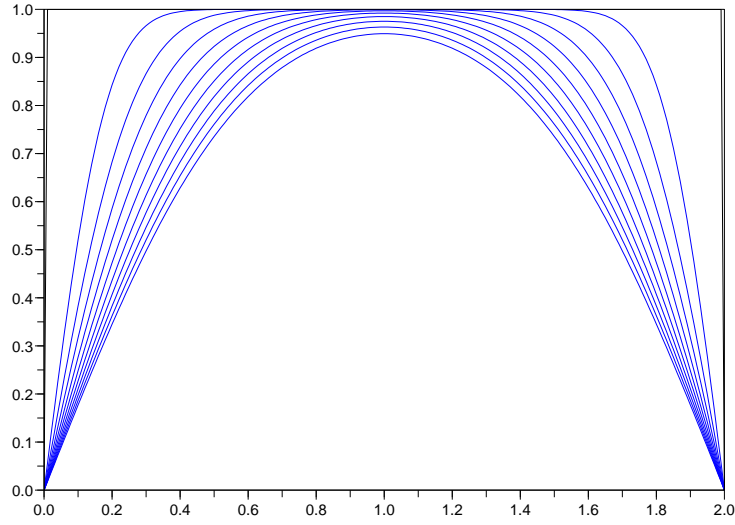


Fig. 2: Evolution de la solution exacte pour la température adimensionnée (tracé effectué toutes les 100 itérations pendant 1000 itérations de pas constant $dFo = 0.0001$).

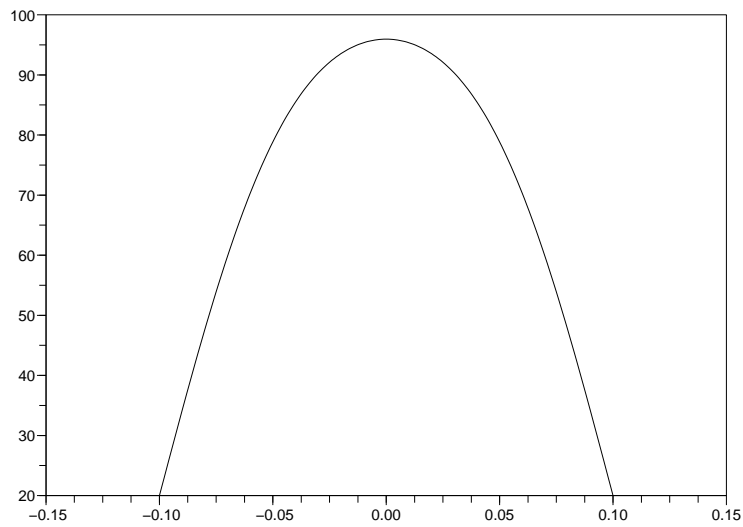


Fig. 3: Solution dimensionnée $T(x)$ correspondant à l'état final ($t = 250\text{ s}$) de la figure 2.

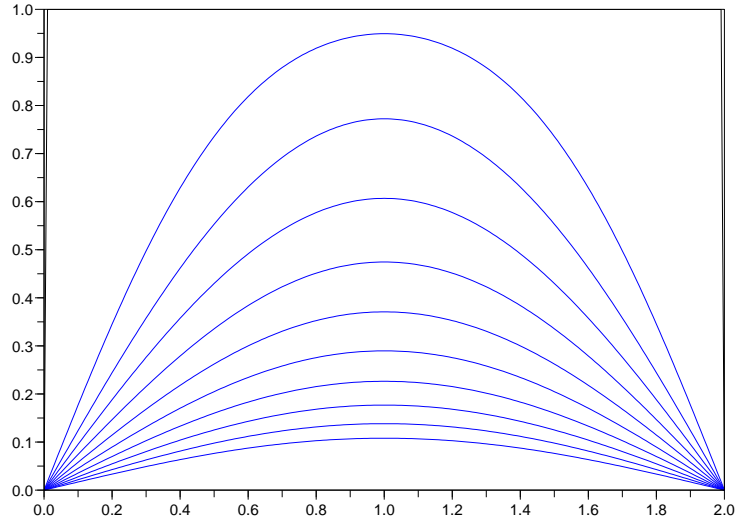


Fig. 4: Evolution de la solution exacte pour la température adimensionnée (tracé effectué toutes les 100 itérations pendant 1000 itérations de pas constant $dFo = 0.001$).

