



Filière SEM : Méthodes numériques pour les EDP Année Universitaire 2010-2011

Diffusion de la chaleur

Contact : *Christophe.Corre@legi.grenoble-inp.fr*

Les notations utilisées dans cette fiche reprennent celles introduites dans les fiches (sujet et corrigé) associées à la séance n°1. On s'intéresse toujours à l'évolution en temps de la distribution spatiale de température dans un mur initialement à température uniforme T_i et aux parois duquel une température constante T_1 est appliquée à partir de $t = 0$.

1 Résolution numérique

On s'intéresse à la résolution numérique de l'EDP :

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\varphi(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \quad (1)$$

dans le cas où la diffusivité thermique α est constante ($\alpha = \alpha_0$ soit $\varphi(\theta) = 1$) et dans le cas où α est fonction de la température locale $T(x, t)$. Dans cette situation, on supposera :

$$\alpha(T) = \alpha_0 \times \left(\frac{T}{T_0} \right)^r$$

avec $T_0 = 20^\circ C$ et $r = 0.5$ définis dans *param.sce*. Ce choix de $\alpha(T)$ correspond à :

$$\varphi(\theta) = \left(\frac{T_i - T_1}{T_0} \theta + \frac{T_1}{T_0} \right)^r \quad (2)$$

On discrétise (1) dans un maillage ξ_j , $j = 1, jmax$, tel que $\xi_j = (j - 1)\Delta\xi$ où $\Delta\xi = 2/(jmax - 1)$ est le pas d'espace (adimensionné). On note $\theta_j^n = \theta(\xi_j, n\Delta Fo)$ la solution approchée de l'EDP calculée au point ξ_j du maillage à l'instant $n\Delta Fo$ où ΔFo désigne le pas de discrétisation en temps (adimensionné).

- Ecrire le schéma centré en espace et de type Euler explicite pour l'intégration en temps qui fournit une solution approchée de (1).
- Rappeler la précision de ce schéma en temps et en espace.

Utiliser une intégration en temps de type Euler explicite pour une équation différentielle ordinaire de la forme

$$\frac{du}{dt} = F(u, t)$$

consiste à avancer en temps de $t^n = n\Delta t$ à $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ en écrivant

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = F(u^n, t^n)$$

Le schéma est bien explicite puisque u^{n+1} est directement calculable à partir de u^n . Dans le cas de l'EDP (1), utiliser un avancement en temps de type Euler explicite consiste donc à écrire en chaque point j du maillage :

$$\frac{\theta_j^{n+1} - \theta_j^n}{\Delta F_o} = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\varphi(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \right]_j^n$$

et il reste donc à discrétiser en espace le terme de droite pour obtenir un schéma aux différences totalement discrétisé (en temps et en espace). La meilleure façon de discrétiser le terme en espace consiste à l'interpréter comme $\frac{\partial F}{\partial \xi}$, i.e. comme la divergence (en 1D la dérivée par rapport à ξ) d'un flux physique F qui s'exprime ici comme $\varphi(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi}$. Une discrétisation centrée de $\frac{\partial F}{\partial \xi}$ au point de maillage j s'écrit :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_j = \frac{F_{j+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta \xi} + O(\Delta \xi^2) \quad (3)$$

Le fait que cette formule d'approximation est d'ordre 2 en espace se déduit de façon immédiate d'un développement de Taylor de $F_{j\pm\frac{1}{2}}$ autour de j . On a en effet :

$$F_{j\pm\frac{1}{2}} = F_j \pm \frac{\Delta \xi}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \xi}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \right)_j \pm \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta \xi}{2} \right)^3 \left(\frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} \right)_j + O(\Delta \xi^4)$$

On en déduit de façon immédiate, les termes correspondants à des dérivées d'ordre impair se doublant et les termes correspondants à des dérivées d'ordre pair s'annulant :

$$F_{j+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}} = 2 \frac{\Delta \xi}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_j + 2 \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta \xi}{2} \right)^3 \left(\frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} \right)_j + O(\Delta \xi^5)$$

soit encore, en divisant l'expression par $\Delta \xi$ et après développement :

$$\frac{F_{j+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta \xi} = \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_j + \frac{\Delta \xi^2}{24} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} \right)_j + O(\Delta \xi^4)$$

d'où (3).

Pour discrétiser ensuite $F_{j\pm\frac{1}{2}}$ on doit approcher à l'aide des états θ aux points du maillage les quantités $\varphi_{j\pm\frac{1}{2}}$ et $\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)_{j\pm\frac{1}{2}}$. On a de façon immédiate les approximations centrées d'ordre 2 suivantes :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Delta\xi} + O(\Delta\xi^2) \\ \left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)_{j-\frac{1}{2}} = \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{\Delta\xi} + O(\Delta\xi^2) \end{cases}$$

On peut ensuite approcher $\varphi_{j+\frac{1}{2}}$ de façon centrée suivant deux approches distinctes :

- soit comme $\varphi(\theta_{j+\frac{1}{2}})$ avec un état $\theta_{j+\frac{1}{2}}$ lui-même estimé de façon centrée comme la moyenne arithmétique des états θ_j et θ_{j+1} , i.e.

$$\theta_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\theta_j + \theta_{j+1}) + O(\Delta\xi^2)$$

