Redes de Petri e a Representação do Tempo

Prof. Jonatha Rodrigues da Costa &
Prof. Giovanni Cordeiro Barroso
Universidade Federal do Ceará
Departamento de Física

Redes de Petri autônomas

- Descrevem de forma qualitativa um sistema modelado;
- Uma transição pode disparar quando habilitada;
- Os instantes de disparo de uma transição não são conhecidos ou indicados;

Redes de Petri Não-Autônomas

- Descrevem o funcionamento de um sistema em que sua evolução é condicionada pelos eventos externos ou pelo tempo;
- Podem ser:
  - *Sincronizadas* – dependentes de eventos externos;
  - *Com restrições de tempo* – dependentes do tempo.

Redes de Petri com Restrições de Tempo

- Permitem descrever um sistema em que seu funcionamento depende do tempo;
- Normalmente um certo espaço de tempo é decorrido entre o início e o fim de uma operação;
- Se uma ficha em um certo lugar indica que uma operação está em curso, uma RP com restrições de tempo permite levar em conta o tempo dessa operação.

Redes de Petri com Restrições de Tempo

- Existem duas grandes classes de modelo:
  - Rede de Petri Temporal;
  - Rede de Petri Temporizada.

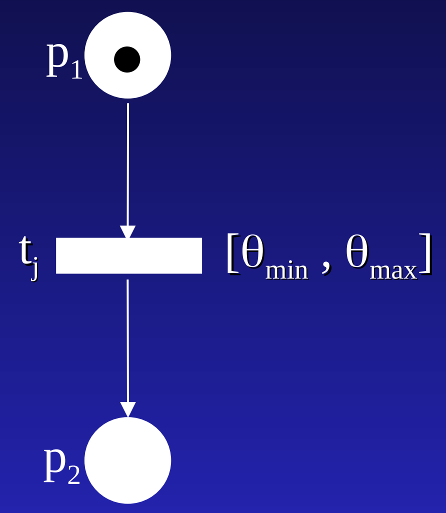
Redes de Petri Temporais

- No *modelo temporal* é associado a cada transição um intervalo de tempo

$$[\theta_{min} , \theta_{max}]$$

- θ_{min} indica a duração mínima de habilização (sensibilização) da transição antes do disparo;
- θ_{max} permite calcular a duração máxima de habilização;
- A transição deve disparar nesse intervalo.

Redes de Petri Temporais



Redes de Petri Temporizadas

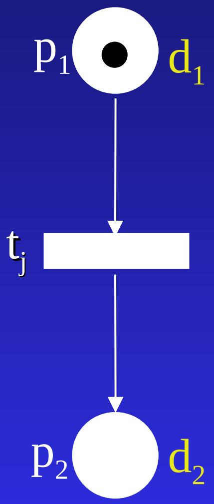
- Uteis para ***avaliação de desempenho*** dos sistemas modelados;

Redes de Petri Temporizadas

- Existem duas formas principais de modelar a temporização:
  - *RP P-temporizada* (RP-Pt) – temporização associada aos lugares;
  - *RP T-temporizada* (RP-Tt) – temporização associada às transições.

Redes de Petri P-temporizadas (RP-Pt)

- A cada lugar p_i é associada uma temporização d_i, eventualmente nula;



Redes de Petri P-temporizadas

- Uma RP P-temporizada é uma dupla:

$$<RP, \Gamma>$$

em que:

- RP é uma rede de Petri;
- Γ é uma aplicação do conjunto de lugares P no conjunto de números racionais positivos ou nulos, assim:

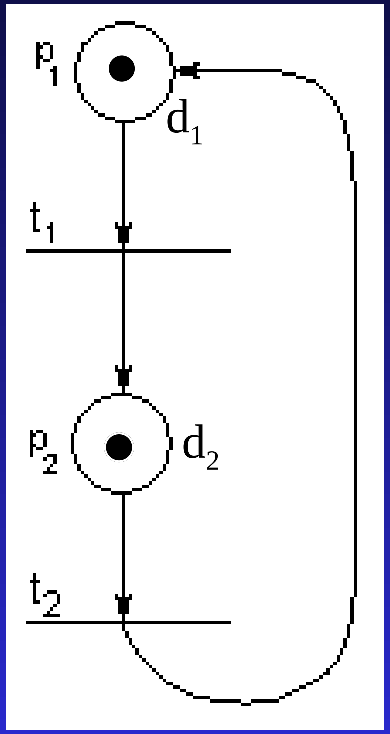
$$\Gamma(p_i) = d_i$$

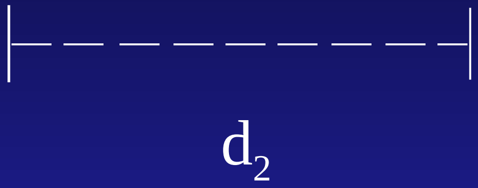
(temporização associada ao lugar p_i)

RP-Pt – Princípio de Funcionamento

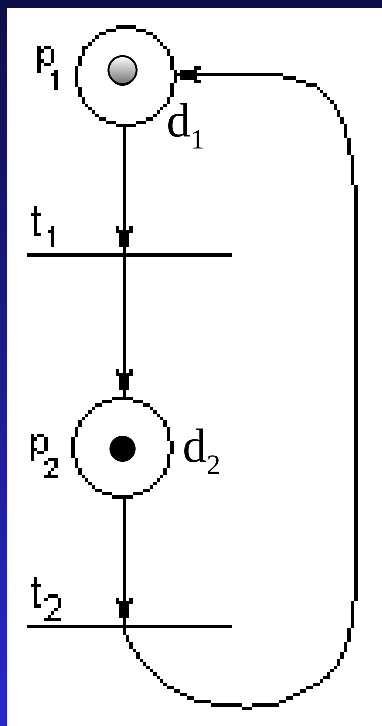
- Assim que uma ficha chega ao lugar p_i, a mesma deve permanecer em p_i no mínimo durante um tempo d_i;
- A ficha fica ***indisponível*** durante o intervalo de tempo d_i;
- Após a passagem do intervalo de tempo d_i a ficha fica ***disponível***.

