

# Filière SEM : Méthodes numériques pour les EDP Année Universitaire 2010-2011

## Séance 4 : Advection 1D

Contact : *Christophe.Corre@legi.grenoble-inp.fr*

On reprend dans cette séance l'EDP d'advection 1D dont il n'a pas été possible, en séance 3, de trouver une solution approchée à l'aide d'un schéma centré d'ordre 2 couplé à une intégration en temps de type Euler explicite. On conserve ce choix d'avancement en temps mais on étudie dans cette séance une autre méthode de discrétisation en espace qui va nous permettre d'obtenir des solutions de l'équation d'advection 1D, sous une condition de stabilité qui sera déterminée. Les éléments attendus dans le rapport que vous ferez sur cette séance sont précisés à la fin du présent sujet.

### 1 Notion de décentrement

On souhaite toujours calculer de façon approchée la solution du problème aux valeurs initiales :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

On suppose la vitesse d'advection  $a$  positive. On choisit de discrétiser la dérivée en espace par une formule non plus centrée mais décentrée et on fait appel à un décentrement "à gauche" ou "amont" qui fait appel aux valeurs de  $\rho$  aux points  $j-1$  et  $j$ . On parle de décentrement amont en se référant au sens de la vitesse d'advection associée au problème : dans le cas considéré on suppose la vitesse d'advection  $a > 0$  donc le transport se fait suivant les  $x$  croissants, de l'amont vers l'aval, et une formule qui utilise les valeurs aux points  $x_{j-1}$  et  $x_j$  pour approcher la dérivée première au point  $j$  est bien décentrée vers l'amont. On écrit ci-dessous le schéma obtenu, en faisant ou non appel à la notion de flux numérique  $h$  approchant le flux physique  $f$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial x} &= 0, \quad f(\rho) = a \rho \\ \frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + a \frac{\rho_j^n - \rho_{j-1}^n}{\Delta x} &= 0 & \left\{ \begin{aligned} \frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + \frac{h_{j+\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} &= 0 \\ h_{j+\frac{1}{2}}^n &= f_j^n = a \rho_j^n, \quad h_{j-\frac{1}{2}}^n = f_{j-1}^n = a \rho_{j-1}^n \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (2)$$

L'écriture faisant appel au flux numérique  $h$  peut apparaître artificiellement compliquée dans le cas du problème d'advection linéaire. Elle prend tout son intérêt dans le cas non-linéaire où le flux  $f$

n'est plus une fonction linéaire de  $\rho$  comme on le verra en abordant le problème de la modélisation du trafic routier dans les prochaines séances.

Notons pour mémoire que le choix d'un schéma centré s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial x} &= 0 \text{ , } f(\rho) = a \rho \\ \frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + a \frac{\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n}{2\Delta x} &= 0 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + \frac{h_{j+\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0 \\ h_{j+\frac{1}{2}}^n = \mu f_{j+\frac{1}{2}} = a\mu\rho_{j+\frac{1}{2}}^n \text{ , } h_{j-\frac{1}{2}}^n = \mu f_{j-\frac{1}{2}} = a\mu\rho_{j-\frac{1}{2}}^n \end{array} \right. & (3) \end{aligned}$$

Afin de ne pas coder inutilement le nouveau schéma décentré à gauche (2), on souhaite étudier *a priori* ses propriétés de stabilité.

- Etablir une condition de stabilité sur  $\lambda = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$  pour le schéma (2), appliqué sous l'hypothèse  $a > 0$ . Le nombre  $\lambda$  est aussi appelé nombre de Courant-Friedrichs-Lewy (en référence aux auteurs qui l'ont les premiers introduit dans l'étude de schémas numériques pour l'advection) ou nombre CFL ou CFL tout court et la condition de stabilité obtenue est dite condition CFL.

