

Jonatha Rodrigues da Costa

Modelagem de Sistemas a Eventos Discretos

Maracanaú
2025

Jonatha Rodrigues da Costa

Modelagem de Sistemas a Eventos Discretos

Este livro trata sobre modelagem de sistemas a eventos discretos aplicados à engenharia incluindo modelagem de sistemas utilizando a ferramenta de análise gráfica CPN IDE[®].

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

Maracanaú
2025

Dedico este trabalho a Deus, a minha família, aos colegas acadêmicos e aos discentes, especialmente os discentes dos cursos de engenharia.

Agradecimentos

"Estudar é uma dádiva divina!"

Resumo

Sumário

Sumário	6
Lista de ilustrações	9
1 Sistemas de Manufatura: Fabricando um Produto, Modelagem e Problemas de Controle	11
1.1 Perceptiva fabril	12
1.2 Conceitos de Modelagem de Sistemas de Manufatura	13
1.2.1 Principais Ferramentas de Modelagem de Sistemas	14
2 Redes de Petri: conceitos iniciais	16
2.1 Representações Formais da Rede de Petri	16
2.2 Representação Gráfica	17
2.2.1 Funcionamento conceitual de uma RP	18
2.3 Poder de Expressão das Redes de Petri	18
2.3.1 Sequência	18
2.3.2 Concorrência	19
2.3.3 Conflito	19
2.3.4 Sincronismo	19
2.3.5 Caminhos Alternativos	20
2.3.6 Repetição	20
2.3.7 Alocação de Recursos	20
2.4 Dinâmica e Propriedades das Redes de Petri	21
2.4.1 Alcance	21
2.4.2 Conservação	21
2.4.3 Vivacidade	22
2.4.4 Reversibilidade	22
2.4.5 Segurança	23
2.5 Conclusão	24
3 Redes de Petri: modelos iniciais	25
3.1 Caso Prático Industrial: representação em RP	25
3.1.1 Estrutura da Rede de Petri	25
3.2 Matrizes de Pré, Pós e de Incidência de uma Rede de Petri	26
3.2.1 Modelagem das Matrizes de uma RP	27
3.2.2 Matriz de Pré-Incidência (C^-)	28
3.2.3 Matriz de Pós-Incidência (C^+)	28
3.2.4 Matriz de Incidência (C)	28
4 RP temporizadas	30
4.1 Redes de Petri Temporais	30
4.1.1 Definição	30
4.1.2 Propriedades das Redes de Petri Temporais	31
4.2 Redes de Petri Temporalizadas	31

4.2.1	Definição	31
4.2.2	Vantagens das Redes de Petri Temporalizadas	31
4.3	Comparativo entre RP-T e RP-Tz	32
4.4	Conclusão	32
5	Redes de Petri Hierárquicas	33
5.1	Definição	33
6	CPN IDE®	34
6.1	Interface, Funcionalidades e Linguagem do CPN IDE®	34
6.1.1	Interface	34
6.1.2	Funcionalidades Principais do CPN IDE®	35
6.1.3	Linguagem do CPN IDE®: CPN ML	36
6.2	Funções e Estruturas de Controle na Linguagem CPN ML	37
6.2.1	Estrutura <code>if-then-else</code>	37
6.2.2	Estrutura <code>case-of</code>	37
6.2.3	Funções Anônimas: <code>fn</code>	37
6.2.4	Funções Nomeadas: <code>fun</code>	38
6.2.5	Bloco <code>let-in-end</code>	38
6.2.6	Iteração Funcional: <code>map</code> e <code>foldl</code>	38
6.2.7	Resumo das Estruturas de Controle	38
6.3	Funções e Recursos Associados às Transições e arcos	39
6.3.1	Guards: Restrições ao Disparo de Transições	39
6.3.2	Expressões em Arcos: Manipulação de Tokens	39
6.3.3	Estruturas de Controle: <code>if</code> , <code>case</code> , <code>let</code>	39
6.3.4	Funções Padrão e Definidas pelo Usuário	40
6.3.5	Funções de Lista e Recursividade	40
6.4	Distribuições de Probabilidade no CPN IDE	40
6.5	Multi-conjuntos (Multi-sets)	41
6.5.1	Boas Práticas e Considerações de Tipagem	43
7	Modelagem de Redes de Petri Coloridas com Conjuntos de Cores	44
7.1	Conjuntos de Cores Simples	44
7.1.1	Conjunto de cores <code>UNIT</code>	44
7.1.2	Conjunto de cores <code>BOOLEAN</code>	45
7.1.3	Conjunto de cores <code>INTEGER</code>	46
7.1.4	Conjunto de cores <code>STRING</code>	47
7.1.5	Conjunto de cores <code>ENUMERATED</code>	48
7.1.6	Conjunto de cores <code>INDEXED</code>	49
7.2	Conjuntos de Cores Compostos	50
7.2.1	Conjunto de cores <code>PRODUCT</code>	50
7.2.2	Conjunto de cores <code>RECORD</code>	51
7.2.3	Conjunto de Cores <code>union</code>	53
7.2.4	Conjunto de cores <code>list</code>	54
7.3	Recursos das transições numa Rede de Petri	56
7.3.1	Expressão de Guarda	56

7.3.1.1	Expressão de Guarda com uso de lista	57
7.3.2	Temporização em Redes de Petri	59
7.3.2.1	Redes de Petri Temporais	59
7.3.2.2	Redes de Petri Temporizadas	60
7.3.2.3	Multiconjuntos com Restrições de Tempo	62
7.3.3	Operadores: <code>input()</code> , <code>output()</code> , <code>action()</code>	63
7.3.3.1	Prioridade de Transições no CPN IDE	64
7.4	Modelo de Rede: Conto da Cinderela	64
8	Aplicações e proposições de Modelagem	68
8.1	Exercícios: Sistemas a Serem Modelados	68

Lista de ilustrações

Figura 1 – Percepção da indústria 4.0	11
Figura 2 – Exemplo de Rede de Petri simples	18
Figura 3 – Grafo de marcações ilustrando a evolução do sistema	18
Figura 4 – Expressão de processo em sequência numa RP	19
Figura 5 – Expressão de processo em concorrência numa RP	19
Figura 6 – Expressão de processo em conflito numa RP	19
Figura 7 – Expressão de processo em sincronismo numa RP	20
Figura 8 – Expressão de processo em Caminhos Alternativos numa RP	20
Figura 9 – Expressão de processo de Repetição numa RP	20
Figura 10 – Expressão de Alocação de Recursos numa RP	21
Figura 11 – Alcançabilidade de uma RP	21
Figura 12 – Conservação de uma RP	22
Figura 13 – Vivacidade de uma RP	22
Figura 14 – Reversibilidade de uma RP	23
Figura 15 – Segurança de uma RP	23
Figura 16 – Diagrama gráfico da RP representando o fluxo de produção industrial	26
Figura 17 – Representação gráfica de um RP-T.	30
Figura 18 – Representação gráfica de um RP-Tz.	31
Figura 19 – Rede de Petri Hierárquica - Nível Superior	33
Figura 20 – Rede de Petri Hierárquica - Nível de sub-rede	33
Figura 21 – Interface de desenvolvimento do CPN IDE®	35
Figura 22 – Área de declarações no CPN IDE®	35
Figura 23 – Modelagem do conjunto de cores <code>unit</code> no CPN IDE®	45
Figura 24 – Modelagem do conjunto de cores <code>bool</code> no CPN IDE®	46
Figura 25 – Modelagem do conjunto de cores <code>int</code> no CPN IDE®	47
Figura 26 – Modelagem do conjunto de cores <code>string</code> no CPN IDE®	48
Figura 27 – Modelagem do conjunto de cores <code>enumerated</code> no CPN IDE®	49
Figura 28 – Modelagem do conjunto de cores <code>indexed</code> no CPN IDE®	50
Figura 29 – Modelagem do conjunto de cores <code>product</code> no CPN IDE®	51
Figura 30 – Modelagem do conjunto de cores <code>record</code> no CPN IDE®	52
Figura 31 – Modelagem do conjunto de cores <code>union</code> no CPN IDE®	54
Figura 32 – Modelagem do conjunto de cores <code>list</code> no CPN IDE®	55
Figura 33 – Elementos recursivos de uma transição no CPN IDE®	56
Figura 34 – Modelagem com expressão de guarda no CPN IDE®	57
Figura 35 – Modelagem com expressão de guarda no CPN IDE® com lista	58
Figura 36 – Modelagem de uma rede temporal no CPN IDE®	59
Figura 37 – Modelagem de uma rede temporizada no CPN IDE®	61
Figura 38 – Modelagem basilar com uso de expressão na transição <code>bool</code> no CPN IDE®	63
Figura 39 – Modelagem de caso Cinderela no CPN IDE®	65

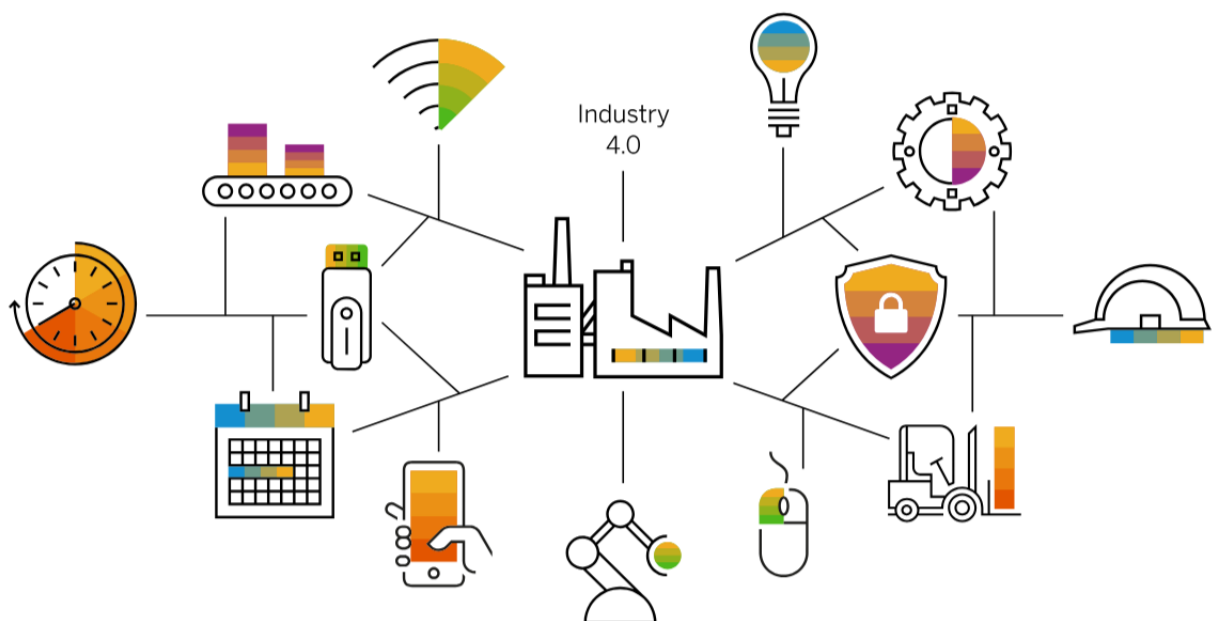
Figura 40 – Modelagem de caso Cinderela - Resultado da simulação no CPN IDE®	67
----------------------------------------------------------------------------------------	----

1 Sistemas de Manufatura: Fabricando um Produto, Modelagem e Problemas de Controle

A manufatura tem desempenhado um papel crucial como um dos pilares fundamentais para o desenvolvimento econômico e tecnológico ao longo de toda a história da humanidade. Desde os primeiros artefatos rudimentares, fabricados manualmente nas antigas civilizações, até os modernos e complexos sistemas automatizados de produção que caracterizam a indústria de ponta nos dias de hoje, a evolução dos processos de manufatura reflete diretamente o avanço da sociedade. Esse progresso se manifesta de forma clara na busca constante pela maior eficiência, qualidade e inovação no modo como os produtos são criados e entregues ao consumidor. Essa manufatura, mais do que uma simples atividade produtiva, se consolidou como uma força propulsora no desenvolvimento econômico, sendo também um reflexo das mudanças sociais e tecnológicas que moldaram o mundo moderno, conforme [Smith \(2010\)](#). No contexto atual, a manufatura está imersa numa revolução, impulsionada pela Indústria 4.0, que, ao incorporar novas tecnologias como a *Artificial Intelligence* (Inteligência Artificial) (AI), a robótica, *Internet of Things* (Internet das coisas) (IoT) e a computação em nuvem, tem transformando as formas de produção e, consequentemente, as bases da economia global, conforme [Jones \(2018\)](#).

Ilustrando esse cenário, na Figura 1 é apresentada uma percepção basilar de elementos distintos que, ao serem integrados em um único sistema, oferecem uma visão abrangente e interconectada de como diferentes componentes podem interagir de maneira síncrona. Esse arranjo dos elementos não só permite uma melhor compreensão da dinâmica interna do sistema, mas também amplia a percepção sobre suas funcionalidades e possibilidades. A integração dos diversos componentes oferece uma abordagem mais holística e eficaz, que facilita a concepção e o entendimento de sistemas complexos, permitindo uma análise mais detalhada e uma visão mais clara de como cada parte contribui para o todo.

Figura 1 – Percepção da indústria 4.0



Fonte: Adaptado de ([SAP, 2025](#))

O conceito de sistemas de manufatura, portanto, pode ser definido como um conjunto organizado de processos físicos e lógicos que interagem para transformar matérias-primas em produtos acabados, atendendo às demandas específicas de consumidores e mercados. Historicamente, pode-se identificar quatro grandes fases no desenvolvimento dos sistemas de manufatura. A primeira fase, a manufatura artesanal, era caracterizada pela produção manual e altamente personalizada de produtos, em que cada item produzido era único, feito sob medida de acordo com as necessidades do cliente. Já a segunda fase, marcada pela revolução industrial e pela introdução da linha de montagem, impulsionou a produção em massa, que permitiu a fabricação de grandes quantidades de produtos padronizados a custos muito mais baixos, representando um marco na história da produção. A terceira fase, a manufatura enxuta, focou na redução de desperdícios e na melhoria contínua dos processos, buscando a máxima eficiência na utilização de recursos e tempo, sem sacrificar a qualidade, conforme [Anderson \(2015\)](#). Essa estrutura sistêmica converge na Indústria 4.0, que integra a digitalização dos processos produtivos, automação avançada e sistemas ciberfísicos, possibilitando um nível de personalização e eficiência que antes era impensável. Essa nova fase tem o potencial de transformar profundamente todos os aspectos da produção, tornando-a mais ágil, inteligente e conectada, segundo [Mellor \(2014\)](#).

1.1 PERCEPTIVA FABRIL

Dentro desse vasto panorama, os sistemas de manufatura podem ser classificados conforme a abordagem adotada para a produção em: discreto, contínuo e flexível. No caso dos sistemas de produção discreta, cada item produzido é individualmente contável e tratado separadamente, como ocorre na fabricação de automóveis, eletrodomésticos e componentes eletrônicos. Já os sistemas de produção contínua operam com fluxos ininterruptos de materiais, como no caso das indústrias química e petroquímica, em que a produção de produtos como petróleo, produtos químicos e alimentos exige a constante movimentação de materiais e processos sem interrupções. Uma categoria intermediária são os sistemas flexíveis de manufatura, que têm a capacidade de se adaptar rapidamente a diferentes tipos de produção, ajustando-se a novos produtos e exigências de mercado. Nesse contexto, *CAM - Computer Aided Manufacturing* (Manufatura Assistida por Computador) (CAM) surge como uma tecnologia crucial para otimizar processos, empregando simulações e controle digital para maximizar a eficiência e minimizar erros durante a produção, conforme apresenta [Baskin \(2017\)](#). Isso implica em produtos manufaturados com ciclos de vida distintos entre si, tais que podem ou não resultar de projetos com variações de qualidade e segurança.

O ciclo de vida de um produto, desde sua concepção até sua disposição final, envolve uma série de etapas interdependentes, as quais podem ser definidas como: fase inicial, projeto, fabricação e reciclagem. A fase inicial, que abrange o projeto e o desenvolvimento do produto, é de extrema importância, pois é nessa fase que são definidos aspectos cruciais como a funcionalidade, os materiais a serem utilizados e os processos de fabricação mais adequados para atingir a qualidade desejada, conforme [Harris \(2002\)](#). Após o projeto, segue-se o planejamento da produção, em que são definidos os recursos necessários, como equipamentos, materiais e mão de obra, bem como os processos a serem seguidos. A etapa de fabricação é em que ocorre a transformação real da matéria-prima no produto acabado, seguindo-se, então, a distribuição e o suporte, garantindo a entrega do produto e a manutenção adequada ao longo de sua vida útil, conforme [Wilson \(2016\)](#). O ciclo se fecha com a reciclagem ou o descarte adequado do produto, uma fase cada vez mais importante, dada a crescente preocupação com a sustentabilidade e o reaproveitamento de materiais, conforme [Brundtland \(1987\)](#).

Para garantir a eficiência e o controle sobre esses processos, a modelagem de sistemas de manufatura desempenha um papel essencial. Modelos formais, como diagramas de fluxo, máquinas de estados finitos e Redes de Petri, são ferramentas amplamente utilizadas para a análise, otimização e simulação dos fluxos produtivos. Essas ferramentas permitem que engenheiros e gestores analisem de maneira detalhada o comportamento dos sistemas e identifiquem pontos críticos, como gargalos e potenciais falhas. Com isso, é possível antecipar problemas e otimizar a sincronização entre as diversas etapas da produção, resultando em uma maior eficiência operacional, conforme [Murata \(1989\)](#).

No entanto, mesmo com a utilização dessas ferramentas de modelagem, os sistemas de manufatura enfrentam desafios consideráveis no controle de suas operações. A sincronização de processos, o balanceamento da linha de produção e a gestão eficaz de estoques e logística são questões complexas que exigem soluções criativas e eficientes por parte dos engenheiros e gestores. A teoria de controle supervisão, por exemplo, oferece uma abordagem robusta para enfrentar esses desafios. Baseada na modelagem com Redes de Petri, essa teoria permite a supervisão e coordenação eficaz dos sistemas produtivos, possibilitando uma maior flexibilidade e uma resposta rápida às mudanças nas condições de produção, conforme [Chase e Aquilano \(2006\)](#). A integração de diferentes abordagens de controle também é fundamental para a adaptação das fábricas às exigências da produção moderna, cada vez mais dinâmicas e variáveis, conforme [Cassandras \(2008\)](#).

Dessa forma, compreender a estrutura e o funcionamento dos sistemas de manufatura é essencial para os profissionais da engenharia moderna. A modelagem eficiente e o controle adequado desses sistemas não apenas otimizam a produção, mas também impulsionam a inovação, a competitividade e o avanço tecnológico, permitindo que as empresas se destaquem no mercado globalizado ([THOMPSON, 2019](#)). As organizações que adotam essas tecnologias e abordagens têm uma vantagem estratégica significativa, pois conseguem produzir com mais eficiência, atender de forma mais precisa às necessidades dos consumidores e se adaptar rapidamente às mudanças do mercado.

1.2 CONCEITOS DE MODELAGEM DE SISTEMAS DE MANUFATURA

A modelagem de sistemas de manufatura é uma técnica essencial para representar, analisar e otimizar processos complexos dentro das fábricas. Modelar um sistema envolve criar uma abstração que descreve seus componentes, interações e comportamentos. Essas representações são fundamentais para entender e prever como o sistema opera, identificar falhas potenciais, otimizar o desempenho e apoiar decisões de planejamento e controle. A modelagem de sistemas pode ser dividida em diferentes abordagens, como modelagem gráfica, matemática e computacional.

Entre os conceitos-chave em modelagem, destacam-se:

- **Abstração:** Reduzir a complexidade de um sistema real, considerando apenas os aspectos mais relevantes para a análise ou melhoria do desempenho.
- **Simulação:** Técnica usada para imitar o comportamento do sistema sob diferentes condições, o que ajuda a prever os resultados de mudanças no processo sem a necessidade de experimentos reais.
- **Otimização:** Processo de encontrar a melhor solução para um problema de manufatura, seja em termos de custo, tempo ou recursos, ajustando variáveis dentro de um modelo matemático.

- **Estudo de Fluxo:** Análise dos caminhos que os materiais percorrem ao longo do sistema, buscando melhorar a fluidez e reduzir os tempos de espera e os gargalos.

1.2.1 PRINCIPAIS FERRAMENTAS DE MODELAGEM DE SISTEMAS

Diversas ferramentas e técnicas são utilizadas para modelar sistemas de manufatura. Cada ferramenta possui características distintas, adequando-se a diferentes tipos de problemas e abordagens de análise. Na Tabela 1 são apresentadas as principais ferramentas de modelagem, seus critérios de classificação e recomendações de utilização.

Tabela 1 – Principais ferramentas de modelagem de sistemas de manufatura.