- soit en calculant la moyenne arithmétique de $\varphi_j = \varphi(\theta_j)$ et de $\varphi_{j+1} = \varphi(\theta_{j+1})$, i.e.

$$\varphi_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\varphi_j + \varphi_{j+1}) + O(\Delta\xi^2)$$

On choisit ici la seconde approche d'où, en rassemblant, les estimations centrées des flux $F_{j\pm\frac{1}{2}}$:

$$\begin{cases} F_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\varphi_j + \varphi_{j+1}) \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Delta\xi} + O(\Delta\xi^2) \\ F_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\varphi_{j-1} + \varphi_j) \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{\Delta\xi} + O(\Delta\xi^2) \end{cases}$$

Finalement, en insérant ces flux dans la discrétisation (3) du bilan de flux et en combinant cette discrétisation en espace avec l'avancement en temps Euler explicite, on obtient le schéma totalement discrétisé :

$$\frac{\theta_j^{n+1} - \theta_j^n}{\Delta Fo} = \frac{\frac{1}{2} (\varphi(\theta_j^n) + \varphi(\theta_{j+1}^n)) \frac{\theta_{j+1}^n - \theta_j^n}{\Delta\xi} - \frac{1}{2} (\varphi(\theta_{j-1}^n) + \varphi(\theta_j^n)) \frac{\theta_j^n - \theta_{j-1}^n}{\Delta\xi}}{\Delta\xi} \quad (4)$$

Ce schéma est bien explicite puisque le nouvel état au point j , θ_j^{n+1} , est calculable à partir des états connus θ_{j-1}^n , θ_j^n et θ_{j+1}^n ; il est également dit à deux niveaux de temps (n et $n+1$) et à trois points en espace ($j-1$, j , $j+1$).

L'erreur de troncature associée à (4) est obtenue en injectant la solution exacte de (1) dans l'expression du schéma. Compte tenu des développements de Taylor effectués, on peut directement réécrire (1) sous la forme :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial Fo} \right)_j^n + O(\Delta Fo) = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\varphi(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \right]_j^n + O(\Delta \xi^2)$$

Si θ est solution de l'EDP initiale, on a donc exactement :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial Fo} \right)_j^n + O(\Delta Fo) = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\varphi(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \right]_j^n$$

de sorte que ne subsiste plus dans le schéma que l'erreur de troncature ou erreur de discrétisation de la forme $\epsilon = O(\Delta Fo, \Delta \xi^2)$. Cette erreur est d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace. Connaître l'ordre de précision d'un schéma est utile pour estimer l'évolution de l'erreur lors d'un raffinement du maillage en temps et/ou en espace : on sait ainsi que, dans le cas présent, diviser par 2 le pas de temps divisera par 2 l'erreur en temps tandis que diviser par 2 le pas d'espace divisera par 4 l'erreur en espace.

Lorsque l'on écrit des schémas aux différences, il devient rapidement utile de faire appel à des opérateurs aux différences à la fois pour simplifier l'écriture des schémas et pour mieux faire ressortir les opérations aux différences effectuées. On introduit ainsi les deux opérateurs suivants :

- δ désigne l'opérateur de différence sur une maille, tel que $\delta \Psi_j = \Psi_{j+\frac{1}{2}} - \Psi_{j-\frac{1}{2}}$ où Ψ désigne de façon générique une quantité calculée dans le maillage (par exemple, dans le cas traité, θ). L'opérateur δ peut également être appliqué au point $j + \frac{1}{2}$, auquel cas, en reprenant la définition et en décalant les indices on obtient $\delta \Psi_{j+\frac{1}{2}} = \Psi_{j+1} - \Psi_j$. On peut également composer cet opérateur avec lui-même ; ainsi :

$$\begin{aligned} \delta^2 \Psi_j = \delta \circ \delta \Psi_j &= \delta(\Psi_{j+\frac{1}{2}} - \Psi_{j-\frac{1}{2}}) \\ &= \delta \Psi_{j+\frac{1}{2}} - \delta \Psi_{j-\frac{1}{2}} \\ &= \Psi_{j+1} - \Psi_j - (\Psi_j - \Psi_{j-1}) \\ &= \Psi_{j+1} - 2\Psi_j + \Psi_{j-1} \end{aligned} \tag{5}$$

- μ désigne l'opérateur de moyenne sur une maille, tel que $\mu \Psi_j = \frac{1}{2} (\Psi_{j-\frac{1}{2}} + \Psi_{j+\frac{1}{2}})$. Si l'opérateur μ est appliqué au point $j - \frac{1}{2}$ on obtient $\mu \Psi_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\Psi_{j-1} + \Psi_j)$. En composant l'opérateur δ et l'opérateur μ on obtient :

$$\begin{aligned} \delta \mu \Psi_j = \delta \circ \mu \Psi_j &= \delta \frac{1}{2} (\Psi_{j-\frac{1}{2}} + \Psi_{j+\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{2} \delta \Psi_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \delta \Psi_{j+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (\Psi_j - \Psi_{j-1}) + \frac{1}{2} (\Psi_{j+1} - \Psi_j) \\ &= \frac{1}{2} (\Psi_{j+1} - \Psi_{j-1}) \end{aligned} \tag{6}$$

