Redes de Petri

Conceitos Básicos

Jonatha Rodrigues da Costa
Giovanni Cordeiro Barroso

RP – Conceitos Básicos

- Formalmente, uma rede de Petri é uma quíntupla

  $RP = (P, T, A, W, M_0)$, em que:

- $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ é um conjunto finito de lugares;
- $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ é um conjunto finito de transições;
- $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ é um conjunto finito de arcos;
- $W : A \rightarrow \{1, 2, \ldots\}$ é a função peso associada aos arcos;
- $M_0 : P \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots\}$ é a marcação inicial.

RP – Conceitos Básicos

- Seja $t \in T$, então:

$$^{\bullet}t = \{p \in P \mid (p, t) \subseteq A\}$$

é o pré-conjunto de t (entradas de t).

$$t^{\bullet} = \{p \in P \mid (t, p) \subseteq A\}$$

é o pós-conjunto de t (saídas de t).

RP – Conceitos Básicos

- Seja $p \in P$, então:

$$^\bullet p = \{t \in T \mid (t, p) \subseteq A\}$$

é o pré-conjunto de *p* (entradas de *p*).

$$p^\bullet = \{t \in T \mid (p, t) \subseteq A\}$$

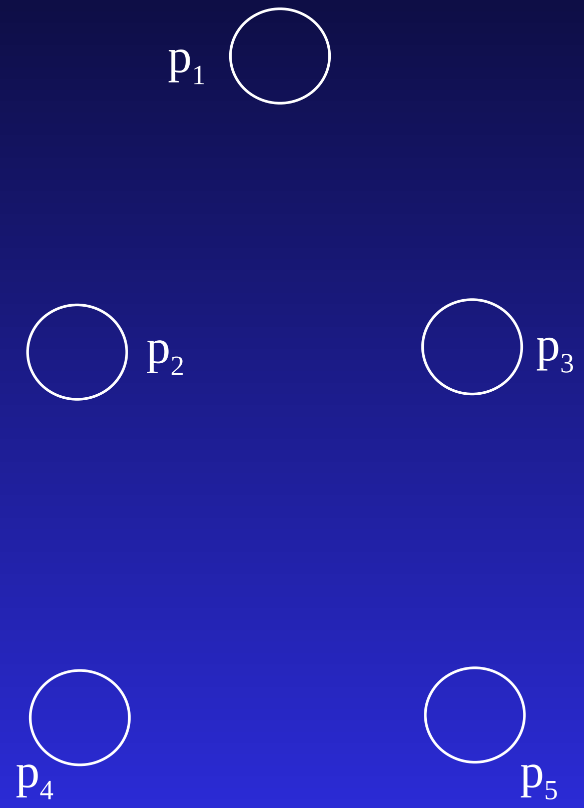
é o pós-conjunto de *p* (saídas de *p*).

RP – Exemplo

- $RP = (P, T, A, W, M_0)$
- $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\};$
- $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\};$
- $A = \{(p_1, t_1), (t_1, p_2), (t_1, p_3), (p_2, t_2), (t_2, p_4), (p_4, t_3), (t_3, p_2), (p_3, t_4), (p_4, t_4), (t_4, p_5), (p_5, t_5), (t_5, p_1)\};$
- $W = \{[(p_1, t_1), 1], [(t_1, p_2), 1], [(t_1, p_3), 2], [(p_2, t_2), 1], [(t_2, p_4), 1], [(p_4, t_3), 1], [(t_3, p_2), 1], [(p_3, t_4), 2], [(p_4, t_4), 1], [(t_4, p_5), 1], [(p_5, t_5), 1], [(t_5, p_1), 1]\};$
- $M_0 = \{(p_1, 1), (p_2, 0), (p_3, 0), (p_4, 0), (p_5, 0)\}$