Ferramenta	Crítérios de Classificação	Recomendações de Utilização
Diagrama de Fluxo	Simplicidade e clareza na representação de processos	Ideal para sistemas simples, em que o foco é entender a sequência de atividades e decisões.
Máquinas de Estados Finitos	Modelagem de sistemas discretos com estados bem definidos	Útil para sistemas discretos e sequenciais, como linhas de montagem e processos repetitivos.
Redes de Petri	Representação gráfica de processos e controle de fluxos	Indicada para modelar sistemas complexos e concorrentes, como sistemas de controle de produção.
Simulação de Monte Carlo	Análise probabilística de incertezas nos processos de produção	Usada em sistemas com variabilidade, como aqueles sujeitos a falhas e incertezas em tempos de ciclo.
Programação Linear	Modelagem matemática e otimização de recursos	Aplicada para otimizar processos com restrições de recursos, como balanceamento de linhas de produção.
Algoritmos Genéticos	Métodos de busca e otimização evolutiva	Recomendados para problemas complexos de otimização em que soluções exatas são difíceis de encontrar.
Modelagem Baseada em Agentes	Análise de interação entre componentes autônomos do sistema	Ideal para sistemas dinâmicos e complexos, em que há interação entre diferentes agentes, como robôs em uma fábrica inteligente.

Fonte: Autor, (2025)

A escolha da ferramenta de modelagem adequada depende diretamente do tipo de sistema a ser analisado, das características dos processos envolvidos e dos objetivos da análise. Por exemplo, para sistemas mais simples, em que os processos são claros e as variáveis poucas, diagramas de fluxo podem ser suficientes. No entanto, quando lidamos com sistemas mais dinâmicos, com muitas variáveis e interações complexas, ferramentas mais sofisticadas, como [Redes de Petri \(RP\)](#) e simulações de Monte Carlo, podem ser mais eficazes. Isso nos leva à questão central de como essas ferramentas nos ajudam a entender e otimizar sistemas de manufatura, especialmente quando se trata de analisar eventos discretos.

Em todos os cenários, a modelagem de sistemas de manufatura permite uma visão mais integrada da operação como um todo. Ao aplicar essas ferramentas, conseguimos identificar pontos críticos, como gargalos e falhas potenciais, além de descobrir oportunidades para melhorias. Essa abordagem, ao mesmo tempo analítica e estratégica, é fundamental para o desenvolvimento de sistemas de produção mais

eficientes e adaptáveis, alinhados às necessidades da Indústria 4.0. E, ao falarmos da Indústria 4.0, nos deparamos com uma transformação profunda na forma como os sistemas de manufatura são gerenciados, o que torna a escolha da ferramenta certa ainda mais relevante.

No entanto, quando o foco está na modelagem de sistemas de manufatura baseados em eventos discretos, as **RP** se destacam como uma ferramenta particularmente poderosa. Sua capacidade de representar a dinâmica de sistemas complexos, em que múltiplos componentes interagem de maneira concorrente e assíncrona, torna-as ideais para ambientes em que a sincronização e a comunicação entre eventos são fundamentais. Ao contrário de abordagens mais tradicionais, as Redes de Petri nos fornecem uma representação visual clara e intuitiva dessas interações, o que facilita o entendimento da complexidade dos sistemas. Isso é especialmente importante em sistemas de manufatura modernos, como os encontrados em fábricas automatizadas ou ambientes de produção flexível, em que a variabilidade e a incerteza desempenham um papel significativo.

Portanto, ao nos aprofundarmos nesse tema, vemos que as **RP** não são apenas uma ferramenta teórica, mas uma solução prática e altamente adaptável para modelar e otimizar sistemas com eventos discretos. Elas nos permitem simular e analisar o comportamento de sistemas sujeitos a mudanças e falhas, oferecendo insights valiosos para melhorar a eficiência e a produtividade. Por essas razões, no próximo capítulo, adotaremos as **RP** como a principal ferramenta de estudo. Com isso, seremos capazes de realizar uma análise aprofundada das interações dentro dos sistemas de manufatura, identificando pontos críticos que impactam diretamente seu desempenho, ao mesmo tempo em que propomos melhorias para alcançar um processo de produção mais robusto e eficiente.

2 Redes de Petri: conceitos iniciais

As **RP**s constituem uma ferramenta matemática e gráfica de alta expressividade, empregada na modelagem, análise e simulação de **Sistemas a Eventos Discretos (SEDs)**. Introduzidas por Carl Adam Petri em 1962, essas redes têm sido amplamente adotadas para representar sistemas concorrentes, tanto síncronos quanto assíncronos, além de sistemas distribuídos. Seu emprego se destaca em áreas como automação industrial, protocolos de comunicação, controle de manufatura e gerenciamento de fluxos de trabalho em sistemas de informação.

2.1 REPRESENTAÇÕES FORMAIS DA REDE DE PETRI

Para formalizar a modelagem, a Rede de Petri pode ser descrita por diferentes estruturas matemáticas, dependendo do nível de detalhe necessário. Em literatura, a definição formal de uma Rede de Petri pode variar conforme o nível de detalhamento e os aspectos que se deseja enfatizar na modelagem. Assim, podem ser apresentadas diferentes definições, tais como no conceito de uma n -tupla. O termo n -upla refere-se ao número de elementos considerados na definição da RP, podendo assumir diferentes configurações:

- **Dupla (2 elementos)**: estrutura básica da rede;
- **Tripla (3 elementos)**: inclui conexões entre os componentes;
- **Quádrupla (4 elementos)**: adiciona a função de peso dos arcos;
- **Quíntupla (5 elementos)**: incorpora a marcação inicial da rede;
- **Séxtupla (6 elementos)**: inclui informações complementares, como rótulos e tempos.

RP COMO UMA DUPLA

Para incluir a noção de pesos associados aos arcos, pode-se definir:

$$RP = (P, T)$$

em que:

- P é o conjunto finito de *lugares*;
- T é o conjunto finito de *transições*;

RP COMO UMA TRIPLA

Para incluir a noção de pesos associados aos arcos, pode-se definir:

$$RP = (P, T, F)$$

em que:

- P, T possuem os mesmos significados anteriores;
- $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ é o conjunto de *arcos*, que conecta lugares a transições e vice-versa;

RP COMO UMA QUADRUPLA

Para incluir a noção de pesos associados aos arcos, pode-se definir:

$$RP = (P, T, F, W)$$

em que:

- P , T e F possuem os mesmos significados anteriores;
- $W : F \rightarrow \mathbb{N}^+$ é uma função que atribui um *peso* a cada arco, representando, por exemplo, a quantidade mínima de *fichas* necessários para que uma transição seja disparada.

RP COMO UMA QUÍNTUPLA

A definição clássica de uma Rede de Petri integra tanto os pesos quanto a marcação inicial:

$$RP = (P, T, F, W, M_0)$$

- P , T , F e W possuem os mesmos significados anteriores;
- $M_0 : P \rightarrow \mathbb{N}$ é a *marcação inicial*, definindo a distribuição inicial de *fichas* em cada lugar.

RP COMO UMA SÉXTUPLA

Em contextos que demandam uma modelagem mais rica, como em sistemas temporizados ou hierárquicos, pode-se estender a definição para:

$$RP = (P, T, F, W, M_0, \Lambda)$$

em que:

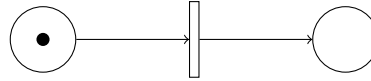
- P , T , F , W e M_0 : possuem os mesmos significados anteriores;
- Λ é uma função adicional que pode representar rótulos, restrições, tempos de disparo, prioridades ou quaisquer outras informações complementares necessárias para descrever aspectos específicos do sistema modelado.

Cada uma dessas definições é útil em contextos distintos, permitindo que o modelador/projetista escolha a abordagem que melhor se adequa à complexidade e aos requisitos do sistema a ser analisado.

2.2 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Uma RP pode ser representada graficamente conforme a Figura 2. Os lugares são representados por círculos, as transições por retângulos e as fichas (*fichas*) por pontos dentro dos círculos.

Figura 2 – Exemplo de Rede de Petri simples



Fonte: Autor, (2025)

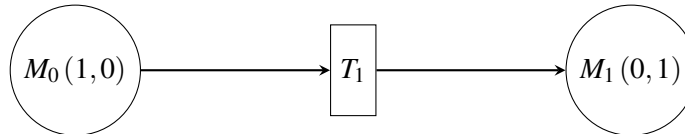
2.2.1 FUNCIONAMENTO CONCEITUAL DE UMA RP

Na Figura 3 ilustra-se a evolução de uma Rede de Petri simples. Considere uma rede com dois lugares (P_1 e P_2) e uma transição (T_1). A marcação inicial possui um ficha em P_1 :

1. Estado inicial: $M_0 = (1, 0)$ (um ficha em P_1 , nenhum em P_2).
2. A transição T_1 , estando habilitada, pode disparar, removendo um ficha de P_1 e adicionando um ficha em P_2 .
3. Novo estado: $M_1 = (0, 1)$ (o ficha é transferido para P_2).

Esse processo ilustra a evolução do sistema conforme os eventos ocorrem, permitindo uma análise dinâmica e detalhada do comportamento da rede.

Figura 3 – Grafo de marcações ilustrando a evolução do sistema



Fonte: Autor, (2025)

Nesse contexto, podem ser realizadas a modelagem e análise de sistemas de manufatura, a simulação de protocolos de comunicação, a modelagem de processos de *workflow* (fluxo de trabalho) e *Business Process Management - BPM* (Gerenciamento de Processos de Negócio), sistemas embarcados e de tempo real, e automação de processos industriais, dentre outros. Esses sistemas contém mais recursos, eventos e condicionantes para que cada evento ocorra.

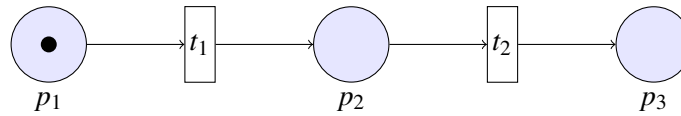
2.3 PODER DE EXPRESSÃO DAS REDES DE PETRI

As RPs possuem um alto poder de expressão, sendo capazes de modelar diversos comportamentos de sistemas concorrentes. A seguir, ilustramos alguns desses comportamentos utilizando grafos de RPs.

2.3.1 SEQUÊNCIA

Um processo sequencial é aquele no qual uma transição só pode ocorrer após a execução da anterior, conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Expressão de processo em sequência numa RP

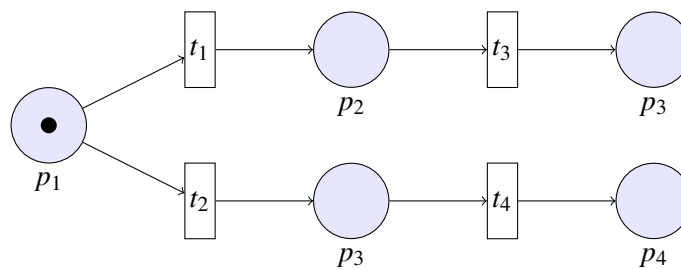


Fonte: Autor, (2025)

2.3.2 CONCORRÊNCIA

Duas transições independentes podem ocorrer simultaneamente: t_1 e t_2 , conforme ilustrado na Figura 5.

Figura 5 – Expressão de processo em concorrência numa RP

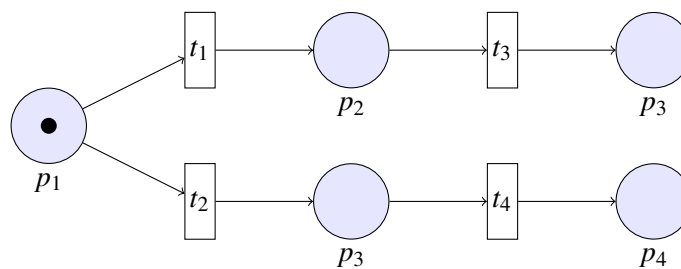


Fonte: Autor, (2025)

2.3.3 CONFLITO

Duas transições disputam o mesmo recurso e apenas uma pode ser disparada: t_1 ou t_2 , conforme ilustrado na Figura 6.

Figura 6 – Expressão de processo em conflito numa RP

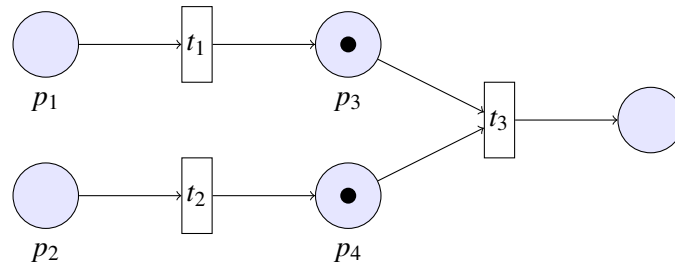


Fonte: Autor, (2025)

2.3.4 SINCRONISMO

Dois lugares (p_3 e p_4) habilitam simultaneamente uma mesma transição t_3 , conforme ilustrado na Figura 7.

Figura 7 – Expressão de processo em sincronismo numa RP

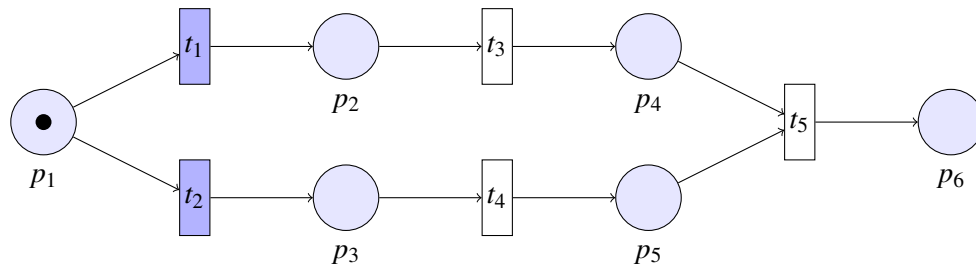


Fonte: Autor, (2025)

2.3.5 CAMINHOS ALTERNATIVOS

O sistema pode seguir diferentes fluxos dependendo da transição escolhida: t_1 ou t_2 , conforme ilustrado na Figura 8.

Figura 8 – Expressão de processo em Caminhos Alternativos numa RP

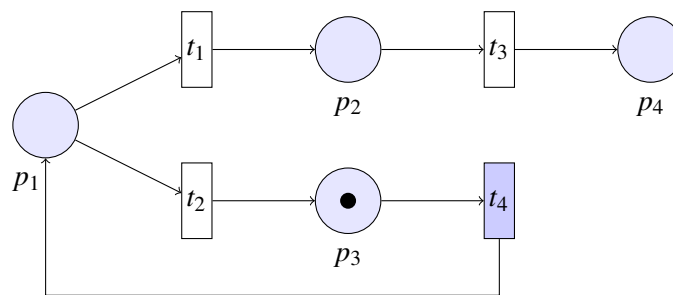


Fonte: Autor, (2025)

2.3.6 REPETIÇÃO

Um ciclo em que a execução retorna a um estado anterior disparando a transição t_4 , conforme ilustrado na Figura 9.

Figura 9 – Expressão de processo de Repetição numa RP

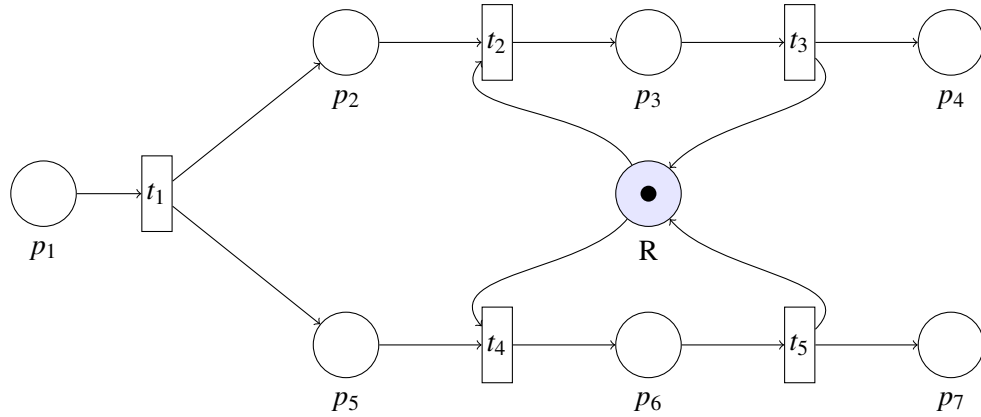


Fonte: Autor, (2025)

2.3.7 ALOCAÇÃO DE RECURSOS

Um recurso compartilhado precisa ser liberado antes de ser reutilizado. Na Figura ?? as transições t_2 ou t_4 alocam o recurso R no processo ora modelado. O recurso é liberado pelas transições t_3 ou t_5 , respectivamente. Este processo é ilustrado na Figura 10.

Figura 10 – Expressão de Alocação de Recursos numa RP



Fonte: Autor, (2025)

2.4 DINÂMICA E PROPRIEDADES DAS REDES DE PETRI

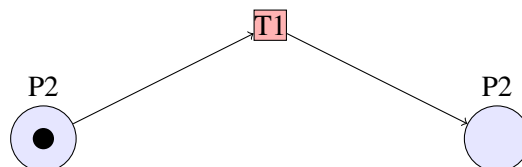
Conforme descrito anteriormente, as RP são modelos matemáticos poderosos para a descrição e análise de sistemas distribuídos e concorrentes, e suas propriedades fundamentais são essenciais para a compreensão do comportamento dinâmico desses sistemas. A seguir, exploramos as propriedades mais importantes das RPs, ilustrando com exemplos práticos e abordagens analíticas.

2.4.1 ALCANCE

O alcance de uma Rede de Petri refere-se ao conjunto de todas as marcações atingíveis a partir da marcação inicial M_0 . Em outras palavras, é a coleção de todos os estados do sistema que podem ser alcançados por uma sequência de disparos de transições. O alcance pode ser representado visualmente por meio de um grafo de marcações, em que cada nó do grafo representa uma marcação e cada aresta entre os nós indica a transição disparada para alcançar a próxima marcação.

Exemplo: Considere uma RP simples com dois lugares P_1 e P_2 , e uma transição T_1 que conecta esses lugares. Se o sistema começa com uma ficha em P_1 , a única marcação atingível após um disparo de T_1 será P_2 , e a marcação inicial (P_1) terá sido consumida enquanto uma ficha foi colocada em P_2 . O alcance pode ser representado graficamente, com um nó para cada marcação possível. Esse processo está representado na Figura 11.

Figura 11 – Alcançabilidade de uma RP



Fonte: Autor, (2025)

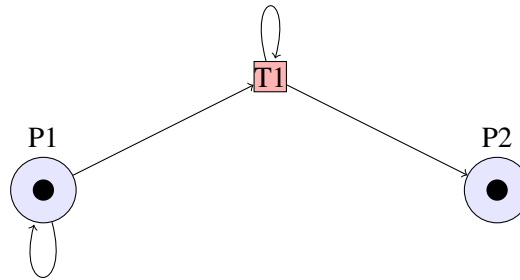
2.4.2 CONSERVAÇÃO

Uma Rede de Petri é dita conservativa se, ao longo de todas as transições disparadas no sistema, a soma total de fichas nos lugares (ou seja, a quantidade total de fichas presentes) permanece constante. Esta

propriedade é crucial em sistemas que envolvem conservação de recursos, como sistemas de produção, em que os recursos (fichas) não podem ser criados ou destruídos.

Exemplo: Em um sistema de manufatura modelado por uma RP, a quantidade total de matérias-primas ou produtos deve ser conservada durante o processo de produção. Se a rede é conservativa, a quantidade de fichas nos lugares de entrada e saída será sempre a mesma, independentemente de quantas transições tenham ocorrido. Esse processo está representado na Figura 12.

Figura 12 – Conservação de uma RP



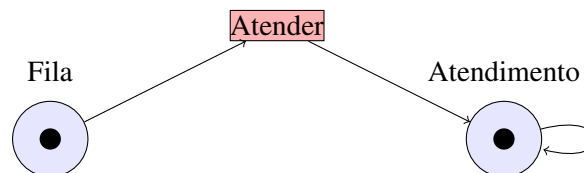
Fonte: Autor, (2025)

2.4.3 VIVACIDADE

A vivacidade de uma transição indica que ela pode, eventualmente, ser disparada, independentemente da sequência de transições já disparadas. Em termos mais formais, uma transição é viva se sempre existir uma sequência futura de disparos de transições que a habilitarão novamente. Esse conceito é fundamental em sistemas em que é necessário garantir que todas as operações possam ser realizadas, mesmo em cenários complexos de concorrência.

Exemplo: Em um sistema de fila, a transição que representa o atendimento de clientes deve ser viva, o que significa que, mesmo que os clientes cheguem em ordens diferentes, sempre haverá uma sequência de disparos que permitirá o atendimento de todos, sem que o sistema entre em um estado de "travamento". Esse processo está representado na Figura 13.

