Filière SEM : Méthodes numériques pour les EDP
Année Universitaire 2010-2011

Diffusion de la chaleur

Contact : *Christophe.Corre@legi.grenoble-inp.fr*

1 Modélisation du phénomène physique

On considère une région de volume V et de surface A au sein d'un solide conducteur de la chaleur. En appliquant le premier principe de la thermodynamique à ce système fermé, on peut écrire :

$$\frac{dU}{dt} = Q(t) + P(t)$$

où U est l'énergie interne contenue dans le volume V à l'instant t, Q est le flux de chaleur à travers la surface A et P est la puissance mécanique ou électrique produite dans le volume, qui est supposée nulle (en d'autres termes on suppose qu'il n'y a pas de sources ou de puits de chaleur à l'intérieur du volume considéré).
L'énergie interne contenue dans le volume peut s'exprimer en fonction de l'énergie interne spécifique u comme :

$$U = \int_V \rho u dV$$

où ρ désigne la masse volumique du solide considéré.
Le flux de chaleur Q peut s'exprimer à l'aide du vecteur flux de chaleur $\vec{q}$:

$$Q = -\int_A \vec{q} \cdot \vec{n} dA$$

où $\vec{n}$ désigne la normale unitaire à la surface A pointant vers l'extérieur du volume V.

• En utilisant maintenant le lien entre l'énergie interne spécifique et la température (on notera $C(T)$ la capacité calorifique spécifique) d'une part et la loi de Fourier qui relie le vecteur flux de chaleur à la température locale T, montrer que l'équation d'évolution de la température T en fonction de la position $\vec{x}$ et du temps t, dite *équation de la chaleur*, est une équation aux dérivées partielles (ou EDP) de la forme suivante :

$$\rho C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = div(k(T) \vec{grad}(T)) \tag{1}$$

où $k(T)$ désigne la conductivité thermique du matériau, propriété du matériau, fonction de la température locale dans le cas général.

2 Problème complet $1D$

2.1 Formulation

On considère un mur qui s'étend de $x = -L$ à $x = +L$ suivant la première direction d'espace x et de grandes dimensions devant L suivant les directions y et z. On suppose dans ces conditions que la température T dans le mur ne dépend que de l'abcisse x et du temps t.

• Dans le cas où les propriétés du matériau peuvent être supposées constantes, montrer que l'évolution de la température dans le mur est régie par l'EDP simplifiée :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{2}$$

où α désigne la diffusivité thermique du matériau que l'on exprimera en fonction de la masse volumique, de la capacité calorifique spécifique et de la conductivité thermique.

Le problème physique est complété par la donnée d'une condition initiale à l'intérieur du mur :

$$T(x, t = 0) = T_i \ \text{ pour } x \in]-L, +L[$$

et par des conditions aux limites, sur les parois $x = -L$ et $x = +L$. Classiquement, ces conditions peuvent être de type Dirichlet (valeurs imposées pour la température) ou de type Neumann (valeurs imposées pour le vecteur flux de chaleur *i.e.* pour le gradient de température). On suppose ici :

$$T(x = -L, t) = T_1 \ \text{ et } \ T(x = +L, t) = T_1$$

pour tout temps $t \geq 0$. On présente sur la figure 1 une vision qualitative de l'évolution de la température dans le mur pour le cas où la température initiale est supérieure à la température appliquée sur les faces du mur à partir de $t = 0$.

• En introduisant la température adimensionnée $\theta = \dfrac{T - T_1}{T_i - T_1}$ et les variables sans dimension $\xi = \dfrac{x}{L} + 1$ et $Fo = \dfrac{\alpha\, t}{L^2}$ (on rappelle que Fo désigne le nombre de Fourier, temps adimensionné), montrer que le problème à résoudre peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial Fo} = \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \ \text{ pour } \xi \in [0, 2], Fo > 0 \\[2ex] \theta(\xi, 0) = 1 \ \text{ pour } \xi \in]0, 2[\\[2ex] \theta(0, Fo) = \theta(2, Fo) = 0 \ \text{ pour } Fo \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

On notera bien l'intérêt de l'adimensionnement du problème initial. La résolution de (3) fournit un champ adimensionné $\theta(\xi, Fo)$ qui peut aisément être transformé en champ dimensionné $T(x, t)$ pour connaître la distribution de température (en K) à l'instant t (exprimé en s) et au point x (exprimé en m) dans une paroi d'épaisseur $2L$ (exprimée en m), initialement à la température T_i (exprimée en K) et dont les parois sont maintenues à la température T_1 (exprimée en K).