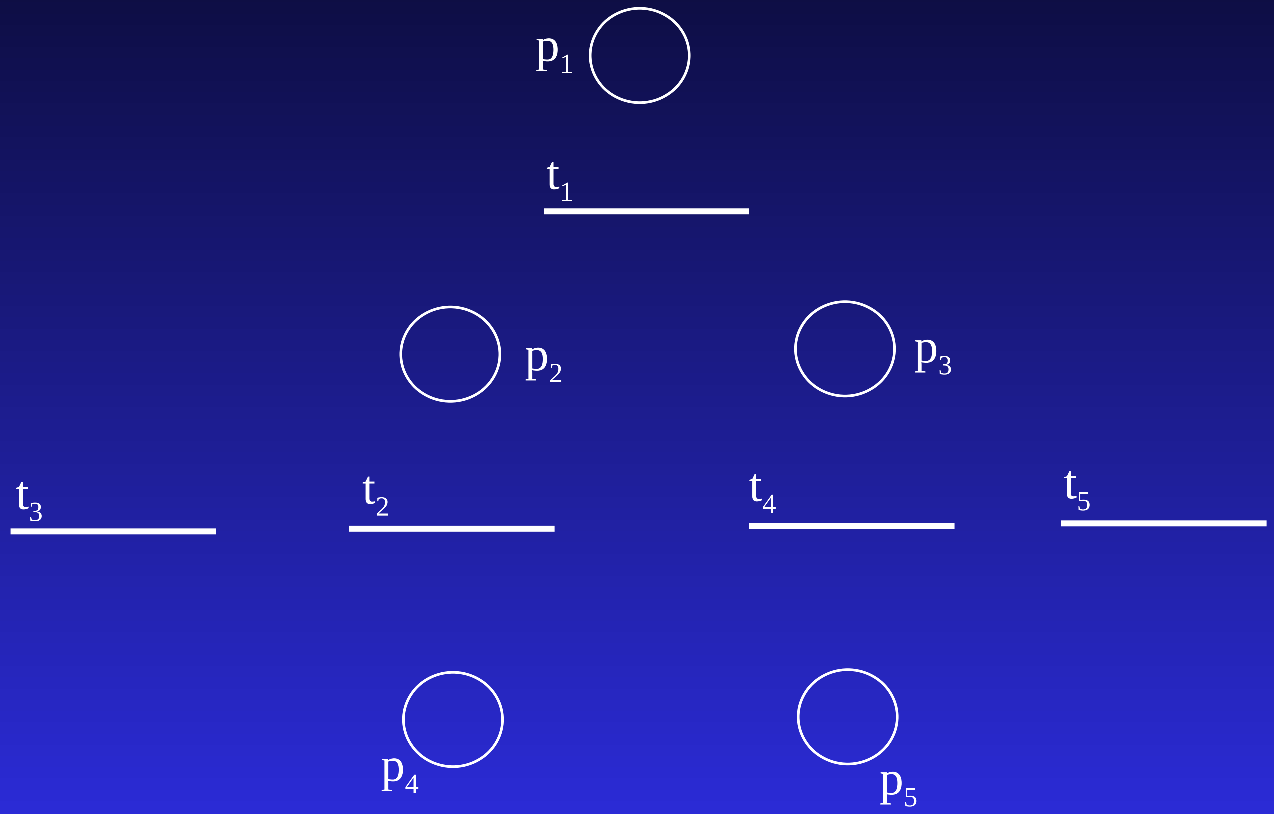
RP – Exemplo

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\};$



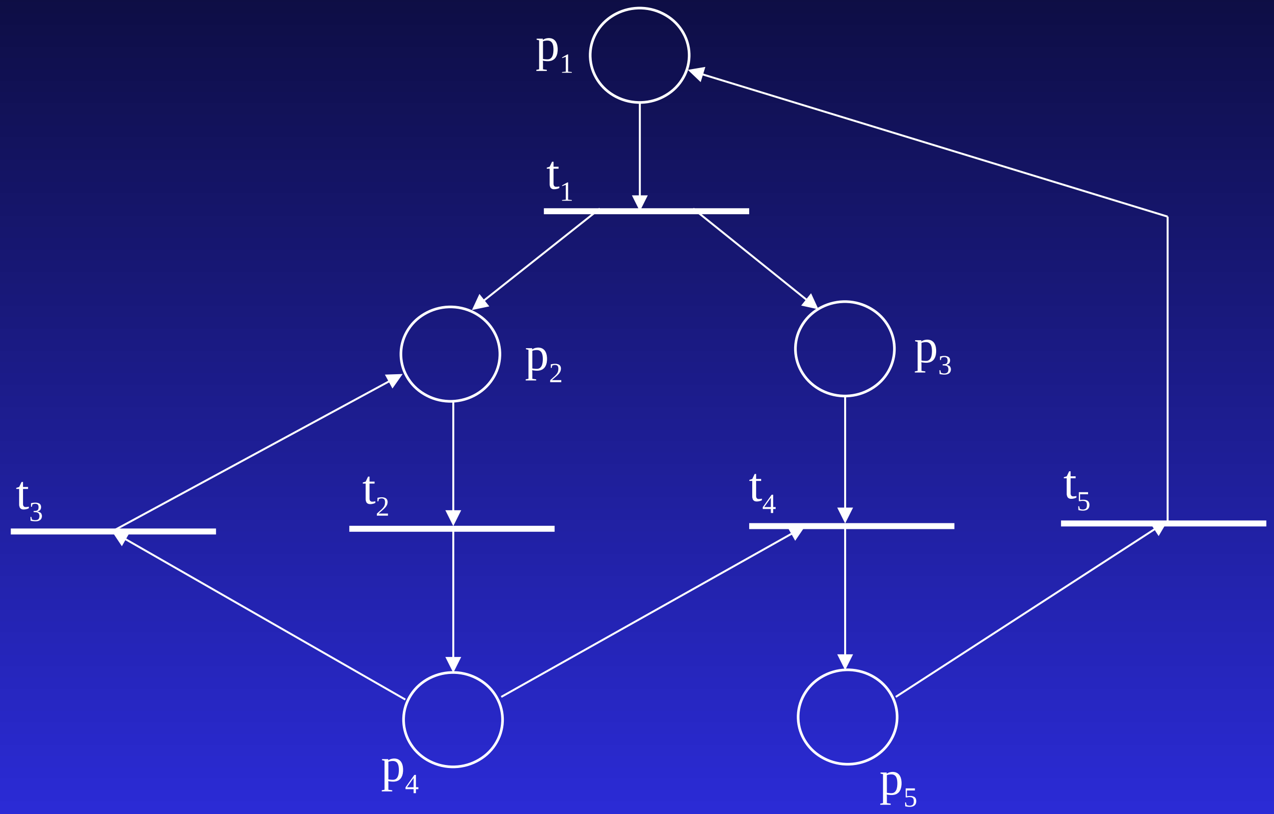
RP – Exemplo

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\};$



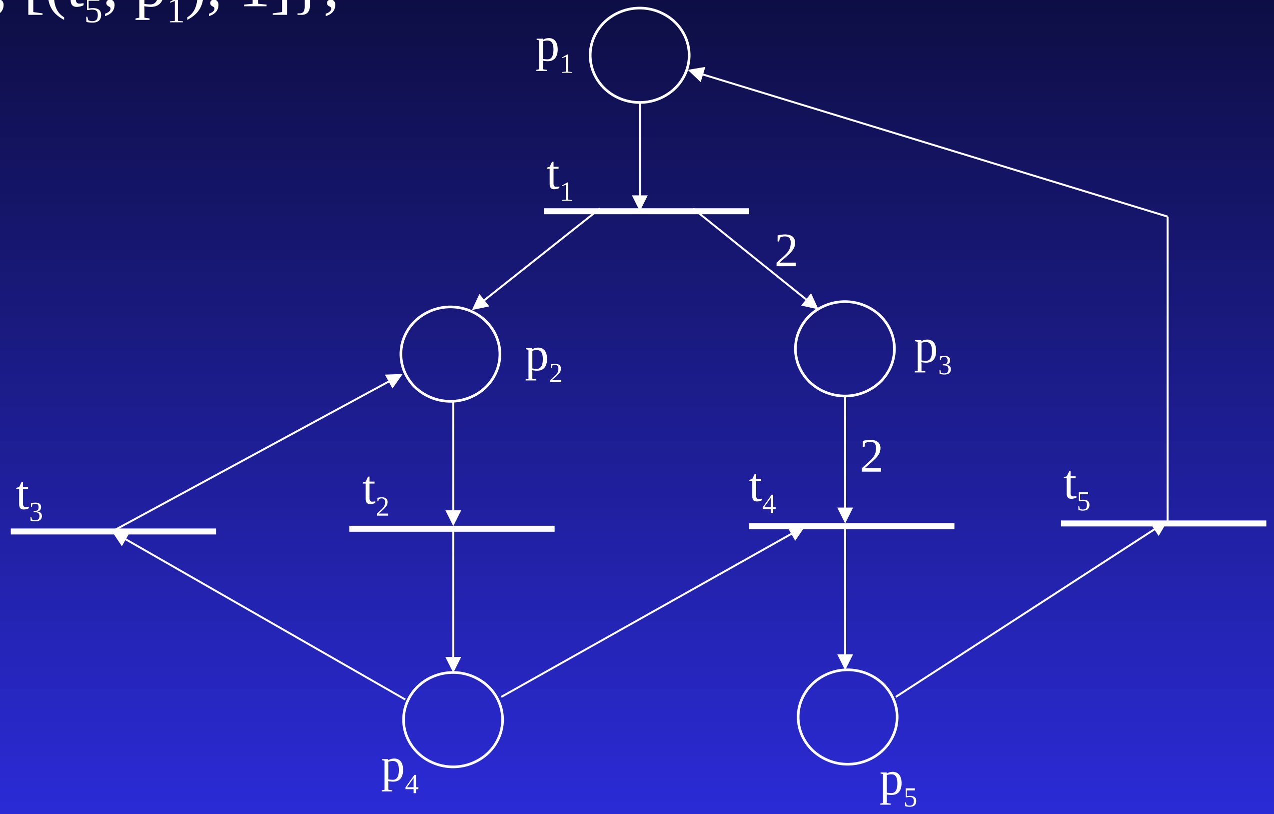
RP – Exemplo

- A = {(p_1, t_1), (t_1, p_2), (t_1, p_3), (p_2, t_2), (t_2, p_4), (p_4, t_3), (t_3, p_2), (p_3, t_4), (p_4, t_4), (t_4, p_5), (p_5, t_5), (t_5, p_1)};