RP-Pt – Princípio de Funcionamento





RP-Pt – Princípio de Funcionamento



- No instante inicial, a marcação M_0 é constituída de fichas disponíveis;

- Em um instante τ qualquer, a marcação atual M é a soma de duas marcações:

  -M^d, constituída de fichas disponíveis;

  -M^i, constituída de fichas indisponíveis;

$M = M^d + M^i = (1^i \;\; 1^d)$

RP-Pt – Princípio de Funcionamento

- Uma transição está habilitada em uma marcação $M = M^d + M^i$, se ela é habilitada para a marcação M^d;

RP-Pt – Princípio de Funcionamento

- O disparo de uma transição t habilitada ocorre da mesma forma que em uma RP não temporizada, retirando-se somente fichas disponíveis dos lugares de entrada de t e depositando fichas nos lugares de saída de t, segundo os respectivos pesos dos arcos

RP-Pt – Princípio de Funcionamento

- O disparo de uma transição t habilitada tem duração nula;
- Se uma ficha é depositada em um lugar p_i devido ao disparo de t efetuado no instante **τ**, então essa ficha fica indisponível durante o intervalo

$$] \tau, \tau + d_i [$$

RP-Pt – Princípio de Funcionamento

- As transições habilitadas por uma marcação disponível M^d, não são obrigadas a disparar no instante em que as fichas de seus lugares de entrada ficam disponíveis, ou seja, pode existir um tempo de espera arbitrário entre a habilitação e o disparo.

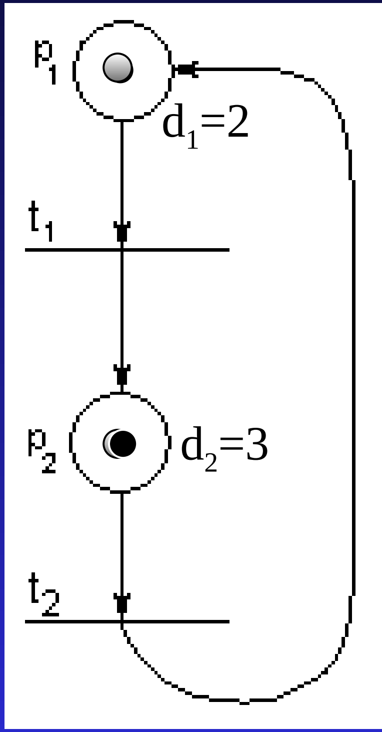
$$] \tau, \tau + d_i [$$

tempo de indisponibilidade

$$(\tau + d_i + x)$$

instante de disparo

Funcionamento de uma RP-Pt

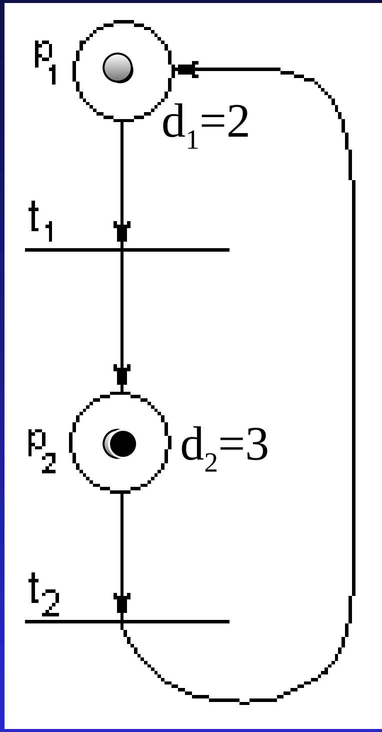


- $M_0 \rightarrow 0 \leq \tau \leq x$ (disponível)
- $M_1 \rightarrow x < \tau < x + 3$ (indisponível)
- $M_1 \rightarrow x + 3 \leq \tau \leq x + 3 + y$ (disponível)
- $M_2 \rightarrow x + 3 + y < \tau < x + 3 + y + 2$ (indisponível)

- x e y são tempos de espera arbitrários

Funcionamento de uma RP-Pt

No caso em que $x = y = 0$, tem-se:

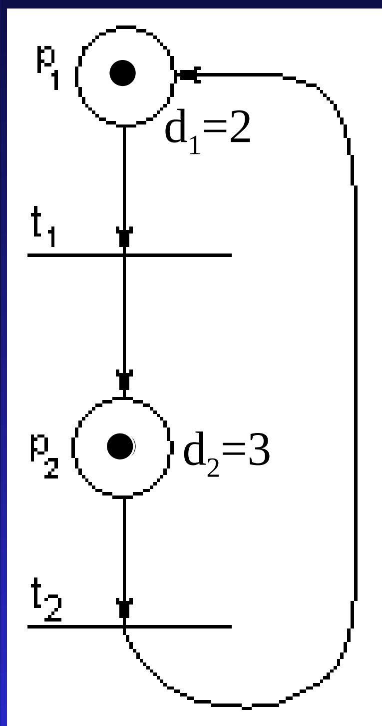


- $M_0 \rightarrow \tau = 0$ (disponível)
- $M_1 \rightarrow 0 < \tau < 3$ (indisponível)
- $M_1 \rightarrow \tau = 3$ (disponível)
- $M_2 \rightarrow 3 < \tau < 5$ (indisponível)

Funcionamento de uma RP-Pt

- No exemplo anterior diz-se que a RP-Pt está em ***funcionamento a velocidade máxima***, ou seja, no instante que uma transição é habilitada para uma marcação disponível, ela dispara.