En utilisant ces opérateurs aux différences, on peut réécrire de façon compacte le schéma (4). On a en effet :

$$\frac{\theta_j^{n+1} - \theta_j^n}{\Delta Fo} = \frac{\delta F_j^n}{\Delta \xi} \quad (7)$$

avec

$$F_{j-\frac{1}{2}} = \varphi(\mu\theta_{j-\frac{1}{2}}) \frac{\delta\theta_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta \xi} \quad (8)$$

On ne réécrit pas $F_{j+\frac{1}{2}}$ puisque son expression est immédiatement obtenue en remplaçant $j - \frac{1}{2}$ par $j + \frac{1}{2}$ dans (8). On peut rassembler (7) et (8) en :

$$\frac{\theta_j^{n+1} - \theta_j^n}{\Delta Fo} = \frac{\delta}{\Delta \xi} \left(\varphi(\mu\theta) \frac{\delta\theta}{\Delta \xi} \right)_j^n$$

soit encore

$$\theta_j^{n+1} = \theta_j^n + \frac{\Delta Fo}{\Delta \xi^2} \delta (\varphi(\mu\theta) \delta\theta)_j^n \quad (9)$$

Si le maillage contient J cellules équiréparties entre $\xi = 0$ ($j = 1$) et $\xi = 2$ ($j = J$), la formule (9) s'applique dans ce maillage pour $j = 2$ à $j = J - 1$ seulement ; puisque θ_j^{n+1} donné par (9) dépend des valeurs à l'instant n aux points $j - 1$, j et $j + 1$, la formule (9) ne peut être appliquée ni en $j = 1$ (on en disposerait pas de θ_0^n) ni en $j = J$ (on ne disposerait pas de θ_{J+1}^n). Les états aux frontières du domaine de calcul évoluent à partir des conditions aux limites ; dans le cas présent (conditions aux limites de type Dirichlet) : $\theta_1^n = 0 \forall n$ et $\theta_J^n = 0 \forall n$.

Dans le cas particulier où $\varphi = \text{cste}$, le schéma (9) se simplifie en :

$$\theta_j^{n+1} = \theta_j^n + \frac{\Delta Fo \varphi}{\Delta \xi^2} \delta^2 \theta_j^n \quad (10)$$

soit, sous forme développée, en utilisant (5) et en réorganisant :

$$\frac{\theta_j^{n+1} - \theta_j^n}{\Delta Fo} = \varphi \frac{\theta_{j+1}^n - 2\theta_j^n + \theta_{j-1}^n}{\Delta \xi^2} \quad (11)$$

approximation d'ordre 1 en temps et 2 en espace de l'EDP linéaire

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \varphi \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}$$

avec $\varphi = \text{cste}$ (cette constante est a priori égale à 1 pour un adimensionnement bien choisi mais nous continuons ici à faire apparaître φ pour des raisons qui apparaîtront par la suite lors de l'étude de stabilité du schéma).

2 Mise en oeuvre numérique

Le schéma est mis en oeuvre dans le script *heat1D_numerique.sce* sous la forme suivante :

$$\theta_j^{n+1} = \theta_j^n + \frac{\Delta Fo}{\Delta \xi} \left(fluxnum_{j+\frac{1}{2}} - fluxnum_{j-\frac{1}{2}} \right)$$

pour tous les points intérieurs ($j = 2, jmax - 1$) avec le flux numérique *fluxnum* une approximation centrée de $\varphi(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi}$ soit :

$$fluxnum_{j-\frac{1}{2}} = \varphi \left(\frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j) \right) \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{\Delta \xi}$$

Le schéma explicite d'approximation de (1) prend donc la forme :

$$\theta_j^{n+1} = \theta_j^n + \frac{\Delta Fo}{\Delta \xi} \left(\varphi \left(\frac{1}{2}(\theta_j + \theta_{j+1}) \right) \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Delta \xi} - \varphi \left(\frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j) \right) \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{\Delta \xi} \right) \quad (12)$$

- Prendre en main le code mis à disposition pour cette séance n°2.
- Comparer solution analytique et solution approchée dans le cas de l'EDP linéaire ($k_{NL} = 0$).
- Augmenter très légèrement le pas de temps adimensionné (de $dFo = 0.00005$ à $dFo = 0.000051$) et commenter l'évolution observée.

Le code est exécuté avec $k_{NL} = 0$ (problème linéaire donc pour lequel $\varphi = 1$) dans un maillage de 201 cellules soit tel que $\Delta \xi = 1/100$. On utilise dans un premier temps, comme demandé, $\Delta Fo = 0.00005$. On effectue par exemple 160 itérations avec une fréquence d'affichage de 20 itérations. On trace dans la fenêtre graphique 0 la solution exacte θ_{ex} calculée dans la séance 1 et la solution numérique θ fournie par le schéma centré d'ordre 2 en espace et 1 en temps (voir Fig.1) : on observe visuellement un très bon accord entre ces deux distributions ce qui indique donc la précision satisfaisante du schéma aux différences finies. Dans la fenêtre 1 (voir Fig.2), on trace la distribution de température dimensionnée au temps final, à la fois pour la solution exacte et pour la solution approchée fournie par le schéma : on constate à nouveau la bonne précision de la solution numérique visuellement superposée à la solution analytique.