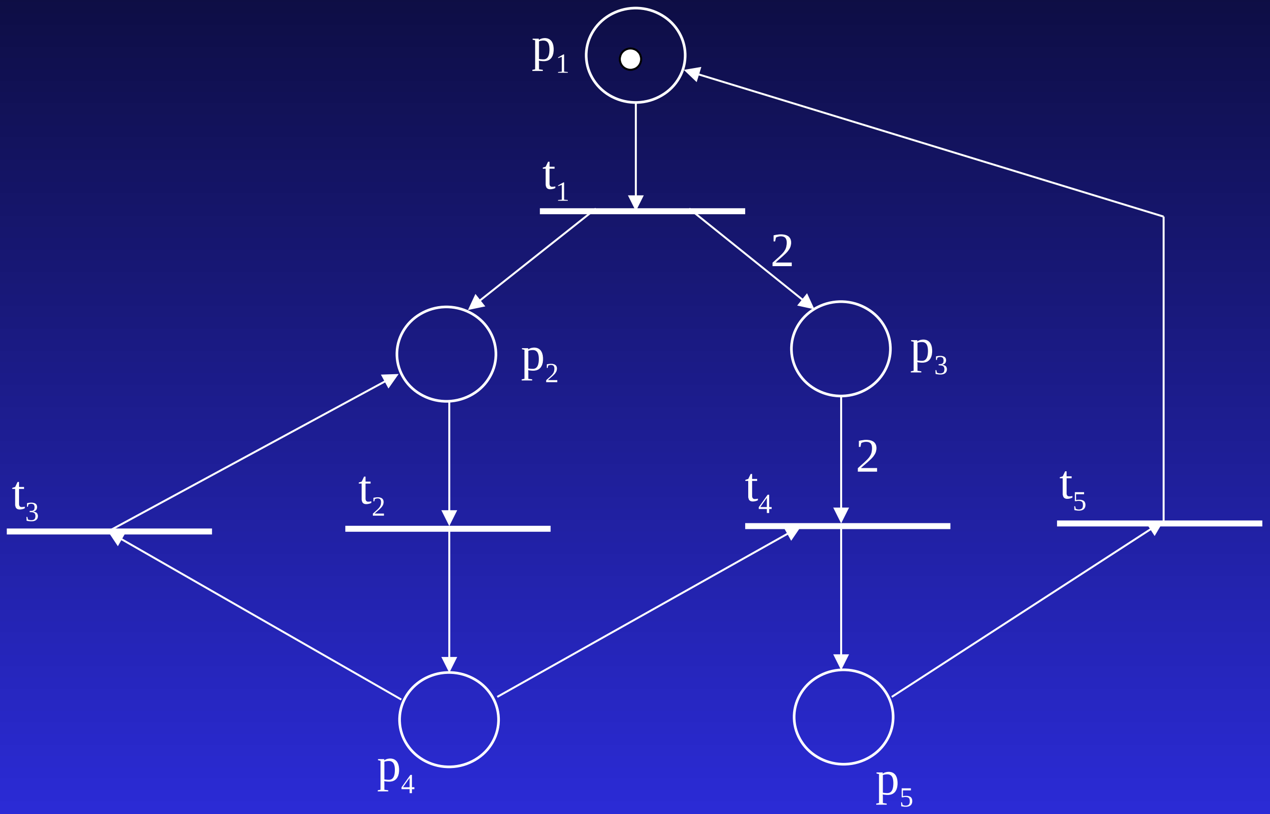
RP – Exemplo

- W = {[(p_1, t_1), 1], [(t_1, p_2), 1], [(t_1, p_3), 2], [(p_2, t_2), 1], [(t_2, p_4), 1], [(p_4, t_3), 1], [(t_3, p_2), 1], [(p_3, t_4), 2], [(p_4, t_4), 1], [(t_4, p_5), 1], [(p_5, t_5), 1], [(t_5, p_1), 1]};



RP – Exemplo

- $M_0 = \{(p_1, 1), (p_2, 0), (p_3, 0), (p_4, 0), (p_5, 0)\}$



RP – Estrutura

- A estrutura de uma rede de Petri é uma quádrupla $N = (P, T, Pre, Post)$, em que:
- $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ é um conjunto finito de lugares;
- $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ é um conjunto finito de transições;
- Pre: $(P \times T) \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots\}$, aplicação de incidência para frente;
- Post: $(T \times P) \rightarrow \{1, 2, \ldots\}$, aplicação de incidência para trás;

$P \cap T = \varnothing$ e $P \cup T \neq \varnothing$

RP – Marcação

- A marcação M de uma RP, pode ser representada por um vetor $m \times 1$;

$$
\begin{array}{c}
p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
$$

RP – Marcação

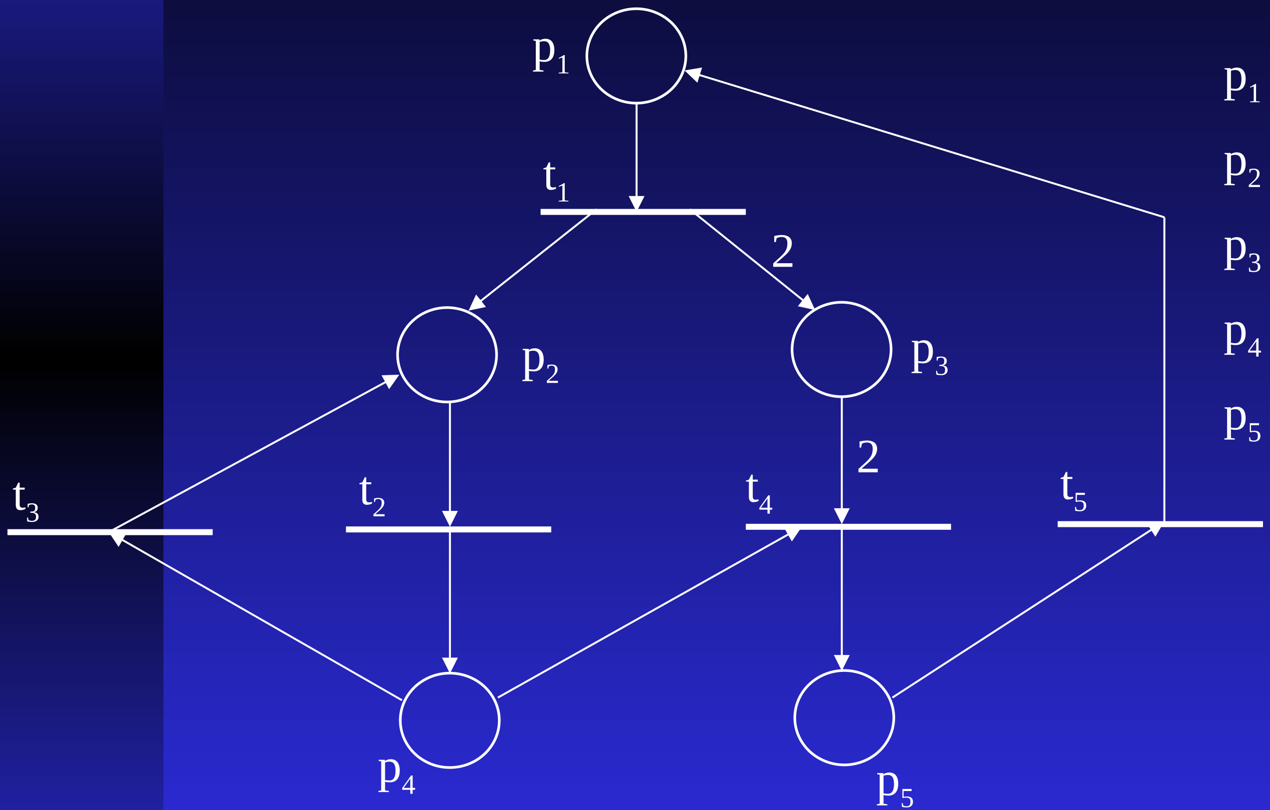
- Uma rede de Petri é uma dupla

$$RP = (N, M_0)$$

em que

- N é a estrutura da rede e;
- M_0 é a marcação inicial.