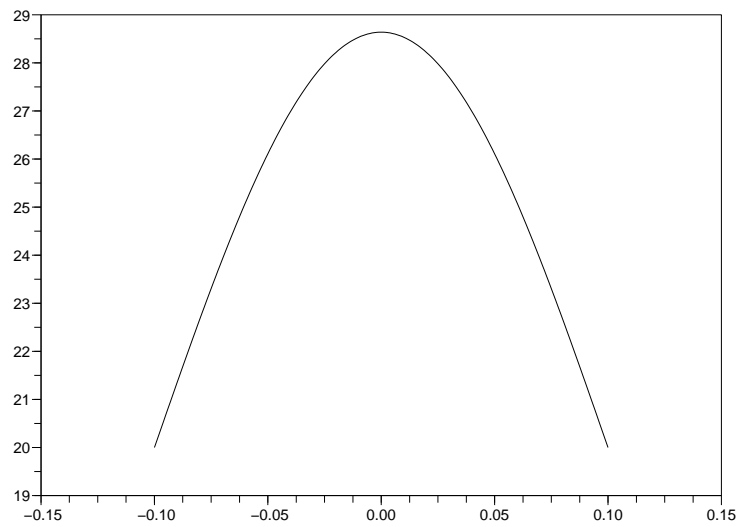


Fig. 5: Solution dimensionnée $T(x)$ correspondant à l'état final ($t = 2500\text{ s}$) de la figure 4.

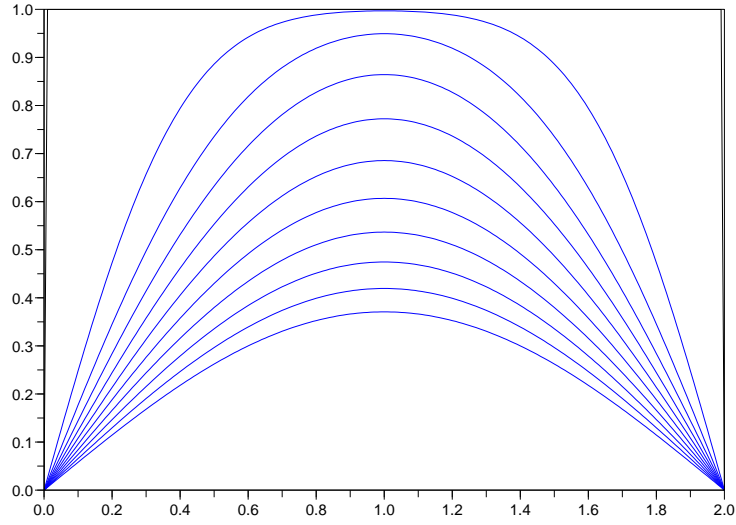


Fig. 6: Evolution de la solution exacte pour la température adimensionnée (tracé effectué toutes les 50 itérations pendant 500 itérations de pas constant $dFo = 0.001$).

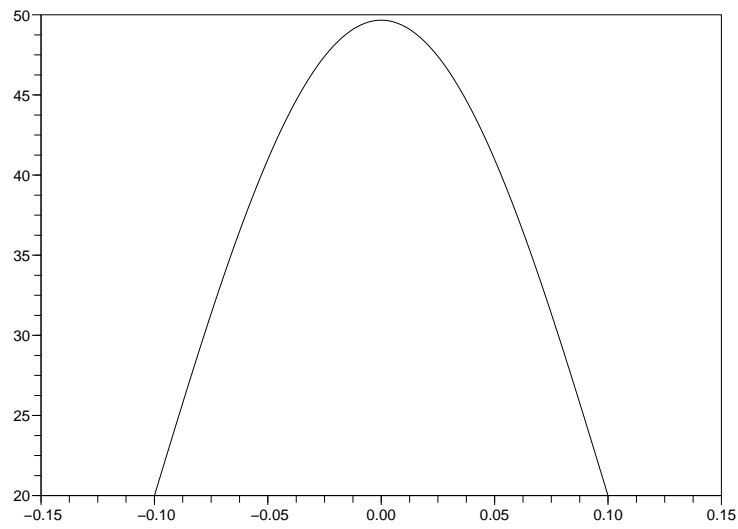


Fig. 7: Solution dimensionnée $T(x)$ correspondant à l'état final ($t = 1250$ s) de la figure 6.