Le schéma décentré à gauche (2) peut aussi s'écrire :

$$\rho_j^{n+1} - \rho_j^n + \lambda(\rho_j^n - \rho_{j-1}^n) = 0$$

où on rappelle que  $\lambda = a\Delta t/\Delta x$  ( $\lambda > 0$  sous l'hypothèse  $a > 0$ ). Une analyse de Von Neumann consiste à injecter  $\hat{\rho}^n e^{ij\eta}$  pour  $\rho_j^n$  dans l'expression du schéma (où  $\eta$  désigne le nombre d'onde réduit). On en tire donc, en introduisant le facteur d'amplification  $g = \hat{\rho}^{n+1}/\hat{\rho}^n$  :

$$g - 1 + \lambda(1 - e^{-i\eta}) = 0$$

soit encore

$$g(\eta; \lambda) = 1 - \lambda(1 - \cos(\eta)) - i\lambda \sin(\eta)$$

Le schéma décentré à gauche est stable sous la condition  $|g| \leq 1 \forall \eta$  soit

$$|g|^2 = (1 - \lambda(1 - \cos(\eta)))^2 + \lambda^2 \sin^2(\eta) \leq 1 \forall \eta \in [0, 2\pi]$$

On introduit à nouveau  $z = \frac{1}{2}(1 - \cos(\eta)) \in [0, 1]$  - on note que  $\sin^2(\eta) = 4z(1 - z)$ . On peut donc également écrire la condition de stabilité sous la forme :

$$|g|^2 = (1 - 2\lambda z)^2 + 4\lambda^2 z(1 - z) = 1 - 4\lambda(1 - \lambda)z \leq 1 \forall z \in [0, 1]$$

soit encore la condition de stabilité

$$4\lambda(1 - \lambda)z \geq 0 \forall z \in [0, 1]$$

qui se réduit, puisque  $z \geq 0$ , à la condition sur  $\lambda$  :

$$\lambda(1 - \lambda) \geq 0 \tag{4}$$

Lorsque  $\lambda > 0$ , c'est-à-dire lorsque  $a > 0$ , cette condition est satisfaite si et seulement si  $\lambda \leq 1$ . Pour un maillage fixé ( $\Delta x$  fixé) et une physique fixée (vitesse d'advection  $a$  fixée) ce critère de stabilité s'interprète comme un critère de choix du pas d'avancement en temps :

$$\Delta t = CFL \frac{\Delta x}{a}$$

avec  $CFL$  choisi inférieur ou égal à l'unité. Dans le cas où  $a < 0$ , soit également  $\lambda < 0$ , la condition de stabilité (4) ne peut être satisfaite quelle que soit la valeur de  $\lambda \neq 0$  ; le schéma décentré à gauche peut donc être utilisé pour approcher l'équation d'advection dans le cas  $a > 0$ , en respectant la condition  $a\Delta t/\Delta x \leq 1$  ; il ne permet pas en revanche de calculer la solution approchée de l'équation d'advection dans le cas où  $a < 0$ .

- Implémenter dans le code Scilab développé le schéma décentré à gauche avec la condition de stabilité qui vient d'être établie.
- Effectuer des simulations sur quelques itérations, suivant les consignes détaillées données dans le sujet du TD 3, en utilisant tout d'abord un pas de temps moitié du pas de temps maximal admissible puis le pas de temps maximal admissible calculé ci-dessus (*i.e.*  $CFL = 1/2$  puis  $CFL = 1$ ). Observer et commenter. Justifier en particulier que l'utilisation du schéma avec  $CFL = 1$  constitue un cas très particulier.