RP – Matriz Pré

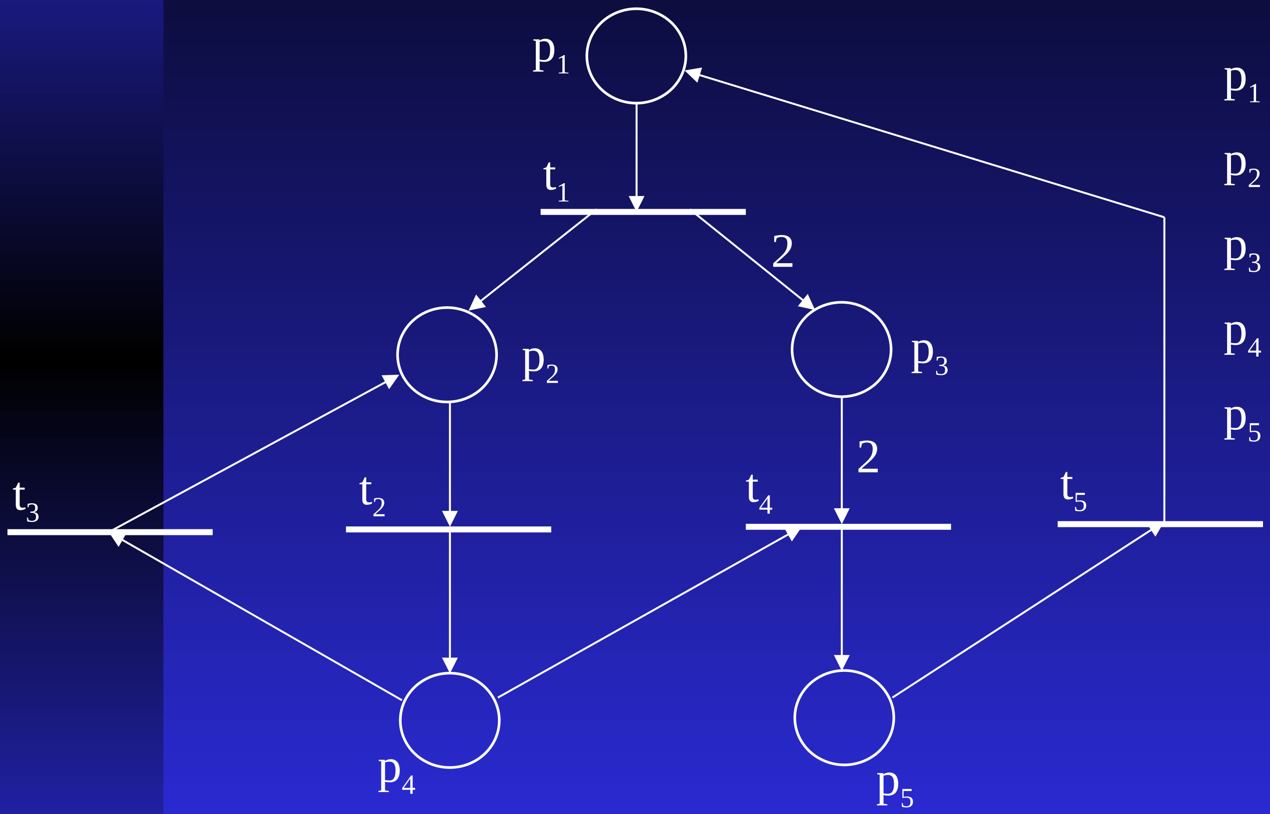


	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
p_1	1	0	0	0	0
p_2	0	1	0	0	0
p_3	0	0	0	2	0
p_4	0	0	1	1	0
p_5	0	0	0	0	1

$m \times n$

Referência somente à entrada da transição.

RP – Matriz Post



	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
p_1	0	0	0	0	1
p_2	1	0	1	0	0
p_3	2	0	0	0	0
p_4	0	1	0	0	0
p_5	0	0	0	1	0

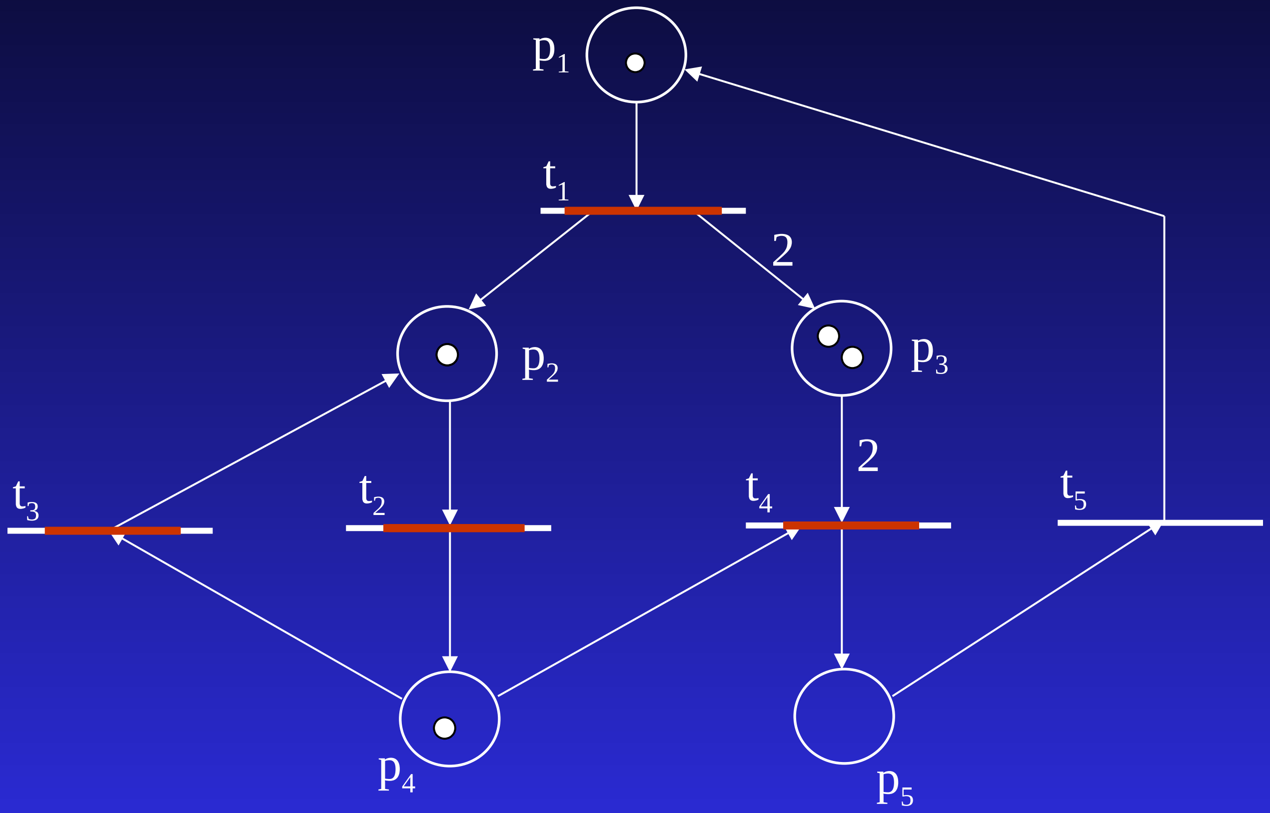
$m \times n$

Referência somente à saída da transição.

Dinâmica de uma RP

- Regra de disparo:
  - (Pré-condição) uma transição *t* está *habilitada* (*sensibilizada*) se cada lugar de entrada *p* de *t* contém pelo menos *w*(*p*, *t*) fichas, em que *w*(*p*, *t*) é o peso do arco que liga *p* a *t*;
  - Uma transição habilitada pode ou não disparar;
  - (Pós-condição) ao disparar *t*, *w*(*p*, *t*) fichas são removidas de cada lugar de entrada *p* de *t* e *w*(*t*, *p*) fichas são adicionadas a cada lugar de saída *p* de *t*, em que *w*(*t*, *p*) é o peso do arco que liga *t* a *p*.

