Filière SEM : Méthodes numériques pour les EDP
Année Universitaire 2010-2011

Advection 1D

Contact : *Christophe.Corre@legi.grenoble-inp.fr*

1 Notion de conservation de la masse

On considère l'écoulement tridimensionnel d'un fluide dans une hypothèse de milieu continu. On est donc en mesure de définir en chaque point du domaine fluide une masse volumique $\rho(\underline{r}, t)$, où $\underline{r}$ désigne le vecteur des coordonnées spatiales et t est le temps, ainsi que la vitesse locale du fluide $\underline{V}$ de composantes $u(\underline{r}, t)$, $v(\underline{r}, t)$ et $w(\underline{r}, t)$. La conservation de la masse du fluide peut se traduire en écrivant un bilan de masse sur un volume de contrôle fixe arbitraire V. La masse de fluide contenue dans V s'exprime de façon immédiate à partir de la masse volumique :

$$m = \int_V \rho(\underline{r}, t)\, dV$$

La variation de cette masse en fonction du temps est égale au bilan de flux de masse entrant et sortant du volume V soit :

$$\frac{dm}{dt} = -\int_{\partial V} \rho \underline{V} \cdot \underline{n}\, dS$$

où le signe $-$ dans cette expression est lié au choix de $\vec{n}$ normale unitaire à la surface S pointant vers l'extérieur du volume V.

• En utilisant le théorème flux-divergence montrer que la loi de bilan de masse peut s'écrire sous la forme locale suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \underline{V}) = 0 \tag{1}$$

2 Equation d'advection $1D$

On se place dans le cas d'un écoulement mono-dimensionnel ou $1D$ pour lequel l'équation (1) se réduit à :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

avec $\rho = \rho(x, t)$ et $u = u(x, t)$. On suppose que l'écoulement de fluide a lieu à vitesse à peu près constante, $u(x, t) = a = cste$. L'équation de conservation de la masse se réduit dans ce cas à l'équation dite d'advection 1D, de la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

Si on suppose de plus la distribution initiale de masse volumique dans le domaine fluide considéré donnée par $\rho(x,0) = \rho_0(x)$, l'évolution en temps et en espace de la masse volumique est donc régie par le problème dit aux valeurs initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + a \, \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \\ \rho(x,0) = \rho_0(x) \end{array} \right. \tag{4}$$

• Montrer que la solution exacte du problème (4) est donnée par :

$$\rho(x,t) = \rho_0(x - a\,t) \tag{5}$$

Pour établir (5), on postulera pour ρ une solution de la forme $\rho(x(t),t)$.

3 Résolution numérique

Dans le cas général où $u(x,t)$ dans (2) n'est pas constante mais varie par exemple en fonction de $\rho(x,t)$ (cf. le cas de l'équation dite du trafic qui sera étudiée ultérieurement), il n'est souvent plus possible de trouver une solution analytique de (2) et la résolution numérique de l'EDP s'avère indispensable dans ce cas. L'équation d'advection scalaire linéaire permet de valider les méthodes numériques qui seront utilisées en non-linéaire par la suite puisque la solution discrète peut être comparée à la solution exacte disponible dans ce cas.

3.1 Approche centrée

3.1.1 Principes de construction

On utilise la stratégie la plus simple possible pour discrétiser l'EDP (3) : intégration en temps de type Euler explicite et discrétisation centrée de la dérivée première en espace. En prévision d'une généralisation ultérieure au cas non-linéaire, on choisit de discrétiser (3) en partant de la forme conservative de la loi de bilan :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

où le flux physique $f(\rho)$ dépend linéairement de la variable conservative ρ : $f(\rho) = a\rho$ avec a la vitesse d'advection constante dans le cas considéré.

• Donner l'expression du flux dit numérique $h_{j\pm\frac{1}{2}}$ qui approche de façon centrée le flux physique $f_{j\pm\frac{1}{2}}$ et montrer que le schéma dit centré simple qui correspond aux choix de discrétisation indiqués ci-dessus peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + a \frac{\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{7}$$

• Indiquer la précision en temps et en espace de (7).