Figura 13 – Vivacidade de uma RP

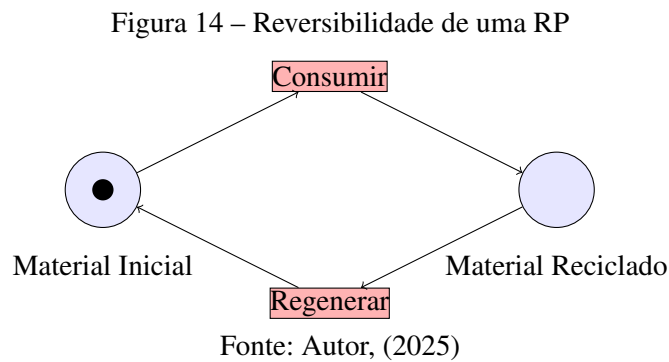


Fonte: Autor, (2025)

2.4.4 REVERSIBILIDADE

Uma rede é reversível se, para qualquer marcação atingível, é possível retornar à marcação inicial M_0 . Ou seja, a reversibilidade implica que o sistema pode retornar ao seu estado inicial após um número finito de transições. Esta propriedade é especialmente importante em sistemas de controle e sistemas em que o restabelecimento de condições iniciais é necessário, como em processos de reinicialização ou recuperação de falhas.

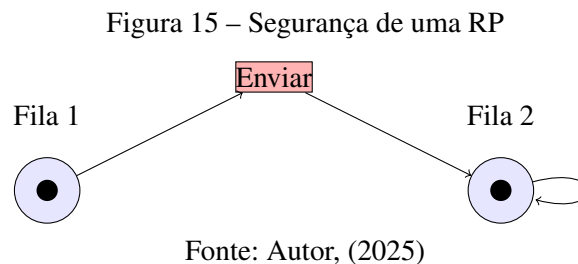
Exemplo: Em um processo de reciclagem modelado por uma RP, em que materiais são consumidos e posteriormente regenerados, a reversibilidade garantiria que o sistema possa sempre retornar ao estado inicial de recursos, após a execução de um ciclo completo de transições. Esse processo está representado na Figura 14.



2.4.5 SEGURANÇA

A segurança de uma Rede de Petri refere-se à restrição de que nenhum lugar pode conter mais do que um número máximo específico de fichas durante a execução. Este conceito é vital para sistemas em que a quantidade de recursos em cada lugar deve ser controlada para evitar sobrecarga ou uso excessivo, como no controle de inventários ou sistemas de comunicação com limites de capacidade.

Exemplo: Em um sistema de controle de fluxo de mensagens, em que cada lugar representa uma fila de mensagens, a segurança garantiria que nenhuma fila contenha mais de um número máximo de mensagens, evitando congestionamentos e perdas de dados. Esse processo está representado na Figura 15.



Além dessas propriedades fundamentais, as Redes de Petri podem ser caracterizadas por outros aspectos mais avançados, como a *liveness-preserving* (preservação de vivacidade) e a análise de dependências temporais e causais entre transições. Em muitos casos, a análise formal dessas propriedades requer ferramentas de verificação automáticas, como as oferecidas por simuladores como o CPN Tools, ou através de técnicas analíticas que permitem garantir a correção e a confiabilidade do sistema modelado.

O estudo dessas propriedades é crucial para garantir que a modelagem de sistemas complexos utilizando Redes de Petri seja efetiva, permitindo não apenas uma descrição precisa dos comportamentos do sistema, mas também uma análise e otimização do desempenho, segurança e confiabilidade do sistema como um todo.

2.5 CONCLUSÃO

As Redes de Petri se apresentam como uma ferramenta poderosa para a modelagem de sistemas dinâmicos discretos, permitindo a análise de concorrência, sincronização e recursos compartilhados. O formalismo matemático empregado facilita a verificação de propriedades cruciais para a confiabilidade de sistemas computacionais e industriais. Ao combinar o uso de invariantes de lugar e de transição, por exemplo, é possível realizar uma verificação formal de propriedades como segurança e vivacidade. Este capítulo estabeleceu os fundamentos teóricos das Redes de Petri, explorando diversas definições formais que variam conforme o nível de detalhamento, e apresentou suas principais aplicações e propriedades, servindo como base para estudos mais avançados, incluindo modelos estendidos, como Redes de Petri Coloridas e Temporizadas.

3 Redes de Petri: modelos iniciais

3.1 CASO PRÁTICO INDUSTRIAL: REPRESENTAÇÃO EM RP

Considere uma fábrica de montagem em que o processo produtivo é dividido em cinco etapas, cada uma representada por um *lugar* na rede. As etapas são:

- P_1 : Recebimento de matéria-prima;
- P_2 : Processamento inicial;
- P_3 : Inspeção de qualidade;
- P_4 : Montagem final;
- P_5 : Expedição do produto acabado.

Os *eventos* (ou transições) que conectam essas etapas são:

- T_1 : Inicia o processamento da matéria-prima, direcionando-a tanto para o processamento inicial quanto para a inspeção preliminar (um fluxo concorrente);
- T_2 : Conclui o processamento inicial e encaminha o material para uma etapa de inspeção ou preparação adicional;
- T_3 : Realiza uma inspeção complementar, garantindo a qualidade antes da montagem;
- T_4 : Coordena a montagem final do produto;
- T_5 : Finaliza o processo, liberando o produto para expedição e, eventualmente, retornando uma parte dos recursos para reinício do ciclo.

A rede em questão modela, portanto, o fluxo de fichas (representando, por exemplo, lotes ou unidades de produto) através dessas etapas, permitindo identificar gargalos, verificar a eficiência do fluxo e garantir que a qualidade seja mantida ao longo do processo produtivo.

3.1.1 ESTRUTURA DA REDE DE PETRI

A rede que descreve o processo acima é composta por:

- **Lugares:** $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$;
- **Transições:** $T = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$;
- **Arcos:** A conexão entre os elementos é dada por:

$$F = \{(P_1, T_1), (T_1, P_2), (T_1, P_3), (P_2, T_2), (T_2, P_4), (P_3, T_3), (T_3, P_4), (P_4, T_4), (T_4, P_5), (P_5, T_5), (T_5, P_1)\}.$$

Note que a transição T_1 distribui o fluxo de matéria-prima simultaneamente para duas rotas: uma para processamento inicial e outra para uma inspeção preliminar.

- **Marcação Inicial:** A fábrica inicia com a chegada de um lote de matéria-prima:

$$M_0 : \quad M_0(P_1) = 1, \quad M_0(P_2) = M_0(P_3) = M_0(P_4) = M_0(P_5) = 0.$$

- **Função de Peso:** Assume-se que cada arco possui peso unitário:

$$W : F \rightarrow \mathbb{N}^+, \quad \text{com } W(e) = 1 \text{ para todo } e \in F.$$

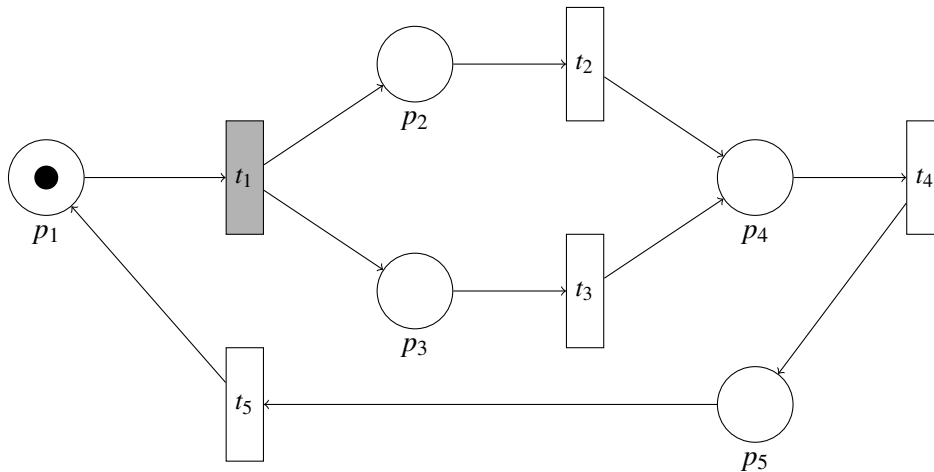
- **Função de Rótulo:** Para complementar a modelagem, associamos rótulos às transições:

$$\Lambda : T \rightarrow \{\text{descrições}\}, \quad \text{por exemplo, } \Lambda(T_i) = \text{“Etapa } T_i\text{”}, \quad i = 1, \dots, 5.$$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA RP PROPOSTA

Na Figura 16 é apresentada graficamente a RP em questão. Nesta figura, os lugares são representados por círculos e as transições por barras (retângulos):

Figura 16 – Diagrama gráfico da RP representando o fluxo de produção industrial



Fonte: Autor,(2025)

Note, na Figura 16, que os nós (lugares p_i e transições t_i) são conectados por arcos, seguindo fielmente o processo industrial descrito no início desta seção. Além disso, observe a representação da marcação inicial da RP, contendo uma ficha única no lugar p_1 (círculo denso de cor preta), a ausência de fichas nos demais lugares p_i . Perceba também que todos os arcos têm peso $W = 1$. A transição t_1 destacada por uma moldura cinza sinaliza sua condição de habilitação para disparar, portanto, de ocorrência do evento.

3.2 MATRIZES DE PRÉ, PÓS E DE INCIDÊNCIA DE UMA REDE DE PETRI

As redes de Petri são uma poderosa ferramenta para modelar sistemas dinâmicos e discretos, como processos de produção, controle de tráfego, e até sistemas computacionais. Elas são compostas por lugares, transições e arcos, em que os lugares representam estados ou recursos, as transições representam eventos ou ações, e os arcos indicam como os lugares e transições se interconectam.

Uma rede de Petri pode ser analisada por meio de suas matrizes de incidência, que fornecem informações cruciais sobre as relações entre lugares e transições. As três matrizes mais importantes em uma rede de Petri são:

- **Matriz de Pré-Incidência (C^-)**, que descreve as conexões entre os lugares e as transições para as quais esses lugares servem de entrada.
- **Matriz de Pós-Incidência (C^+)**, que descreve as conexões entre as transições e os lugares que recebem fichas após a execução de uma transição.
- **Matriz de Incidência (C)**, que é a diferença entre as matrizes de pós e pré-incidência, e descreve de forma completa a interação entre lugares e transições.

Essas matrizes são fundamentais para a análise de comportamento dinâmico de sistemas modelados por redes de Petri, especialmente em termos de controle e verificação de propriedades como alcance de lugares e sincronização de transições.

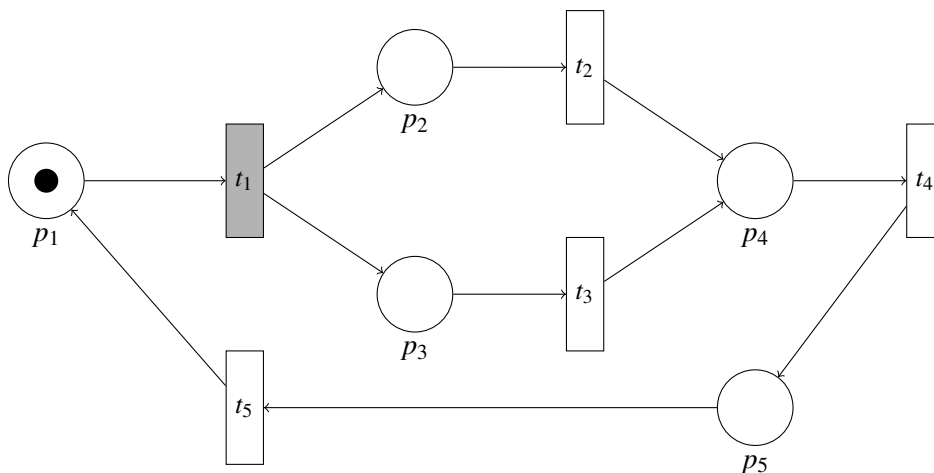
3.2.1 MODELAGEM DAS MATRIZES DE UMA RP

Consideremos a RP da Figura 16, apresentada na Secção 3.1.1, cujas características básicas são:

- p_1 é um lugar de entrada que tem uma ficha inicial.
- p_2 e p_3 são lugares que representam dois caminhos paralelos a partir de T_1 .
- p_4 e p_5 são lugares de saída.
- As transições t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 são eventos que conectam os lugares.

A referida figura é novamente posta a seguir, visando facilitar a percepção das matrizes de incidência.

Diagrama gráfico da RP representando o fluxo de produção industrial (Figura 16 da seção 3.1.1.)



Fonte: Autor,(2025)

3.2.2 MATRIZ DE PRÉ-INCIDÊNCIA (C^-)

A matriz de pré-incidência C^- é uma matriz $p \times t$, em que p é o número de lugares e t é o número de transições. Ela descreve a relação entre os lugares e as transições na direção dos arcos que vão dos lugares para as transições. Em outras palavras, cada elemento C_{ij}^- indica o número de fichas que um lugar P_i envia para a transição T_j .

Para a [RP](#) apresentada acima, a matriz de pré-incidência C^- seria apresentado conforme (1):

$$C^- = \begin{pmatrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ p_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ p_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Cada linha representa um lugar, e cada coluna representa uma transição. Os valores 1 indicam que há um arco conectando o lugar à transição correspondente.

3.2.3 MATRIZ DE PÓS-INCIDÊNCIA (C^+)

A matriz de pós-incidência C^+ também é uma matriz $p \times t$, mas ela descreve as conexões entre as transições e os lugares que recebem fichas após a execução de uma transição. Em outras palavras, cada elemento C_{ij}^+ indica o número de fichas que a transição T_j envia para o lugar P_i .

Para a rede apresentada, a matriz de pós-incidência C^+ seria apresentado conforme (2):

$$C^+ = \begin{pmatrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ p_2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ p_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Assim como na matriz de pré-incidência, os valores 1 indicam a direção de fluxo de fichas das transições para os lugares.

3.2.4 MATRIZ DE INCIDÊNCIA (C)

A matriz de incidência C é dada pela diferença entre as matrizes de pós-incidência e pré-incidência. Ela descreve a relação completa entre lugares e transições, considerando tanto os arcos de entrada (pré-incidência) quanto os de saída (pós-incidência), conforme apresentado conforme (3):

$$C = C^+ - C^- = \begin{pmatrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ p_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ p_2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ p_4 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ p_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Na matriz de incidência, o valor -1 indica um arco de entrada, o valor 1 indica um arco de saída, e o valor 0 indica que não há arco entre o lugar e a transição.

As matrizes de pré, pós e de incidência são fundamentais para a análise quantitativa de [RPs](#). Elas permitem a descrição das interações entre os lugares e transições e são usadas em diversas aplicações, como análise de alcançabilidade, verificações de segurança e determinação de ciclos de eventos em sistemas dinâmicos. Por meio dessas matrizes, é possível modelar e compreender o comportamento de sistemas complexos de maneira eficaz e matemática.

4 RP temporizadas

Conforme já definido anteriormente, as **RPs** são uma poderosa ferramenta para modelagem e análise de sistemas concorrentes e distribuídos. No entanto, em muitas aplicações práticas, a dimensão temporal do sistema é crucial, como em sistemas de controle industrial, redes de comunicação e sistemas de produção. Para incorporar aspectos temporais às RP clássicas, surgiram extensões como as *Redes de Petri Temporais* e as *Redes de Petri Temporalizadas*.

4.1 REDES DE PETRI TEMPORAIS

4.1.1 DEFINIÇÃO

Uma **Rede de Petri Temporal (RP-T)** é uma extensão das **RPs** clássicas em que são atribuídos intervalos de tempo mínimo e/ou máximo para a condição de disparo das transições. Isso significa que uma transição, uma vez habilitada, deve esperar um tempo mínimo antes de disparar, mas não pode ultrapassar um tempo máximo.

Formalmente, uma **RP-T** é definida como um par $T : T \rightarrow \mathbb{R}^+$ em que, para cada transição $t \in T$, há um tempo associado (α, β) , em que:

- α é o tempo mínimo que deve decorrer antes que a transição possa disparar.
- β é o tempo máximo permitido para que a transição dispare.

EXEMPLO DE REDE DE PETRI TEMPORAL

Considere um sistema de produção com duas etapas: **montagem** e **inspeção**. A montagem leva entre 3 e 6 segundos, e a inspeção entre 2 e 4 segundos.

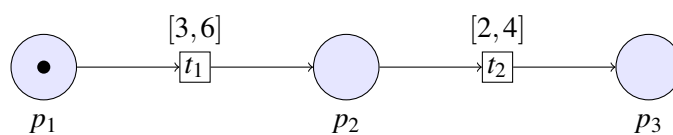
Representamos essa dinâmica por uma **RP-T**:

- t_1 : Montagem, com intervalo de tempo $[3, 6]$.
- t_2 : Inspeção, com intervalo de tempo $[2, 4]$.

Isso significa que, após a habilitação de t_1 , deve-se esperar pelo menos 3 segundos antes de dispará-la, mas não mais que 6 segundos. O mesmo ocorre para t_2 .

O processo acima descrito é representado graficamente conforme Figura 17.

Figura 17 – Representação gráfica de um RP-T.



Fonte: Autor,(2025)

4.1.2 PROPRIEDADES DAS REDES DE PETRI TEMPORAIS

As **RP-Ts** preservam muitas propriedades das RP clássicas, mas também introduzem novos desafios, como:

- **Bloqueio Temporal:** Se uma transição perder seu intervalo de disparo, o sistema pode ficar preso.
- **Concorrência Temporizada:** O tempo influencia quais transições disparam primeiro em cenários concorrentes.

4.2 REDES DE PETRI TEMPORALIZADAS

4.2.1 DEFINIÇÃO

As **Rede de Petri Temporizadas (RP-Tzs)** diferem das **RP-Ts** por associarem tempos **não às transições**, mas às fichas (*tokens*). Isso permite modelar fenômenos em que o tempo é uma propriedade das entidades que fluem no sistema, como processos industriais ou redes de transporte.

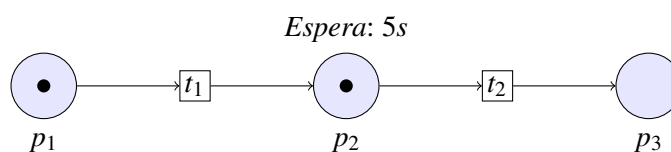
EXEMPLO DE REDE DE PETRI TEMPORALIZADA

Seja um sistema de entrega de pacotes no qual cada pacote tem um tempo de processamento antes de ser enviado. Podemos modelar isso com fichas que carregam *timestamps*(marca temporal)¹:

- p_1 : Local de coleta
- p_2 : Processamento (com tempo de retenção de 5 segundos)
- p_3 : Entrega

Aqui, quando uma ficha chega a p_2 , ela deve aguardar 5 segundos antes que t_2 possa movê-la para p_3 . Esse processo descrito é representado graficamente na Figura 18.

Figura 18 – Representação gráfica de um RP-Tz.



Fonte: Autor,(2025)

4.2.2 VANTAGENS DAS REDES DE PETRI TEMPORALIZADAS

- Modelam sistemas em que a temporalidade é inerente às entidades.
- Evitam bloqueios causados por tempos fixos nas transições.

¹ Um *timestamp* (marca temporal) representa um valor de tempo associado a um evento ou elemento do sistema, indicando quando algo ocorreu ou quando será processado.

4.3 COMPARATIVO ENTRE RP-T E RP-TZ

Característica	RP-T	RP-Tz
Tempo associado a	Transições (t)	Fichas (<i>tokens</i>)
Controle de fluxo	Baseado em intervalos fixos	Baseado no tempo de vida da ficha
Aplicabilidade	Processos industriais, workflow	Redes de comunicação, transporte

Tabela 2 – Comparativo entre RPT e RPTz

4.4 CONCLUSÃO

Redes de Petri Temporais e Temporalizadas são ferramentas fundamentais para modelagem de sistemas dinâmicos com restrições temporais. Enquanto as primeiras são mais indicadas para processos de controle e produção, as segundas são essenciais para modelar sistemas onde o tempo é uma propriedade das entidades que fluem.

No próximo capítulo, exploraremos algoritmos de análise para essas redes e suas aplicações na otimização de sistemas reais.

5 Redes de Petri Hierárquicas

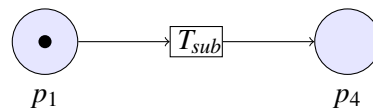
As **Redes de Petri Hierárquicas (RPH)** estendem as Redes de Petri convencionais permitindo a modelagem em diferentes níveis de abstração. Essa abordagem facilita a decomposição de sistemas complexos em componentes mais gerenciáveis.

5.1 DEFINIÇÃO

Uma **RPH** consiste em uma estrutura em que certos componentes (sub-redes) podem ser representados como transições abstratas em um nível superior. Isso permite uma visão modular e organizada do sistema modelado.

Sejam as figuras 19 e 20 a seguir. A Figura 19 ilustra uma **RP** em que é representado um processo em nível superior como entrada e saída de um sub-processo que ocorre num nível de sub-rede. A Figura 20, por sua vez, representa esse processo no sub-nível da **RP**.