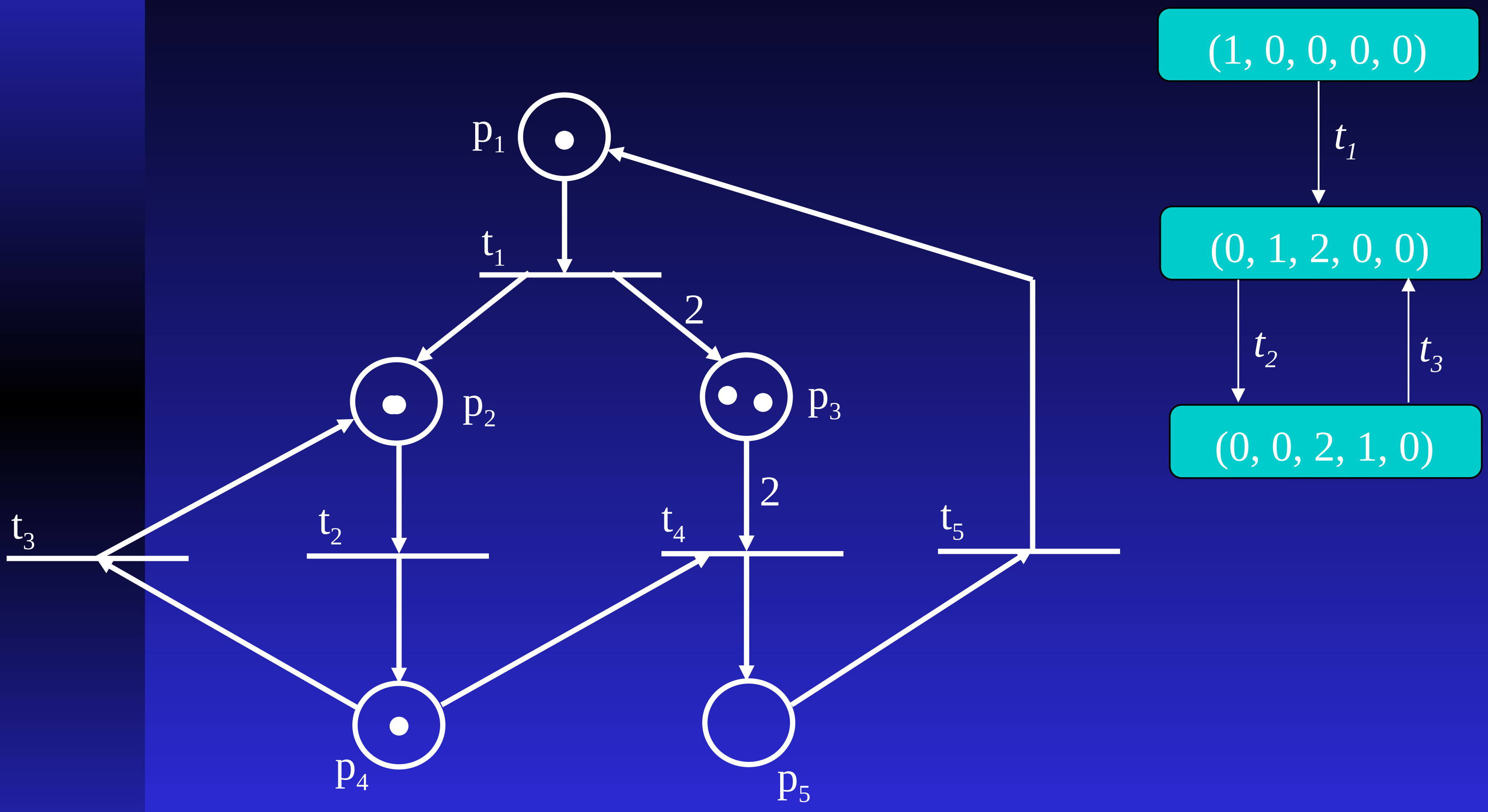
Dinâmica de uma RP



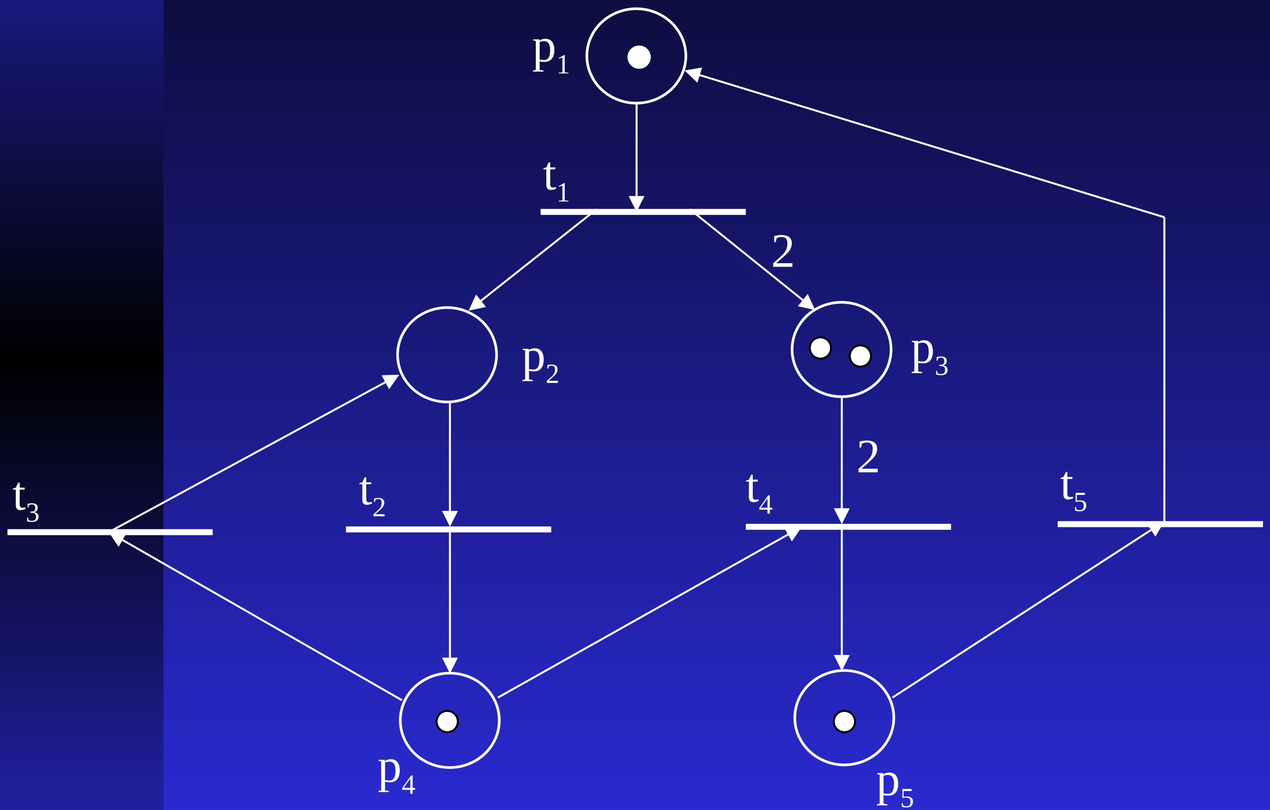
Dinâmica de uma RP

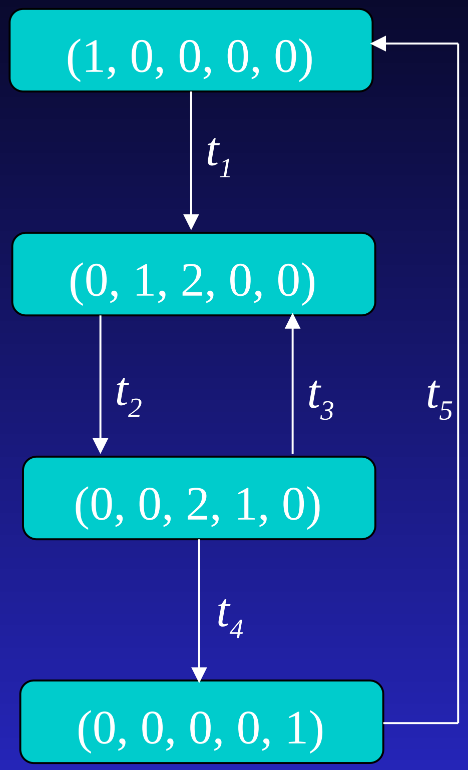
- Notações utilizadas:
  - $M_k(t >$ significa que t é habilitada na marcação M_k
  - $M_k(t > M_{k+1}$ significa que a marcação M_{k+1} é alcançada a partir da marcação M_k, com o disparo de t;
  - $\neg M_k(t >$ significa que t não é habilitada na marcação M_k.