3.1.2 Mise en oeuvre

La forme (7) du schéma est celle qui se prête au calcul de l'erreur de troncature. Pour coder ce schéma, puis analyser en particulier ses propriétés de stabilité, on utilisera plutôt la forme équivalente suivante :

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{1}{2}\underbrace{\frac{a\Delta t}{\Delta x}}_{=\lambda}(\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n) \tag{8}$$

On se propose d'appliquer le schéma (8) à la résolution du problème (4) sur le domaine $[x_1, x_2]$ avec $x_1 = -5$ et $x_2 = 5$, une distribution initiale de type Gaussienne, $\rho_0(x) = exp(-\beta x^2)$ avec $\beta = 20$ et une vitesse d'advection $a = 0.1$.

Deux types de conditions aux limites sont envisageables :

- conditions d'extrapolation depuis l'intérieur du domaine : on "laisse sortir" du domaine le signal associé à la distribution initiale en écrivant en $x = x_1$ la relation $\rho_1^n = \rho_2^n$ $\forall n$ et en $x = x_2$ la relation $\rho_{imax}^n = \rho_{imax-1}^n$ $\forall n$. L'inconvénient de ce type de conditions aux limites réside dans le fait que le domaine de calcul doit être choisi suffisamment étendu pour permettre l'advection de la distribution initiale quand le temps augmente (cf. Fig.1).

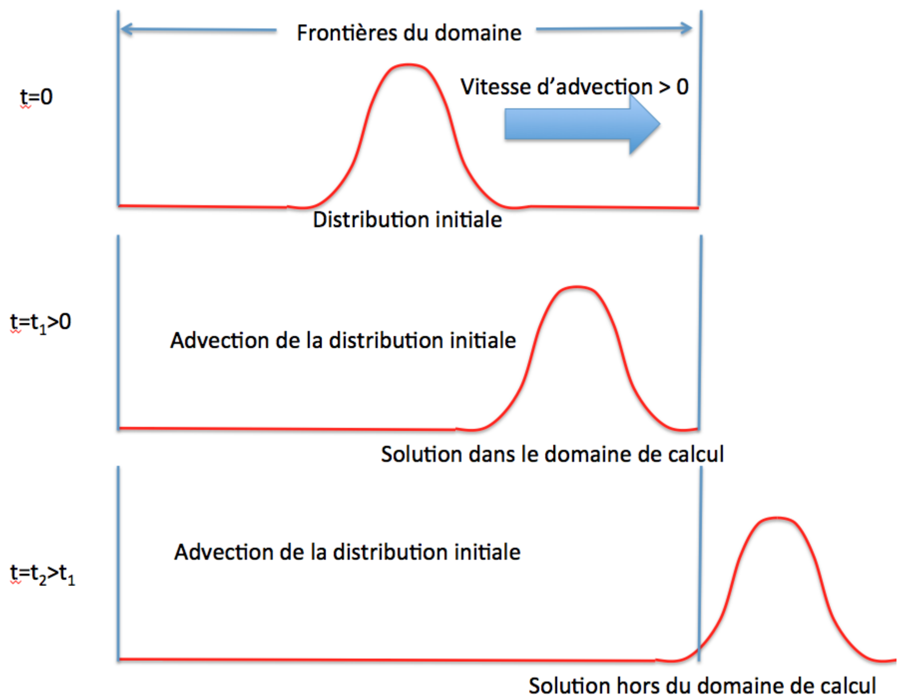

Fig. 1: Evolution typique de la solution dans le cas où des conditions aux limites de type "extrapolation depuis l'intérieur du domaine" sont utilisées aux frontières du domaine de calcul.