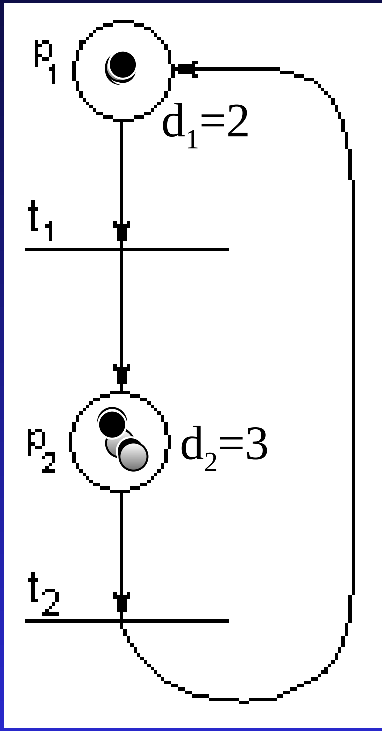
RP-Pt – Grafo das Marcações de Funcionamento a Velocidade Máxima



$$\underset{M_0}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}} \xrightarrow{t_1/0} \underset{M_1}{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}} \underset{t_1/2}{\overset{t_2/3}{\rightleftarrows}} \underset{M_2}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}$$

- Observa-se que após a passagem de M_0 para M_1, a RP-Pt apresenta um comportamento periódico.

RP-Pt – Grafo das Marcações de Funcionamento a Velocidade Máxima



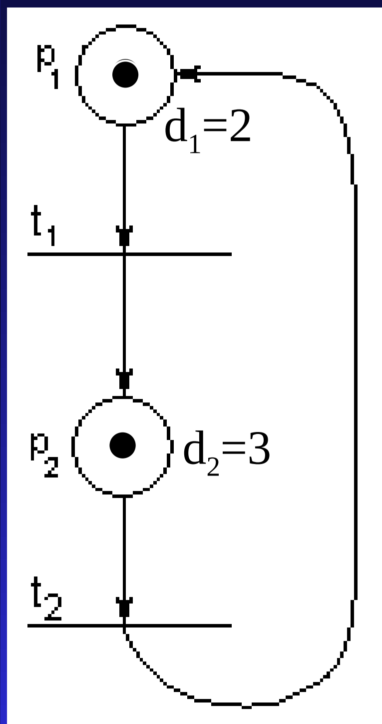
$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
\underset{M_0}{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}} \arrow[r, "\{t_1\, t_2\}/0"] & \underset{M_1}{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}} \arrow[r, "t_1/2"] & \underset{M_2}{\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}} \arrow[r, "t_2/1"] & \underset{M_3}{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}} \arrow[ll, bend left, "\{t_1\, t_2\}/2"]
\end{tikzcd}
$$

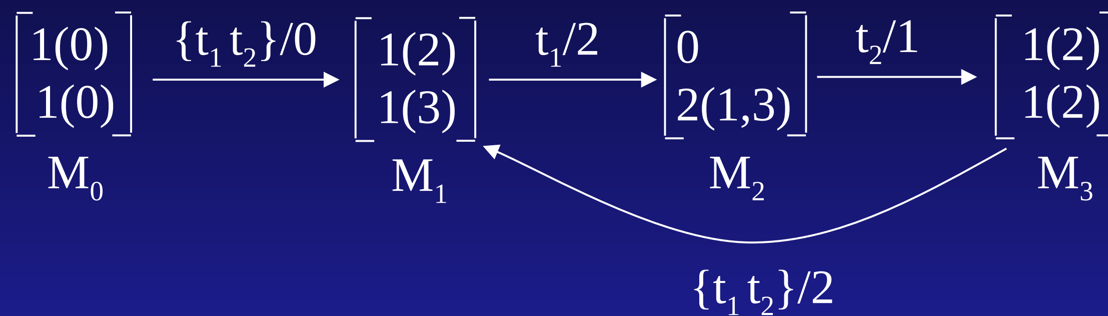
- M_0, M_1 e M_3 possuem o mesmo número de fichas em cada lugar;
- A diferença está na duração de *indisponibilidade residual* de cada ficha no momento em que a marcação é alcançada.

RP-Pt – Grafo das Marcações de Funcionamento a Velocidade Máxima

- No grafo do exemplo anterior o tempo de *indisponibilidade residual* de cada ficha não aparece explicitamente;
- Esta informação pode ser explicitada no grafo, como visto a seguir.

RP-Pt – Grafo das Marcações de Funcionamento a Velocidade Máxima





- Fica claro que as marcações M_0, M_1 e M_3 são diferentes devido ao tempo de indisponibilidade residual das mesmas.

RP-Pt – Regime Estacionário

- O funcionamento das redes dos exemplos enteriores, representado pelos grafos de marcações, atingem um comportamento periódico após um certo tempo. Este comportamento é uma propriedade geral;

RP-Pt – Regime Estacionário

- Propriedade 1 – Seja R_T uma RP-Pt em que as temporizações são representadas pelos números racionais. O funcionamento a velocidade máxima conduz a um *comportamento periódico*, a partir de um certo tempo finito, para toda marcação inicial, tal que R_T seja limitada;

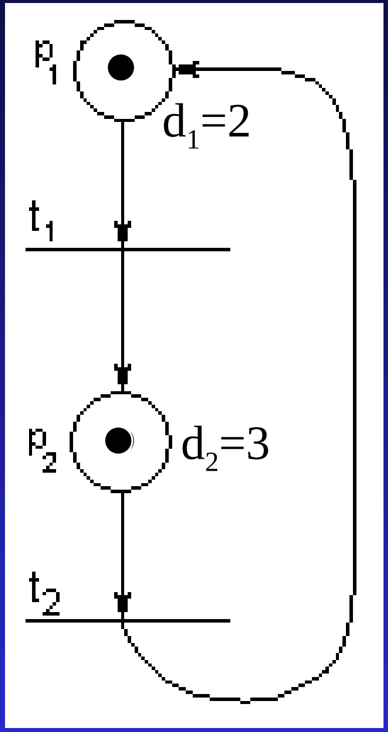
RP-Pt – Regime Estacionário

- Funcionamento em velocidade própria - conceito introduzido por J. Sifakis:
  - Uma RP-Pt funciona em velocidade própria se toda ficha permanece em um lugar somente durante o tempo de sua indisponibilidade.