RP – Grafo de Alcançabilidade



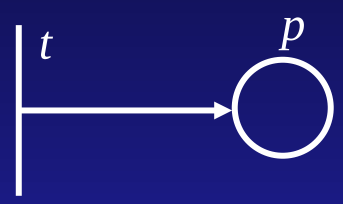
RP – Grafo de Alcançabilidade



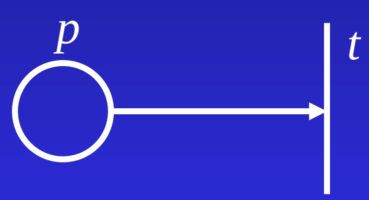


RP – Conceitos

- *Transição fonte*: não possui lugar de entrada – sempre habilitada

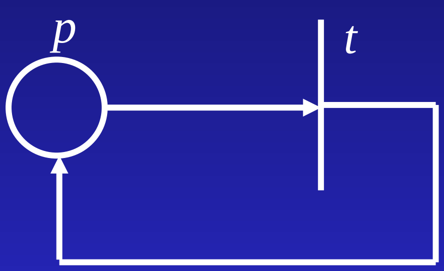


- *Transição sorvedouro*: não possui lugar de saída



RP – Conceitos

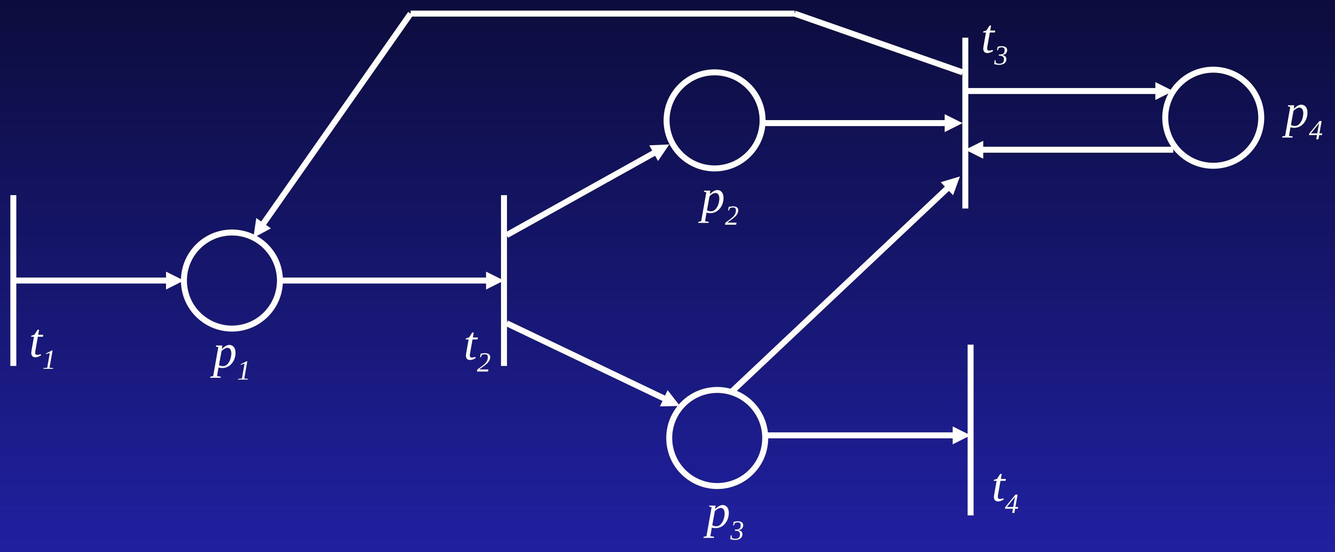
- *Auto-laço*: par formado por um lugar *p* e uma transição *t*, tal que *p* é ao mesmo tempo, entrada e saída de *t*.



RP – Conceitos

- *RP pura*: RP que não contém auto-laço;
- *RP ordinária*: RP em que todos os arcos possuem peso unitário.

RP – Conceitos



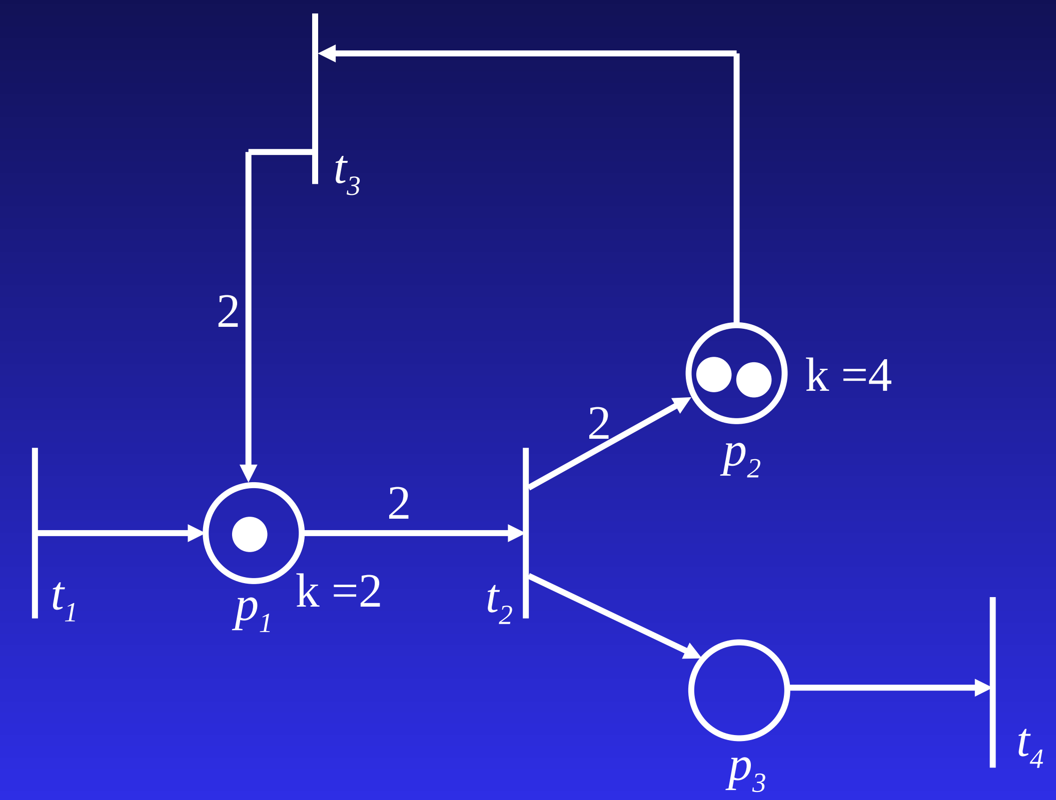
RP com capacidade finita & RP com capacidade infinita

- Uma RP com capacidade finita é uma 6-upla (P, T, F, W, K, M_0), em que
- $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ é um conjunto finito de lugares;
- $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ é um conjunto finito de transições;
- $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ é um conjunto finito de arcos;
- $W : F \to \{1, 2, \ldots\}$ é a função peso associada aos arcos;
- $K : P \to \{1, 2, \ldots\}$ determina a capacidade de cada lugar;
- $M_0 : P \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ é a marcação inicial.