*On présente sur la figure 1 la solution obtenue avec le schéma décentré à gauche et  $CFL = 0.5$  (les autres informations utiles sont précisées dans la légende de la figure). On a ajusté ce pas de temps et le nombre d'itérations, donc le temps final, de façon à ce que les différentes courbes se situent bien dans le domaine de calcul. On observe la stabilité du calcul mais aussi la forte dissipation de la solution numérique, un phénomène que l'on sera davantage en mesure d'expliquer après avoir réinterprété les schémas décentrés à l'issue de cette séance. On présente également sur la figure 2 l'évolution calculée avec  $CFL = 1$  ; on constate dans ce cas particulier la superposition des solutions exactes et numériques, expliquée ci-dessous.*

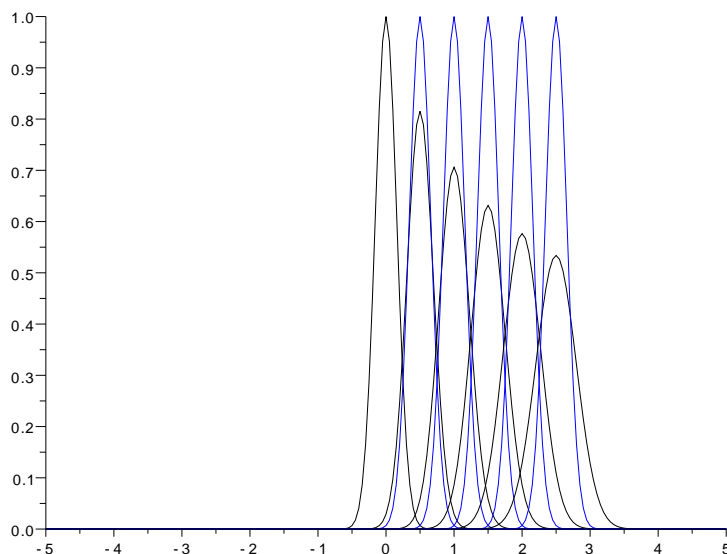


Fig. 1: Evolution de la solution calculée à l'aide du schéma décentré à gauche dans un maillage  $i_{max} = 201$  avec  $\Delta t = CFL \Delta x / a$  où  $CFL = 1/2$ . La solution présentée correspond à 100 itérations avec un affichage toutes les 20 itérations. En bleu : la solution exacte. En noir : la solution du schéma.

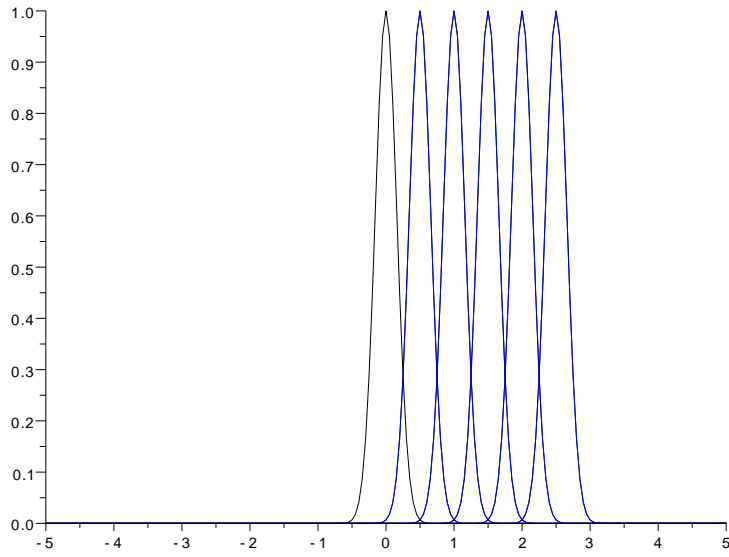


Fig. 2: Evolution de la solution calculée à l'aide du schéma décentré à gauche dans un maillage  $i_{max} = 201$  avec  $\Delta t = CFL\Delta x/a$  où  $CFL = 1$ . La solution présentée correspond à 50 itérations avec un affichage toutes les 10 itérations, donc aux mêmes instants de visualisation que pour le calcul à  $CFL = 1/2$ . En bleu : la solution exacte. En noir : la solution du schéma (superposée à la solution exacte - cf. explication ci-après).