Figura 19 – Rede de Petri Hierárquica - Nível Superior

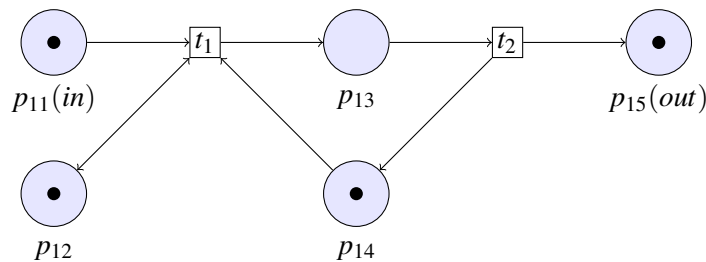


Fonte: Autor,(2025)

Aqui, a transição T_{sub} representa uma sub-rede detalhada em outro nível, cuja a estrutura interna da transição T_{sub} exibe sua funcionalidade interna.

Perceba, na Figura 20, que os lugares p_{11} e p_{15} estão referenciados com as inscrições *in* e *out*, respectivamente. Essas inscrições referem-se aos lugares de entrada e saída da transição T_{sub} que estão representados na Figura 19 por p_1 e p_4 . Isso significa que para cada lugar de entrada e saída p_i na transição T_{sub} , haverá um lugar p_j correspondente dentro da sub-rede modelada ($\forall i, j \in \mathbb{N}$).

Figura 20 – Rede de Petri Hierárquica - Nível de sub-rede



Fonte: Autor,(2025)

As Redes de Petri Hierárquicas permitem uma organização mais clara e a reutilização de componentes em sistemas de grande porte.

6 CPN IDE[®]

Com o avanço das tecnologias de modelagem e simulação, a análise de sistemas complexos tornou-se mais acessível e eficiente. Nesse cenário, o CPN Tools[®] consolidou-se como uma ferramenta amplamente reconhecida na comunidade de Redes de Petri, oferecendo um ambiente robusto para a construção, simulação e análise de modelos de **Redes de Petri Coloridas (RPC)** (*Coloured Petri Nets* – CPN). No entanto, sua implementação na linguagem BETA, bem como a dependência do sistema de desenvolvimento Mjølner — ambos atualmente em desuso — comprometeram sua manutenção e expansão, conforme divulgado no sítio oficial do desenvolvedor (<https://cpnide.org/>).

Visando superar tais limitações e assegurar a continuidade evolutiva da ferramenta, foi desenvolvido o CPN IDE[®], que substitui o CPN Tools[®] como solução moderna para edição e simulação de modelos de **RPCs**. Sua principal vantagem reside na extensibilidade e compatibilidade com sistemas operacionais contemporâneos. Diferentemente de seu antecessor, que utilizava um editor baseado em BETA, o CPN IDE[®] adota uma abordagem modular, integrando um editor em JavaScript[®] que se comunica com um controlador Java por meio de uma interface REST². Esse controlador utiliza o Access/CPN, que encapsula o simulador ML do CPN Tools[®] em uma implementação Java.

Segundo seus desenvolvedores, a transição para o CPN IDE foi motivada pela necessidade de garantir a longevidade da ferramenta, sobretudo em aplicações como a mineração de processos. No Departamento de Matemática e Ciência da Computação da Eindhoven University of Technology (TU/e), onde o CPN Tools era amplamente empregado no ensino e na pesquisa, a obsolescência tecnológica motivou o desenvolvimento do CPN IDE como alternativa sustentável e expansível. Além de preservar as funcionalidades do CPN Tools, o CPN IDE permite integração com ferramentas como o **ProM**³, possibilitando a descoberta de uma Rede de Petri a partir de *logs*, sua edição e posterior análise de conformidade por meio de simulações.

6.1 INTERFACE, FUNCIONALIDADES E LINGUAGEM DO CPN IDE[®]

6.1.1 INTERFACE

Na Figura 21 é apresentada a interface principal do ambiente de desenvolvimento do CPN IDE[®]. No centro, observa-se a área de modelagem, destacando-se três elementos: (a) o lugar p_1 ; (b) a transição t_1 ; e (c) o lugar p_2 .

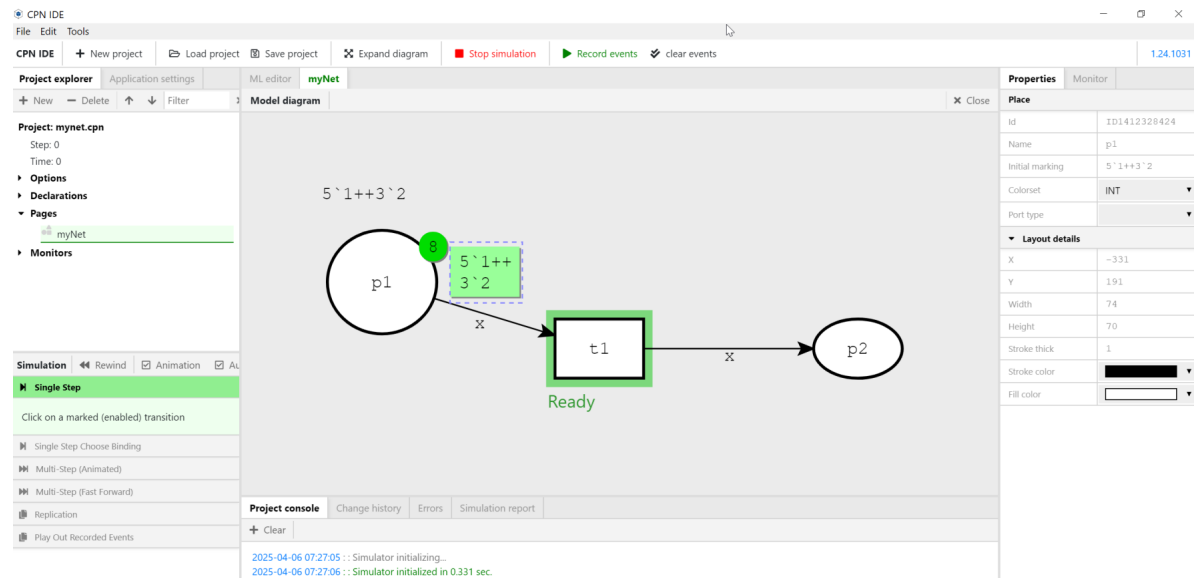
A transição t_1 está envolta por uma moldura verde, indicando que está habilitada para disparo — indicação padrão utilizada pelo software no modo de animação. Verifica-se que o lugar p_1 contém oito fichas: cinco com valor 1 e três com valor 2.

Os arcos que ligam p_1 a t_1 e t_1 a p_2 utilizam a variável x , representando o valor de cada ficha presente em p_1 . Isso é viabilizado pela definição de conjuntos de cores, ou seja, os tipos de dados atribuídos a cada lugar. Neste exemplo, p_1 e p_2 foram definidos com o conjunto de cores **INT** (inteiros).

² REST (*Representational State Transfer*) é uma arquitetura para desenvolvimento de sistemas distribuídos baseada em operações HTTP como GET, POST, PUT e DELETE.

³ ProM é uma plataforma de mineração de processos que oferece uma coleção extensível de algoritmos para análise de *logs* de eventos. Disponível em: <https://www.promtools.org/>.

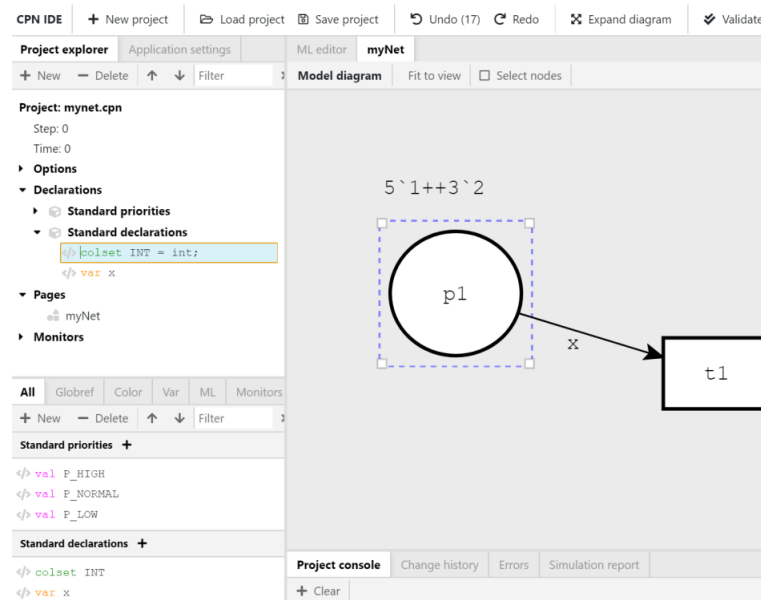
Figura 21 – Interface de desenvolvimento do CPN IDE®



Fonte: Autor (2025)

A inserção dessas declarações ocorre por meio do painel *Project Explorer*, conforme ilustrado na Figura 22. Este será detalhado na Seção ??.

Figura 22 – Área de declarações no CPN IDE®



Fonte: Autor (2025)

6.1.2 FUNCIONALIDADES PRINCIPAIS DO CPN IDE®

O CPN IDE® oferece recursos essenciais para a modelagem, simulação e análise de Redes de Petri Coloridas, dentre os quais se destacam:

- **Criação e edição de modelos:** por meio de um editor gráfico que permite desenhar redes, configurar atributos e inserir declarações em **CPN ML**. Os modelos podem ser organizados em páginas

hierárquicas.

- **Simulação do modelo:** permite a análise dinâmica e depuração, com suporte à simulação passo a passo ou automática. Também é possível realizar simulações de longo prazo para estimativa de métricas como taxa de transferência e qualidade de serviço (**QoS**)⁴.
- **Geração e análise do espaço de estados:** possibilita verificar propriedades como limitação (*boundedness*) e vivacidade (*liveness*) por meio de consultas escritas em **CPN ML**. Em modelos complexos, a análise pode ser comprometida pela explosão do espaço de estados.

6.1.3 LINGUAGEM DO CPN IDE®: CPN ML

O CPN IDE® utiliza a linguagem **CPN ML**, uma extensão da linguagem ML voltada à definição de declarações e inscrições em RPCs. Nela, é possível declarar conjuntos de cores (tipos de dados), variáveis, funções e constantes.

Cada lugar da rede associa-se a um conjunto de cores, que define os tipos de fichas permitidos. Variáveis e funções são utilizadas nas inscrições dos arcos e nas guardas das transições.

As declarações são inseridas na área denominada **índice**. O CPN ML disponibiliza os seguintes conjuntos de cores predefinidos:

- **E** – Elementar;
- **INT** – Inteiro;
- **BOOL** – Booleano;
- **STRING** – Cadeia de caracteres.

O usuário pode, ainda, definir conjuntos de cores personalizados, variáveis e estruturas, por meio do **menu sensível ao contexto**, ou importar declarações de arquivos externos — recurso útil em modelos complexos.

O sistema realiza verificação automática de sintaxe ao criar ou carregar uma rede. O status dessa verificação é indicado por **auras coloridas** nos elementos e **sublinhados coloridos** nas declarações, conforme descrito a seguir:

- **Aura laranja:** elemento ainda não verificado;
- **Aura amarela:** verificação em andamento;
- **Sem aura:** verificação concluída com sucesso;
- **Aura vermelha:** erro de sintaxe detectado.

O tempo necessário para a verificação depende da complexidade do modelo. Declarações são avaliadas sequencialmente, de cima para baixo, e dependências não resolvidas geram erros. Alterações em uma declaração provocam a reavaliação automática das dependentes.

⁴ **QoS:** métricas como latência, jitter, largura de banda e taxa de perda de pacotes.

Erros são sinalizados com sublinhado vermelho tanto no nome da declaração quanto na página correspondente. Quando um elemento apresenta aura vermelha, o sistema exibe uma **janela explicativa** descrevendo o erro. Elementos conectados a componentes com erro não são verificados até a resolução completa do problema.

6.2 FUNÇÕES E ESTRUTURAS DE CONTROLE NA LINGUAGEM CPN ML

A linguagem utilizada no CPN IDE é uma variação da ML (MetaLanguage), conhecida como Standard ML (SML), adaptada para suportar a modelagem de Redes de Petri Coloridas (CPNs). Um dos principais recursos dessa linguagem são as **funções**, que permitem expressar lógica condicional, iteração e decisões complexas de forma funcional e elegante. As estruturas mais comuns são: `if`, `case`, `let`, `fn`, `fun`, e estruturas de iteração como `List.map`, `List.foldl`, entre outras.

6.2.1 ESTRUTURA IF-THEN-ELSE

A estrutura `if-then-else` permite realizar decisões condicionais simples. Sua sintaxe é semelhante a outras linguagens de programação:

```
fun eMaiorQueZero x =
  if x > 0 then true
  else false;
```

O exemplo acima define uma função que retorna `true` se o número for maior que zero; caso contrário, retorna `false`. Essa estrutura é útil em guardas de transições ou em expressões associadas às variáveis de arco.

6.2.2 ESTRUTURA CASE-OF

A estrutura `case-of` permite o tratamento de diferentes padrões de dados, o que é extremamente útil para modelagem com tipos algébricos e listas:

```
fun classificarNota n =
  case n of
  10 => "Excelente"
  | 7 => "Bom"
  | 5 => "Regular"
  | _ => "Insuficiente";
```

Neste exemplo, a função retorna uma classificação textual conforme a nota fornecida. O caractere `_` representa qualquer outro valor que não tenha sido previamente tratado.

6.2.3 FUNÇÕES ANÔNIMAS: FN

Funções anônimas são expressões de função que não precisam ser nomeadas. São úteis para serem passadas como argumento a outras funções:

```
val dobrar = fn x => x * 2;
```

A função acima cria uma expressão que dobra o valor de entrada. Pode ser usada diretamente em expressões maiores, como em mapeamentos sobre listas.

6.2.4 FUNÇÕES NOMEADAS: FUN

A palavra-chave `fun` permite declarar funções nomeadas, ideais para expressar lógica reutilizável e modular em modelos:

```
fun fatorial n =
  if n = 0 then 1
  else n * fatorial(n - 1);
```

Esse exemplo define a função recursiva do fatorial. Essa abordagem é muito comum em cálculos dentro de expressões de arco ou ações de transição.

6.2.5 BLOCO LET-IN-END

A estrutura `let-in-end` permite declarar variáveis locais temporárias para compor uma lógica mais complexa:

```
fun media (a, b, c) =
  let
    val soma = a + b + c
  in
    soma / 3
  end;
```

Neste exemplo, uma variável intermediária `soma` é utilizada dentro da função `media`, tornando o código mais organizado.

6.2.6 ITERAÇÃO FUNCIONAL: MAP E FOLDL

Como SML é uma linguagem funcional, a repetição é feita com funções de ordem superior. Por exemplo:

```
val quadrados = List.map (fn x => x * x) [1, 2, 3, 4];
```

A função `List.map` aplica a função anônima a cada elemento da lista, retornando uma nova lista com os quadrados dos números originais.

Outra função poderosa é o `foldl`, que agrega valores da esquerda para a direita:

```
val soma = List.foldl (fn (x, acc) => x + acc) 0 [1, 2, 3, 4];
```

6.2.7 RESUMO DAS ESTRUTURAS DE CONTROLE

Na Tabela 3 é apresentada um resumo das estruturas de controle na Linguagem CPN ML.

Tabela 3 – Principais Estruturas de Controle na Linguagem CPN ML

Comando	Descrição
<code>if-then-else</code>	Avaliação condicional simples.
<code>case-of</code>	Avaliação de múltiplos padrões.
<code>fn</code>	Funções anônimas para uso pontual.
<code>fun</code>	Definição de funções nomeadas e recursivas.
<code>let-in-end</code>	Declaração de variáveis locais.
<code>List.map</code>	Iteração funcional para transformar listas.
<code>List.foldl</code>	Redução de lista com acumulador.

6.3 FUNÇÕES E RECURSOS ASSOCIADOS ÀS TRANSIÇÕES E ARCOS

Em redes de Petri coloridas (CPNs), as transições representam eventos que modificam o estado do sistema ao consumirem e produzirem tokens. No *CPN Tools*, essas transições podem ser enriquecidas com expressões escritas em uma linguagem funcional baseada em Standard ML (Meta Language), oferecendo um elevado nível de expressividade e controle sobre o comportamento da rede.

6.3.1 GUARDS: RESTRIÇÕES AO DISPARO DE TRANSIÇÕES

Os *guards* são expressões booleanas associadas às transições que funcionam como condições de habilitação. Uma transição somente poderá ser disparada se seu guard for avaliado como verdadeiro, dado o estado atual das fichas nos lugares de entrada.

```
x > 0 andalso x < 10
```

Esse guard restringe o disparo da transição para valores de x estritamente entre 1 e 9, promovendo maior controle e segurança lógica sobre o fluxo de eventos no modelo.

6.3.2 EXPRESSÕES EM ARCOS: MANIPULAÇÃO DE TOKENS

Os arcos de entrada e saída podem conter expressões que descrevem como os tokens devem ser lidos ou produzidos. Essas expressões são avaliadas no momento do disparo da transição e podem utilizar operadores, funções ou estruturas compostas como tuplas e listas.

Listing 6.1 – Expressão de arco

```
(x, y)
```

A expressão acima indica que dois valores, x e y , são consumidos ou produzidos como um par ordenado.

6.3.3 ESTRUTURAS DE CONTROLE: IF, CASE, LET

A linguagem de expressões suporta estruturas de controle típicas de linguagens funcionais, permitindo o uso de lógica condicional, correspondência de padrões e definições locais.

- **if ... then ... else ...**: permite avaliação condicional simples.
- **case ... of ...**: realiza análise estrutural por padrão, ideal para listas e tipos compostos.
- **let ... in ... end**: declara variáveis locais e organiza expressões complexas.

```
if x mod 2 = 0 then "par" else "impar"
```

```
case lista of
[] => 0
| x::xs => x + List.length(xs)
```



```

let
  val soma = x + y
in
  soma * 2
end

```

Essas estruturas tornam o comportamento das transições mais robusto e adaptável a diferentes condições do sistema.

6.3.4 FUNÇÕES PADRÃO E DEFINIDAS PELO USUÁRIO

O *CPN IDE* oferece suporte tanto a funções nativas de ML quanto à criação de funções personalizadas. As funções podem ser utilizadas em guards, expressões de arco ou inicializações de lugares.

Listing 6.2 – Função definida pelo usuário

```

fun dobro x = x * 2;

```

Tais funções podem ser escritas na aba de código global (Declarations), permitindo reutilização e modularidade no modelo.

6.3.5 FUNÇÕES DE LISTA E RECURSIVIDADE

A linguagem suporta operações sobre listas, como `List.map`, `List.foldl`, `List.length`, entre outras. A recursão também é amplamente utilizada para implementar comportamentos iterativos e transformações complexas.

```

List.foldl (fn (x, acc) => x + acc) 0 [1,2,3,4]

```

```

fun fatorial n =
  if n = 0 then 1
  else n * fatorial(n - 1);

```

Esses recursos tornam possível simular algoritmos computacionais diretamente dentro das transições.

6.4 DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE NO CPN IDE

O *CPN IDE*, por meio do módulo `Random`, fornece funções para gerar números aleatórios com base em distribuições estatísticas amplamente utilizadas em modelagem estocástica. A seguir, apresentam-se as principais distribuições disponíveis, com sintaxe, parâmetros e principais propriedades.

DISTRIBUIÇÕES DISPONÍVEIS

- **Bernoulli** – `bernoulli(p)`: $0 \leq p \leq 1$, Média: p , Variância: $p(1 - p)$
- **Binomial** – `binomial(n, p)`: $n \in \mathbb{N}^+$, $0 \leq p \leq 1$, Média: np , Variância: $np(1 - p)$
- **Qui-quadrado (Chi-sq)** – `chisq(n)`: $n \in \mathbb{N}^+$, Média: n , Variância: $2n$
- **Erlang** – `erlang(n, r)`: $n \in \mathbb{N}^+$, $r > 0$, Média: nr , Variância: nr^2

- **Exponencial** – $\text{exponential}(r) : r > 0$, Média: $\frac{1}{r}$, Variância: $\frac{1}{r^2}$
- **Normal (Gaussiana)** – $\text{normal}(\mu, \sigma^2) : \mu, \sigma^2 \in \mathbb{R}$, Média: μ , Variância: σ^2
- **Poisson** – $\text{poisson}(m) : m > 0$, Média = Variância = m
- **Student (t)** – $\text{student}(n) : n > 1$, Média: 0, Variância: $\frac{n}{n-2}$ (se $n > 2$)
- **Uniforme** – $\text{uniform}(a, b) : a \leq b$, Média: $\frac{a+b}{2}$, Variância: $\frac{(b-a)^2}{12}$

6.5 MULTI-CONJUNTOS (MULTI-SETS)

Os **multi-conjuntos** são amplamente utilizados no *CPN IDE* para representar marcações em lugares, além de outros propósitos. Também conhecidos como *bolsas (bags)*, diferem dos conjuntos tradicionais por permitirem múltiplas cópias do mesmo elemento.