RP-Pt – Regime Estacionário

- Em geral, uma ficha pode ficar disponível por um certo período de tempo, em um determinado lugar, se a mesma não é suficiente para habilitar uma transição;
- A ficha deve então esperar que outras fichas se tornem disponíveis em outros lugares.

RP-Pt – Regime Estacionário



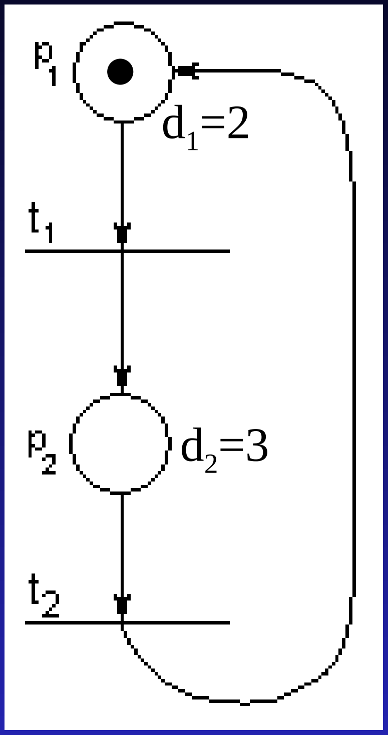
$$\underset{M_0}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}} \xrightarrow{t_1/0} \underset{M_1}{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}} \underset{t_1/2}{\overset{t_2/3}{\rightleftarrows}} \underset{M_2}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}$$

- RP-Pt funciona em velocidade própria

RP-Pt – Regime Estacionário

- Definição 1 – Dada uma RP-Pt, a ***Freqüência de Disparo F_j***, de uma transição t_j, é dada pelo número médio de disparo de t_j por unidade de tempo, logo que o regime estacionário (comportamento periódico) da RP-Pt é encontrado.

RP-Pt – Regime Estacionário



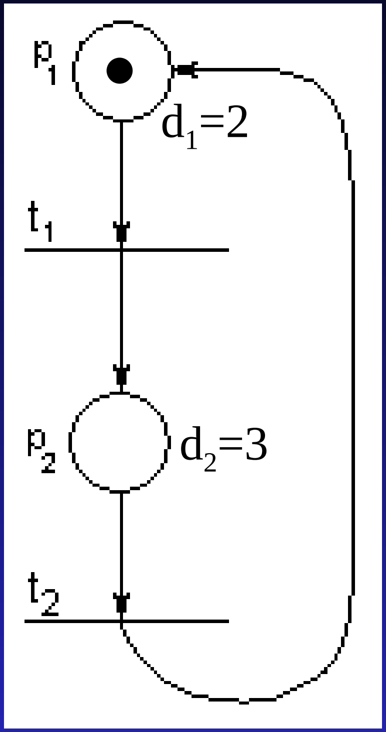
$$
\begin{tikzcd}
\underset{M_0}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}} \arrow[r, "t_1/0"] & \underset{M_1}{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}} \arrow[r, shift left, "t_2/3"] & \underset{M_2}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}} \arrow[l, shift left, "t_1/2"]
\end{tikzcd}
$$

- Em regime estacionário e funcionamento a velocidade própria:

d_1F_2 = Nº médio de fichas em p_1;

d_2F_1 = Nº médio de fichas em $p_{2;}$

RP-Pt – Regime Estacionário



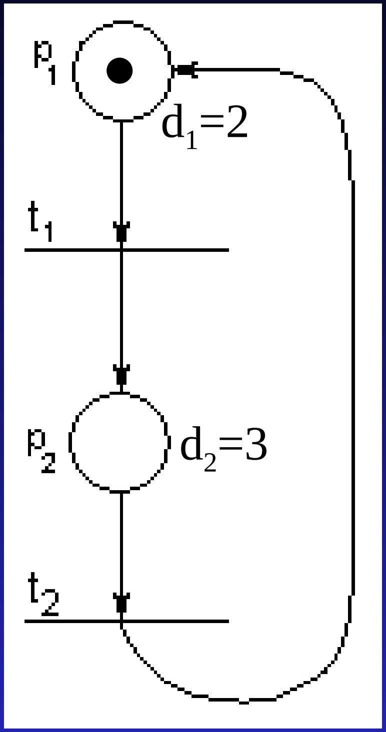
$$\underset{M_0}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}} \xrightarrow{t_1/0} \underset{M_1}{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}} \underset{t_1/2}{\overset{t_2/3}{\rightleftarrows}} \underset{M_2}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}$$

- Em regime estacionário e funcionamento a velocidade própria:

$$d_1F_2 + d_2F_1 = M_0(p_1) + M_0(p_2)$$

(Invariante)

RP-Pt – Regime Estacionário

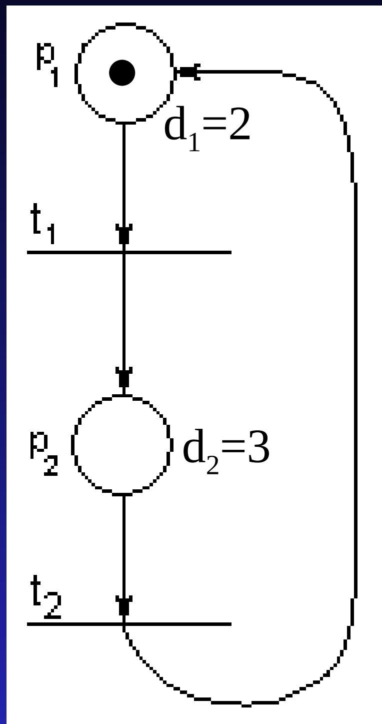


$$
\begin{tikzcd}
\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \arrow[r, "t_1/0"] & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \arrow[r, shift left, "t_2/3"] & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \arrow[l, shift left, "t_1/2"] \\
M_0 & M_1 & M_2
\end{tikzcd}
$$