Si on effectue maintenant les mêmes simulations avec $\Delta Fo = 0.000051$ on observe un comportement bien différent pour le schéma comme l'illustrent les figures 3 et 4 : pour cette valeur très légèrement supérieure du pas de temps la solution du schéma se révèle instable avec de très fortes oscillations de la solution numérique qui tend rapidement vers l'infini lorsque le calcul est poursuivi pendant quelques itérations supplémentaires. Pour pouvoir utiliser avec confiance le schéma aux différences il est indispensable de comprendre ce phénomène et, idéalement, de pouvoir sélectionner un pas d'avancement en temps qui permette de garantir la stabilité de la simulation.

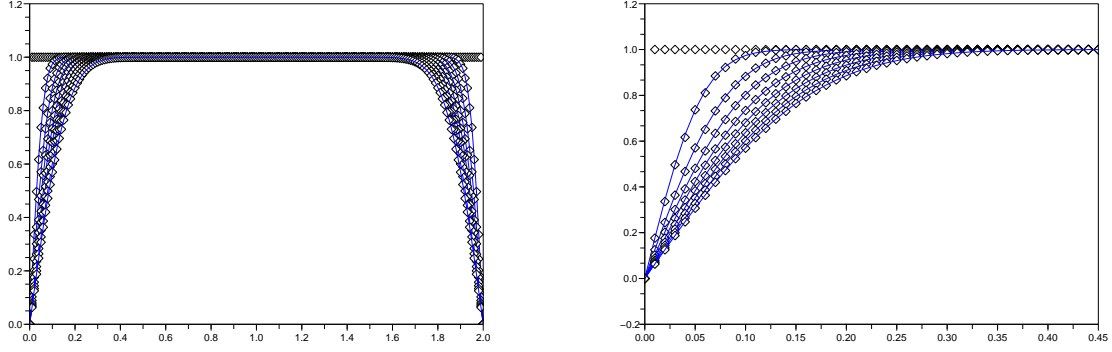


Fig. 1: Evolution de la distribution de température adimensionnée θ en fonction des itérations dans le cas $k_{NL} = 0$ (problème linéaire) avec $imax = 201$ soit $\Delta\xi = 1/100$ et $\Delta Fo = 0.00005$. A gauche : vue d'ensemble ; à droite : zoom. Solution exacte en trait continu bleu et solution approchée du schéma tracée avec des symboles.

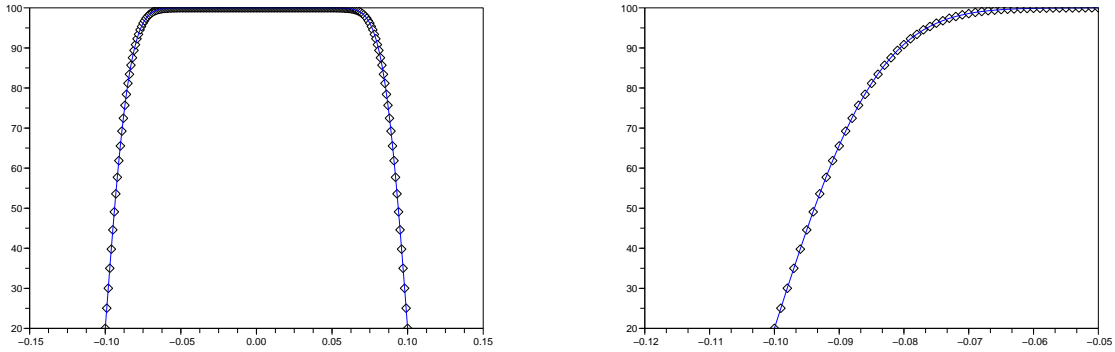


Fig. 2: Distribution finale de température dimensionnée dans le cas $k_{NL} = 0$ (problème linéaire) avec $imax = 201$ soit $\Delta\xi = 1/100$ et $\Delta Fo = 0.00005$. A gauche : vue d'ensemble ; à droite : zoom. Solution exacte en trait continu bleu et solution approchée du schéma tracée avec des symboles.

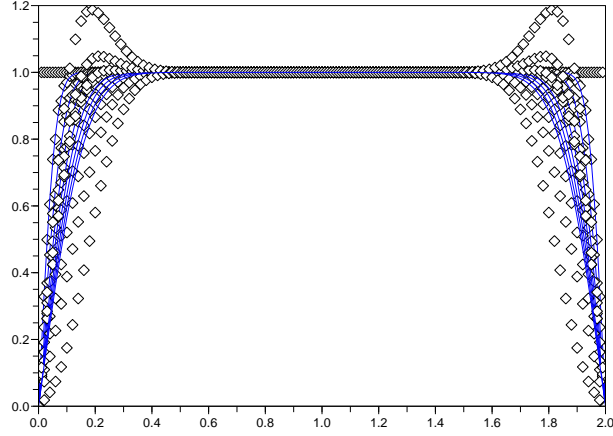


Fig. 3: Evolution de la distribution de température adimensionnée θ en fonction des itérations dans le cas $k_{NL} = 0$ (problème linéaire) avec $imax = 201$ soit $\Delta\xi = 1/100$ et $\Delta Fo = 0.000051$. Solution exacte : trait continu bleu ; solution du schéma : symboles.