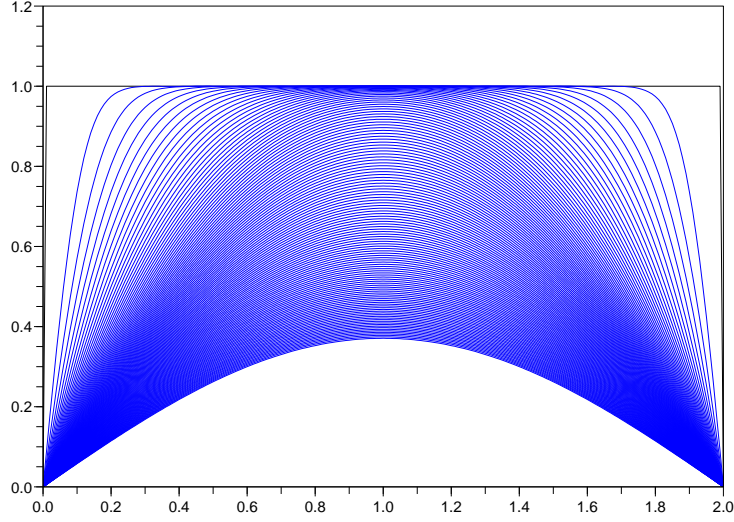


Fig. 8: Evolution de la solution exacte pour la température adimensionnée (tracé effectué toutes les 10 itérations pendant 1250 itérations de pas constant $dFo = 0.0004$. Le nombre de modes utilisé est $nmode = 10$ (contre $nmode = 100$ dans les précédents calculs).

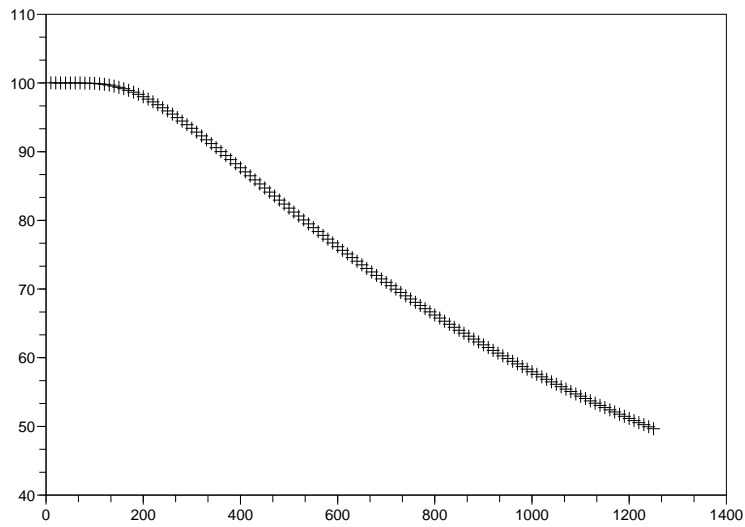


Fig. 9: Evolution en fonction du temps physique t de $T(x = 0)$ dans les conditions de calcul précisées pour la figure 8.