O operador ``` (acento grave) é utilizado para construir multi-conjuntos. Por exemplo, `7`4` representa o multi-conjunto com sete cópias do elemento de cor 4. A sintaxe geral é:

- `i`c` – onde `i` é um inteiro não negativo que representa a multiplicidade do elemento `c`.

O operador de construção de multi-conjuntos pode ser combinado com os operadores de adição (`++`) e subtração (`-`), permitindo uma especificação simples e clara. Por exemplo, a marcação inicial do lugar `saco` com grãos, mostrada na Figura ??, na Seção 2.2, é:

```
250`arroz ++ 300`aveia ++ 270`trigo
```

Isso significa que o lugar contém 250 grãos de arroz, 300 de aveia e 270 de trigo.

Atenção: o operador correto de construção de multi-conjuntos é o acento grave (```), e não o apóstrofo comum (`'`).

OPERAÇÕES E FUNÇÕES DISPONÍVEIS

Os multi-conjuntos oferecem diversas operações úteis, como segue:

- `empty` – multi-conjunto vazio (compatível com qualquer tipo de cor).
- `ms1 == ms2` – verifica igualdade entre `ms1` e `ms2`.
- `ms1 <><> ms2` – verifica desigualdade.
- `ms1 » ms2` – `ms1` é estritamente maior que `ms2`.
- `ms1 »== ms2` – `ms1` é maior ou igual a `ms2`.
- `ms1 « ms2` – `ms1` é estritamente menor que `ms2`.
- `ms1 «== ms2` – `ms1` é menor ou igual a `ms2`.
- `ms1 ++ ms2` – união de multi-conjuntos (soma das multiplicidades).

- `ms1 - ms2` – subtração de multiplicidades.
- `i ** ms` – multiplicação escalar do multi-conjunto `ms` por `i`.
- `size ms` – retorna a cardinalidade total do multi-conjunto `ms`.
- `random ms` – seleciona pseudo-aleatoriamente uma cor de `ms`.
- `cf(c, ms)` – retorna o número de cópias da cor `c` em `ms`.
- `filter p ms` – retorna um novo multi-conjunto com elementos que satisfazem o predicado `p`.

EXEMPLO PRÁTICO

Sejam os multi-conjuntos:

```
m1 = 3`7 ++ 5`2 ++ 8`14;
m2 = 1`7 ++ 2`2 ++ 5`14;
```

Então, temos:

- `m1 ++ m2 = 4`7 ++ 7`2 ++ 13`14`
- `m1 - m2 = 2`7 ++ 3`2 ++ 3`14`
- `m1 » m2` é verdadeiro
- `size m1 = 16`
- `cf(14, m2) = 5`

USO NO *CPN IDE*

No *CPN IDE*, assim como no *CPN Tools*, qualquer marcação — seja inicial ou corrente — de um lugar é representada por um multi-conjunto do conjunto de cores associado a esse lugar.

No momento do disparo de uma transição, é realizada uma escolha aleatória de uma ficha, de acordo com a variável associada ao arco de saída do lugar, respeitando a multiplicidade definida pelo multi-conjunto.

CONSIDERAÇÕES

As funções são avaliadas no estilo ML e podem ser utilizadas diretamente em marcações de tempo, guardas ou ações dentro das transições. A escolha da distribuição deve refletir o comportamento probabilístico do sistema modelado.

6.5.1 BOAS PRÁTICAS E CONSIDERAÇÕES DE TIPAGEM

Por ser uma linguagem fortemente tipada, o CPN IDE exige que todas as expressões estejam de acordo com os tipos definidos nos *colsets* dos lugares. Incompatibilidades de tipo impedem o disparo da transição e devem ser corrigidas antes da simulação.

Além disso, é recomendável:

- Escrever funções pequenas e bem nomeadas;
- Evitar duplicação de lógica usando o bloco `let`;
- Utilizar `case` para tratamento seguro de listas e estruturas opcionais;
- Testar funções na aba de código antes de usá-las nos arcos ou guards.

Desse modo, observa-se que compreender as estruturas de controle da linguagem CPN ML é fundamental para criar modelos eficientes, expressivos e modulares no CPN IDE. Tais estruturas permitem incorporar lógica complexa de maneira clara e rigorosa, promovendo maior confiabilidade na simulação de sistemas concorrentes e distribuídos.

7 Modelagem de Redes de Petri Coloridas com Conjuntos de Cores

O ambiente *CPN IDE*, assim como o *CPN Tools*, disponibiliza um sistema robusto de definição de conjuntos de cores, fundamental para a modelagem de Redes de Petri Coloridas (RPC). Esses conjuntos de cores são categorizados em dois grupos principais: os conjuntos de cores simples, abordados nesta seção, e os conjuntos de cores compostas, que serão tratados na Seção 7.2.

7.1 CONJUNTOS DE CORES SIMPLES

Os conjuntos de cores simples constituem os blocos básicos para a construção de modelos no *CPN Tools*. Eles representam domínios de dados fundamentais e são amplamente utilizados em marcações, expressões e transições. Os tipos simples disponíveis são:

`Unit, Boolean, Integer, String, Enumerated, Index`

Cada um desses conjuntos será apresentado individualmente, destacando suas características, uso típico em modelagem e operações disponíveis no ambiente.

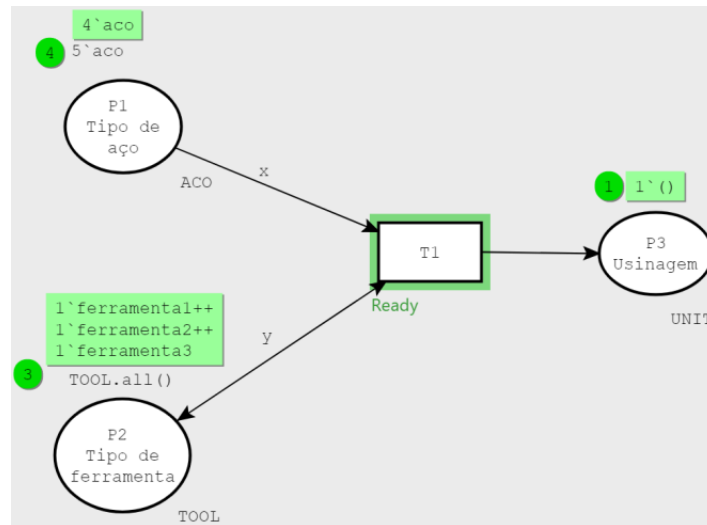
7.1.1 CONJUNTO DE CORES UNIT

O conjunto de cores `unit` compreende um único elemento. Esse conjunto é utilizado quando se deseja modelar um lugar que simplesmente indica presença de uma ficha (*token*). Sua declaração possui a seguinte sintaxe:

```
colset name = unit [with new unit];
```

Se a opção (*new unit*) não for utilizada, o nome da ficha coincide com o nome do conjunto de cores.

Na Figura 23 é apresentada uma rede que modela uma etapa de usinagem utilizando o conjunto de cores `unit`. O lugar p_1 representa a modelagem de material a ser usinado, o lugar p_2 representa o recurso de ferramental necessário à usinagem, e o lugar p_3 representa a material já usinado. Perceba que: as fichas em p_1 são do tipo `aco`, pertencentes ao `colset ACO`; as fichas em p_2 são do tipo `ferramenta1`, `ferramenta2`, `ferramenta3`, pertencentes ao `colset TOOL`; as fichas em p_3 são do tipo indefinido, porém pertencentes ao `colset UNIT`.

Figura 23 – Modelagem do conjunto de cores `unit` no CPN IDE®

Fonte: Autor, (2025)

Perceba que a marcação atual da rede corresponde a um estado aleatório de disparo da transição. As seguintes declarações foram utilizadas na rede em questão.

```
colset ACO = with 1..5;
colset TOOL = unit with ferramenta1 | ferramenta2 | ferramenta3 ;
colset UNIT = unit;
var x : ACO;
var y : TOOL;
```

A modelagem desta rede no CPN IDE® está disponível no endereço: https://github.com/JonathaCosta-IA/MDES/tree/main/B-MDES_Nets/Nets_handbook.

7.1.2 CONJUNTO DE CORES BOOLEAN

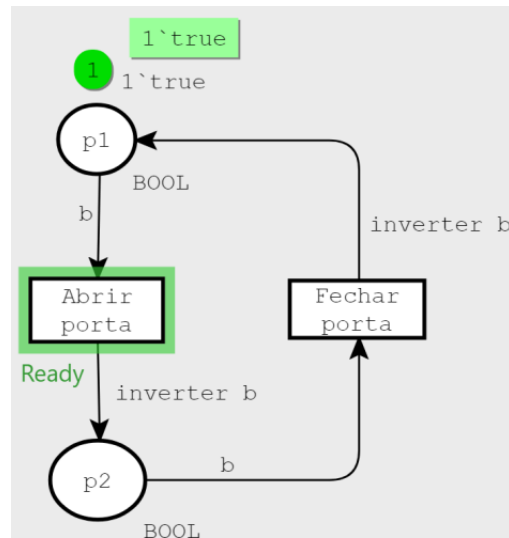
O conjunto de cores boolean compreende dois valores `true` e `false`. Sua declaração possui a seguinte sintaxe:

```
colset name = bool [with new false, new true];
```

As opções (*new false*, *new true*) permitem novos nomes para *false* e *true*. Por exemplo, não e sim. `colset Pergunta = bool with (nao, sim);` As seguintes operações podem ser aplicadas às variáveis booleanas:

```
not b : negação do valor booleano de b;
b1 andalso b2 : conjunção booleana and;
b1 orelse b2 : disjunção booleana or.
```

Na Figura 24, é apresentada uma rede de Petri colorida que modela o processo de abertura e fechamento automático de uma porta com base em um sensor de presença. O lugar p_1 representa o estado inicial do sensor, indicando que há uma pessoa próxima à porta (valor booleano `true`). Já o lugar p_2 representa o estado final do sensor, indicando que a pessoa se afastou (valor `false`). A função `inverter b` é responsável por realizar a operação booleana de negação, alternando entre os estados `true` e `false`, conforme o comportamento esperado do sensor.

Figura 24 – Modelagem do conjunto de cores `bool` no CPN IDE®

Fonte: Autor, (2025)

Perceba que a marcação atual da rede corresponde a um estado aleatório de disparo da transição. As seguintes declarações foram utilizadas na rede em questão.

```
colset BOOL = bool;
var b : BOOL;
fun inverter b = not b;
```

A modelagem desta rede no CPN IDE® está disponível no endereço: https://github.com/JonathaCosta-IA/MDES/tree/main/B-MDES_Nets/Nets_handbook.

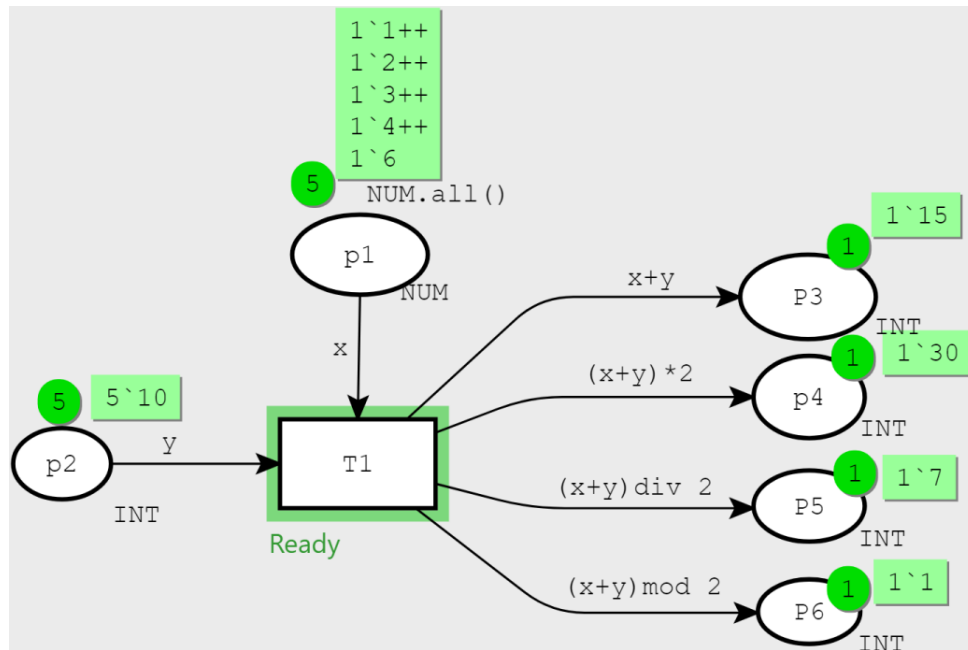
7.1.3 CONJUNTO DE CORES INTEGER

O conjunto de cores Integer compreende os valores inteiros. Sua declaração possui a seguinte sintaxe:

```
colset name = int with int-exp1 .. int-exp2;
```

Adicionalmente, a opção **with** permite restringir o conjunto de cores inteiro pelo *intervalo* determinado pelas duas expressões `int-exp1` e `int-exp2`.

Na Figura 25, é apresentada uma rede de Petri colorida que modela uma etapa de contagem de produtos, utilizando o conjunto de cores `int`. O lugar p_1 armazena os valores individuais dos produtos, enquanto o lugar p_2 representa um peso fixo de 10 unidades associado a cada operação de contagem.

Figura 25 – Modelagem do conjunto de cores `int` no CPN IDE®

Fonte: Autor, (2025)

Perceba que a marcação atual da rede corresponde a um estado aleatório de disparo da transição. As seguintes declarações foram utilizadas na rede em questão.

```
colset INT = int;
colset NUM = int with 1..6;
var x : NUM;
var y : INT;
```

Na marcação atual da rede, observam-se cinco fichas em p_1 , com os valores $[1, 2, 3, 4, 5]$; cinco fichas de valor 10 em p_2 ; e uma ficha no lugar p_3 , com valor 15. Essa ficha em p_3 resulta da soma valor 5, anteriormente presente em uma ficha de p_1 , com o valor 10, proveniente de uma ficha de p_2 . Essa operação é descrita no arco que liga T_1 a p_3 pela expressão $x + y$. O modo processo aplica-se às expressões dos demais arcos de modo que: p_4 recebe o produto de $(x + y) \times 2$, p_5 recebe o valor da divisão de $\frac{(x + y)}{2}$, e p_6 recebe o valor do resto de divisão $(x + y) \times 2$. Assim, a rede executa uma operação de adição entre os valores de entrada, simulando o processo de contagem ponderada de produtos.

As seguintes operações podem ser aplicadas às variáveis inteiras: `+`, `-`, `div`, `mod`, `abs`, `Int.min`, `Int.max`. A modelagem desta rede no CPN IDE® está disponível no endereço: https://github.com/JonathaCosta-IA/MDES/tree/main/B-MDES_Nets/Nets_handbook.

7.1.4 CONJUNTO DE CORES STRING

O conjunto de cores **String** é especificado por uma sequência de caracteres ASCII entre aspas. Sua declaração possui a seguinte sintaxe:

```
colset name = string [with string-exp1 ..string-exp2
[and int-exp1..int-exp2]];
```

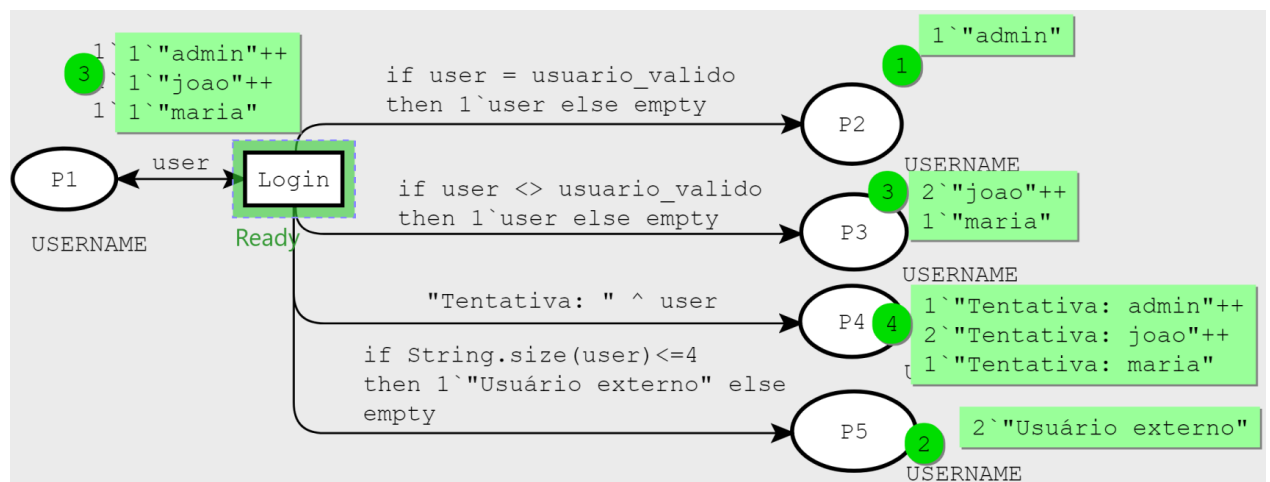

A opção `with` especifica o intervalo de caracteres válidos, por exemplo:

```
colset minusculas = string with "a".."z";
```

Na Figura 26, é apresentada uma rede de Petri colorida que modela uma etapa de acesso (*login*) de um sistema digital, utilizando o conjunto de cores `string`. O lugar p_1 armazena os valores individuais dos usuários que tentam acessar o sistema, o lugar p_2 representa os acessos de usuários autorizados *admin*, o lugar p_3 armazena o usuários não autorizados, o lugar p_4 armazena todas as tentativas de acesso, e o lugar p_5 armazena as fichas cujo valor tamanho da `string` seja menor ou igual a 4, identificando como usuário externo.

A distinção entre os usuários é realizada por uma função *if* sobre a variável *user*, tendo *admin* como *usuário válido*.

Figura 26 – Modelagem do conjunto de cores `string` no CPN IDE®



Fonte: Autor, (2025)

Perceba que a marcação atual da rede corresponde a um estado aleatório de disparo da transição.

As seguintes declarações foram utilizadas na rede em questão.

```
colset USERNAME = string;
var user : USERNAME;
val usuario_valido = "admin";
```

As seguintes operações podem ser aplicadas às variáveis `string`: `^` (concatenação), `String.size`, `substring`.

A modelagem desta rede no CPN IDE® está disponível no endereço: https://github.com/JonathaCosta-IA/MDES/tree/main/B-MDES_Nets/Nets_handbook.

7.1.5 CONJUNTO DE CORES ENUMERATED

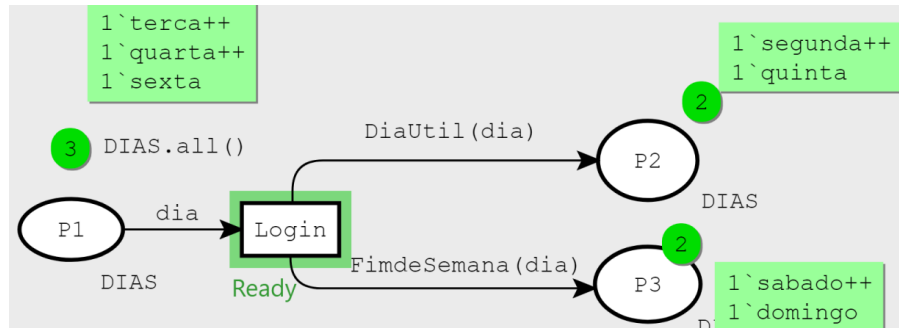
O conjunto de cores **Enumerated** explicita todos os identificadores na sua declaração. Sua sintaxe é assim definida:

```
colset name = with id0 | id1 | ... | idn;
```

Na Figura 27, é apresentada uma Rede de Petri Colorida que modela uma etapa relacionada aos dias da semana, utilizando um conjunto de cores do tipo `enumerated`. O lugar p_1 armazena fichas re-

presentando os dias da semana; o lugar p_2 armazena os dias úteis, filtrados pela função `DiaUtil(dia)`; e o lugar p_3 contém os dias de sábado e domingo, identificados pela função `FimdeSemana(dia)`.

Figura 27 – Modelagem do conjunto de cores enumerated no CPN IDE®



Fonte: Autor, (2025)

Perceba que a marcação atual da rede corresponde a um estado aleatório de disparo da transição. As seguintes declarações foram utilizadas na rede em questão.

```
colset DIAS = with segunda | terca | quarta
| quinta | sexta | sabado | domingo;
var dia : DIAS;
fun DiaUtil dia = if dia <> sabado andalso dia <> domingo
then 1`dia else empty;
fun FimdeSemana dia = if dia = sabado orelse dia = domingo
then 1`dia else empty;
```

A modelagem desta rede no CPN IDE® está disponível no endereço: https://github.com/JonathaCosta-IA/MDES/tree/main/B-MDES_Nets/Nets_handbook.