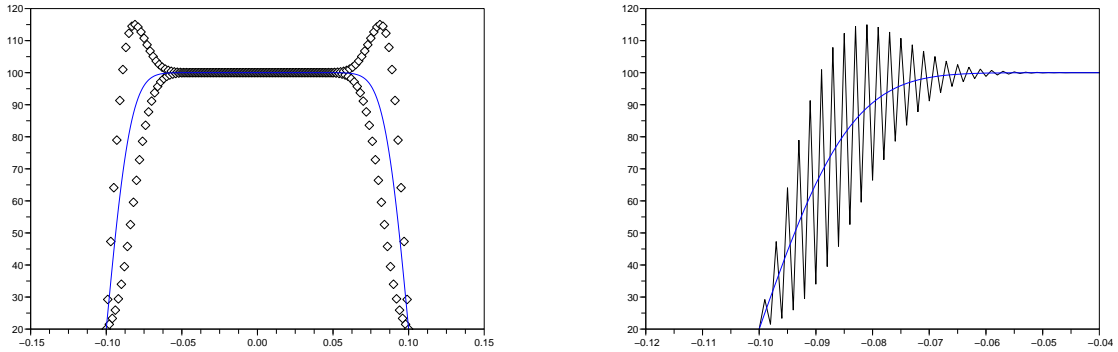


Fig. 4: Distribution finale de température dimensionnée dans le cas $k_{NL} = 0$ (problème linéaire) avec $imax = 201$ soit $\Delta\xi = 1/100$ et $\Delta Fo = 0.000051$. Solution exacte tracée en trait continu bleu. A gauche : solution du schéma tracée avec des symboles ; à droite : zoom et solution du schéma tracée en trait continu noir.

3 Etude de stabilité

La stabilité du schéma (12) peut être analysée *a priori* dans le cas linéaire (φ constant pas nécessairement égal à 1). On peut alors montrer que le pas d'avancement en temps ΔFo doit être choisi tel que :

$$\Delta Fo \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta \xi^2}{\varphi} \quad (13)$$

Cette condition se généralise dans le cas non-linéaire à :

$$\Delta Fo \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta \xi^2}{\max_j(\varphi(\theta_j))}$$

La condition de stabilité (13) est établie grâce à une étude de stabilité linéaire dite de Von Neumann dont nous présentons ici les principes. L'idée de base est d'analyser le schéma (en réalité l'erreur associée au schéma) en se plaçant dans l'espace de Fourier. On postule ainsi pour θ_j^n une expression de la forme $\hat{\theta}^n e^{ik(j\Delta\xi)}$ où $\hat{\theta}^n$ correspond donc à l'amplitude du mode de Fourier à l'itération n , k est le nombre d'onde. On introduit la notation $\eta = k\xi$ pour le nombre d'onde dit réduit. On a donc désormais les correspondances suivantes :

$$\begin{aligned} \theta_j^n &\rightarrow \hat{\theta}^n e^{ij\eta} \\ \theta_j^{n+1} &\rightarrow \hat{\theta}^{n+1} e^{ij\eta} = \frac{\hat{\theta}^{n+1}}{\hat{\theta}^n} \hat{\theta}^n e^{ij\eta} = g \hat{\theta}^n e^{ij\eta} \\ \theta_{j-1}^n &\rightarrow \hat{\theta}^n e^{i(j-1)\eta} = e^{-i\eta} \hat{\theta}^n e^{ij\eta} \\ \theta_{j+1}^n &\rightarrow \hat{\theta}^n e^{i(j+1)\eta} = e^{i\eta} \hat{\theta}^n e^{ij\eta} \end{aligned}$$

*où on a introduit le **facteur d'amplification** du schéma g , rapport des amplitudes $\hat{\theta}^{n+1}$ et $\hat{\theta}^n$.*

On injecte maintenant ces expressions dans le schéma linéaire (11) réécrit sous la forme :

$$\theta_j^{n+1} - \theta_j^n = \underbrace{\frac{\Delta F o \varphi}{\Delta \xi^2}}_{=\lambda} (\theta_{j+1}^n - 2\theta_j^n + \theta_{j-1}^n)$$

On obtient ainsi :

$$g\hat{\theta}^n e^{ij\eta} - \hat{\theta}^n e^{ij\eta} = \lambda (e^{i\eta}\hat{\theta}^n e^{ij\eta} - 2\hat{\theta}^n e^{ij\eta} + e^{-i\eta}\hat{\theta}^n e^{ij\eta})$$

soit, en simplifiant par $\hat{\theta}^n e^{ij\eta}$:

$$g = 1 + \lambda(e^{i\eta} - 2 + e^{-i\eta}) = 1 + \lambda(2\cos(\eta) - 2) = 1 + 2\lambda(\cos(\eta) - 1)$$

On a donc obtenu l'expression du facteur d'amplification g comme fonction du nombre d'onde réduit η , paramétrée par le facteur λ qui est fixé par le choix du maillage, du pas de temps et de la constante physique φ :

$$g(\eta; \lambda) = 1 + 2\lambda(\cos(\eta) - 1) \quad (14)$$

Dans le cas général g est un nombre complexe (il est purement réel dans le cas particulier du schéma considéré).