- Período $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_1$
  - Duração = 5 unidades de tempo;
  - t_1 dispara uma vez;
  - t_2 dispara uma vez, então:

$$F_1 = F_2 = 1/5$$

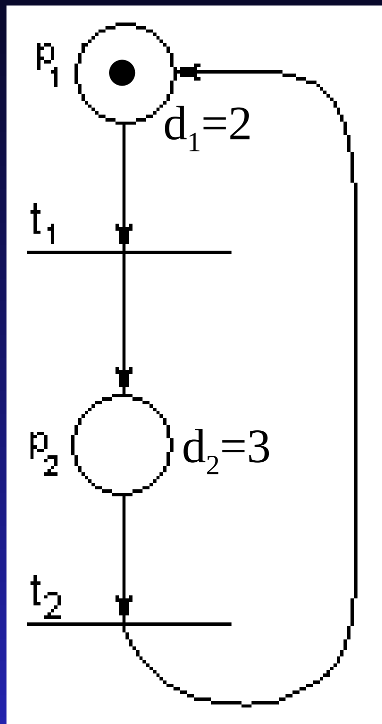
RP-Pt – Regime Estacionário



$$\underset{M_0}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}} \xrightarrow{t_1/0} \underset{M_1}{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}} \underset{t_1/2}{\overset{t_2/3}{\rightleftarrows}} \underset{M_2}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}$$

- Observe que, em regime estacionário, em média o número de fichas que entram em um lugar p_i, é igual ao número de fichas que saem do lugar p_i.

RP-Pt – Regime Estacionário



$$
\begin{tikzcd}
\underset{M_0}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}} \arrow[r, "t_1/0"] & \underset{M_1}{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}} \arrow[r, shift left, "t_2/3"] & \underset{M_2}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}} \arrow[l, shift left, "t_1/2"]
\end{tikzcd}
$$

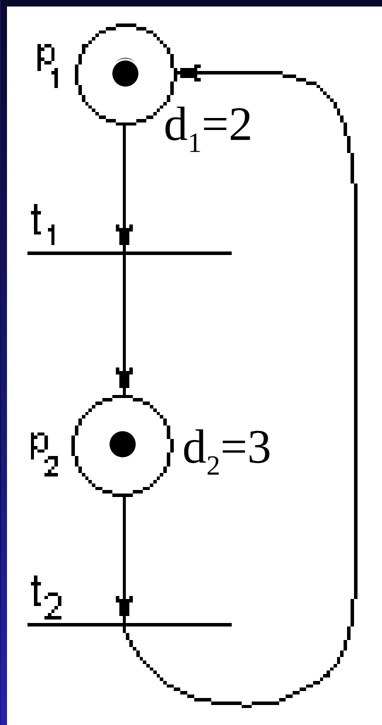
- Assim, a equação

$$d_1F_2 + d_2F_1 = M_0(p_1) + M_0(p_2)$$

pode ser substituída por:

$$d_1F_1 + d_2F_2 = M_0(p_1) + M_0(p_2)$$

RP-Pt – Regime Estacionário

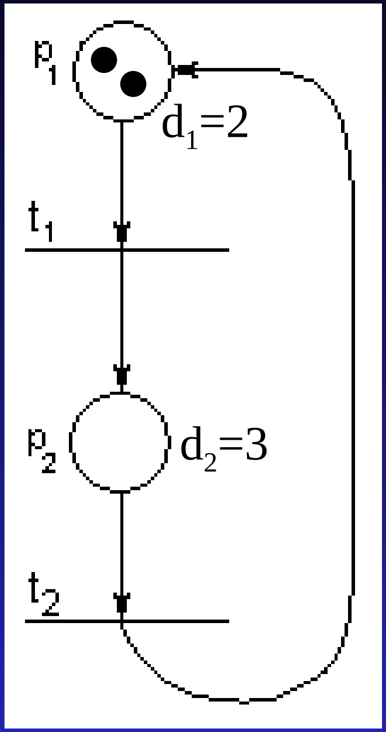


$$\begin{tikzcd}
\begin{bmatrix}1(0)\\1(0)\end{bmatrix} \arrow[r, "\{t_1\, t_2\}/0"] & \begin{bmatrix}1(2)\\1(3)\end{bmatrix} \arrow[r, "t_1/2"] & \begin{bmatrix}0\\2(1,3)\end{bmatrix} \arrow[r, "t_2/1"] & \begin{bmatrix}1(2)\\1(2)\end{bmatrix} \arrow[ll, bend left, "\{t_1\, t_2\}/2"] \\
M_0 & M_1 & M_2 & M_3
\end{tikzcd}$$

- Período $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow M_1$;
- Duração do p eríodo: 5;
- t_1 e t_2 disparam 2 vezes no período;
- $M_0(p_1) + M_0(p_2) = 2$, então:

$$F_1 = F_2 = 2/5$$

RP-Pt – Regime Estacionário



$$\underset{M_0}{\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}} \xrightarrow{\{t_1 t_1\}/0} \underset{M_1}{\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}} \underset{\{t_1\, t_1\}/2}{\overset{\{t_2\, t_2\}/3}{\rightleftarrows}} \underset{M_2}{\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}}$$

- Período $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_1$;
- Duração do p eríodo: 5;
- t_1 e t_2 disparam 2 vezes no período;
- $M_0(p_1) + M_0(p_2) = 2$, então:

$$F_1 = F_2 = 2/5$$

Redes de Petri T-temporizadas

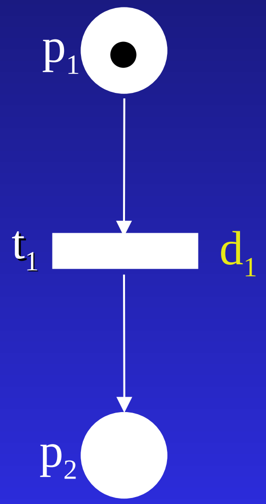
(RP-Tt)

Redes de Petri T-temporizadas (RP-Tt)

- C. Ramchandani associou o tempo às transições das redes de Petri.
- São as redes de Petri T-temporizadas, ou RP-Tt;
- Pode-se mostrar facilmente que as RP-Tt são equivalentes às RP-Pt.