7.1.6 CONJUNTO DE CORES INDEXED

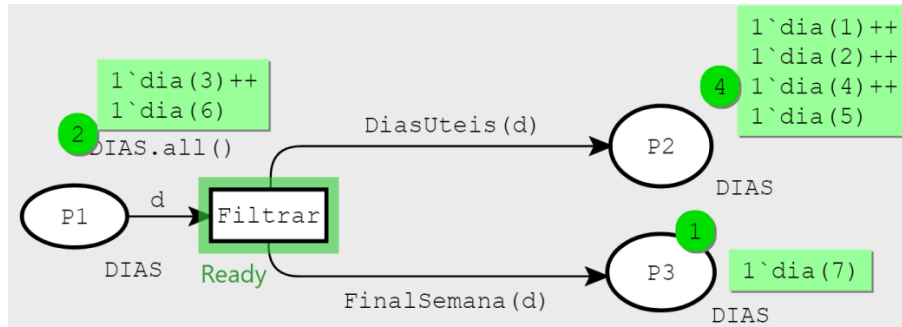
Os conjuntos de cores **Indexed** são sequências de valores que contêm um inteiro e um índice especificador. Sua declaração possui a seguinte sintaxe:

```
colset name = index id with int-exp1 ..int-exp2;
```

Valores indexados possuem o seguinte formato: `id i` ou `id(i)`, em que `i` é um inteiro e $\text{int-exp1} \leq i \leq \text{int-exp2}$.

Na Figura 28, é apresentada uma Rede de Petri Colorida que modela uma etapa relacionada aos dias da semana, utilizando um conjunto de cores do tipo `indexed`. O lugar p_1 armazena fichas representando os dias da semana; o lugar p_2 armazena os dias úteis, filtrados pela função `DiasUteis(d)`; e o lugar p_3 contém os dias de sábado e domingo, identificados pela função `FinalSemana(d)`.

Figura 28 – Modelagem do conjunto de cores indexed no CPN IDE®



Fonte: Autor, (2025)

Perceba que a marcação atual da rede corresponde a um estado aleatório de disparo da transição. As seguintes declarações foram utilizadas na rede em questão.

```
colset DIAS = index dia with 1..7;
var d: DIAS;
fun DiasUteis (dia(i)) = if i <=5 then 1`dia(i) else empty;
fun FinalSemana (dia(i)) = if i >5 then 1`dia(i) else empty;
```

A modelagem desta rede no CPN IDE® está disponível no endereço: https://github.com/JonathaCosta-IA/MDES/tree/main/B-MDES_Nets/Nets_handbook.

7.2 CONJUNTOS DE CORES COMPOSTOS

Os *conjuntos de cores compostos* são construídos a partir da combinação de conjuntos de cores simples. A linguagem CPN ML oferece suporte aos seguintes tipos de conjuntos compostos: `product`, `record`, `union`, `list`, `subset` e `alias`.

Dentre esses, os conjuntos `product` e `record` representam dados estruturados formados pelo produto cartesiano entre os elementos de outros conjuntos. A principal diferença entre eles está na nomeação dos componentes: enquanto os elementos do conjunto `product` são referenciados apenas por sua posição (sem nomes explícitos), os componentes do conjunto `record` são identificados por nomes, o que favorece a legibilidade e organização dos dados.

Essa distinção é análoga à encontrada entre tipos de dados em linguagens de programação tradicionais, como o tipo `record` na linguagem Pascal e a estrutura `struct` na linguagem C.

7.2.1 CONJUNTO DE CORES PRODUCT

O conjunto de cores do tipo `product` segue a seguinte sintaxe:

```
colset <nome> = product <nome_1> * <nome_2> * ... * <nome_n>;
```

Os valores pertencentes a esse conjunto possuem a forma:

$$(v_1, v_2, \dots, v_n),$$

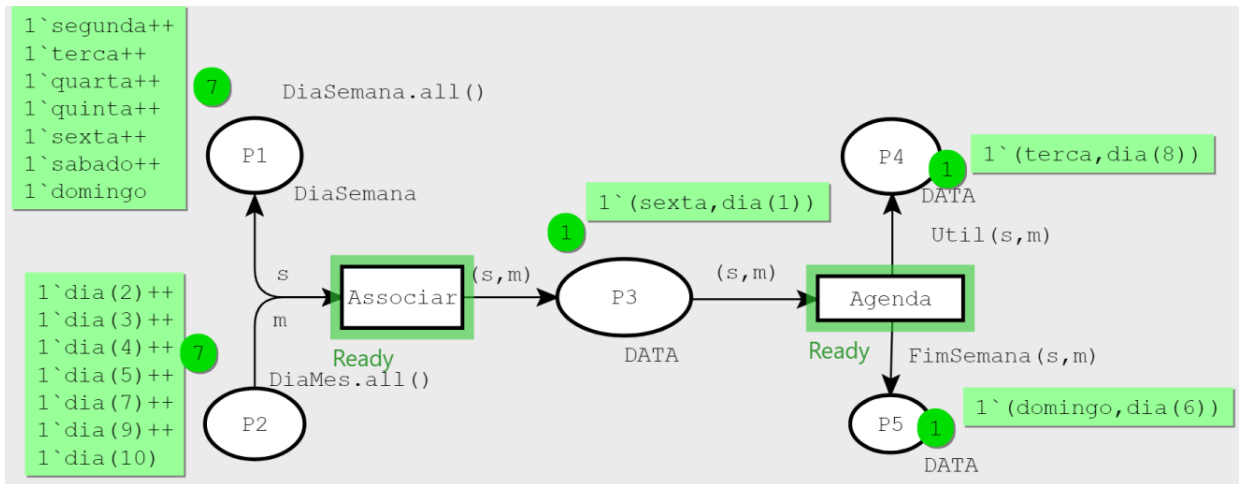
em que cada v_i é do tipo correspondente $\langle nome_i \rangle$, para $1 \leq i \leq n$.

Para acessar o i -ésimo elemento de uma variável do tipo `product`, utiliza-se a seguinte notação:

#<i> <nome>;

Na Figura 29, apresenta-se uma Rede de Petri Colorida que modela uma etapa relacionada aos dias da semana. O lugar p_1 armazena fichas representando os dias da semana, enquanto o lugar p_2 contém fichas correspondentes a 10 dias úteis. O lugar p_3 representa a associação entre as fichas provenientes de p_1 e p_2 , utilizando um conjunto de cores do tipo `product`. Por fim, os lugares p_4 e p_5 armazenam, respectivamente, as fichas classificadas como dias úteis e fins de semana, com base nas funções `Util` e `FimSemana` definidas nos arcos correspondentes.

Figura 29 – Modelagem do conjunto de cores `product` no CPN IDE®



Fonte: Autor, (2025)

Perceba que a marcação atual da rede corresponde a um estado aleatório de disparo da transição. As seguintes declarações foram utilizadas na rede em questão.

```
colset DiaSemana = with segunda | terca | quarta | quinta | sexta | sabado | domingo
;
colset DiaMes = index dia int 1 .. 10;
colset DATA = product DiaSemana * DiaMes;
var s : DiaSemana;
var m :DiaMes;
fun Util(s,m) = if s<>sabado andalso s<>domingo then 1`(s,m) else empty;
fun FimSemana(s,m) = if s=sabado orelse s=domingo then 1`(s,m) else empty;
```

A modelagem desta rede no CPN IDE® está disponível no endereço: https://github.com/JonathaCosta-IA/MDES/tree/main/B-MDES_Nets/Nets_handbook.

7.2.2 CONJUNTO DE CORES RECORD

O conjunto de cores do tipo **record** possui a seguinte sintaxe:

```
colset nome = record id1:name1 * id2:name2 * ... * idn:namen;
```

Os valores pertencentes a esse conjunto de cores têm a forma:

$$(id1 = v1, id2 = v2, \dots, idn = vn)$$

em que cada v_i é um valor do tipo $name_i$, para $1 \leq i \leq n$.

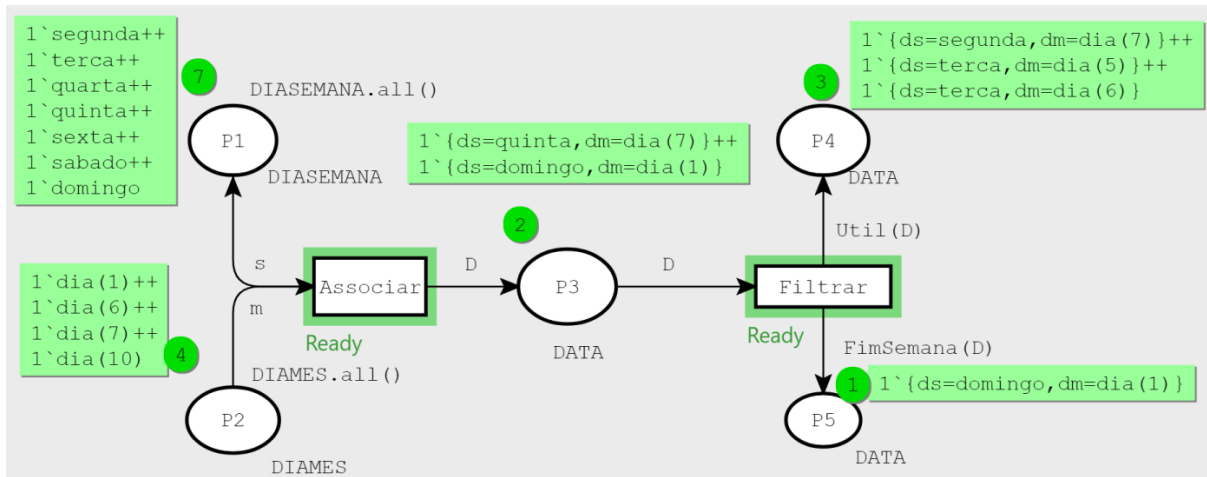
Para acessar o i -ésimo campo de um **record**, utiliza-se a seguinte operação:

```
#idi nome;
```

Considere o mesmo exemplo apresentado para o conjunto de cores `product` representado na Figura 29. Perceba a mesma rede agora modificada para o tipo `record` e representado na Figura 30.

Percebe que a Rede de Petri Colorida que modela, **de modo símile**, uma etapa relacionada aos dias da semana. O lugar p_1 armazena fichas representando os dias da semana, enquanto o lugar p_2 contém fichas correspondentes a 10 dias úteis. O lugar p_3 representa a associação entre as fichas provenientes de p_1 e p_2 , utilizando um conjunto de cores do tipo `record`. Por fim, os lugares p_4 e p_5 armazenam, respectivamente, as fichas classificadas como dias úteis e fins de semana, com base nas funções `Util` e `FimSemana` definidas nos arcos correspondentes.

Figura 30 – Modelagem do conjunto de cores `record` no CPN IDE®



Fonte: Autor, (2025)

Perceba que a marcação atual da rede corresponde a um estado aleatório de disparo da transição.

As seguintes declarações foram utilizadas na rede em questão:

```
colset DIASEMANA = with segunda | terca | quarta | quinta | sexta | sabado | domingo
;
colset DIAMES = index dia int 1 .. 10;
colset DATA= record ds:DIASEMANA * ds:DIAMES;
var s : DIASEMANA;
var m : DIAMES;
var D : DATA;
fun Util(D: DATA) = if #ds D <>sabado andalso #ds D<>domingo
then 1`D else empty;
fun FimSemana(D: DATA) = if #ds D = sabado orelse #ds D = domingo
then 1`D else empty;
```

A modelagem desta rede no CPN Tools® está disponível no repositório: https://github.com/JonathaCosta-IA/MDES/tree/main/B-MDES_Nets/Nets_handbook.

Observe que o `colset record` permite a declaração de identificadores nomeados diretamente associados aos tipos de dados do conjunto. Isso pode ser verificado no trecho destacado abaixo, extraído

das declarações utilizadas na modelagem da rede apresentada anteriormente, em que os identificadores `ds` e `dm` são definidos como parte integrante da estrutura do conjunto de cores:

```
colset DATA = record ds:DIASEMANA * dm:DIAMES;
```

A principal vantagem dessa abordagem é a melhoria na legibilidade e na clareza semântica do modelo. Ao utilizar identificadores nomeados, como `ds` e `dm`, torna-se mais intuitivo compreender o significado de cada componente do *token*, reduzindo a ambiguidade e a necessidade de memorizar posições específicas, como ocorre nos conjuntos de cores do tipo `product`. Essa estrutura favorece a manutenção e a escalabilidade do modelo, especialmente em redes complexas, em que o número de campos e a reutilização de estruturas são frequentes.

Além disso, embora os conjuntos de cores `product` e `record` apresentem diversas semelhanças estruturais, a forma de acesso aos seus elementos é distinta. No caso de `record`, o acesso é mais intuitivo e se assemelha ao uso de `structs` na linguagem de programação C, onde os campos são acessados por identificadores nomeados, utilizando-se a notação `#`. Em contraste, no tipo `product`, o acesso é posicional, geralmente realizado por meio de funções como `proj_i`.

7.2.3 CONJUNTO DE CORES UNION

O conjunto de cores `union` permite combinar dois ou mais conjuntos de cores distintos em um único tipo. Em condições normais, cada lugar da rede aceita fichas de apenas um conjunto de cores. No entanto, o uso de `union` supera essa limitação ao possibilitar que diferentes tipos de dados sejam associados a um mesmo lugar, proporcionando maior flexibilidade na modelagem de comportamentos heterogêneos.

A sintaxe geral para a declaração de um conjunto `union` é a seguinte:

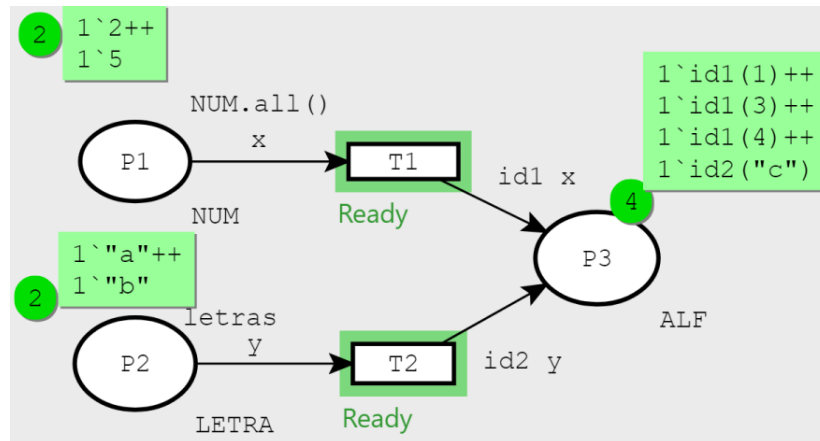
```
colset Nome = union id1[:Tipo1] + id2[:Tipo2] + ... + idn[:Tipon];
```

Cada `id` atua como um construtor que identifica qual tipo está sendo utilizado em um determinado token. Caso o tipo (`Tipo`) seja omitido, o identificador correspondente é tratado como um valor simbólico (constante), podendo ser referenciado diretamente por seu nome.

Operações de correspondência de padrões (*pattern matching*) podem ser utilizadas para identificar e extrair valores das fichas conforme o construtor utilizado, facilitando o tratamento seletivo de informações dentro das transições.

Na Figura 31 é apresentada uma rede basilar com o evento de união de dois conjuntos de fichas distintas.

Figura 31 – Modelagem do conjunto de cores `union` no CPN IDE®



Fonte: Autor, (2025)

As seguintes declarações foram utilizadas na rede em questão.

```
colset NUM = int with 1..5;
colset LETRA = string;
colset ALF = union id1 : NUM + id2 : LETRA;
var p : ALF;
var x : NUM;
var y : LETRA;
val letras = 1`"a"++ 1`"b"++1`"c";
```

A modelagem desta rede no CPN IDE® está disponível no endereço: https://github.com/JonathaCosta-IA/MDES/tree/main/B-MDES_Nets/Nets_handbook.

7.2.4 CONJUNTO DE CORES `LIST`

O conjunto de cores `list` possui tamanho variável e se constitui de uma sequência de elementos de um mesmo conjunto de cores previamente definido. Funções padrão permitem acessar o primeiro e o último elemento de uma lista. Para acessar elementos do interior da lista, funções recursivas têm que ser usadas.

O conjunto de cores `list` possui a seguinte sintaxe:

```
colset name = list name0 [with int-exp1 .. int-exp2];
```

A cláusula `with` especifica o menor e o maior tamanho da lista. Os elementos de uma lista possuem a seguinte forma:

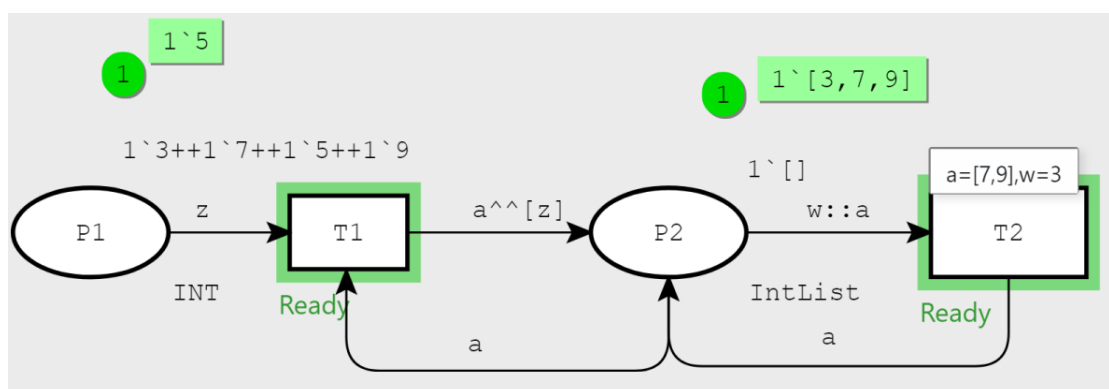
- `nil` - lista vazia (o mesmo que `[]`)
- `e::l` - coloca o elemento `e` como cabeça da lista `l`
- `l1^^l2` - concatena as duas listas `l1` e `l2`
- `hd l` - primeiro elemento da lista `l`
- `tl l` - toda a lista `l`, exceto o primeiro elemento
- `length l` - retorna o tamanho da lista `l`

- `rev l` - retorna uma lista inversa à lista `l`
- `map f l` - aplica a função `f` em todos os elementos da lista `l`
- `mem l x` - retorna verdadeiro se `x` pertence à lista `l`
- `List.nth(l, n)` - retorna o n -ésimo elemento da lista `l`, onde $0 \leq n < \text{length } l$
- `List.take(l, n)` - retorna os primeiros `n` elementos da lista `l`
- `List.drop(l, n)` - retorna o que resta na lista após remover os primeiros `n` elementos
- `List.exists p l` - retorna verdadeiro se `p` for verdadeiro para algum elemento da lista `l`
- `List.null l` - retorna verdadeiro se a lista `l` é vazia

Normalmente, no disparo de uma transição em uma [RPC](#) qualquer, retiram-se fichas dos lugares de entrada da transição de forma aleatória, ou seja, a ligação entre as variáveis dos arcos e as fichas é feita de forma aleatória, desde que essa ligação habilite a transição. Entretanto, em alguns setores do conhecimento, tais como telecomunicações, linha de montagem, etc., existe um ordenamento de chegada e saída de informação ou produtos. Existe, então, a necessidade de políticas de prioridade. Algumas destas políticas são, por exemplo, a FIFO (*First In First Out*), ou primeira que chega é a primeira que sai; e a LIFO (*Last In First Out*), ou última que chega é a primeira que sai.

Na Figura 32 é apresentado um exemplo de FIFO. Primeiro, valores inteiros são retirados do lugar `p1` de forma aleatória e armazenados por ordem de chegada em uma lista no lugar `p2` (`l'[]`), definido como uma lista vazia. Quando `t2` estiver habilitada, o disparo da mesma vai retirar sempre a ficha que chegou primeiro ao lugar `p2`. Na figura, após `t2` disparar duas vezes, as fichas 9 e 7 são retiradas consecutivamente de `p2`.

Figura 32 – Modelagem do conjunto de cores `list` no CPN IDE®



Fonte: Autor, (2025) adaptado de ([BARROSO, 2006](#))

As seguintes declarações foram utilizadas na rede em questão.

```
colset INT = int ;
colset IntList = list int with l'[];
var a,z : INT;
var w : IntList;
```

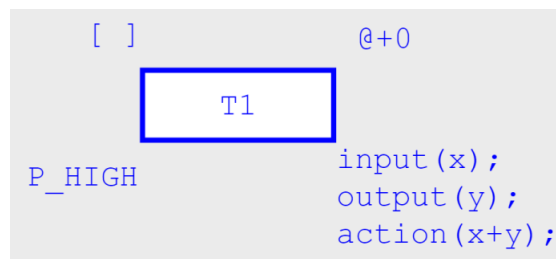

Perceba, ainda na Figura 32, a existência uma moldura na transição t_2 contendo a seguinte informação $a=[7, 9]$, $w=3$. Significa que ao disparar t_2 a ficha de valor 3 será removida para p_2 , depois a ficha de valor 7 e assim sucessivamente, exatamente mantendo a ordem de chegada. A modelagem desta rede no CPN IDE[®] está disponível no endereço: <https://github.com/JonathaCosta-IA/MDES/tree/main/B-MDES_Nets/Nets_handbook>.