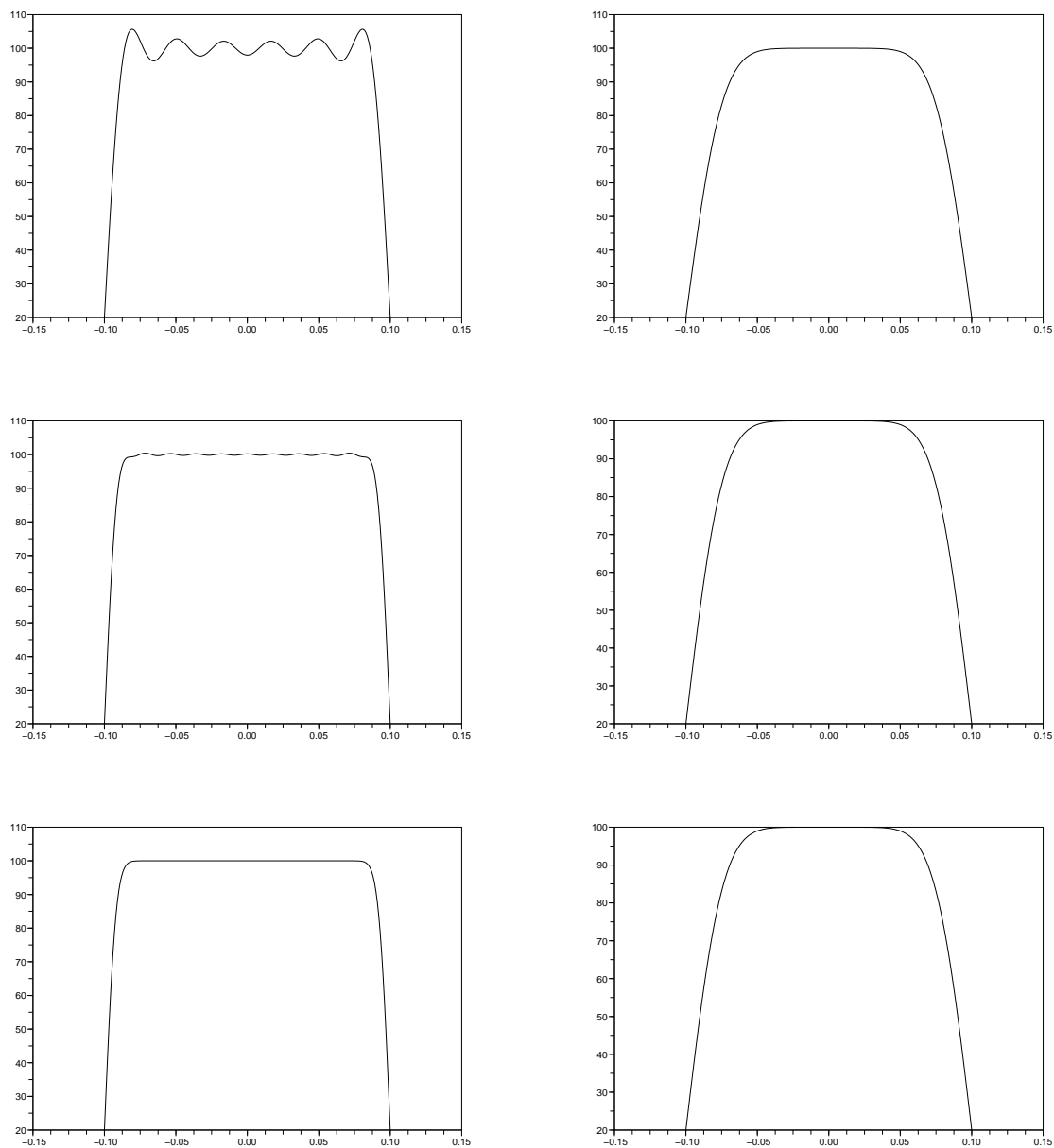


Fig. 10: Distribution de la température $T(x)$ à $t = 5$ s (à gauche) et $t = 50$ s pour $nmode = 5$ (en haut), $nmode = 10$ (au milieu) et $nmode = 20$ en bas.

2.4 Cas d'une diffusivité thermique variable

La démarche suivie ci-dessus pour traiter le problème exploite le fait que la diffusivité thermique du matériau est supposée constante, indépendante de la température locale T .

On suppose que la diffusivité suit une loi en fonction de la température de la forme $\alpha(T) = \alpha_0 f(T/T_0)$ où α_0 et T_0 désignent respectivement une diffusivité thermique et une température de référence.