*On vérifie en faisant tourner le code que le schéma décentré à gauche utilisé avec  $a = 0.1 > 0$  est bien stable sous la condition  $CFL = a\Delta t/\Delta x \leq 1$ . Dans le cas particulier où  $CFL = 1$ , le schéma décentré à gauche permet de calculer la solution exacte du problème. En effet, pour  $CFL = 1$ , ce schéma se réduit à :*

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - (\rho_j^n - \rho_{j-1}^n) \text{ soit } \rho_j^{n+1} = \rho_{j-1}^n$$

*Cette dernière relation peut aussi s'écrire, en réexplicitant les notations indicielles utilisées :*

$$\rho(j\Delta x, n\Delta t + \Delta t) = \rho(j\Delta x - \Delta x, n\Delta t)$$

*Si on applique cette relation avec  $n = 0$ , on obtient :*

$$\rho(j\Delta x, \Delta t) = \rho(j\Delta x - \Delta x, 0) = \rho_0(j\Delta x - \Delta x) = \rho_0(j\Delta x - a\Delta t)$$

*puisque  $CFL = 1$  équivaut bien à  $\Delta x = a\Delta t$ . La solution calculée au point  $j\Delta x$  après un temps  $\Delta t$  correspond donc à la solution exacte du problème ( $\rho_{ex}(x, t) = \rho_0(x - at)$  appliquée au point  $x_j = j\Delta x$  et à l'instant  $t = \Delta t$ ). Le raisonnement qui vient d'être fait à  $n = 0$  peut être reconduit entre  $\Delta t$  ( $n = 1$ ) et  $2\Delta t$  ( $n = 2$ ) et ainsi de suite ; on établit ainsi que le schéma décentré à gauche utilisé avec  $CFL = 1$  fournit, dans le cas très particulier de l'équation d'advection linéaire, la solution exacte du problème projetée dans le maillage de discrétisation. Cette propriété (solution numérique égale à la solution exacte quand  $CFL = 1$ ) ne sera plus vérifiée dans le cas non-linéaire (cf. équation du trafic étudiée par la suite).*

- Afin de mieux apprécier l'erreur introduite par le schéma avec  $CFL = 1/2$ , effectuer 1 puis 5 puis 10 "tours de boîte", *i.e.* ajuster le nombre d'itérations (et la fréquence d'affichage) de façon à faire revenir (théoriquement) la distribution initiale à sa position initiale après avoir parcouru une distance égale à un multiple de la longueur du domaine de calcul. Quantifier l'erreur obtenue en amplitude (niveau de  $\rho(x, t)$ ) et en phase (position du signal suivant  $x$ ) - l'erreur en amplitude est dite erreur de dissipation (elle est analogue aux effets d'une dissipation ou diffusion physique) tandis que l'erreur de phase est aussi appelée erreur de dispersion.

*Supposons que la simulation soit effectuée avec  $\Delta t = CFL \frac{\Delta x}{a}$ . Si on souhaite visualiser la solution après disons  $N$  "tours de boîte", cela signifie que l'on effectue une simulation jusqu'à un temps final  $T$  tel que  $a = (N \times L)/T$  où  $L = x_2 - x_1$  est la longueur du domaine de calcul. Le nombre  $itermax$  d'itérations à effectuer est donc tel que  $itermax \times \Delta t = T$  soit :*

$$itermax \times CFL \frac{\Delta x}{a} = \frac{N \times L}{a}$$

*Comme de plus  $\Delta x = L/(imax - 1)$  on en tire après simplification :*

$$itermax = \frac{N \times (imax - 1)}{CFL}$$

*Pour  $CFL = 1/2$  et  $imax = 201$  on en déduit donc  $itermax = 400 \times N$  soit donc 400 itérations par "tour de boîte".*

*On observe sur les figures 3, 4 et 5 la solution du schéma (comparée à la solution exacte, qui correspond dans ce cas particulier à la condition initiale) après respectivement 1, 5 et 10 tours de boîte. On observe une forte erreur dissipative pour le schéma décentré utilisé : le pic de la solution numérique s'établit à 0.7 après 1 tour puis descend à 0.4 après 5 tours et 0.3 après 10 tours (la solution exacte correspond à un transport pur de la condition initiale qui doit donc normalement conserver son amplitude initiale égale à 1). On observe également une erreur dispersive, avec une avance de phase d'environ 0.25 pour la solution du schéma par rapport à la solution exacte après 10 tours (cf. Fig.6).*