Le schéma aux différences sera dit **stable** si le module du facteur d'amplification est inférieur à 1 pour toute valeur du nombre d'onde η , et variant entre 0 et 2π :

$$|g(\eta; \lambda)| \leq 1 \quad \forall \eta \in [0, 2\pi] \quad (15)$$

Cette relation fournit donc in fine une condition de stabilité sur le paramètre λ . On insiste ici sur la nature de cette condition de stabilité : quel que soit le nombre d'onde considéré (la solution est a priori composée d'une superposition de modes correspondant à toute une gamme de nombres d'onde), le schéma doit éviter l'amplification du mode associé. La condition de stabilité ne dépend donc jamais du nombre d'onde η mais uniquement du paramètre λ .

Dans le cas considéré, on peut avoir intérêt à introduire $z = \frac{1}{2}(1 - \cos(\eta))$; on a $z \in [0, 1]$ quand η décrit $[0, 2\pi]$. La condition de stabilité s'exprime donc aussi $|g(z; \lambda)| < 1$ quel que soit $z \in [0, 1]$ avec

$$g(z; \lambda) = 1 - 4\lambda z$$

On doit donc satisfaire :

$$\begin{aligned} -1 &\leq 1 - 4\lambda z \leq 1 \quad \forall z \in [0, 1] \\ -2 &\leq -4\lambda z \leq 0 \quad \forall z \in [0, 1] \end{aligned}$$

L'inégalité de droite est automatiquement satisfaite puisque $z \geq 0$ et $\lambda \geq 0$. La condition de stabilité se réduit donc à :

$$\lambda z \leq \frac{1}{2} \quad \forall z \in [0, 1]$$

Le cas le plus restrictif correspond à $z = 1$ de sorte que la condition $\lambda z \leq 1/2$ est satisfaite pour tout z dans l'intervalle $[0, 1]$ dès lors que $\lambda \leq 1/2$.

La condition de stabilité du schéma (11) discrétisation l'équation linéaire de diffusion 1D s'écrit donc :

$$\lambda = \frac{\Delta Fo \varphi}{\Delta \xi^2} \leq \frac{1}{2}$$

et s'interprète en pratique, pour un maillage fixé ($\Delta \xi$ fixé) et une physique fixée (φ fixé), comme une condition de stabilité sur le choix du pas d'avancement en temps donnée par (13). Ce critère de stabilité est exploité en pratique en choisissant le pas de temps ΔFo tel que :

$$\Delta Fo = \chi \frac{\Delta \xi^2}{\varphi}$$

où le coefficient de sécurité χ doit être choisi inférieur ou égal à 1. Pour une équation de diffusion linéaire, le pas de temps est constant d'une itération à l'autre puisque φ est constante, le pas d'espace étant lui-même constant. On note que pour $\Delta \xi = 0.01$ et $\varphi = 1$ le critère de stabilité donne $\Delta Fo \leq 5 \times 10^{-5}$; en choisissant $\Delta Fo = 0.000051$ on passe donc très légèrement au-delà de la limite de stabilité et les conséquences observées sont spectaculaires : le calcul diverge rapidement.

Dans le cas d'une équation de diffusion non-linéaire, φ dépend de θ et varie donc d'un point de maillage à un autre et d'une itération à une autre. En extrapolant la condition de stabilité obtenue en linéaire, on pourrait donc choisir :

$$\Delta Fo_i^n = \chi \frac{\Delta \xi^2}{\varphi(\theta_i^n)}$$

avec $\chi \in [0, 1]$. La notation utilisée souligne que ce choix fait bien sûr varier le pas d'avancement en temps d'un point à l'autre et d'une itération à l'autre. Si le fait que le pas d'avancement en temps puisse varier d'une itération à l'autre ne pose aucun problème de fond il n'en va pas de même de la variation d'un point de maillage à un autre pour une itération donnée : il est en effet nécessaire de faire avancer d'un même pas de temps l'ensemble des points du maillage pour conserver une solution physique ! Le pas de temps doit donc, dans le cas général d'un problème non-linéaire, être choisi comme :

$$\Delta Fo^n = \chi \frac{\Delta \xi^2}{\max_i(\varphi(\theta_i^n))}$$

- Implémenter cette condition dans le code mis à disposition.
- Vérifier qu'elle permet d'assurer la stabilité de la simulation dans le cas linéaire et non-linéaire.

La seule modification à apporter dans le code consiste donc à introduire un calcul de ΔFo (variable `dFo` dans le code) à l'intérieur de la boucle en temps sur `iter` au lieu de laisser `dFo` fixé par l'utilisateur dans `param.sce`. Immédiatement au début de la boucle sur `iter`, on place donc le calcul du maximum de φ_i avec i variant de 2 à $imax - 1$ (le pas de temps n'est pas utilisé pour faire évoluer les points frontières $i = 1$ et $i = imax$). On utilise ensuite cette quantité `phimax` pour calculer `dFo` en utilisant le critère de stabilité établi. Ce développement est disponible dans le script `heat1D_numerique_complet.sce`. Dans le cas linéaire, le critère de stabilité fournit précisément $\Delta Fo = 0.00005$ et les résultats obtenus sont ceux précédemment présentés sur les figures 1 et 2. On peut noter que le critère utilisé pour choisir le pas de temps permet d'adapter directement la simulation à la modification des paramètres de la simulation : par exemple si $\Delta \xi = 1/50$ le critère fournira automatiquement $\Delta Fo = 0.0002$ soit le plus grand pas de temps utilisable qui permet de préserver la stabilité du schéma.