- conditions de périodicité : en exprimant la périodicité de la solution, *i.e.* le fait que la solution qui sort par la frontière $x = x_2$ rentre immédiatement dans le domaine par la frontière $x = x_1$, on peut observer l'évolution de la solution numérique sur des temps longs tout en conservant un domaine de calcul de taille réduite (cf. Fig.2). Numériquement, on traduit la périodicité en utilisant les conditions aux limites : $\rho_1^n = \rho_{imax-1}^n$ $\forall n$ et $\rho_{imax}^n = \rho_2^n$ $\forall n$

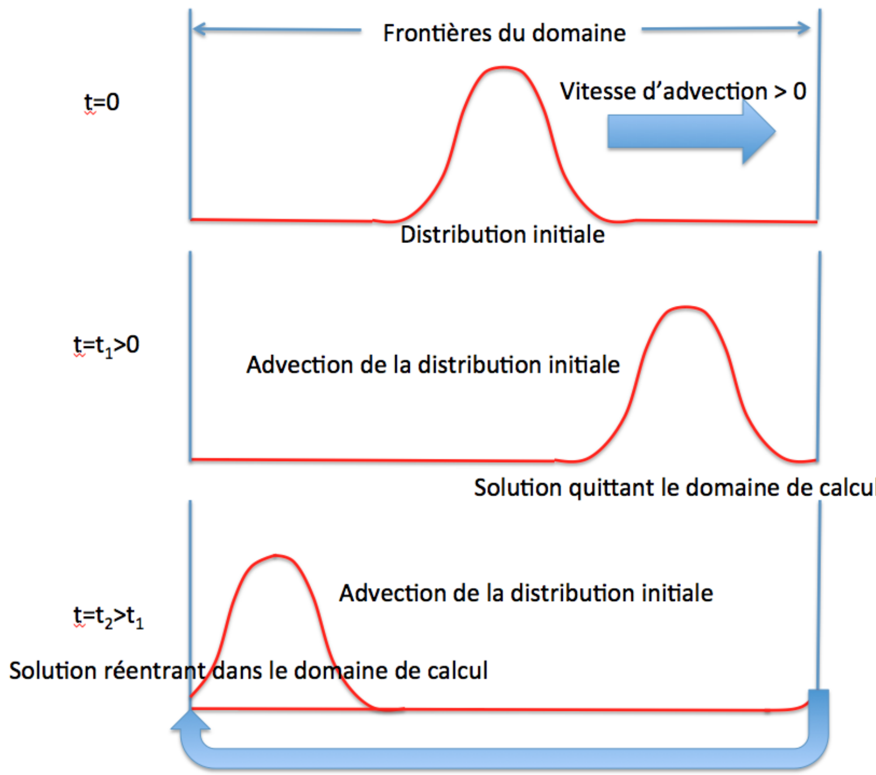

Fig. 2: Evolution typique de la solution dans le cas où des conditions aux limites de périodicité sont utilisées aux frontières du domaine de calcul.

• Adapter au présent problème le code développé pour résoudre l'équation de diffusion 1D dans les séances 1 et 2. On pourra conserver le "programme principal" (en le renommant de façon ad hoc), le script *param.sce* (en supprimant les paramètres qui ne sont plus pertinents et en introduisant les nouveaux paramètres associés au problème traité) ainsi que le script *solex.sce* qui pourra être renommé *init.sce* et dont la fonction, une fois modifiée de façon ad hoc, servira à calculer la distribution $\rho_0(x)$ utilisée pour l'initialisation du problème et pour obtenir la solution exacte. On pourra renommer *theta* en *rho* (le problème est supposé ici directement et uniquement résolu sous forme adimensionnée).

• Effectuer une première simulation à l'aide du schéma (8) mis en oeuvre avec $imax = 201$ (soit un pas d'espace uniforme $\Delta x = 10/200 = 0.05$) et un pas de temps Δt choisi de telle sorte que la solution se déplace d'une cellule au cours d'un pas de temps ($i.e.$ $a = \Delta x/\Delta t$ soit $\Delta t = \Delta x/a$ ou $\Delta t = 0.5$ dans le cas présent. On se limitera à quelques itérations seulement ($itermax = 10$ typiquement) avec un affichage toutes les deux itérations par exemple. Commenter le résultat obtenu et effectuer quelques expériences numériques en réduisant le pas de temps (mais en augmentant alors le nombre d'itérations et la fréquence d'affichage associée).

• Expliquer le comportement observé par une analyse de stabilité du schéma (8).