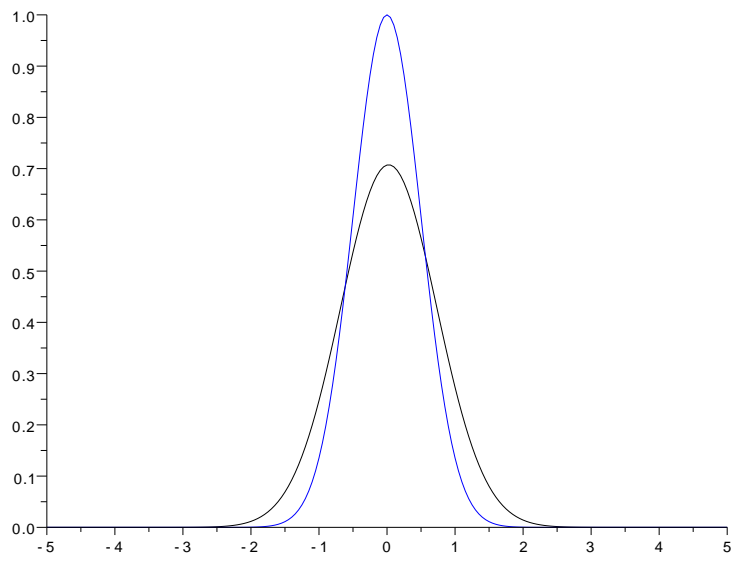


Fig. 3: Evolution de la solution calculée à l'aide du schéma décentré à gauche dans un maillage  $i_{max} = 201$  avec  $\Delta t = CFL\Delta x/a$  où  $CFL = 1/2$ . La solution présentée correspond à exactement un tour de boîte (la solution exacte est sortie par la frontière de droite et rentrée par la frontière de gauche une seule fois avant de retrouver sa position initiale). En bleu : la solution exacte. En noir : la solution du schéma.



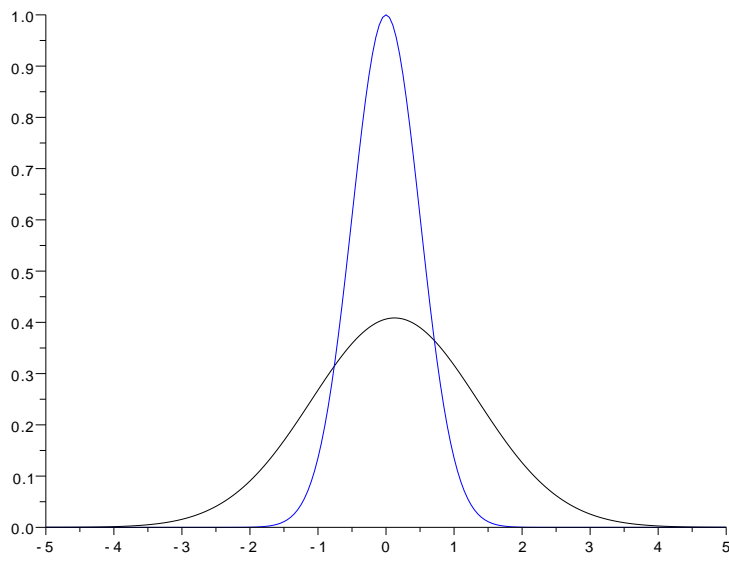


Fig. 4: Evolution de la solution calculée à l'aide du schéma décentré à gauche dans un maillage  $i_{max} = 201$  avec  $\Delta t = CFL\Delta x/a$  où  $CFL = 1/2$ . La solution présentée correspond à exactement cinq tours de boîte (la solution exacte est sortie par la frontière de droite et rentrée par la frontière de gauche cinq fois avant de retrouver sa position initiale). En bleu : la solution exacte. En noir : la solution du schéma.