RP com capacidade infinita - Regra de disparo

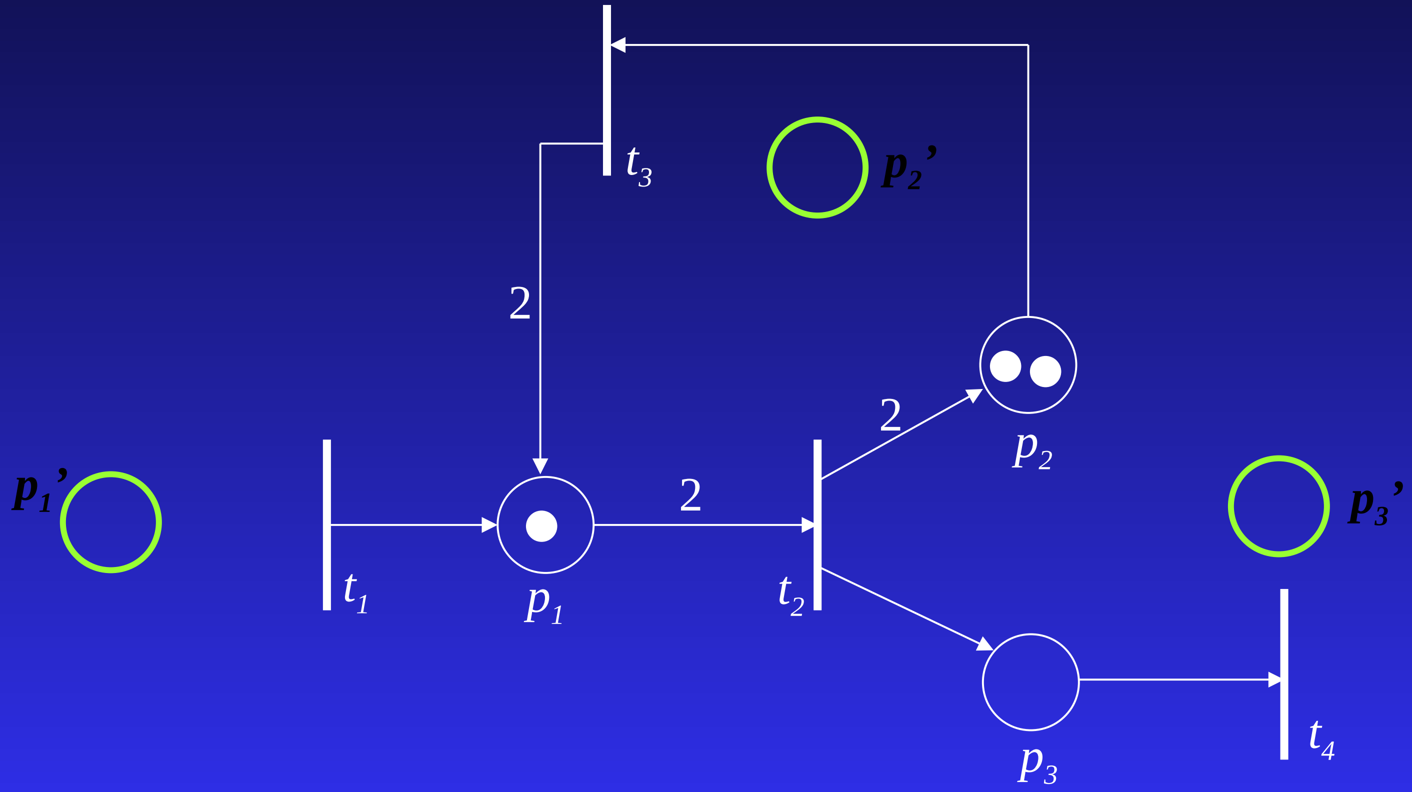
- Aplica-se a *regra de transição estrita*:
  - (pré-condição) uma transição *t* está habilitada se cada lugar de entrada *p* de *t* contém pelo menos, *w*(*p*, *t*) fichas, e se cada lugar de saída *p* de *t* contém, no máximo, K(*p*) – *w*(*t*, *p*) fichas, em que K(*p*) é a capacidade do lugar *p* e *w*(*t*, *p*) é o peso do arco que liga *t* a *p*.

Algoritmo de transformação



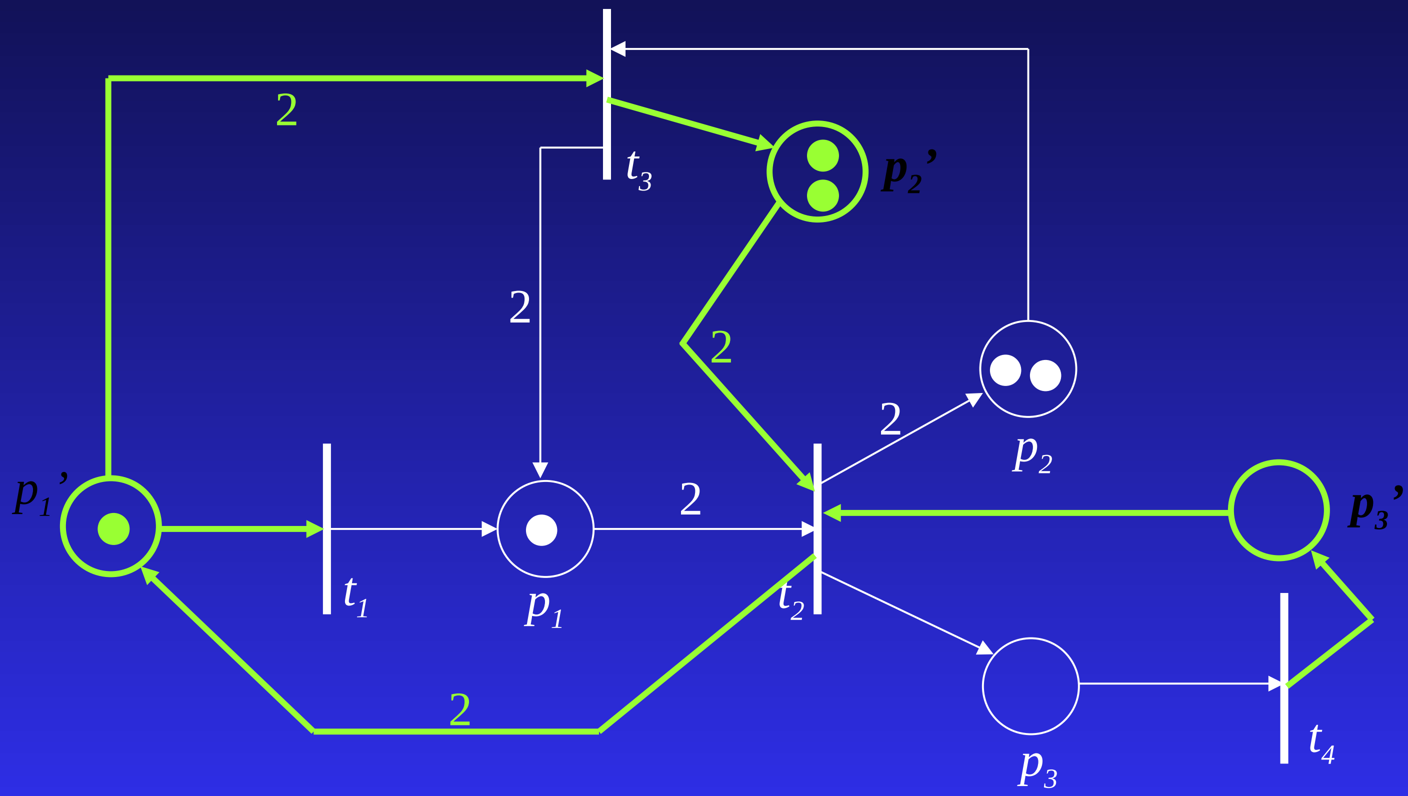
Algoritmo de transformação

- Para cada lugar p, acrescenta-se um lugar complementar p' com marcação inicial dada por $M_0'(p') = K(p) - M_0(p)$;