- Réécrivez le problème (dimensionné et adimensionné) dans ce cas.
- La démarche suivie dans le cas linéaire peut-elle s'appliquer à ce cas d'EDP désormais non-linéaire ?

La forme générale de l'équation de la chaleur 1D, valable dans le cas $\alpha = \text{cste}$ ou $\alpha = \alpha(T)$, est donnée par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (6)$$

L'équation (6) peut également être écrite sous forme développée :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha(T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left(\frac{d\alpha}{dT} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \quad (7)$$

où on a utilisé $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \left(\frac{d\alpha}{dT} \right) \frac{\partial T}{\partial x}$.

Dans le cas où $\alpha = \text{cste}$ on retrouve bien sûr l'équation linéaire (2). Lorsque $\alpha(T) = \alpha_0 f\left(\frac{T}{T_0}\right)$, l'équation (7) s'écrit aussi :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_0 f\left(\frac{T}{T_0}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\alpha_0}{T_0} f'\left(\frac{T}{T_0}\right) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2$$

On conserve l'adimensionnement $\theta = (T - T_1)/(T_i - T_1)$ de sorte que :

$$f\left(\frac{T}{T_0}\right) = f\left(\frac{(T_i - T_1)\theta + T_1}{T_0}\right) = \varphi(\theta)$$

et on a :

$$\varphi'(\theta) = \frac{T_i - T_1}{T_0} f'\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

On rappelle bien que la notation g' pour une fonction $g(a)$ désigne la dérivée de g par rapport à la variable a . Ainsi, si par exemple, pour fixer les idées, $f\left(\frac{T}{T_0}\right) = (T/T_0)^p$, alors $f'\left(\frac{T}{T_0}\right) = p(T/T_0)^{p-1}$ puisque la variable dont dépend f est T/T_0 et non pas T . On a bien par contre :

$$\frac{d\alpha}{dT} = \alpha_0 \frac{df}{dT} = \frac{\alpha_0}{T_0} \frac{df}{d(T/T_0)} = \frac{\alpha_0}{T_0} f'\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

soit, pour l'exemple pris de fonction f , $\frac{d\alpha}{dT} = \frac{\alpha_0}{T_0} p \left(\frac{T}{T_0} \right)^{p-1}$.

On choisit de définir dans ce cas non-linéaire $Fo = \alpha_0 t / L^2 = t / t_{ref}$ avec $t_{ref} = L^2 / \alpha_0$; l'adimensionnement de l'équation conduit donc à :

$$\frac{T_i - T_1}{L^2} \alpha_0 \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \alpha_0 f\left(\frac{T}{T_0}\right) \frac{T_i - T_1}{L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\alpha_0}{T_0} f'\left(\frac{T}{T_0}\right) \frac{(T_i - T_1)^2}{L^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right)^2$$

soit, après simplification

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \underbrace{f\left(\frac{T}{T_0}\right)}_{=\varphi(\theta)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \underbrace{\frac{T_i - T_1}{T_0} f'\left(\frac{T}{T_0}\right)}_{=\varphi'(\theta)} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right)^2$$

ou encore

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\varphi(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \quad (8)$$

avec $\varphi(\theta) = 1$ dans le cas où $\alpha = cste = \alpha_0$ et, par exemple :

$$\varphi(\theta) = \left(\frac{T_i - T_1}{T_0} \theta + \frac{T_1}{T_0} \right)^p$$

si $\alpha(T) = \alpha_0 (T/T_0)^p$. Les conditions aux limites et la condition initiale sont inchangées par rapport à (3).

On vérifie de façon immédiate qu'il n'est plus possible de résoudre (8) par une technique de séparation de variables dès lors que $\varphi(\theta)$ n'est pas une fonction constante. Dans le cas général où α varie en fonction de T et où (8) devient donc une EDP non-linéaire il est nécessaire d'avoir recours à une résolution numérique de cette EDP (à l'aide d'une technique de discrétisation par différences finies par exemple). Ce point fera l'objet de la deuxième séance de TD.