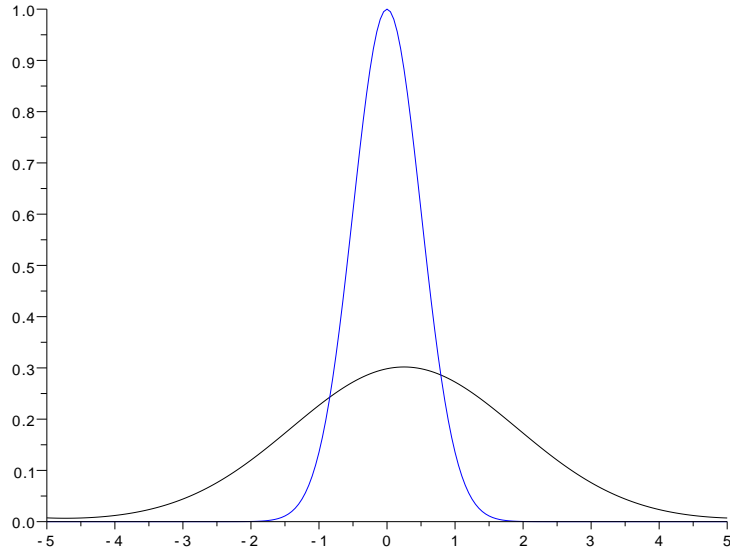


Fig. 5: Evolution de la solution calculée à l'aide du schéma décentré à gauche dans un maillage  $imax = 201$  avec  $\Delta t = CFL\Delta x/a$  où  $CFL = 1/2$ . La solution présentée correspond à exactement dix tours de boîte (la solution exacte est sortie par la frontière de droite et rentrée par la frontière de gauche dix fois avant de retrouver sa position initiale). En bleu : la solution exacte. En noir : la solution du schéma.

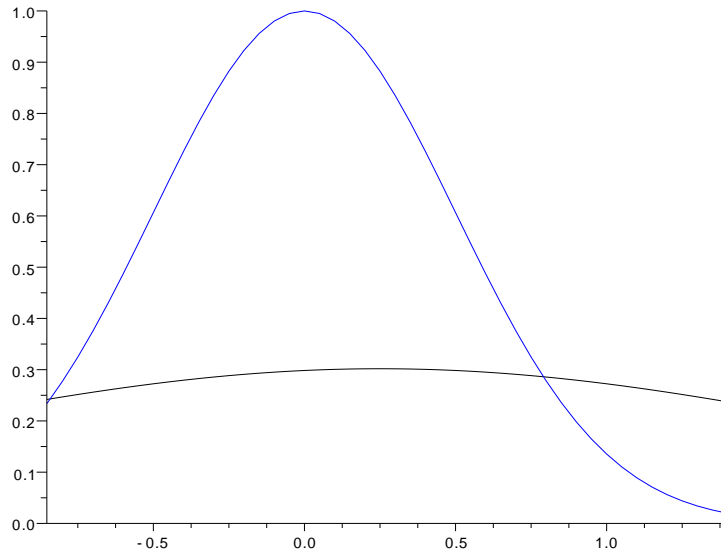


Fig. 6: Zoom sur la figure 5 afin de faciliter l'observation de l'avance de phase du schéma décentré à gauche.

On se place maintenant dans le cas  $a < 0$  (on choisira  $a = -0.1$ , les autres paramètres restant inchangés).

- Montrer que le schéma décentré à gauche (2) n'est plus utilisable dans ce cas, par une analyse a priori du facteur d'amplification puis par la mise en oeuvre pratique de ce schéma .