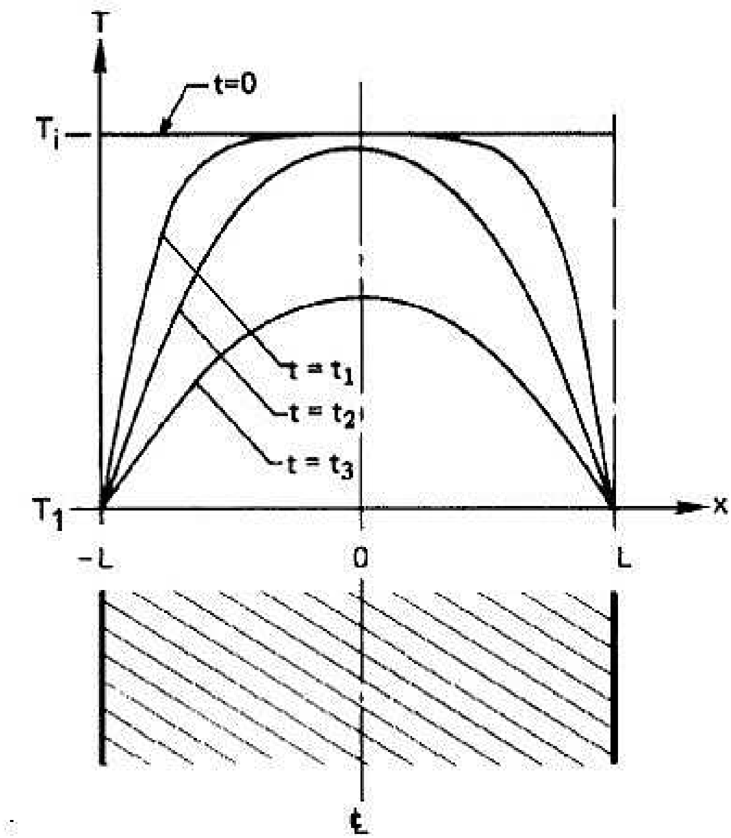

Fig. 1: Représentation qualitative de l'évolution de la température dans le mur dans une situation de refroidissement.

2.2 Solution exacte

• Rappeler la stratégie de résolution qui permet d'obtenir la solution exacte de l'EDP linéaire $\dfrac{\partial \theta}{\partial Fo} = \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}$:

$$\theta(\xi, Fo) = \exp(-\lambda^2\, Fo)\ (A\, \sin(\lambda\, \xi) + B\, \cos(\lambda\, \xi)) \tag{4}$$

• Déterminer les coefficients inconnus de cette solution générale de l'équation de la chaleur $1D$ instationnaire en utilisant les conditions aux limites et la condition initiale spécifique au problème traité.
On rappelle que les coefficients de la série de Fourier décomposant l'unité sont donnés par $A_n = \dfrac{4}{n\pi}$ avec n un entier impair.

• Retrouver ainsi la solution exacte ou analytique (ou en anglais *closed-form solution*) du problème (3) :

$$\theta(\xi, Fo) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\ \exp\left(-Fo\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\ \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\xi\right) \tag{5}$$

2.3 Analyse physique

La solution exacte (5) du problème (3) a été programmée dans un code *Scilab* qui est mis à votre disposition (programme principal : *heat1D_ analytique.sce* faisant appel aux scripts *param.sce* pour la définition des paramètres du problème et *solex.sce* pour le calcul de la solution adimensionnée exacte par la formule (4).

• Prenez en main ce petit code et utilisez-le (avec les valeurs dimensionnées fournies pour T_i, T_1, L et α) pour répondre à la question suivante : au bout de combien de temps la température au coeur du mur a-t-elle été divisée par 2 par rapport à sa valeur initiale ?

2.4 Cas d'une diffusivité thermique variable

La démarche suivie ci-dessus pour traiter le problème exploite le fait que la diffusivité thermique du matériau est supposée constante, indépendante de la température locale T.
On suppose que la diffusivité suit une loi en fonction de la température de la forme $\alpha(T) = \alpha_0 f(T/T_0)$ où α_0 et T_0 désignent respectivement une diffusivité thermique et une température de référence.

• Réécrivez le problème (dimensionné et adimensionné) dans ce cas.
• La démarche suivie dans le cas linéaire peut-elle s'appliquer à ce cas d'EDP désormais non-linéaire ?