Filière SEM : Méthodes numériques pour les EDP
Année Universitaire 2010-2011

Diffusion de la chaleur

Contact : *Christophe.Corre@legi.grenoble-inp.fr*

Les notations utilisées dans cette fiche reprennent celles introduites dans les fiches (sujet et corrigé) associées à la séance n°1. On s'intéresse toujours à l'évolution en temps de la distribution spatiale de température dans un mur initialement à température uniforme T_i et aux parois duquel une température constante T_1 est appliquée à partir de $t = 0$.

1 Résolution numérique

On s'intéresse à la résolution numérique de l'EDP :

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\varphi(\theta)\,\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right) \tag{1}$$

dans le cas où la diffusivité thermique α est constante ($\alpha = \alpha_0$ soit $\varphi(\theta) = 1$) et dans le cas où α est fonction de la température locale $T(x,t)$. Dans cette situation, on supposera :

$$\alpha(T) = \alpha_0 \times \left(\frac{T}{T_0}\right)^r$$

avec $T_0 = 20^\circ C$ et $r = 0.5$ définis dans *param.sce*. Ce choix de $\alpha(T)$ correspond à :

$$\varphi(\theta) = \left(\frac{T_i - T_1}{T_0}\theta + \frac{T_1}{T_0}\right)^r \tag{2}$$

On discrétise (1) dans un maillage ξ_j, $j = 1, jmax$, tel que $\xi_j = (j-1)\Delta\xi$ où $\Delta\xi = 2/(jmax - 1)$ est le pas d'espace (adimensionné). On note $\theta_j^n = \theta(\xi_j, n\Delta Fo)$ la solution approchée de l'EDP calculée au point ξ_j du maillage à l'instant $n\Delta Fo$ où ΔFo désigne le pas de discrétisation en temps (adimensionné).

• Ecrire le schéma centré en espace et de type Euler explicite pour l'intégration en temps qui fournit une solution approchée de (1).
• Rappeler la précision de ce schéma en temps et en espace.

2 Mise en oeuvre numérique

Le schéma est mis en oeuvre dans le script *heat1D_numerique.sce* sous la forme suivante :

$$\theta_j^{n+1} = \theta_j^n + \frac{\Delta Fo}{\Delta \xi}\left(fluxnum_{j+\frac{1}{2}} - fluxnum_{j-\frac{1}{2}}\right)$$

pour tous les points intérieurs ($j = 2, jmax - 1$) avec le flux numérique $fluxnum$ une approximation centrée de $\varphi(\theta)\dfrac{\partial \theta}{\partial \xi}$ soit :

$$fluxnum_{j-\frac{1}{2}} = \varphi\left(\frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)\right)\frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{\Delta \xi}$$

Le schéma explicite d'approximation de (1) prend donc la forme :

$$\theta_j^{n+1} = \theta_j^n + \frac{\Delta Fo}{\Delta \xi}\left(\varphi\left(\frac{1}{2}(\theta_j + \theta_{j+1})\right)\frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Delta \xi} - \varphi\left(\frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)\right)\frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{\Delta \xi}\right) \tag{3}$$

- Prendre en main le code mis à disposition pour cette séance n°2.
- Comparer solution analytique et solution approchée dans le cas de l'EDP linéaire ($k\_NL = 0$).
- Augmenter très légèrement le pas de temps adimensionné (de $dFo = 0.00005$ à $dFo = 0.000051$) et commenter l'évolution observée.

3 Etude de stabilité

La stabilité du schéma (3) peut être analysée *a priori* dans le cas linéaire (φ constant pas nécessairement égal à 1). On peut alors montrer que le pas d'avancement en temps ΔFo doit être choisi tel que :

$$\Delta Fo \leq \frac{1}{2}\frac{\Delta \xi^2}{\varphi} \tag{4}$$

Cette condition se généralise dans le cas non-linéaire à :

$$\Delta Fo \leq \frac{1}{2}\frac{\Delta \xi^2}{max_j(\varphi(\theta_j))}$$

- Implémenter cette condition dans le code mis à disposition.
- Vérifier qu'elle permet d'assurer la stabilité de la simulation dans le cas linéaire et non-linéaire.

4 Etude de la solution discrète non-linéaire

- Commenter l'influence de la prise en compte de la dépendance de α vis-à-vis de T sur l'évolution de θ ou T.