Dans le cas non-linéaire le pas de temps peut varier d'une itération à l'autre. Pour le problème traité, avec $T_0 = 20^\circ\text{C}$ et $r = 0.5$, on a donc $\varphi(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$ soit à l'instant initial $\max_i(\varphi_i) = \varphi(1) = \sqrt{5}$ d'où $\Delta Fo = 0.5 \times 10^{-4} / \sqrt{5} \approx 2.24 \times 10^{-5}$. Ce pas de temps reste constant tant que la température adimensionnée maximale reste égale à 1. Quand cette température se met à diminuer la valeur de `phimax` commence elle-aussi à diminuer et par conséquent le pas de temps augmente légèrement d'une itération à l'autre. On présente ainsi sur la figure 5 l'évolution de ΔFo normalisé par sa valeur initiale (2.24×10^{-5}) : on observe bien cette légère augmentation de ΔFo lorsque θ commence à diminuer par rapport à sa valeur maximale initiale 1 (correspondant à $T = T_i$). L'évolution de la distribution θ au cours des itérations (cf. Fig.6) permet de s'assurer de la stabilité du calcul. On notera bien que sur cette figure la solution tracée en trait continu bleu est la solution exacte du problème linéaire ; dans le cas non-linéaire on ne dispose pas d'une solution analytique à laquelle on pourrait comparer la solution discrète du schéma. Compte tenu de la validation effectuée en linéaire on considère cependant comme fiable le résultat fourni par le schéma dans le cas non-linéaire.

4 Etude de la solution discrète non-linéaire

- Commenter l'influence de la prise en compte de la dépendance de α vis-à-vis de T sur l'évolution de θ ou T .

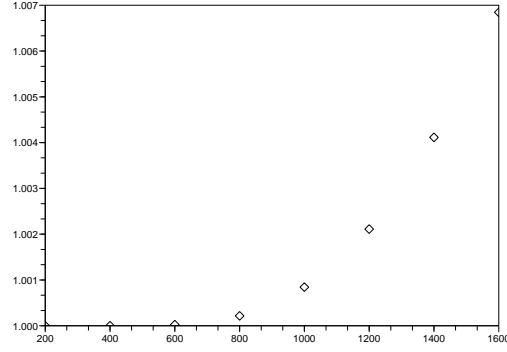


Fig. 5: Distribution finale de température dimensionnée dans le cas $k_{NL} = 1$ (problème non-linéaire) avec $imax = 201$ soit $\Delta\xi = 1/100$. Evolution du pas de temps ΔFo au cours des itérations (valeur normalisée par la valeur initiale).

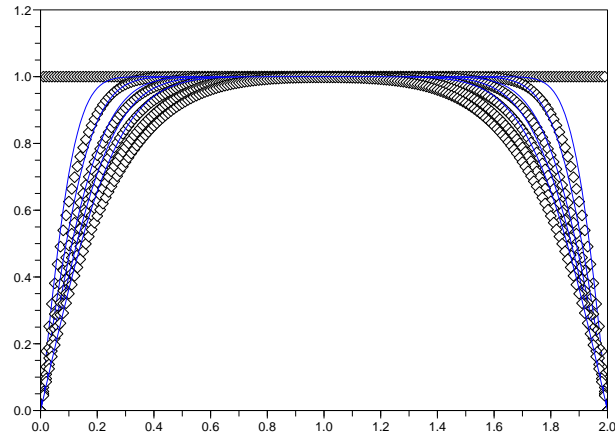


Fig. 6: Evolution de la distribution de température adimensionnée θ en fonction des itérations dans le cas $k_{NL} = 1$ (problème non-linéaire) avec $imax = 201$ soit $\Delta\xi = 1/100$ et ΔFo donné par la condition de stabilité ($\chi = 1$). Solution exacte : trait continu bleu ; solution du schéma : symboles.

On trace sur la figure 7 la distribution finale de la température calculée dans le cas non-linéaire à l'aide du schéma aux différences et on superpose cette distribution à la distribution exacte connue dans le cas linéaire ($\varphi = 1$). On observe les effets non-négligeables de la non-linéarité du problème (en raison d'une diffusivité variable, rappelons-le) avec une différence bien visible entre la distribution calculée en non-linéaire et la distribution exacte du cas linéaire. L'approche numérique représente donc un élément essentiel d'analyse dans le cas non-linéaire. Afin d'illustrer de façon un peu plus spectaculaire les différences linéaire / non-linéaire, on a repris le calcul avec 16000 itérations (et une fréquence d'affichage de 2000 itérations). Dans ce cas, la température dans le mur diminue significativement par rapport à la valeur initiale (voir Fig.8 et 9 de sorte que l'on voit en particulier de façon nette sur la figure 7 l'augmentation du pas de temps autorisée par le critère de stabilité quand la température maximale dans le mur diminue (donc ϕ_{max} diminue et dFo augmente).