Algoritmo de transformação

- Para cada transição t e cada lugar complementar p', define-se um novo arco (t, p') ou (p', t), em que $w(t, p') = w(p, t)$ e $w(p', t) = w(t, p)$ (desde que $w \neq 0$)



Linguagem associada a uma RP

- Designam-se as transições de uma RP pelos símbolos de um alfabeto T;
- Uma seqüência de disparos gera uma palavra (string) $s \in T^*$;
- λ representa uma seqüência vazia.

Linguagem associada a uma RP

- As seguintes notações são utilizadas:

$$M_1(t_1t_2 > M_3$$

  - significa que a seqüência t_1t_2 pode ser disparada a partir da marcação M_1;
  - o disparo de t_1t_2 produz a marcação M_3.

Linguagem associada a uma RP

- As seguintes notações são utilizadas:

$$M_1(s > M_2$$

  - significa que a seqüência *s* pode ser disparada a partir da marcação M_1;
  - o disparo de *s* produz a marcação M_2.

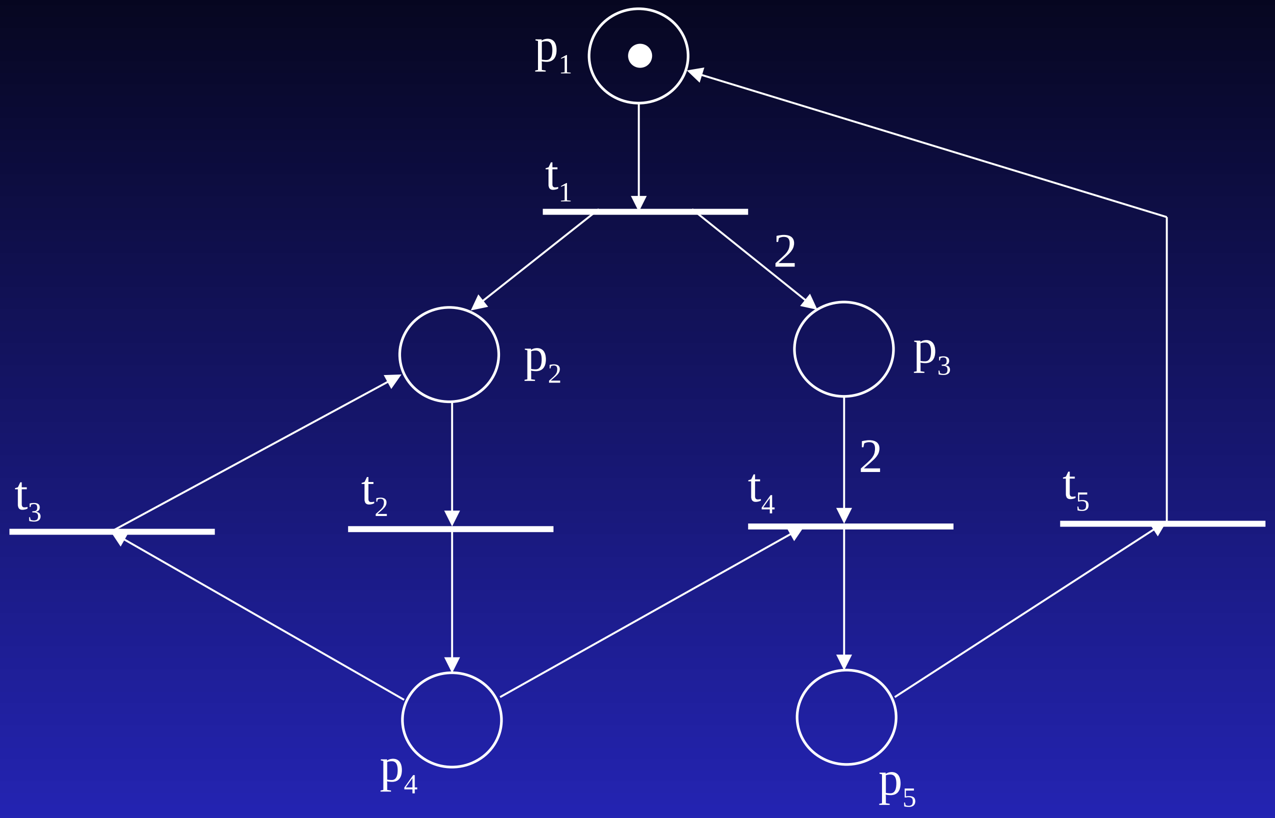
Linguagem associada a uma RP

- Uma seqüência $s \in T^*$ pode ser disparada a partir de uma marcação M, de uma dada RP, M(s > M" se e somente se:
  - $s = \lambda$ para M" = M
  - $s = s't$ com $s' \in T^*$ e $t \in T$ e
  - $\exists$M' | M(s' > M' e M'(t > M"

Linguagem associada a uma RP

- O conjunto de todas as seqüências de disparo possíveis, a partir de M_0, forma a linguagem gerada pela RP, ou seja:
  - $L(RP) = \{ s \in T^* \mid M_0(s > \}$

RP – Linguagem



$$L(RP) = (t_1\ (t_2\ t_3)^*\ t_2\ t_4\ t_5)^*$$

Bibliographie

- F. Bause, P. S. Kritzinger, ‘Stochastic Petri Nets – An Introduction to the Theory’, Vieweg, Alemanha, 2002;
- B. Caillaud, P. Darondeau, L. Lavagno, X. Xie, ‘Syntesis and Control of Discrete Event Systems’, Kluwer Academic Publishers, 2002;
- C. G. Cassandras, S. Lafortune, ‘Introduction to Discrete Event Systems’, Kluwer Academic Publishers, 1999;

Bibliographie

- J. O. Moody, P. J. Antsaklis, ‘Supervisory Control of Discrete Event Systems Using Petri Nets’, Kluwer Academic Publishers, 1998
- J. Cardoso, R. Valette, ‘Redes de Petri’, Editora da UFSC, 1997;
- J.-M. Proth, X. Xie, ‘Les Réseaux de Petri pour la Conception de la Gestion des Systèmes de Prodution’, Masson, Paris, 1994;

Bibliographie

- R. David, H. Alla, ‘Du Grafcet aux Réseaux de Petri’, Hermés, Paris, 1992;
- G. W. Brams, ‘Réseaux de Petri: Théorie et Pratique – tome 1’, Masson, Paris, 1983.
- J. L. Peterson, ‘Petri Net Theory and the Modeling of Systems’, Prentice-Hall, N.J., 1981;
- J. Figueredo, A. Perkusich, J. Damásio, ‘Notas de Aulas’, Departamentos de engenharia Elétrica e Computação – Universidade Federal de Campina Grande, PB.