Redes de Petri T-temporizadas (RP-Tt)

- A cada transição t_j é associada uma temporização d_j, eventualmente nula;



Redes de Petri T-temporizadas

- Uma RP T-temporizada é uma dupla:

$$\langle RP, \Gamma \rangle$$

em que:

- RP é uma rede de Petri;
- Γ é uma aplicação do conjunto de transições T no conjunto de números racionais positivos ou nulos, assim:

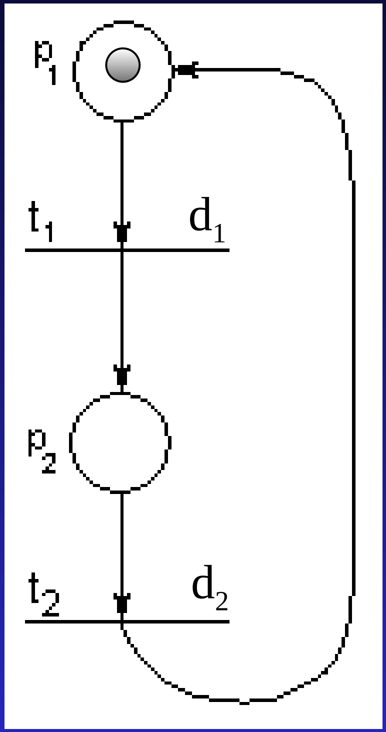
$$\Gamma(t_j) = d_j$$

(temporização associada à transição t_j)

RP-Tt – Princípio de Funcionamento

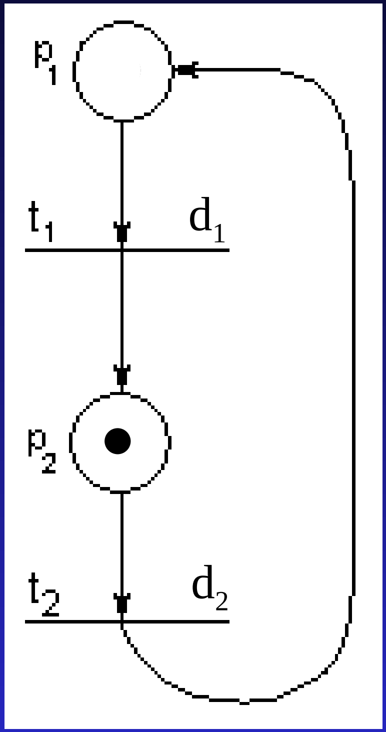
- Uma ficha pode possuir dois estados distintos:
  - ***Reservada*** para o disparo de uma transição t_j;
  - ***Não reservada***.

RP-Tt – Princípio de Funcionamento



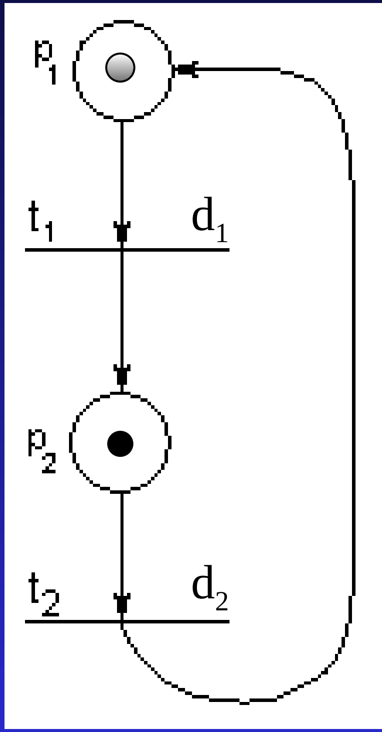
- Na marcação M_0=(1 0), existe uma ficha *não reservada* em p_1;
- t_1 está habilitada e seu disparo pode ser decidido a qualquer instante;
- No instante em que o disparo é decidido, a ficha no lugar p_1 (necessária ao disparo de t_1) é *reservada*;

RP-Tt – Princípio de Funcionamento



- Decorrido o tempo d_1, depois de decidido o disparo, t_1 é disparada de forma instantânea;
- O disparo de t_1 retira a ficha *reservada* do lugar p_1 e coloca uma ficha *não reservada* no lugar p_2;

RP-Tt – Princípio de Funcionamento



- A todo instante τ, a marcação atual M é a soma de duas marcações:

  -M^r, constituída de fichas reservadas;

  -M^n, constituída de fichas não reservadas.

$$\mathbf{M = M^r + M^n = (1^r \;\; 1^n)}$$

RP-Tt – Princípio de Funcionamento

- Uma transição está habilitada em uma marcação $M = M^r + M^n$, se ela é habilitada para a marcação M^n;

RP-Tt – Princípio de Funcionamento

- **τ** representa o instante em que se decide o disparo da transição t_j;
- **τ** $+ d_j$ representa o instante em que o disparo de t_j é efetivamente realizado;

RP-Tt – Princípio de Funcionamento

- Este formalismo oferece as seguintes vantagens:
  - o disparo da transição t_j é instantâneo e indivisível;
  - é coerente com a definição de disparo de transições das redes de Petri.

RP-Tt – Princípio de Funcionamento

- No entanto, pode-se imaginar:
  - $\boldsymbol{\tau}$ é o instante no qual se inicia o disparo de t_j;
  - $\boldsymbol{\tau} + d_j$ representa o instante final do disparo.

RP-Tt – Princípio de Funcionamento

- Alguns autores chegam a dizer que entre os instantes $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\tau} + d_j$, as fichas reservadas *« se encontram »* na transição que é disparada.

RP-Tt – Princípio de Funcionamento

- Uma marcação, em uma RP-Tt, é então composta por fichas reservadas e fichas não reservadas;

- Uma transição t_j ***está habilitada se as fichas não reservadas são em número suficiente*** para habilitá-la;

RP-Tt – Princípio de Funcionamento

- Pode-se, em um determinado instante $\boldsymbol{\tau}$, reservar as fichas necessárias ao disparo de t_j;
- As fichas ficam então reservadas durante o intervalo de tempo

$$]\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau} + d_j[$$

e o disparo é efetuado no instante

$$\boldsymbol{\tau} + d_j$$

RP-Tt – Princípio de Funcionamento

- Para uma dada marcação inicial M_0 e um dado instante inicial $\boldsymbol{\tau}$, assume-se que todas as fichas são ***não reservadas***.

