Filière "Systèmes énergétiques et marchés"
Année Universitaire 2009-2010

BE de Méthodes Numériques pour les EDP
Equation d'advection linéaire en 2D

1 Position du problème

On considère l'équation d'advection en 2 dimensions d'espace :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial x} + \frac{\partial g(\rho)}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

où $f(\rho) = a\rho$, $g(\rho) = b\rho$, avec a et b deux coefficients constants. On choisira b fixé à 1 et a variable (on pourra utiliser typiquement les valeurs $a = 0$ (cas obligatoire), $a = 1/2$, $a = 2$ ainsi d'ailleurs que des valeurs négatives mais en changeant alors ce qui doit l'être dans la définition des conditions aux limites du problème).
On souhaite résoudre (1) sur le domaine $x \in [0, 2]$, $y \in [0, 1]$ en complétant l'EDP par les conditions aux limites ($a \geq 0$) :

$$\begin{cases} \rho(x, 0) = \rho_0(x) \\ \rho(0, y) = \rho_0(0) \end{cases} \tag{2}$$

et la condition initiale $\rho(x, y, t = 0) = 0$ pour $x \in [0, 2]$ et $y \in [0, 1]$. On choisira le long de $y = 0$ une distribution de type créneau ($\rho = 1$ dans un intervalle spécifié $[\alpha, \beta]$ de $[0, 2]$ et 0 sinon) que l'on pourra ajuster en fonction de la valeur donnée à la vitesse d'onde a (on pourra prendre par exemple $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.5$)

On s'intéresse précisément à la solution stationnaire de (1)-(2). Cette solution stationnaire est telle que $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ soit aussi $\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + c\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ avec $c = a/b$.

• Calculer la solution stationnaire exacte du problème en s'inspirant de la méthode des caractéristiques vue en cours.
• Tracer qualitativement (à la main) cette solution exacte pour différentes valeurs de a.

2 Schéma numérique

On discrétise (1) dans un maillage uniforme tel que $\Delta x = \Delta y$; on note $\rho^n_{i,j} = \rho(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$. On utilise un schéma dissipatif de flux numériques :

$$\begin{cases} h^1_{i+\frac{1}{2},j} = \dfrac{1}{2}\left(f^1_{i+1,j} + f^1_{i,j}\right) - \dfrac{1}{2} q^1_{i+\frac{1}{2},j}(\rho_{i+1,j} - \rho_{i,j}) \\[2ex] h^2_{i,j+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(f^2_{i,j+1} + f^2_{i,j}\right) - \dfrac{1}{2} q^2_{i,j+\frac{1}{2}}(\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j}) \end{cases} \tag{3}$$

et une intégration en temps de type Euler explicite :

$$\rho^{n+1}_{i,j} = \rho^n_{i,j} - \Delta t \left[\frac{h^1_{i+\frac{1}{2},j} - h^1_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \frac{h^2_{i,j+\frac{1}{2}} - h^2_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right] \tag{4}$$

Les coefficients de dissipation seront ceux du schéma de Roe, soit, en linéaire, $q^1 = |a|$ et $q^2 = |b|$. Le pas de temps Δt sera choisi tel que :

$$\Delta t = CFL\, min\left(\frac{\Delta x}{|a|}, \frac{\Delta y}{|b|}\right)$$

en ajustant cette formule de façon à l'appliquer également dans le cas $a = 0$.

• Quand le code basé sur le schéma de Roe (ou schéma CIR) sera opérationnel, on y ajoutera la possibilité d'utiliser le schéma de Lax-Wendroff. Ecrire pour cela les flux numériques du schéma de Lax-Wendroff en appliquant en $2D$ les principes de construction de ce schéma vus en cours (cette tâche est à effectuer une fois le code de base opérationnel avec le schéma de Roe).

3 Développement du code

• Etendre le code $1D$ disponible au cas $2D$ afin de résoudre l'équation d'évolution (1)-(2) à l'aide du schéma (3)-(4).

On notera qu'il s'agit bien de résoudre le problème d'évolution complet en faisant converger cette résolution vers l'état stationnaire du problème. On s'assure de cette convergence en traçant l'évolution en fonction des itérations en temps de la norme du résidu $r = \dfrac{\partial \rho}{\partial t}$, notée $norm - res$. On choisira une norme L_2 qui conduit sous forme discrète à l'expression suivante pour $norm - res$:

$$\text{norm-res} = \frac{1}{\text{imax} \times \text{jmax}} \sum_{i,j} \left(\frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^{n}}{\Delta t}\right)^2$$

Puisque cette quantité doit normalement tendre vers zéro, on calculera plutôt son logarithme en base 10, stocké dans norm-res. On remplacera la boucle sur les itérations temporelles du code $1D$ instationnaire par une boucle de type while . . . end où le critère utilisé sera du type while norm-res ≥ -5.

On utilisera comme autre indicateur de convergence, que l'on pourra tracer dans la même fenêtre graphique que le résidu, l'erreur en norme L_2 entre la solution numérique à chaque itération et la solution stationnaire exacte précédemment calculée.

4 Exploitation du code

• Analyser la précision des solutions obtenues à l'aide du schéma de Roe en faisant varier la vitesse d'onde a.

On pourra tracer les isovaleurs de la solution $\rho_{i,j}$ ainsi qu'une vue en élévation de cette distribution spatiale (utiliser respectivement les commandes *contour2d* et *plot3d* de *Scilab*). On tracera également une coupe de la distribution spatiale le long de la frontière de sortie du signal.

• Répéter l'analyse avec le schéma de Lax-Wendroff une fois celui-ci codé dans le programme.