- On choisit alors de décentrer à droite (donc toujours amont puisque l'on utilise les points  $j$  et  $j + 1$  pour discrétiser la dérivée première en espace au point  $j$ , avec le point  $j + 1$  en amont du point  $j$  pour un écoulement qui circule vers les  $x$  négatifs) soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial x} &= 0 \text{ , } f(\rho) = a \rho \\ \frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + a \frac{\rho_{j+1}^n - \rho_j^n}{\Delta x} &= 0 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + \frac{h_{j+\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0 \\ h_{j+\frac{1}{2}}^n = f_{j+1}^n = a \rho_{j+1}^n \text{ , } h_{j-\frac{1}{2}}^n = f_j^n = a \rho_j^n \end{array} \right. \end{aligned} \quad (5)$$

- Montrer, par une analyse a priori puis par une étude pratique, que le schéma (5) permet bien de résoudre l'EDP d'advection linéaire sous une condition de stabilité qui sera précisée.

*On a montré précédemment que le schéma décentré à gauche était inconditionnellement instable pour l'équation d'advection dans le cas  $a < 0$ . On présente sur la figure 7 l'évolution de la solution exacte et de la solution calculée par le schéma décentré à gauche dans un maillage de 201 points avec un pas de temps donné par  $\Delta t = CFL \times \Delta x / |a|$  ( $CFL = 1/2$ ). On observe clairement l'amplification de la condition initiale par le schéma (instable) décentré à gauche.*

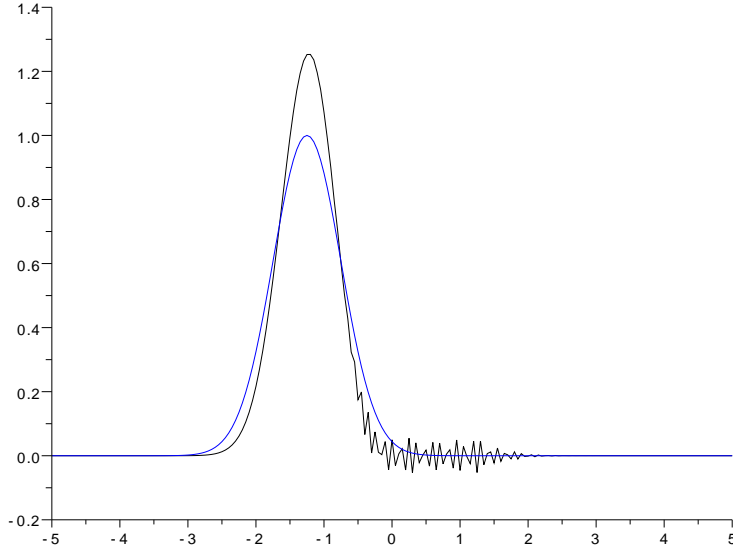


Fig. 7: Evolution de la solution calculée à l'aide du schéma décentré à gauche dans un maillage  $imax = 201$  avec  $\Delta t = CFL\Delta x/(-a)$  où  $CFL = 1/2$  et  $a = -0.1$ . La solution présentée correspond à 50 itérations avec un affichage toutes les 10 itérations. En bleu : la solution exacte. En noir : la solution du schéma.

*Si on utilise le schéma décentré à droite (5), le facteur d'amplification associé s'écrit :*

$$g(\eta; \lambda) = 1 - \lambda(e^{i\eta} - 1) = 1 - \lambda(\cos(\eta) - 1) - i\lambda\sin(\eta)$$

*Le schéma décentré à droite est stable sous la condition  $|g| \leq 1 \forall \eta$  ou encore  $|g|^2 \leq 1 \forall \eta$  soit :*

$$|g|^2 = (1 + \lambda(1 - \cos(\eta)))^2 + \lambda^2 \sin^2(\eta) \leq 1 \forall \eta \in [0, 2\pi]$$