7.3 RECURSOS DAS TRANSIÇÕES NUMA REDE DE PETRI

Numa rede de Petri as transições modelagem um evento que ao ocorrer implica a mudança de estado de um sistema.

Na Figura 33 estão ilustradas as posições primárias dos elementos recursivos de uma transição.

Figura 33 – Elementos recursivos de uma transição no CPN IDE[®]



Fonte: Autor (2025)

Os elementos recursivos de uma transição são:

- Expressões de guarda - $[]$;
- Temporização da transição - $@+0$;
- Operadores $input()$, $output()$, $action()$;
- Prioridades de Transição - P_HIGH ;

Tais elementos serão apresentados em modo detalhada a seguir.

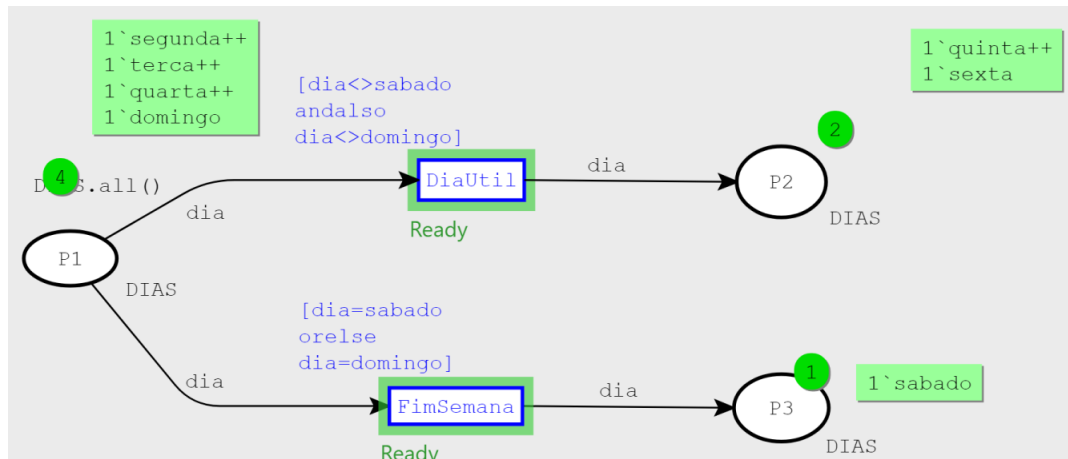
7.3.1 EXPRESSÃO DE GUARDA

A expressão de guarda é uma condição booleana associada a uma transição. Ela deve ser satisfeita para que a transição possa ser habilitada, além da presença suficiente de tokens nos lugares de entrada. No CPN IDE, a guarda é escrita após uma barra vertical ($|$) e pode utilizar variáveis vinculadas pelas expressões de arco.

Exemplo: $x > 0$

Na Figura 34 é utilizado diretamente uma expressão condicional do tipo `if` no campo de expressão de guarda da transição. Esse recurso permite realizar o filtro lógico no próprio corpo da transição, eliminando a necessidade de funções externas nos arcos, como `DiaUtil` e `FimSemana`. (Um modelo semelhante foi apresentado na Figura 27.) Desse modo, cada transição somente estará habilitada para disparado se satisfeita a condição da expressão de guarda em destaque na figura em questão.

Figura 34 – Modelagem com expressão de guarda no CPN IDE®



Fonte: Autor (2025)

Observe que a marcação atual da rede representa um estado arbitrário que pode ou não habilitar o disparo da transição, dependendo da avaliação da expressão de guarda.

As seguintes declarações foram utilizadas na rede em questão.

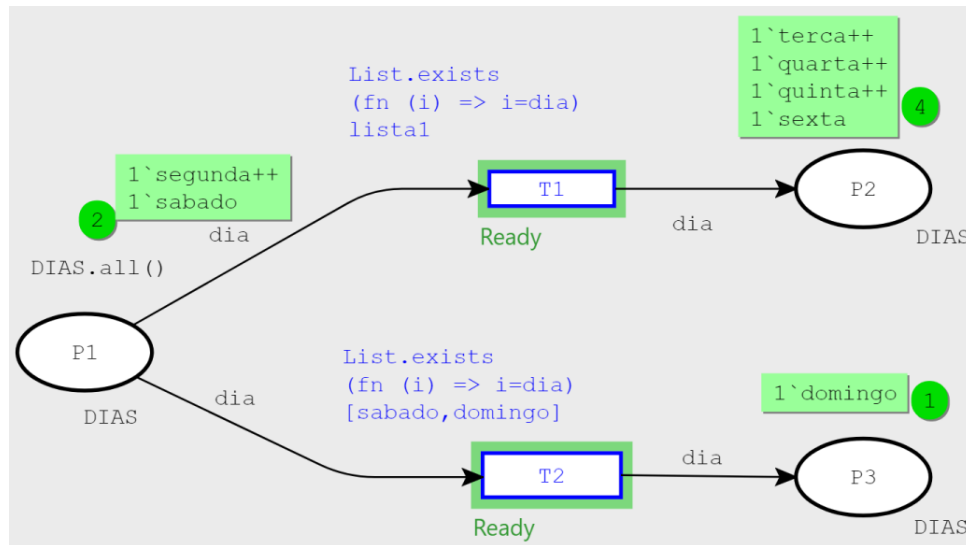
```
colset DIAS = with segunda | terca | quarta
| quinta | sexta | sabado | domingo;
var dia : DIAS;
```

A modelagem desta rede no CPN IDE® está disponível no endereço: https://github.com/JonathaCosta-IA/MDES/tree/main/B-MDES_Nets/Nets_handbook.

7.3.1.1 Expressão de Guarda com uso de lista

A mesma rede apresentada anteriormente (Figura 34) é reproduzida na Figura 35, agora com uma construção alternativa da expressão de guarda. Nesta versão, utilizam-se estruturas do tipo **lista**, com o objetivo de ampliar a flexibilidade e expressividade do modelo.

Figura 35 – Modelagem com expressão de guarda no CPN IDE® com **lista**



Fonte: Autor (2025)

Perceba a expressão de guarda utilizada na transição T1:

```
List.exists (fn i => i = dia) listal
```

Perceba que essa mesma expressão é utilizada na transição T2; entretanto, nesta última, a lista `listal` foi declarada diretamente dentro da própria expressão de guarda, com o objetivo de demonstrar essa possibilidade como uma opção válida de modelagem.

Essa construção alternativa se baseia na função de ordem superior `List.exists`, pertencente à biblioteca padrão da linguagem SML. A função `List.exists` recebe dois argumentos:

- uma função booleana (também chamada de predicado), que é aplicada a cada elemento da lista;
- e a própria lista de elementos a ser percorrida.

Neste caso, o predicado `fn i => i = dia` verifica, para cada elemento `i` da lista, se ele é igual ao valor atual da variável `dia`. O resultado da função será `true` se ao menos um dos elementos da lista for igual a `dia`, e `false` caso contrário.

Dessa forma, a expressão de guarda retorna verdadeiro sempre que o valor de `dia` estiver *contido* na lista especificada. Isso torna o modelo mais dinâmico, permitindo que diferentes condições de habilitação da transição sejam expressas de maneira compacta e reutilizável — seja referenciando uma lista declarada previamente (como em T1), seja definindo a lista diretamente na expressão (como em T2).

As seguintes declarações foram utilizadas na rede em questão.

```
colset DIAS = with segunda | terca | quarta
| quinta | sexta | sabado | domingo;
var dia : DIAS;
val listal = [segunda, terca, quarta, quinta, sexta];
```

A modelagem desta rede no CPN IDE® está disponível no endereço: https://github.com/JonathaCosta-IA/MDES/tree/main/B-MDES_Nets/Nets_handbook.

7.3.2 TEMPORIZAÇÃO EM REDES DE PETRI

A temporização é um recurso fundamental na modelagem de sistemas que envolvem restrições de tempo. No contexto das Redes de Petri Coloridas (RPC), existem duas abordagens distintas para lidar com aspectos temporais: as **Redes de Petri Temporais** e as **Redes de Petri Temporizadas**. Ambas podem ser modeladas no ambiente *CPN IDE*, porém com semânticas e objetivos diferentes.

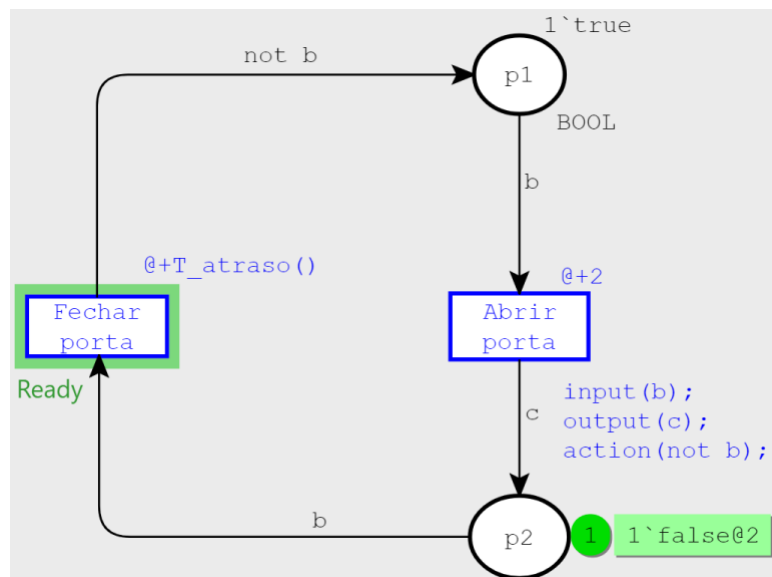
7.3.2.1 Redes de Petri Temporais

Nas **Redes de Petri Temporais**, o tempo é associado diretamente às transições. Ou seja, cada transição possui um atraso temporal fixo ou estocástico, que representa o tempo necessário para sua conclusão após ser habilitada. Esse tipo de rede é adequado para modelar processos que possuem uma duração conhecida (como um tempo de processamento ou de deslocamento), independentemente das fichas envolvidas.

- O disparo da transição só é concluído após decorrido o tempo atribuído a ela.
- As fichas permanecem nos lugares de entrada durante a execução da transição.

Na Figura 36, apresenta-se uma **rede de Petri colorida temporal**, construída no CPN IDE®. A modelagem baseia-se na rede funcional da Figura 38, agora estendida com aspectos temporais para representar com maior realismo o comportamento dinâmico do sistema de abertura e fechamento de uma porta.

Figura 36 – Modelagem de uma rede **temporal** no CPN IDE®



Fonte: Autor, (2025)

Nas redes **temporais**, o tempo está associado às **transições**, e não às fichas. Isso significa que, uma vez habilitada, uma transição só poderá ser disparada após transcorrido um tempo mínimo (delay), e, se houver limite superior, antes de um tempo máximo. Essa restrição é avaliada com base no relógio global da simulação.

No exemplo da figura acima, essa lógica é implementada atribuindo um tempo de atraso diretamente às transições, representado por uma função aleatória que simula o tempo de fechamento da porta na transição `Fechar porta`, e pela inscrição `@+2` na transição `Abrir porta`. As declarações a seguir configuram esse comportamento:

```
colset BOOL = bool;
colset Atraso = int with 1..10;
var b, c: BOOL;
fun inverter b = not b;
fun T_atraso() = Atraso.ran();
```

Nesse modelo, diferentemente das redes **temporizadas**, as fichas são **atemporais** — ou seja, não carregam carimbos de tempo. Toda a lógica temporal está incorporada ao funcionamento das transições.

Embora o *CPN IDE* não ofereça suporte nativo ao formalismo completo das redes de Petri temporais — isto é, com definição explícita de intervalos de tempo mínimo e máximo para disparo das transições —, é possível simular esse comportamento por meio de estratégias alternativas, como o uso de expressões condicionais, atrasos programados e fichas auxiliares de controle. Na prática, esse efeito é obtido inserindo um valor de atraso no campo `@` das transições, o que define quanto tempo a transição deve aguardar após se tornar habilitada, antes de efetuar seu disparo e produzir novas fichas. Assim, mesmo sem implementar o formalismo temporal original, o *CPN IDE* permite representar comportamentos com restrições temporais de forma funcional e realista.

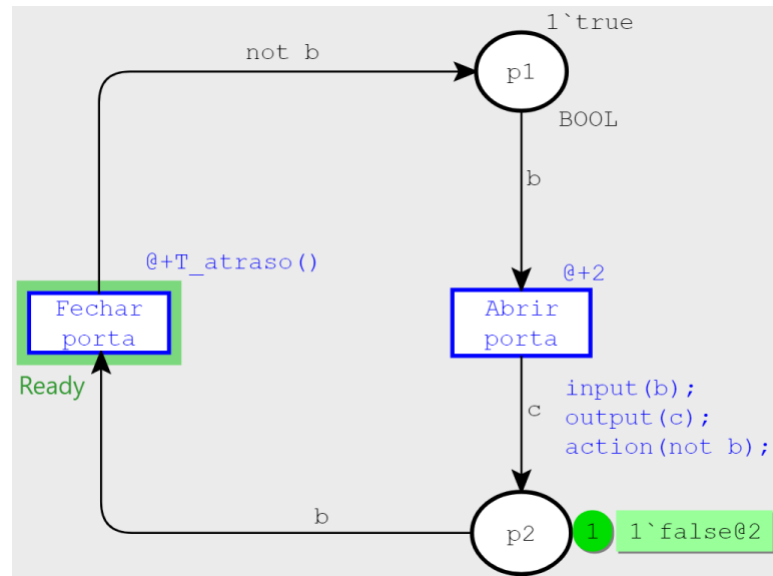
Esse tipo de modelagem é especialmente útil para representar eventos que não ocorrem instantaneamente após a habilitação da transição, mas que requerem um intervalo de espera previamente definido.

7.3.2.2 Redes de Petri Temporizadas

Diferentemente das redes **temporais**, nas quais o tempo está vinculado ao disparo das **transições**, as redes **temporizadas** associam o tempo diretamente às **fichas**. Nessa abordagem, cada ficha possui um carimbo temporal (*timestamp*) que indica o instante a partir do qual ela pode ser utilizada para habilitar uma transição. Em consequência, uma transição só poderá ocorrer se todas as fichas necessárias estiverem presentes no tempo atual da simulação, e seus respectivos carimbos temporais forem menores ou iguais a esse tempo.

A Figura 37 ilustra um exemplo de rede de Petri colorida **temporizada**, modelada no ambiente CPN IDE®. O cenário representa a lógica de abertura e fechamento de uma porta, sendo que o comportamento temporizado é implementado por meio de fichas que carregam a informação sobre o tempo de validade. Essa modelagem permite representar eventos que ocorrem apenas após certo intervalo de tempo, sendo especialmente útil em contextos que envolvem atrasos de processamento, latência de comunicação ou ciclos internos de espera.

Figura 37 – Modelagem de uma rede temporizada no CPN IDE®



Fonte: Autor, (2025)

No modelo da Figura 37, a temporização é implementada a partir da definição de tipos de dados com suporte a tempo. A seguir, apresentam-se as declarações utilizadas:

```
colset BOOL = bool timed;
colset Atraso = int with 1..10;
var b, c: BOOL;
fun inverter b = not b;
fun T_atraso() = Atraso.ran();
```

A linha `colset BOOL = bool timed;` define o tipo de cor `BOOL` como temporizado, o que significa que todas as fichas desse tipo conterão um *timestamp*. Já a função `T_atraso()` gera um valor aleatório entre 1 e 10 unidades de tempo, que é utilizado para definir o atraso com que a ficha estará disponível no sistema após sua produção.

Por exemplo, a anotação `(false, @+5)` representa uma ficha com o valor lógico `false`, que se tornará válida apenas cinco unidades de tempo após ser produzida.

Esse mecanismo de temporização nas fichas proporciona uma modelagem mais precisa de sistemas nos quais os eventos não ocorrem de forma imediata, mas dependem de intervalos temporais definidos. Trata-se de uma solução eficaz para representar atrasos inerentes a operações reais, sem a necessidade de manipular diretamente o tempo nas transições.

O modelo completo dessa rede está disponível no repositório: https://github.com/JonathaCosta-IA/MDES/tree/main/B-MDES_Nets/Nets_handbook.

Resumo Comparativo

Na Tabela 4, apresenta-se uma comparação entre as redes de Petri **temporais** e **temporizadas**, destacando suas principais características. Essa distinção é essencial para a escolha do modelo mais adequado de acordo com a natureza temporal do sistema a ser representado. Enquanto as redes temporais vinculam o tempo ao comportamento das transições, as redes temporizadas incorporam a noção de tempo

diretamente nas fichas, permitindo um controle mais refinado sobre a disponibilidade de informações ao longo da simulação.

Tabela 4 – Comparação entre redes temporais e temporizadas

Aspecto	Redes Temporais	Redes Temporizadas
Unidade temporizada	O tempo é associado às transições, que possuem atrasos definidos	O tempo é associado às fichas, que possuem carimbos temporais (<i>timestamps</i>)
Disparo da transição	Ocorre após o tempo mínimo definido para a transição, considerando o tempo global	Ocorre quando todas as fichas requeridas estão disponíveis no tempo atual da simulação
Comportamento das fichas	Fichas são atemporais; o atraso está no disparo da transição	Fichas permanecem nos lugares, mas só podem ser consumidas após seu <i>timestamp</i>
Aplicações típicas	Modelagem de tarefas com duração específica (ex: processos industriais ou <i>workflows</i>)	Modelagem de sistemas com disponibilidade futura de recursos ou eventos (ex: filas, redes logísticas)

7.3.2.3 Multiconjuntos com Restrições de Tempo

Multiconjuntos com restrições de tempo são utilizados no *CPN Tools* para representar fichas que só se tornam válidas após determinado instante. Esse recurso é essencial para modelar atrasos, tempos de espera e outras restrições temporais típicas de sistemas reativos e embarcados.

Para declarar um conjunto de cores com suporte a temporização, utiliza-se o modificador `timed`, que permite que cada ficha tenha um carimbo de tempo indicando quando ela poderá ser consumida em uma transição.

```
colset TBool = bool timed;
```

Neste exemplo, o conjunto de cores `TBool` representa valores booleanos (`true` ou `false`) associados a tempos. Cada ficha desse tipo carrega um valor lógico e um instante de ativação.

Operadores Temporais

Os principais operadores para manipulação de tempo em multiconjuntos são:

- `c@t` – associa um tempo absoluto `t` (tipo `Time.time`) à cor `c`. A ficha só estará disponível quando o tempo do simulador alcançar `t`.
- `ms @+ i` – adiciona um atraso relativo de `i` unidades de tempo a todas as fichas do multiconjunto `ms`.
- `tms1 +++ tms2` – realiza a união (soma) de dois multiconjuntos temporizados.

Exemplo de Uso

```
var f1, f2 : TBool;
f1 = 1`true@25;
f2 = 2`false@10;
```

Neste exemplo:

- f1 representa uma ficha com valor `true`, disponível no tempo 25.
- f2 representa duas fichas com valor `false`, disponíveis no tempo 10.

Essas fichas não poderão ser utilizadas em transições enquanto o tempo global da simulação não alcançar os tempos definidos (@25 e @10, respectivamente). Antes disso, elas permanecem invisíveis para efeito de habilitação.

Esse mecanismo é crucial na modelagem de sistemas que exigem controle temporal preciso, como processos industriais, protocolos de comunicação ou simulações de eventos com atraso.

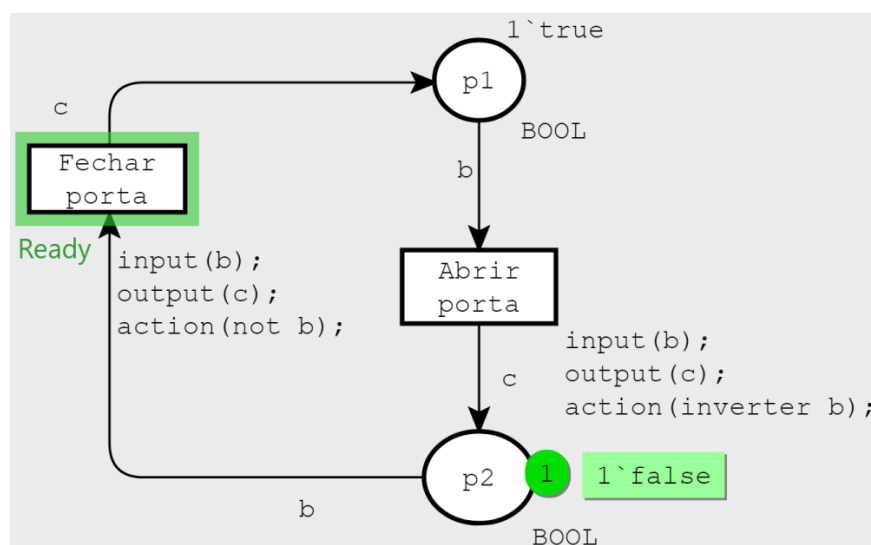
7.3.3 OPERADORES: `INPUT()`, `OUTPUT()`, `ACTION()`

Em CPN IDE®, o comportamento das transições é definido pelas seguintes categorias de operadores:

- `input()`: especifica as fichas que são consumidos dos lugares de entrada.
- `output()`: determina as fichas que serão produzidos nos lugares de saída.
- `action()`: define ações executadas no momento do disparo da transição, como imprimir dados ou atualizar variáveis internas. É executada após a retirada das fichas de entrada e antes da colocação das fichas de saída.