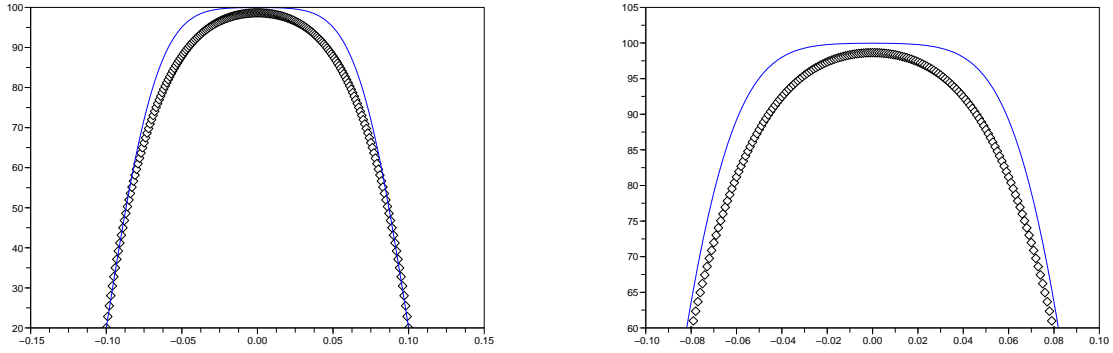


Fig. 7: Distribution finale de température dimensionnée dans le cas $k_{NL} = 1$ (problème non-linéaire) avec $imax = 201$ soit $\Delta\xi = 1/100$ et ΔFo donné par la condition de stabilité. Solution exacte tracée en trait continu bleu, solution du schéma tracée avec des symboles. A gauche : vue d'ensemble ; à droite : zoom.

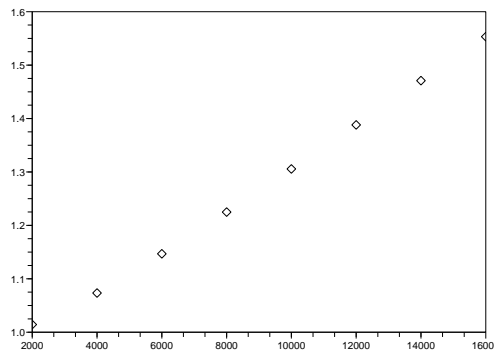


Fig. 8: Distribution finale de température dimensionnée dans le cas $k_{NL} = 1$ (problème non-linéaire) avec $imax = 201$ soit $\Delta\xi = 1/100$. Evolution du pas de temps ΔFo au cours des (16000) itérations du calcul (valeur normalisée par la valeur initiale).

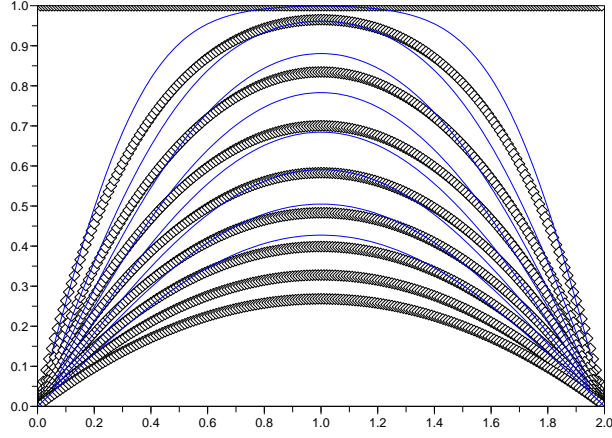


Fig. 9: Evolution de la distribution de température adimensionnée θ en fonction des itérations dans le cas $k_{NL} = 1$ (problème non-linéaire) avec $imax = 201$ soit $\Delta\xi = 1/100$ et ΔFo donné par la condition de stabilité ($\chi = 1$). Solution exacte : trait continu bleu ; solution du schéma : symboles. Evolution pendant 16000 itérations.

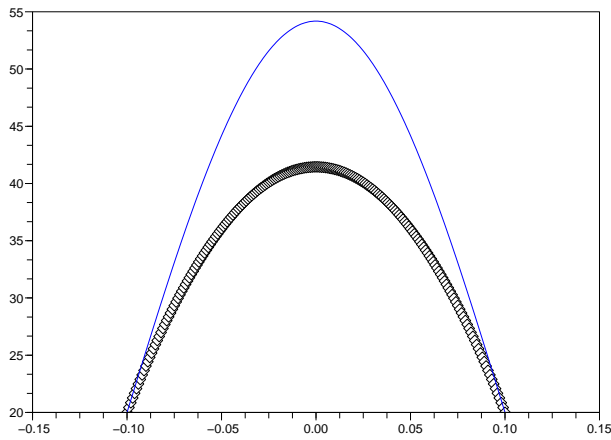


Fig. 10: Distribution finale de température dimensionnée dans le cas $k_{NL} = 1$ (problème non-linéaire) avec $imax = 201$ soit $\Delta\xi = 1/100$ et ΔFo donné par la condition de stabilité. Solution exacte tracée en trait continu bleu, solution du schéma tracée avec des symboles. Evolution pendant 16000 itérations.