*On réécrit de façon équivalente cette condition en introduisant  $z = (1 - \cos(\eta))/2$  qui varie entre 0 et 1 quand le nombre d'onde réduit varie entre 0 et  $2\pi$  :*

$$|g|^2 = (1 + 2\lambda z)^2 + 4z(1 - z) \leq 1 \forall z \in [0, 1]$$

*Après développement, simplification et en tenant compte de  $z \geq 0$ , cette condition se réduit finalement à :*

$$\lambda(\lambda + 1) \leq 0$$

*et cette condition n'est vérifiée que pour  $\lambda \in [-1, 0]$ . Quand  $a < 0$ , le schéma décentré à droite est donc stable sous la condition :*

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{-a}$$

*Ce schéma est par ailleurs inconditionnellement instable quand il est appliqué à la résolution de l'équation d'advection avec  $a > 0$ .*

On souhaite éviter en pratique de devoir écrire une formule de schéma aux différences distincte selon le signe de  $a$  et on préférerait donc une écriture unifiée pour le schéma décentré à gauche (2) et le schéma décentré à droite (5).

- Montrer que le schéma décentré unifié peut s'écrire sous la forme suivante, dans laquelle on précisera l'expression du coefficient de dissipation numérique  $q$  :

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + a \frac{\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n}{2\Delta x} = q \frac{\rho_{j+1}^n - 2\rho_j^n + \rho_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (6)$$

ou, de façon équivalente, en utilisant une écriture faisant appel à la notion de flux numérique  $h$  approchant le flux physique  $f(\rho) = a \rho$  :

$$\begin{cases} \frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + \frac{h_{j+\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0 \\ h_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_j^n) - q(\rho_{j+1}^n - \rho_j^n) = \mu f_{j+\frac{1}{2}} - q \delta \rho_{j+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (7)$$

- Utiliser (6) pour conclure sur la précision du schéma décentré mis en oeuvre.

On souhaite utiliser le schéma décentré à gauche (2) quand  $a > 0$  et le schéma décentré à droite (5) quand  $a < 0$ . Si on utilise une formulation du schéma s'appuyant sur l'expression d'un flux numérique on peut donc écrire ce flux sous la forme :

$$h_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} f_j = a\rho_j & \text{si } a > 0 \\ f_{j+1} = a\rho_{j+1} & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Si on suit la suggestion de l'énoncé, on cherche donc à unifier cette expression en l'écrivant :

$$h_{j+\frac{1}{2}} = \frac{a}{2}(\rho_j + \rho_{j+1}) - q(\rho_{j+1} - \rho_j)$$

Cette expression permet de retrouver les deux décentrement à gauche ou à droite pour le calcul du flux en fonction du signe de la vitesse d'advection ou vitesse d'onde  $a$  à condition de choisir  $q = \frac{|a|}{2}$ . Le schéma décentré unifié peut également s'écrire sous la forme développée (6) :

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + a \frac{\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{|a|}{2} \frac{\rho_{j+1}^n - 2\rho_j^n + \rho_{j-1}^n}{\Delta x}$$

soit encore

$$\begin{aligned} \frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + a \underbrace{\frac{\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n}{2\Delta x}}_{=\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_j^n + O(\Delta x^2)} &= \frac{|a|\Delta x}{2} \underbrace{\frac{\rho_{j+1}^n - 2\rho_j^n + \rho_{j-1}^n}{\Delta x^2}}_{=\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right)_j^n + O(\Delta x^2)} \end{aligned}$$

Le schéma décentré peut donc s'exprimer comme la somme du schéma centré (membre de gauche de la relation ci-dessus qui fournit une erreur d'ordre 1 en temps et 2 en espace) et d'un terme supplémentaire, de nature dissipative, qui introduit une erreur d'ordre 1 en espace. Le schéma décentré est donc globalement d'ordre 1 en temps et en espace. La nature dissipative du terme supplémentaire introduit par le décentrement apparaît très clairement : le second membre du schéma approche en effet un terme de la forme  $\nu \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$  avec  $\nu$  un coefficient de dissipation ou diffusion numérique d'ordre 1 puisque donné par  $\nu = \frac{|a|\Delta x}{2}$ . On appelle aussi  $\nu$  la viscosité numérique du schéma.