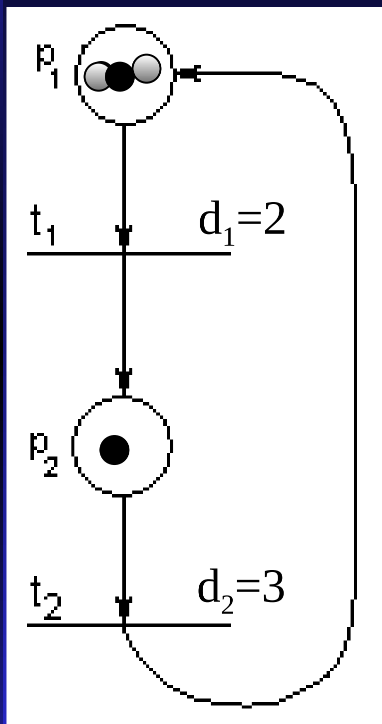
RP-Tt – Princípio de Funcionamento

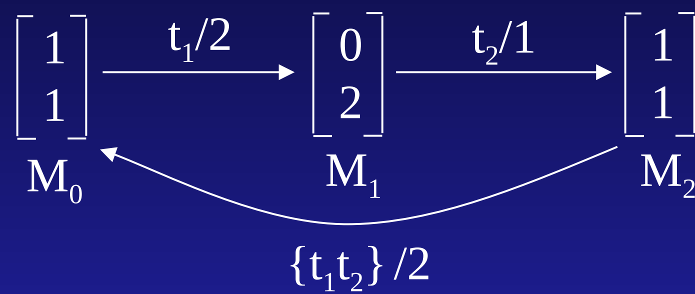
- Eventualmente, pode-se libertar desta hipótese, supondo que certas fichas são reservadas no instante inicial e que a duração de seus tempos residuais é conhecida.

Funcionamento de uma RP-Tt

- Diz-se que uma RP-Tt está em ***funcionamento a velocidade máxima*** se, desde que uma transição seja habilitada, as fichas necessárias ao seu disparo sejam reservadas;
- Diz-se que uma RP-Tt está em ***funcionamento a velocidade própria*** se, desde que uma ficha seja colocada em um lugar, ela é reservada para o disparo de uma transição.