De forma semelhante à rede apresentada anteriormente na Figura 24, o modelo ilustrado na Figura 38, a seguir, utiliza diretamente os operadores `input()`, `output()` e `action()` na declaração da transição. Esse recurso substitui a necessidade de uma função externa, como `inverter b`, centralizando a lógica de manipulação de fichas na própria transição.

Figura 38 – Modelagem basilar com uso de expressão na transição `bool` no CPN IDE®



Fonte: Autor, (2025)

Perceba que a marcação atual da rede corresponde a um estado aleatório de disparo da transição. As seguintes declarações foram utilizadas na rede em questão.


```
colset BOOL = bool;
var b , c: BOOL;
fun inverter b = not b;
```

Observe que a transição `Abrir porta` ainda faz uso da função `inverter b`, previamente definida de forma externa. Em contraste, a transição `Fechar porta` realiza a operação de inversão diretamente no campo `action()`, incorporando a lógica ao próprio corpo da transição. Essa abordagem demonstra maior flexibilidade e expressividade na modelagem, ao permitir encapsular comportamentos diretamente na estrutura da rede, favorecendo a reutilização e a recursividade.

A modelagem desta rede no CPN IDE® está disponível no endereço: https://github.com/JonathaCosta-IA/MDES/tree/main/B-MDES_Nets/Nets_handbook.

7.3.3.1 Prioridade de Transições no CPN IDE

O CPN IDE® permite definir prioridades entre transições para controlar qual deve disparar primeiro quando múltiplas estiverem habilitadas simultaneamente. Essa prioridade é expressa por um número inteiro associado à transição: **quanto menor o valor, maior a prioridade**.

Por padrão, todas as transições têm prioridade 0. Para definir outra prioridade, basta clicar na transição, acessar as propriedades e alterar o campo `Priority`.

Regras de Disparo com Prioridade

- Apenas transições habilitadas com a **maior prioridade** (menor valor) são consideradas para disparo.
- Transições com mesma prioridade competem de forma *nondeterminística*.
- Transições com prioridade inferior são ignoradas enquanto houver outras de maior prioridade habilitadas.

Desse modo, considere o contexto das redes anteriores (figuras 34 - 37) que modelam um processo de abrir e fechar porta. Se a transição `fechar_porta` tiver prioridade -1 e `manter_aberta` prioridade 0, a primeira será sempre disparada primeiro quando ambas estiverem habilitadas.

Contudo, cabe destacar que a utilização de prioridades deve ser feito com cautela, pois pode bloquear transições de menor prioridade, afetando o comportamento esperado da rede.

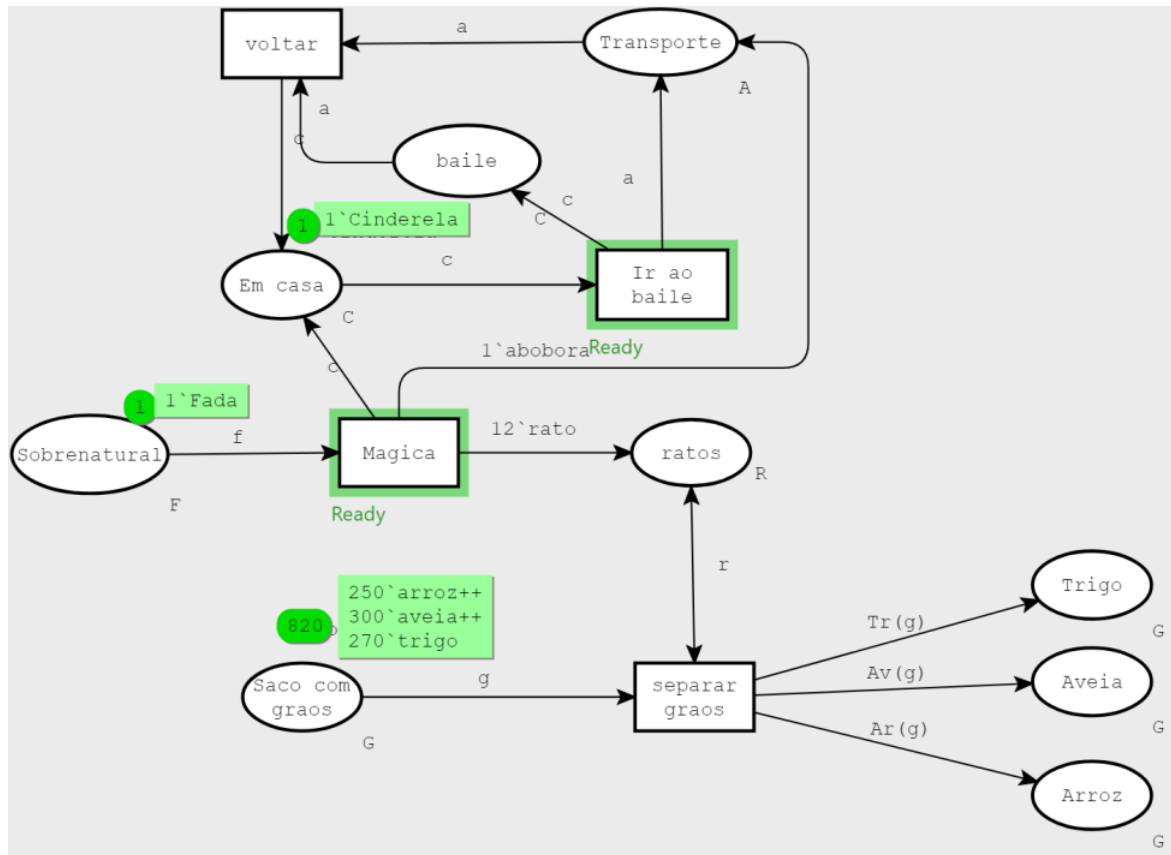
7.4 MODELO DE REDE: CONTO DA CINDERELA

O exemplo a seguir apresenta a modelagem de uma situação clássica da literatura infantil em RP, adaptada de Zaitsev (2006, *apud* (BARROSO, 2006)).

O CASO CINDERELA

A madrasta de Cinderela mandou que ela separasse grãos de diferentes tipos, mas no exemplo, camundongos amigos de Cinderela separam os grãos enquanto ela vai ao baile. Este exemplo está ilustrada na Figura 39.

Figura 39 – Modelagem de caso Cinderela no CPN IDE®



Fonte: Autor, (2025) adaptado de (BARROSO, 2006)

Neste modelo de rede de Petri, as seguintes declarações de conjuntos de cores e variáveis foram utilizadas:

```
colset A = unit with abobora;
colset C = unit with Cinderela;
colset G = with arroz | aveia | trigo;
colset R = unit with rato;
colset F = unit with Fada;
var a : A;
var c : C;
var g : G;
var r : R;
var f : F;
fun Tr(g) = if (g=trigo) then 1`trigo else empty;
fun Av(g) = if (g=aveia) then 1`aveia else empty;
fun Ar(g) = if (g=arroz) then 1`arroz else empty;
val graos = 250`arroz++300`aveia++270`trigo;
```

Nesta modelagem, foram definidos cinco conjuntos de cores: **A**, contendo a ficha *abóbora*; **C**,

com a ficha *Cinderela*; **G**, composto por três fichas (*arroz*, *aveia* e *trigo*); **R**, com a ficha *rato*; e **F**, com a ficha *Fada*. Note que inicialmente, apenas a transição *Mágica* está habilitada, destacada por uma moldura na cor verde. Ao conversar com *Cinderela*, a fada cria doze ratos, uma abóbora e desaparece, acionando a transição *Mágica*. Note também que a viagem de *Cinderela* até o baile e a separação dos grãos ocorrem de forma concorrente, podendo acontecer simultaneamente e em qualquer ordem. A abóbora funciona como um recurso essencial para habilitar e disparar as transições *Ir ao baile* e *Voltar*, que levam *Cinderela* ao baile e a trazem de volta. Para isso, utiliza-se um auto-laço, representado por um arco bidirecional conectando o lugar *Transporte* à transição *Ir ao baile* (Figura 39). Os ratos, por sua vez, servem como recursos para habilitar e disparar a transição *Separar* os tipos de grãos.

Considerando o sentido dos arcos e suas respectivas inscrições, perceba que o disparo da transição *Mágica* não altera a marcação do lugar *Em casa*, que contém uma ficha de cor *Cinderela*. Da mesma forma, o disparo da transição *Ir ao baile* não modifica a marcação do lugar *Transporte* (ficha de cor *Abóbora*), pois esse mesmo recurso é utilizado para trazer *Cinderela* de volta para casa ao acionar a transição *Voltar*.

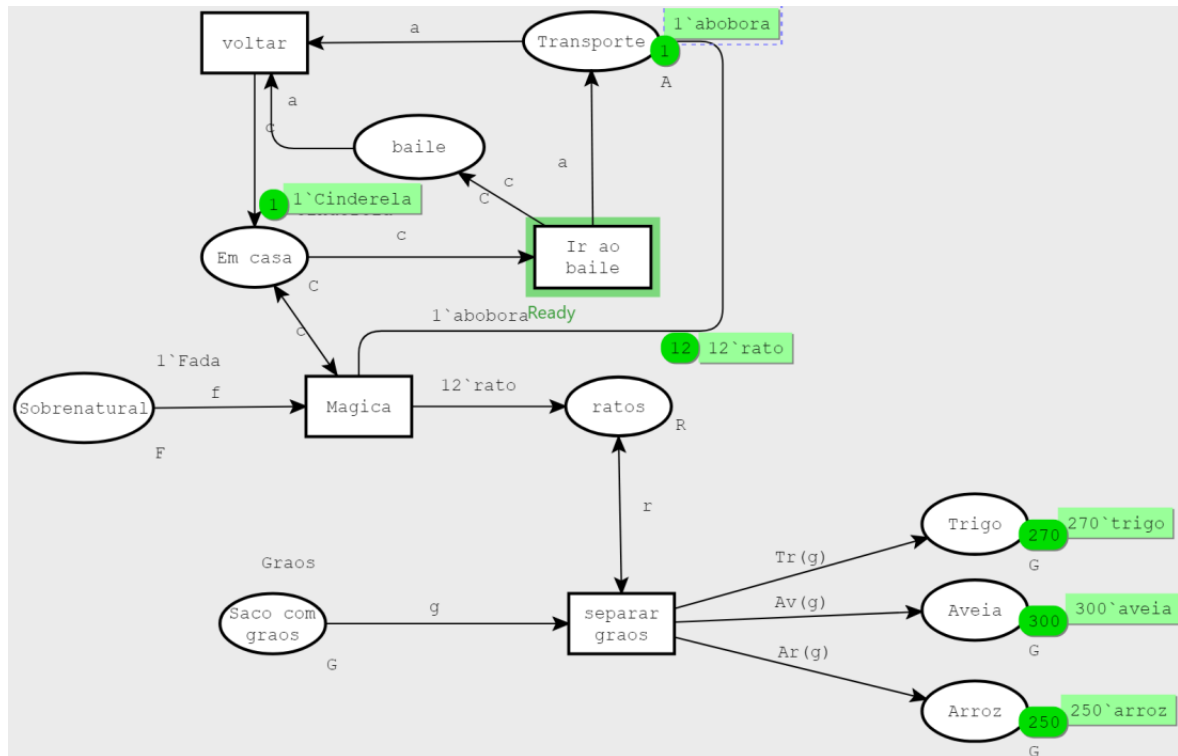
Note que os demais arcos são unidirecionais. Desse modo, um arco que conecta um lugar a uma transição indica que, no momento do disparo, uma ou mais fichas serão removidas do lugar, conforme definido pela inscrição do arco de entrada da transição. No exemplo, todas as inscrições são variáveis pertencentes aos respectivos conjuntos de cores.

Como ilustração disso, perceba que o arco de entrada da transição *Separar grão* possui a inscrição *g*, que representa uma variável do conjunto de cores **G**. Assim, quando a transição *Separar* é disparada, um grão é retirado aleatoriamente do lugar *Saco com grãos*. Inscrições de arco mais complexas serão exploradas nas próximas seções. Os arcos de saída das transições, ao serem disparadas, geram novas fichas, que podem ou não coincidir com as retiradas dos lugares de entrada. Isso significa que novas fichas podem ser criadas no sistema. Outro modo, no disparo da transição *Ir ao baile*, a ficha *Cinderela* é removida do lugar *Em casa* por meio da variável *c*, associada ao arco que conecta esse lugar à transição. Em seguida, uma ficha de mesmo valor (*Cinderela*) é inserida no lugar *Baile*, conforme a inscrição *c* no arco que liga a transição *Ir ao baile* a esse lugar.

Finalmente, a transição *Mágica*, por sua vez, possui uma lógica mais complexa. Ao ser disparada, a ficha *Fada* é removida do lugar *Sobrenatural* pela variável *f* e desaparece, pois essa variável não está associada a nenhum arco de saída da transição. Entretanto, a marcação do lugar *Em casa* permanece inalterada devido ao auto-laço (arco bidirecional) associado à variável *c*.

Como resultado do disparo dessa transição, são criadas doze fichas *Rato* e uma ficha *Abóbora*, conforme as inscrições especificadas nos arcos de saída. Veja na Figura 40 a marcação final do modelo após 823 passos de simulação.

Figura 40 – Modelagem de caso Cinderela - Resultado da simulação no CPN IDE®



Fonte: Autor, (2025) adaptado de (BARROSO, 2006)

Nesta marcação, Cinderela já retornou do baile e está em casa. A fada desapareceu, e seus amigos ratos finalizaram a separação dos grãos, distribuindo 270 grãos de trigo, 300 de arroz e 250 de aveia em seus respectivos lugares. Note que o disparo **separar grão** retira aleatoriamente uma ficha do saco de grãos por meio da variável *g*. No entanto, esse grão só pode ser colocado em um único destino entre os lugares de saída da transição (arroz, aveia ou trigo). Os arcos de saída da transição possuem funções associadas que garantem a seleção apenas do grão correspondente ou de uma ficha especial chamada *empty*. Quando uma ficha *empty* é escolhida, isso significa que nenhum grão será colocado no lugar de saída da transição.

O modelo RPC estudado não contempla diversas características do conto de fadas. Por exemplo, o tempo não é considerado, o que significa que o aviso da Fada para Cinderela sobre a meia-noite não está representado no modelo. Por isso, recomenda-se uma análise detalhada para identificar outras características relevantes do conto. Após um estudo mais aprofundado do CPN IDE®, pode-se construir um modelo que represente de forma mais fiel a história original. A modelagem desta rede no CPN IDE® está disponível no endereço: <https://github.com/JonathaCosta-IA/MDES/tree/main/B-MDES_Nets/Nets_handbook>.

8 Aplicações e proposições de Modelagem

As Redes de Petri são apropriadas para modelar sistemas a eventos discretos por suas capacidades de representar concorrência, sincronização e conflitos; modelar causalidade entre eventos; simular e verificar propriedades como vivacidade e ausência de deadlocks; serem estendidas com cores e temporização; além de oferecerem suporte à modularidade e à análise formal de sistemas.

8.1 EXERCÍCIOS: SISTEMAS A SEREM MODELADOS

A seguir, apresenta-se uma lista de vinte exemplos de Sistemas a Eventos Discretos (MSED) que podem ser modelados com Redes de Petri no ambiente CPN IDE. Para cada sistema, é indicada a abordagem mais adequada: Rede de Petri Lugar-Transição (RP-LT) ou Rede de Petri Colorida (RPC), considerando a complexidade e a necessidade de manipulação de dados, contudo ambos podem ser ajustados para serem modelados em ambas as abordagens de Rede de Petri, incluindo funções avançadas.

1. **Semáforo veicular com controle de tráfego** — RP-LT: permite modelar a alternância entre luzes e sincronização entre cruzamentos.
2. **Linha de produção com múltiplas estações** — RPC: modela tipos de peças, rotas e estados de máquinas.
3. **Sistema de filas em banco ou hospital** — RPC: representa clientes com atributos como prioridade ou tipo de atendimento.
4. **Elevador com múltiplos andares** — RPC: manipula requisições por andar e direção com tokens estruturados.
5. **Máquina de venda automática** — RP-LT: simples lógica de inserção de moeda, escolha e entrega.
6. **Controle de acesso com cartão magnético** — RPC: uso de tokens com campos de usuário, permissões e horários.
7. **Robô industrial em célula de manufatura** — RPC: modela tarefas específicas por tipo de peça ou operação.
8. **Protocolo de comunicação entre dois processos** — RP-LT: sincronização de envio e recebimento de mensagens.
9. **Impressora compartilhada por usuários** — RPC: representa trabalhos com atributos como usuário, páginas, prioridade.
10. **Sistema de embarque em metrô** — RP-LT: controle de abertura/fechamento de portas e fluxo de passageiros.
11. **Processo de login e autenticação de usuário** — RPC: modela tentativas, credenciais e tempo de bloqueio.

12. **Distribuição de tarefas em servidores** — RPC: alocação dinâmica de tarefas com características distintas.
13. **Estoque e reposição em almoxarifado** — RPC: itens com quantidade, validade e localização.
14. **Controle de tráfego aéreo em aeroporto** — RPC: voos com atributos como origem, destino, prioridade e pista.
15. **Sistema de transporte público com baldeações** — RPC: passageiros com rotas distintas e pontos de troca.
16. **Lavanderia industrial com múltiplas etapas** — RP-LT: sequência fixa de lavagens, secagens e dobras.
17. **Atendimento em call center com prioridades** — RPC: chamadas com níveis de urgência e tempo de espera.
18. **Gerenciamento de pedidos em restaurante** — RPC: pedidos com itens, mesa e tempo de preparo.
19. **Caixa eletrônico com múltiplas operações** — RPC: operações distintas por cliente (saque, saldo, depósito).
20. **Sistema de alarme com múltiplos sensores** — RP-LT: combinação de sinais para ativação ou desativação do alarme.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDERSON, D. **Produção em Massa e a Evolução da Manufatura**. [S.l.]: Editora XY, 2015.
- BARROSO, J. M. S. G. C. **Introdução às Redes de Petri Coloridas usando a ferramenta CPN Tools**. 2006. Acesso em: 11 mar. 2025. Disponível em: <<https://www.scribd.com/document/496849470/redespetrutorialcpntools-160625125824>>.
- BASKIN, D. **Sistemas Flexíveis de Manufatura**. [S.l.]: Editora Flex, 2017.
- BRUNDTLAND, G. H. **Nosso Futuro Comum**. [S.l.]: Editora Mundial, 1987.
- CASSANDRAS, C. **Introduction to Discrete Event Systems**. [S.l.]: Springer, 2008.
- CHASE, R. B.; AQUILANO, N. J. **Gestão de Operações: Produção e Cadeia de Suprimentos**. [S.l.]: Editora McGraw-Hill, 2006.
- HARRIS, F. **Gestão da Produção e Operações**. [S.l.]: Editora Pearson, 2002.
- IDE, C. **From CPN Tools via Access/CPN to CPN IDE**. 2025. Acesso em: 9 abr. 2025. Disponível em: <<https://cpnide.org/>>.
- JONES, M. Indústria 4.0: O futuro da manufatura. **Revista de Tecnologia**, v. 15, n. 2, p. 123–135, 2018.
- MELLOR, P. **Indústria 4.0: A Revolução Digital**. [S.l.]: Editora Tech, 2014.
- MURATA, T. Petri nets: Properties, analysis, and applications. **Proceedings of the IEEE**, v. 77, n. 4, p. 541–580, 1989.
- SAP. **What is Industry 4.0?** 2025. Acesso em: 11 mar. 2025. Disponível em: <<https://www.sap.com/products/scm/industry-4-0/what-is-industry-4-0.html>>.
- SMITH, J. **História da Manufatura**. [S.l.]: Editora ABC, 2010.
- THOMPSON, D. **Inovação e Competitividade na Manufatura Global**. [S.l.]: Springer, 2019.
- WILSON, J. M. **Planejamento e Controle da Produção**. [S.l.]: Editora Cengage Learning, 2016.