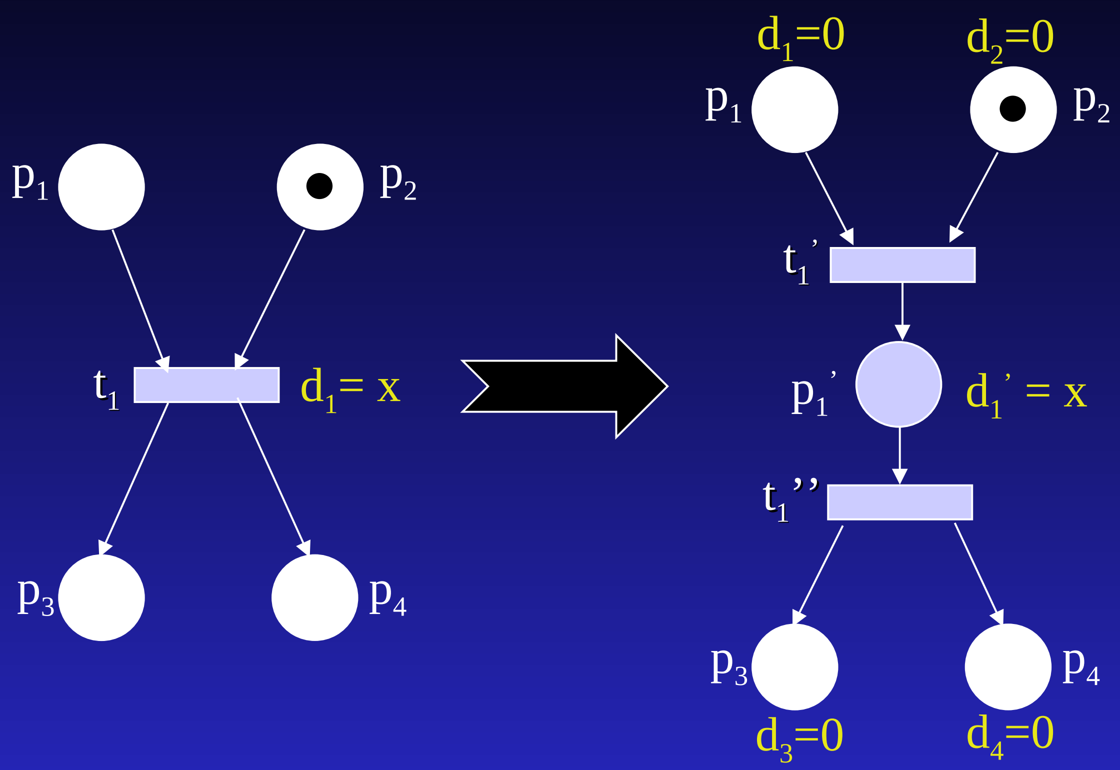
Funcionamento de uma RP-Tt





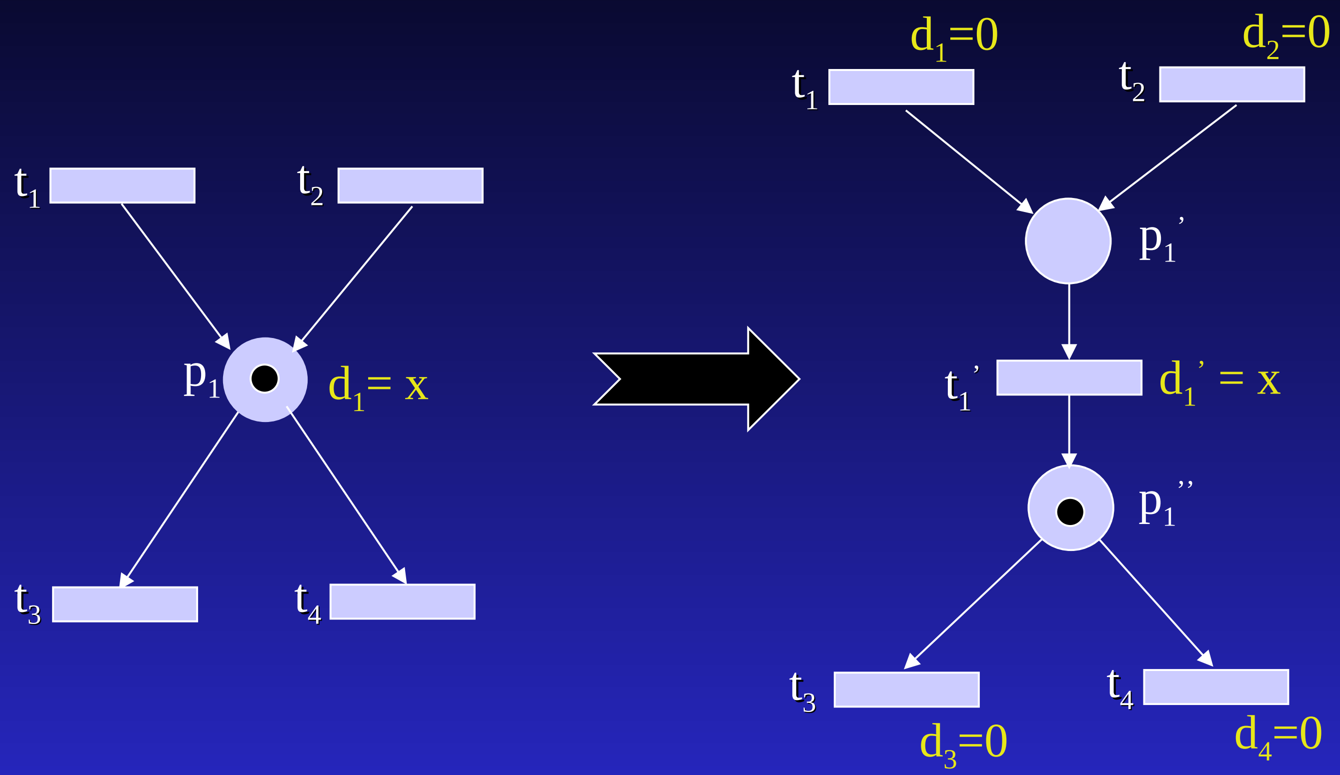
- Funcionamento a velocidade máxima, em velocidade própria

Equivalência (RP-Tt ⇔ RP-Pt)



- A marcação inicial não varia;

Equivalência (RP-Tt ⇔ RP-Tt)



- $M_0(p_1'') = M_0(p_1)$;

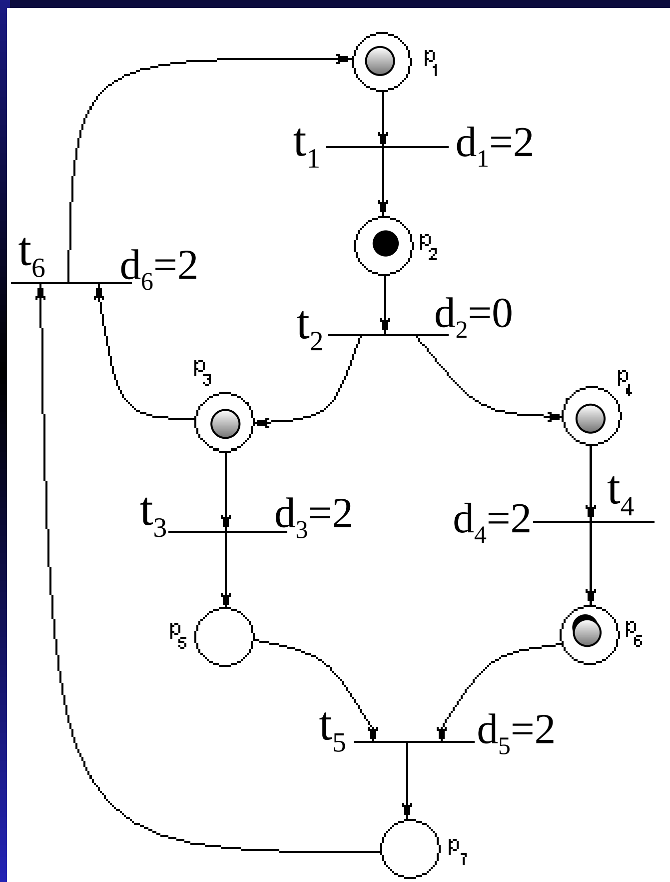
Redes de Petri com restrições de tempo
Bibliografia Consultada

- R. David, H. Alla, '*Du Grafcet aux Réseaux de Petri*', 2e édition, Ed. Hermes – Paris, 1992.
- J.-M. Proth, X. Xie, 'Les Réseaux de Petri pour la Conception de la Gestion des Systèmes de Prodution', Masson, Paris, 1994.

Redes de Petri com restrições de tempo
Bibliografia Consultada

- J. Cardoso, R. Valette, '*Redes de Petri*', Ed. da UFSC – Florianópolis-SC, 1997.
- J. L. Peterson, 'Petri Net Theory and the Modeling of Systems', Prentice-Hall, N.J., 1981.

RP-Pt – Regime Estacionário



$$\begin{bmatrix} 1(2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1(2) \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{t_1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1(0) \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{t_2/0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1(2) \\ 1(2) \\ 0 \\ 1(0) \\ 0 \end{bmatrix} \text{----}$$

- RP-Pt não funciona em velocidade própria

Fim